Задача_1

Визначити енергію W, що випромінюється за одну хвилину зі спостережувального вікна плавильної печі, якщо її температура $T = 1,2\,кК$. Площа вікна дорівнює $S = 8\,см^2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$
$S = 8\,см^2 = 8 \cdot 10^{-4}\,м^2$, $t = 1\,хв = 60\,с$, $T = 1,2\,кК = 1,2 \cdot 10^3\,K$

Потік енергії, яка випромінюється із спостережувального вікна плавильної печі, дорівнює

$$\Phi = \mathrm{R}_e S. \quad (1)$$

Енергетичну світність абсолютно чорного тіла, яким можна вважати це вікно, визначимо із закону Стефана – Больцмана

$$\mathrm{R}_e = \sigma T^4. \quad (2)$$

Енергія, що випромінюється піччю, дорівнює

$$W = \Phi_e t. \quad (3)$$

Підставивши співвідношення (2), (3) в (1), одержимо

$$W = \sigma T^4 S t.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо остаточно

$$W = 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot \left(1,2 \cdot 10^3\right)^4 \cdot 8 \cdot 10^{-4} \cdot 60 = 5643,5\,(Дж).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[W] = [\sigma][T]^4[S][t] = Вт/\left(м^2 \cdot K^4\right) \cdot K^4 \cdot м^2 \cdot с = Вт \cdot с = Дж.$$

Відповідь: $W = 5643,5\,Дж$.

Задача_2

Муфельна піч, яка споживає потужність $N = 1 кВт$, має отвір площею $S = 100 см^2$. Визначити частку η потужності, що розсіюється стінками печі, якщо температура її внутрішньої поверхні дорівнює $T = 1 кК$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$
$N = 1 кВт = 10^3\ Вт$, $S = 100 см^2 = 10^{-2} м^2$, $T = 1 кК = 10^3\ К$

Потік енергії, що випромінюється через отвір муфельної печі, дорівнює

$$\Phi_e = R_e S, \quad (1)$$

де R_e – енергетична світність отвору.

Отвір муфельної печі можна розглядати як абсолютно чорне тіло, звідси, скористувавшись законом Стефана – Больцмана, можна записати

$$R_e(T) = \sigma T^4. \quad (2)$$

Підставивши цей вираз у (1), одержимо

$$\Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Скориставшись законом збереження енергії, запишемо

$$\eta N = \Phi_e(T) = \sigma T^4 S.$$

Звідси

$$\eta = \frac{\sigma T^4 S}{N}.$$

Підставивши числові значення фізичних величин, одержимо відповідь:

$$\eta = \frac{5,67 \cdot 10^{-8} \cdot (10^3)^4 \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{10^3} = 0,57.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\eta] = \frac{[\sigma][T]^4[S]}{[N]} = ((Вт/м^2\ К^4) \cdot К^4 \cdot м^2)/Вт = 1.$$

Відповідь: $\eta = 0,57$.

Задача_3

Розрахувати справжню температуру T розжареної вольфрамової стрічки, якщо радіаційний пірометр показує температуру $T_р = 2{,}5\,кK$. Взяти, що поглинальна здатність для вольфраму не залежить від частоти випромінювання і дорівнює $a_T = 0{,}35$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T - ?$

$T_р = 2{,}5\ кK = 2{,}5 \cdot 10^3\ K,$

$a_T = 0{,}35$

Радіаційною температурою $T_р$ називають температуру, за якої енергетична світність R_e^* абсолютно чорного тіла дорівнює енергетичній світності R_e тіла, що досліджується за його справжньої температури T:

$$R_e^*(T_р) = R_e(T). \qquad (1)$$

Для визначення енергетичної світності чорного та сірого тіл скористаємося законом Стефана – Больцмана:

$$R_e^*(T_р) = \sigma T_р^4, \qquad (2)$$

$$R_e(T) = a\sigma T^4. \qquad (3)$$

Підставивши вирази (2), (3) у (1), одержимо

$$\sigma T_р^4 = a\sigma T^4. \qquad (4)$$

Із цього співвідношення справжня температура вольфрамової стрічки дорівнює

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{a}} T_р.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$T = \frac{1}{\sqrt[4]{0{,}35}} \cdot 2{,}5 \cdot 10^3 = 3250(K).$$

Відповідь: $T = 3250\,K$.

Задача_4_1

Мідну кульку діаметром $d=1,2\,см$ помістили у посудину, з якої повітря відкачане і температура стінок якої близька до абсолютного нуля. Початкова температура кульки $T_0=300\,K$. Через який час температура кульки зменшиться вдвічі, якщо вважати, що її поверхня є абсолютно чорною?

$t-?$
$d=1,2\,см=1,2\cdot10^{-2}\,м$, $T_0=300\,K$, $T=\frac{1}{2}T_0$, $\rho=8960\,кг/м^3$, $C=395\,Дж/(кг\cdot K)$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

За визначенням внутрішня енергія тіла дорівнює

$$U=mCT, \tag{1}$$

де m і C – маса та питома теплоємність тіла відповідно; T – його термодинамічна температура.

Маса тіла

$$m=\rho V, \tag{2}$$

де ρ – його густина; V – об'єм.

Об'єм кульки

$$V=\frac{1}{6}\pi d^3, \tag{3}$$

Задача_4_2

де d – діаметр кульки.

Тоді внутрішня енергія мідної кульки визначається співвідношенням

$$U = \frac{1}{6}\pi\rho C T d^3. \tag{4}$$

Енергія, яка випромінюється кулькою за одиницю часу, дорівнює

$$\Phi_e = \mathrm{R}_e S, \tag{5}$$

де R_e – енергетична світність поверхні кульки; $S = \pi d^2$ – площа поверхні кульки.

Оскільки поверхню кульки можна вважати абсолютно чорним тілом, то за законом Стефана – Больцмана енергетична світність дорівнює

$$\mathrm{R}_e = \sigma T^4, \tag{6}$$

де σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ Вт/\left(м^2 \cdot K^4\right)\right]$.

З урахуванням закону (6) вираз (5) набере вигляду

$$\Phi_e = \sigma T^4 \pi d^2. \tag{7}$$

Ураховуючи, що зміна внутрішньої енергії кульки за одиницю часу

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\pi\rho C d^3}{6} \cdot \frac{dT}{dt}, \tag{8}$$

повинна дорівнювати енергії випромінювання за той самий час із протилежним знаком, тобто

$$\frac{dU}{dt} = -\Phi_e. \tag{9}$$

Підставимо (7) і (8) у (9) та одержимо

$$\frac{\pi\rho C d^3}{6} \cdot \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 \pi d^2 \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -\frac{6\sigma T^4}{\rho C d}.$$

Поділимо змінні в одержаному виразі

Задача_4_3

$$\frac{dT}{T^4}=-\frac{6\sigma}{\rho Cd}dt$$

та виконаємо інтегрування цього виразу:

$$\int\limits_{T_0}^{T}\frac{dT}{T^4}=-\int\limits_0^t\frac{6\sigma}{\rho Cd}dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3}\frac{1}{T^3}\Bigg|_{T_0}^{T}=-\frac{6\sigma}{\rho Cd}t\Big|_0^t,$$

або

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_0^3}-\frac{1}{T^3}\right)=-\frac{6\sigma}{\rho Cd}t. \qquad (11)$$

Після нескладних перетворень знайдемо час, упродовж якого температура кульки зменшиться вдвічі:

$$t=\frac{\rho Cd}{18\sigma}\left(\frac{1}{T^3}-\frac{1}{T_0^3}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення та обчислень одержимо

$$t=\frac{8960\cdot 395\cdot 1{,}2\cdot 10^{-2}}{18\cdot 5{,}67\cdot 10^{-8}}\left(\frac{1}{150^3}-\frac{1}{300_0^3}\right)=1{,}08\cdot 10^4\,(c)=3\,(год).$$

Відповідь: $t=3\,год$.

Задача_5

Визначити, яку потужність потрібно підводити до мідної кульки діаметром $d = 2\,см$, щоб за температури довкілля $T_0 = -13\,^0C$ температура кульки дорівнювала $T = 17\,^0C$. Коефіцієнт чорноти міді $a_T = 0,6$. Прийняти, що теплові втрати обумовлені лише випромінюванням.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$N - ?$
$d = 2\,см = 2\cdot 10^{-2}\,м,$ $T_0 = -13^0 C = 260\,K,$ $T = 17^0 C = 290\,K,$ $a_T = 0,6$

Енергетична світність сірого тіла визначається за законом Стефана – Больцмана

$$\mathrm{R}_e = a_T \sigma T^4,$$

де a_T – коефіцієнт чорноти (поглинання) сірого тіла; T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана $\left[\sigma = 5,67\cdot 10^{-8}\,Bm/\left(м^2\cdot K^4\right)\right]$.

Енергетична світність тіла визначається потужністю випромінювання з одиниці площі його поверхні

$$\mathrm{R}_{eB} = \frac{N_B}{S},$$

тоді

$$N_B = \mathrm{R}_{eB} S = a_T \sigma T^4 S.$$

Енергетична поглинальна здатність сірого тіла

$$N_П = \mathrm{R}_{eП} S = a_T \sigma T_0^4 S.$$

Для того щоб температура тіла не змінювалася, до нього потрібно підводити потужність, яка дорівнює різниці потужностей випромінювання та поглинання:

$$N = N_B - N_П = a_T \sigma T^4 S - a_T \sigma T_0^4 S = a_T \sigma S\left(T^4 - T_0^4\right).$$

Площа поверхні кулі дорівнює

$$S = 4\pi r^2 = \pi d^2,$$

тоді

$$N = a_T \sigma \pi d^2 \left(T^4 - T_0^4\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення та обчислень одержимо

$$N = 0,6\cdot 5,67\cdot 10^{-8}\cdot 3,14\cdot\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2\left(290^4 - 260^4\right) = 0,107\,(Bm).$$

Відповідь: $N = 0,107\,Bm$.

Задача_6_1

Визначити силу струму, що проходить по вольфрамовому дроту, діаметр якого дорівнює $d = 0{,}8\,мм$. Дріт міститься у вакуумі, і температура дроту підтримується сталою, вона дорівнює $T = 2\,800^0 C$. Питомий опір дроту за цієї температури $\rho = 9{,}2 \cdot 10^{-5}\, Ом \cdot см$. Температура середовища, яке оточує дріт, $T_0 = 17^0 C$. Поверхню дроту вважати сірою з поглинальною здатністю $a_T = 0{,}343$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$I - ?$
$d = 0{,}8\,мм = 8 \cdot 10^{-4}\,м$,
$T_0 = 17^0 C = 290\,K$,
$T = 2\,800^0 C = 3\,073\,K$,
$a_T = 0{,}343$,
$\rho = 9{,}2 \cdot 10^{-5}\,Ом \cdot см =$
$= 9{,}2 \cdot 10^{-7}\,Ом \cdot м$

Потужність сталого струму за законом Джоуля – Ленца дорівнює

$$N = I^2 R, \tag{1}$$

де I – сила струму у провіднику; R – його електричний опір.

Знайдемо силу струму за законом Джоуля – Ленца (1):

$$I = \sqrt{N/R}. \tag{2}$$

Опір провідника циліндричної форми (дроту) дорівнює $R = \rho l / S_п$, де ρ – питомий опір провідника; l – його довжина; $S_п$ – площа перерізу дроту, вона дорівнює $S_п = \pi d^2/4$. З урахуванням цього вираз (2) набере вигляду

Задача_6_2

$$I = \sqrt{\frac{N\pi d^2}{4\rho l}}, \qquad (3)$$

З іншого боку, потужність, яку потрібно підводити до тіла для підтримання температури сталою, дорівнює (див. приклад 4.7):

$$N = a_T \sigma S\left(T^4 - T_0^4\right), \qquad (4)$$

де S – площа бокової поверхні циліндра, вона дорівнює $S = \pi d l$.

Підставимо значення площі у співвідношення (4) та одержимо

$$N = a_T \sigma \pi d l\left(T^4 - T_0^4\right). \qquad (5)$$

Підставимо одержане співвідношення (5) у вираз для сили струму (3):

$$I = \sqrt{\frac{a_T \sigma \pi d l\left(T^4 - T_0^4\right)\pi d^2}{4\rho l}} = \sqrt{\frac{a_T \sigma \pi^2 d^3\left(T^4 - T_0^4\right)}{4\rho}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в останнє співвідношення, проведемо обчислення та одержимо

$$I = \sqrt{\frac{0{,}343 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8} \cdot 3{,}14^2\left(8 \cdot 10^{-4}\right)^3\left(3073^4 - 290^4\right)}{4 \cdot 9{,}2 \cdot 10^{-7}}} = 48{,}8\ (A).$$

Відповідь: $I = 48{,}8\,A$.

Задача_7

Визначити величину сонячної сталої, тобто потік сонячної світлової енергії за одиницю часу через площу $S = 1 м^2$ на орбіті Землі. Вважати, що Сонце випромінює абсолютно чорне тіло. Температура поверхні Сонця $T = 5\,800 K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$P_c - ?$
$r = 6,95 \cdot 10^8 м,$ $R = 1,49 \cdot 10^{11} м,$ $T = 5\,800 K$

За визначенням

$$P_c = W/St = N/S. \tag{1}$$

Енергетична світність чорного тіла визначається за законом Стефана – Больцмана

$$R_e = \sigma T^4, \tag{2}$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана: $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}\,\text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)$; N – потужність випромінювання.

Потужність, яка випромінюється з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = R_e S. \tag{3}$$

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (3) та одержимо

$$N = 4\pi R_e r^2 = 4\pi\sigma r^2 T^4. \tag{4}$$

Інтенсивність світла послаблюється обернено пропорційно квадрату відстані від джерела випромінювання, тобто сонячна стала буде дорівнювати

$$P_c = \frac{4\pi r^2 \sigma T^4}{4\pi R^2} = \frac{r^2 \sigma T^4}{R^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та одержимо величину сонячної сталої

$$P_c = \frac{7^2 \cdot 10^{16}\, 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot 5800^4}{1,4^2 \cdot 10^{22}} = 1,6 \cdot 10^3 \left(Вт/м^2\right) = 1,6\left(кВт/м^2\right).$$

Відповідь: $P_c = 1,6\ кВт/м^2$.

Задача_8_1

Температура поверхні Сонця $T_0 = 5\,500\ K$. Оцінити температуру Землі за умови, що вона перебуває у стані теплової рівноваги. Взяти, що поглинальна здатність Сонця і Землі дорівнює одиниці.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T - ?$
$r = 6{,}95 \cdot 10^8\ м,$ $R = 1{,}49 \cdot 10^{11}\ м,$ $T_0 = 5500\,K$

Оскільки за умовою задачі поглинальні здатності Сонця та Землі дорівнюють одиниці, то енергетичні світності Сонця і Землі можна визначати за законом Стефана – Больцмана

$$\mathrm{R}_{eC} = \sigma T_0^4, \tag{1}$$

де T – термодинамічна температура; σ – стала Стефана – Больцмана: $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт}/\left(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4\right)$.

Потужність, яка випромінюється з усієї поверхні Сонця, дорівнює

$$N = \mathrm{R}_{eC}\, S, \tag{2}$$

де S – площа поверхні Сонця.

Вважаючи Сонце кулею, підставимо площу його поверхні $S = 4\pi r^2$ (r – радіус Сонця) у вираз (2) та одержимо

$$N = 4\pi \mathrm{R}_{eC}\, r^2 = 4\pi\sigma r^2 T_0^4. \tag{3}$$

N – потужність випромінювання.

Потік енергії випромінювання Сонця на одиницю тілесного кута дорівнює

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{N}{4\pi} = \sigma r^2 T_0^4. \tag{4}$$

Та частина потоку енергії, яка попадає у тілесний кут,

$$\Delta\Omega = \frac{\pi R_з^2}{R^2}, \tag{5}$$

де $R_з$ – радіус Землі; R – її відстань від Сонця.

Задача_8_2

Таким чином, енергія випромінювання Сонця, яка поглинається Землею за одиницю часу, визначається співвідношенням

$$N' = \frac{dN}{d\Omega}\Delta\Omega = \frac{\pi\sigma r^2 R_з^2 T_0^4}{R^2}. \tag{6}$$

Енергія випромінювання Землі за одиницю часу дорівнює

$$N'' = 4\pi R_з^2 \mathrm{R}_{ез} = 4\pi\sigma R_з^2 T^4, \tag{7}$$

де $\mathrm{R}_{ез}$ – випромінювальна здатність Землі; T – температура її поверхні.

Оскільки Земля перебуває у тепловій рівновазі з довкіллям, то вирази (6) і (7) можна прирівняти. Тоді

$$\frac{\pi\sigma r^2 R_з^2 T_0^4}{R^2} = 4\pi\sigma R_з^2 T^4 \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{r^2 T_0^4}{4R^2}} = T_0\sqrt{\frac{r}{2R}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення та одержимо

$$T = 5500\sqrt{\frac{6,95\cdot 10^8}{2\cdot 1,49\cdot 10^{11}}} = 266\,(K).$$

Відповідь: $T = 266\ K$.

Задача_9

Як і в скільки разів зміниться енергетична світність абсолютно чорного тіла, якщо максимум енергії випромінювання переміститься з червоної межі видимого спектра $(\lambda_{m1} = 780\,нм)$ на фіолетову $(\lambda_{m2} = 390\,нм)$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_{e1}/R_{e2} - ?$
$\lambda_{m1} = 780\,нм = 7{,}8\cdot 10^{-7}\,м,$
$\lambda_{m2} = 390\,нм = 3{,}9\cdot 10^{-7}\,м$

Енергетична світність абсолютно чорного тіла визначається рівнянням Стефана – Больцмана:

$$R_e = \sigma T^4. \qquad (1)$$

Для знаходження температури тіла скористаємося законом зміщення Віна:

$$\lambda_m = \frac{b}{T} \Rightarrow T = \frac{b}{\lambda_m}, \qquad (2)$$

де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна: $b = 2{,}9\cdot 10^{-3}\,м\cdot K$.

Підставивши вираз (2) в (1), одержимо

$$R_e = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_m}\right)^4. \qquad (3)$$

Для різних довжин енергетичні світності визначаються такими виразами:

$$R_{e1} = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{m1}}\right)^4, \qquad (4)$$

$$R_{e2} = \sigma\left(\frac{b}{\lambda_{m2}}\right)^4. \qquad (5)$$

Поділивши рівняння (5) на (4), одержимо

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left(\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}}\right)^4. \qquad (6)$$

Підставивши у вираз (7) числові значення величин, одержимо

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left(\frac{7{,}8\cdot 10^{-7}}{3{,}9\cdot 10^{-7}}\right)^4 = 16.$$

Відповідь: $R_{e2}/R_{e1} = 16$.

Задача_10

ПРИКЛАД 4.12

При збільшенні термодинамічної температури T абсолютно чорного тіла удвічі довжина хвилі λ_m, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, зменшилася на $\Delta\lambda = 400\,нм$. Визначити початкову і кінцеву температури T_1 і T_2.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T_1 - ?\ T_2 - ?$
$\Delta\lambda = 400\,нм = 4\cdot10^{-7}\,м$

Відповідно до закону зміщення Віна довжина, на яку припадає максимум випромінювальної здатності, дорівнює

$$\lambda_m = \frac{b}{T}. \qquad (1)$$

Для різних довжин хвиль цей вираз запишемо у вигляді

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1} \quad і \quad \lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \qquad (3)$$

За умовою задачі

$$\Delta\lambda = \lambda_{m1} - \lambda_{m2} = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{T_2}. \qquad (4)$$

Урахуємо, що $T_2 = 2T_1$, тоді одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{b}{T_1} - \frac{b}{2T_1} = \frac{b}{2T_1}.$$

Звідси

$$T_1 = \frac{b}{2\Delta\lambda} \quad та \quad T_2 = 2T_1 = \frac{b}{\Delta\lambda}.$$

Підставивши в отримані вирази числові значення фізичних величин, одержимо

$$T_1 = \frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{2\cdot400\cdot10^{-9}} = 3{,}625\cdot10^3\,(K) \text{ та } T_2 = 2T_1 = 7{,}25\cdot10^3\,(K).$$

Перевіримо розмірності одиниць одержаної величини:

$$T = \frac{[b]}{[\lambda]} = м\cdot K/м = K.$$

Відповідь: $T_1 = 3{,}625\cdot10^3\,K$; $T_2 = 7{,}25\cdot10^3\,K$.

Задача_11_1

Площа, обмежена графіком спектральної густини енергетичної світності чорного тіла при переході від термодинамічної температури T_1 до температури T_2, зменшилася у 5 разів. Визначити, як зміниться при цьому довжина хвилі, що відповідає максимуму спектральної густини енергетичної світності чорного тіла.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda_{m1}/\lambda_{m2} - ?$

$\dfrac{S_2}{S_1} = 5$

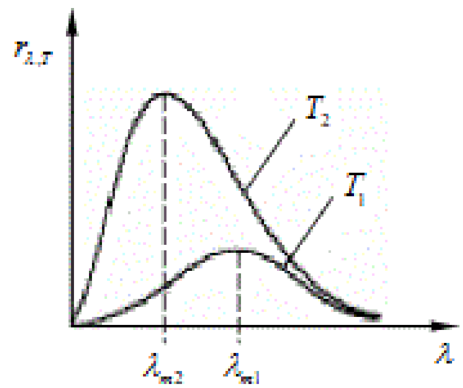


Рисунок 4.4

Площа, обмежена графіком спектральної густини енергетичної світності $r_{\lambda,T}$ чорного тіла, дорівнює за температури T_1

$$S_1 = R_{e1} = \int_0^\infty r_{\lambda,T_1}\, d\lambda, \qquad (1)$$

а за температури T_2

$$S_2 = R_{e2} = \int_0^\infty r_{\lambda,T_2}\, d\lambda. \qquad (2)$$

Задача_11_2

За законом Стефана – Больцмана

$$R_{e1} = \sigma T_1^4 \quad і \quad R_{e2} = \sigma T_2^4. \qquad (3)$$

Визначимо з рівнянь (1), (2) і (3) відношення температур:

$$\frac{T_2}{T_1} = \sqrt[4]{\frac{R_{e2}}{R_{e1}}} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}}. \qquad (3$$

Закон зміщення Віна дозволяє визначити довжину хвилі λ_m, на яку припадає максимум енергії випромінювання:

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де b – стала закону зміщення Віна: $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\ м \cdot К$.

Тоді

$$\lambda_{m1} = \frac{b}{T_1} \quad і \quad \lambda_{m2} = \frac{b}{T_2}. \qquad (4)$$

Звідки з урахуванням (3) одержимо

$$\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \frac{T_2}{T_1} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Після підставлення числових даних в одержаний вираз випливає

$$\frac{\lambda_{m1}}{\lambda_{m2}} = \sqrt[4]{5} = 1{,}49.$$

Відповідь: зменшиться у 1,49 раза.

Задача_12

Перетворити формулу Планка для об'ємної спектральної густини випромінювання u_ω від змінної ω до змінних ν (лінійна частота) і λ (довжина хвилі).

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Енергію теплового випромінювання абсолютно чорного тіла в інтервалі частот $[\omega, \omega + d\omega]$ можна подати через об'ємну спектральну густину випромінювання

$$dW_\omega = u_\omega d\omega = u_\nu d\nu = u_\lambda d\lambda,$$

де u_ω визначається з формули Планка

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1}.$$

Величини ω, ν і λ пов'язані співвідношеннями

$$\omega = 2\pi\nu, \quad d\omega = 2\pi d\nu \text{ і } \omega = \frac{2\pi c}{\lambda}, \quad d\omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda,$$

тобто додатному значенню $d\omega$ відповідає від'ємне значення $d\lambda < 0$.

Таким чином, вираз для dW можна переписати відповідно через $d\nu$ і $d\lambda$:

$$dW = \frac{\hbar(2\pi\nu)^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right) - 1} 2\pi d\nu$$

і

$$dW = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^3 \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1} \frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda.$$

Звідки випливає

$$u_\nu = \frac{16\pi^2\hbar}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right) - 1}, \quad u_\lambda = \frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}\right) - 1}.$$

Задача_13

Лазер у безперервному режимі випромінює світло з довжиною хвилі $\lambda = 600\,нм$ при потужності $P = 40\,мВт$. Скільки фотонів він випромінює за $t = 1\,с$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$N-?$
$\lambda = 600\,нм = 6\cdot 10^{-7}\,м,$ $P = 40\,мВт = 0,4\,Вт,$ $t = 1\,с$

Енергія фотона

$$W_Ф = \frac{hc}{\lambda},$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина світлової хвилі.

Енергія лазерного випромінювання за час t дорівнює

$$W = Pt,$$

тоді кількість фотонів, які випромінюються за час t лазером,

$$N = \frac{W}{W_Ф} = \frac{Pt\lambda}{hc}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$N = \frac{0,4\cdot 6\cdot 10^{-7}}{6,63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}} = 1,2\cdot 10^{18}.$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$N = \frac{[P][t][\lambda]}{[h][c]} = \frac{Вт\cdot с\cdot м}{Дж\cdot с\cdot \frac{м}{с}} = \frac{Дж\cdot с\cdot м}{Дж\cdot с\cdot м} = 1.$$

Відповідь: $N = 1,2\cdot 10^{18}$.

Задача_14

Визначити, з якою швидкістю повинен рухатися електрон, щоб його імпульс дорівнював імпульсу фотона, довжина хвилі якого дорівнює $\lambda = 2\,нм$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n - ?$
$\lambda = 2\,нм = 2\cdot 10^{-12}\,м$,
$h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\,Дж\cdot с$,
$c = 3\cdot 10^{8}\,м/с$,
$m_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\,кг$

Енергія фотона дорівнює

$$W = \frac{hc}{\lambda},$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі.

Енергія спокою електрона дорівнює

$$W_0 = m_0 c^2,$$

де m_0 – маса спокою електрона.

Визначимо числові значення енергії фотона та електрона:

$$W = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{2\cdot 10^{-12}} = 9{,}9\cdot 10^{-14}\,(Дж) = 0{,}62\,(МеВ),$$

$$W_0 = 9{,}1\cdot 10^{-31}\left(3\cdot 10^{8}\right)^2 = 8{,}2\cdot 10^{-14}\,[Дж] = 0{,}51\,(МеВ).$$

Бачимо, що енергія фотона того самого порядку, що й енергія спокою електрона. Це означає, що потрібно використовувати релятивістську формулу для імпульсу, а саме

$$p_e = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Імпульс фотона дорівнює

$$p = \frac{h}{\lambda},$$

тоді

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{h}{\lambda}.$$

Виконаємо перетворення та визначимо швидкість електрона:

$$m^2 v^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}\left(1 - v^2/c^2\right) \Rightarrow m^2 v^2 + \frac{h^2 v^2}{\lambda^2 c^2} = \frac{h^2}{\lambda^2} \Rightarrow v^2\left(m^2\lambda^2 c^2 + h^2\right) = h^2 c^2,$$

$$v = \frac{hc}{\sqrt{m^2\lambda^2 c^2 + h^2}}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та проведемо обчислення:

$$v = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}}{\sqrt{\left(9{,}1\cdot 10^{-31} 2\cdot 10^{-12} 3\cdot 10^{8}\right)^2 + \left(6{,}63\cdot 10^{-34}\right)^2}} = 0{,}77c = 2{,}31\cdot 10^{8}\,(м/с).$$

Відповідь: $v = 2{,}31\cdot 10^{8}\,м/с$.

Задача_15

Використовуючи формулу Планка, визначити спектральну густину потоку випромінювання одиниці поверхні чорного тіла, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta\lambda = 5\,нм$ біля максимуму спектральної густини енергетичної світності. Температура чорного тіла дорівнює $T = 2\,500\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) - ?$
$\Delta\lambda = 5\,нм = 5 \cdot 10^{-9}\,м,$ $T = 2\,500K$

Формула Планка для спектральної густини потоку випромінювання

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}.$$

де $r_{\lambda,T}$ – випромінювальна здатність чорного тіла; λ – довжина хвилі; c – швидкість світла у вакуумі; k – стала Больцмана; T – термодинамічна температура; h – стала Планка.

Замінимо довжину хвилі, використовуючи закон зміщення Віна: $\lambda = b/T$, де λ_m – довжина хвилі, на яку припадає максимум енергії випромінювання; b – стала закону зміщення Віна: $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,м \cdot K$.

Тоді спектральна густина потоку випромінювання одиниці поверхні чорного тіла, яка припадає на вузький інтервал довжин хвиль $\Delta\lambda = 5\,нм$ біля максимуму спектральної густини енергетичної світності, дорівнює

$$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = \frac{2\pi hc^2T^5}{b^5}\frac{\Delta\lambda}{e^{hc/(bk)} - 1}.$$

Після підставлення числових даних фізичних величин в одержаний вираз випливає

$$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 9 \cdot 10^{16} \cdot 2{,}5^5 \cdot 10^{15}}{2{,}9 \cdot 10^{-15}} \cdot \frac{5 \cdot 10^{-9}}{e^{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}/(2{,}9\cdot10^{-3}\cdot1{,}38\cdot10^{-23})} - 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot \pi \cdot 6{,}63 \cdot 9 \cdot 2{,}5^5 \cdot 10^3}{2{,}9}\frac{5}{e^{4{,}97} - 1} = 4{,}41 \cdot 10^5\,(Вт/м^2) = 441\,(кВт/м^2).$$

Відповідь: $(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = 441\,кВт/м^2$.

Задача_16

Потік енергії, що випромінюється електричною лампою, дорівнює $\Phi_e = 600\,Вт$. На відстані $r = 1\ м$ від лампи перпендикулярно до падаючих променів розміщене кругле плоске дзеркало діаметром $d = 2\ см$. Визначити силу світлового тиску на дзеркальце за умови, що воно повністю відбиває все випромінювання, яке на нього падає. Вважати, що випромінювання лампи однакове в усіх напрямках.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$F - ?$
$\Phi_e = 600\,Вт,$ $r = 1\,м,$ $d = 2\,см = 0{,}02\ м$

За умовою задачі $d \ll r$, тому значення тілесного кута, в якому випромінювання падає на дзеркальце, можна визначити з виразу $\Omega_s = S/r^2$. Значення повного тілесного кута дорівнює $\Omega_0 = 4\pi$. У цьому куті випромінюється весь потік енергії Φ_e. Таким чином, частка потоку енергії, що випромінюється в тілесному куті Ω_s, визначається виразом

$$\Phi_s = \frac{\Phi_e \Omega_s}{\Omega_0} = \frac{\Phi_e S}{4\pi r^2}.$$

Площа поверхні дзеркала дорівнює $S = \pi d^2/4$,

отже,

$$\Phi_s = \frac{\Phi_e \pi d^2}{16\pi r^2} = \frac{\Phi_e d^2}{16 r^2}.$$

Для визначення тиску світла використаємо вираз

$$p = \frac{I}{c}(1+\rho),$$

де $I = \Phi_s/S$ – інтенсивність світла; ρ – коефіцієнт відбивання, для ідеального дзеркала $\rho = 1$.

З урахуванням вищезазначених виразів сила світлового тиску дорівнює

$$F = pS = \frac{I}{c}(1+\rho)S = \frac{\Phi_s}{c}(1+\rho) = 2\frac{\Phi_e d^2}{16 r^2 c} = \frac{\Phi_e d^2}{8 c r^2}.$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин та одержимо

$$F = \frac{600 \cdot 0{,}02^2}{8 \cdot 3 \cdot 10^8} = 0{,}1 \cdot 10^{-9}\,(Н) = 0{,}1\,(нН).$$

Відповідь: $F = 0{,}1\ нН$.

Задача_17_1

Короткий імпульс світла, енергія якого $W = 7{,}5\,Дж$, падає на дзеркальну пластинку з коефіцієнтом відбивання $\rho = 0{,}6$. Кут падіння $\alpha = 60^0$. Визначити за допомогою корпускулярних уявлень, який імпульс отримає пластинка.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$p - ?$

$W = 7{,}5\,Дж,$
$\rho = 0{,}6,$
$\alpha = 60^0$

Імпульс фотона

$$p_ф = \frac{\hbar\omega}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda},$$

де h і $\hbar$ – стала Планка та стала Планка – Дірака; c – швидкість світла у вакуумі; ω та ν – циклічна частота та частота відповідного випромінювання.

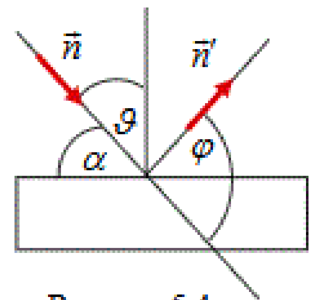


Рисунок 5.4

Повний імпульс фотонів, що налітають на пластинку, дорівнює

$$\vec{p} = Np_ф\vec{n} = N\frac{\hbar\omega}{c}\vec{n},$$

де N – кількість фотонів у імпульсі світла; $\vec{n}$ – одиничний вектор у напрямку руху фотонів, що налітають на пластинку.

Енергія імпульсу світла дорівнює $W = N\hbar\omega$, тоді імпульс налітаючих фотонів

$$\vec{p} = N\frac{W}{c}\vec{n}.$$

Задача_17_2

Від дзеркальної пластинки з коефіцієнтом відбивання ρ відіб'ється $N' = \rho N$ фотонів. Їх загальний імпульс визначається виразом

$$\vec{p}' = N'\frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}' = \rho N\frac{\hbar\omega}{c}\vec{n}' = \rho\frac{W}{c}\vec{n}',$$

де $\vec{n}'$ – одиничний вектор у напрямку руху відбитих фотонів. Імпульс, що передається пластинці, дорівнює

$$\Delta\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}' = \frac{W}{c}\left(\vec{n} - \rho\vec{n}'\right).$$

Модуль імпульсу, що передається пластинці, визначимо підносячи вираз (3) до квадрата:

$$\left|\Delta\vec{p}\right|^2 = \frac{W^2}{c^2}\left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos\varphi\right),$$

де φ – кут між векторами $\vec{n}$ і $\vec{n}'$.

Із рисунка 5.4 $\varphi = \pi - 2\vartheta = \pi - 2\left(\pi/2 - \alpha\right) = 2\alpha$, тоді модуль імпульсу, що передається пластинці, дорівнює

$$\Delta p = \frac{W}{c}\sqrt{\left(1 + \rho^2 - 2\rho\cos 2\alpha\right)}.$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин та одержимо

$$\Delta p = \frac{7{,}5}{3\cdot 10^8}\sqrt{\left(1 + 0{,}6^2 - 2\cdot 0{,}6\cos 120^0\right)} = 3{,}5\cdot 10^{-8}\left(H\cdot c\right) = 35\left(нH\cdot c\right).$$

Відповідь: $\Delta p = 35\,нH\cdot c$.

Задача_18

Визначити

частоту ν та довжину хвилі λ у вакуумі випромінювання, маса фотонів якого дорівнює масі електрона $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано:
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг
ν, λ - ?

Розв'язання

Відповідь дають формули **(19.2)** і **(19.2а)**, згідно з якими

$$\nu = \frac{mc^2}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{mc}.$$

Підставивши задане значення m та табличні константи $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с, $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, отримаємо:

$$\nu = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16}}{6,62 \cdot 10^{-34}} \approx 1,24 \cdot 10^{20} \text{ Гц},$$

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 2,42 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 2{,}42 \text{ пм}.$$

Отримані числа відповідають найбільш високочастотній (короткохвилевій) ділянці електромагнітного спектра – гамма-випромінюванню.

Задача_19

У деякій речовині довжина хвилі світла становить $\lambda = 414$ нм при енергії фотонів $E = 2{,}0$ еВ (1 еВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Визначити

показник заломлення n цієї речовини.

Дано:
$\lambda = 414$ нм $= 4{,}14 \cdot 10^{-7}$ м
$E = 2{,}0$ еВ $= 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж
n - ?

Розв'язання

Енергія фотона визначає довжину світлової хвилі λ_0 у вакуумі (формула **(19.1б)**):

$$E = \frac{hc}{\lambda_0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_0 = \frac{hc}{E}. \qquad (1)$$

У середовищі довжина світлової хвилі зменшується згідно з формулою **(16.4)**, отже

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda}.$$

Підставивши сюди вираз **(1)**, дістанемо відповідь:

$$n = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4,14 \cdot 10^{-7} \cdot 3,2 \cdot 10^{-19}} = 1{,}5.$$

Задача_20

Лазер випромінює в імпульсі $N = 2 \cdot 10^{19}$ фотонів з довжиною хвилі $\lambda = 694$ нм.

Визначити

середню потужність випромінювання лазера P, якщо тривалість імпульсу $\tau = 2$ мс.

Дано:
$N = 2 \cdot 10^{19}$
$\lambda = 694$ нм $= 6{,}94 \cdot 10^{-7}$ м
$\tau = 2$ мс $= 2 \cdot 10^{-3}$ с

P - ?

Розв'язання

Енергія одного фотона, випроміненого лазером (формула (19.1б)),

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda},$$

де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – стала Планка, $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с – швидкість світла.

Загальна енергія лазерного імпульсу

$$W = N\varepsilon = N\frac{hc}{\lambda}.$$

Середня потужність імпульсу

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{Nhc}{\tau\lambda}.$$

Підставивши у цю формулу числові значення величин, одержимо відповідь:

$$P = 2,86 \cdot 10^{-3} \text{ Вт} = 2{,}86 \text{ мВт}.$$

Задача_21

Лазер випромінює імпульси з енергією E = 10 Дж і тривалістю $\tau = 10$ мкс. Промінь від цього лазера, що нормально падає на дзеркальну поверхню, сфокусований в цятку діаметром d = 5 мкм.

Визначити

середній тиск P, що його створює лазерний імпульс на поверхню.

Дано:
E = 10 Дж
τ = 10 мкс = 10^{-5} с
d = 5 мкм = $5 \cdot 10^{-6}$ м

P - ?

Розв'язання

Згідно з умовою задачі шуканий тиск визначається формулою (19.10б):

$$P = \frac{2I}{c}, \qquad \textbf{(1)}$$

де I – середня інтенсивність лазерного імпульсу, c – швидкість світла.

Відповідно до означення **(15.11)**

$$I = \frac{E}{\tau S}\frac{4I}{\pi d^2 \tau},$$

де $S = \pi d^2/4$ – площа поверхні, на яку сфокусоване випромінювання.

Підставивши вираз I у формулу **(1)**, дістанемо

$$P = \frac{8E}{\pi c d^2 \tau}.$$

Обчислення дають:

$$P = 3,4 \cdot 10^8 \text{ Па}.$$

Отримана величина $n \approx 3000$ разів перевищує атмосферний тиск. Тому за допомогою сфокусованого лазерного променя можна робити отвори у найтвердіших матеріалах, а також використовувати його як «лазерний скальпель» у хірургії.

Задача_22

При опроміненні металу світлом кінетична енергія фотоелектронів виявилося W = 2,0 еВ (1 еВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж).

Визначити

частку енергії (k %) поглинутого фотона, яка витрачається на роботу виходу, якщо червона межа фотоефекту з цього металу $\lambda = 278$ нм.

Дано:	**Розв'язання**
W = 2,0 еВ = $3{,}2 \cdot 10^{-19}$ Дж $\lambda = 278$ нм	Енергія поглинутого фотона E розподіляється між роботою виходу A та кінетичною енергією фотоелектрона W у відповідності до закону збереження енергії: $E = A + W$.
k - ?	Шукана частка енергії

$$k = \frac{A}{E} = \frac{A}{A+W} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{1+W/A}. \qquad (1)$$

Згідно з формулою **(19.8а)**

$$A = \frac{hc}{\lambda_9}.$$

Підставивши це значення у вираз **(1)**, дістанемо

$$k = \frac{1}{1+\lambda W/(hc)}.$$

Підставивши сюди числові значення величин, отримаємо відповідь

$$k = 0{,}69 = 69\ \%.$$

Задача_23

На металеву пластину падає монохроматичний пучок світла з частотою $\nu = 7{,}3 \cdot 10^{14}$ *Гц*. Червона межа фотоефекту для цього матеріалу дорівнює $\lambda_0 = 560$ *нм*. Визначити максимальну швидкість v_{max} фотоелектронів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$v_{max} - ?$
$\nu = 7{,}3 \cdot 10^{14}$ *Гц*, $\lambda_0 = 560\,нм = 5{,}6 \cdot 10^{-7}$ *м*, $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ *кг*

Для визначення максимальної швидкості фотоелектронів скористаємося рівнянням Ейнштейна для фотоефекту

$$h\nu = A + \frac{mv_{max}^2}{2}. \qquad (1)$$

Робота виходу фотоелектронів із металу дорівнює

$$A = hc/\lambda_0. \qquad (2)$$

Підставимо вираз (2) в (1):

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} + \frac{mv_{max}^2}{2}. \qquad (3)$$

Розв'язавши це рівняння відносно швидкості, одержимо v_{max}:

$$v_{max}^2 = \frac{2h}{m}\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right) \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2h}{m}\left(\nu - \frac{c}{\lambda_0}\right)}.$$

Підставивши числові значення фізичних величин в останнє співвідношення, одержимо відповідь

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}(7{,}3 \cdot 10^{14} - \frac{3 \cdot 10^8}{560 \cdot 10^{-9}})} = 5{,}32 \cdot 10^5 \ (м/с).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[v] = \sqrt{\frac{[h]}{[m]}\left([\nu] - \frac{[c]}{[\lambda]}\right)} = \sqrt{\frac{Дж \cdot с}{кг \cdot с}} = \sqrt{\frac{Н \cdot м \cdot с}{кг \cdot с}} = \sqrt{\frac{кг \cdot м^2}{кг \cdot с^2}} = \frac{м}{с}.$$

Відповідь: $v_{max} = 5{,}32 \cdot 10^5$ *м/с*.

Задача_24

Фотон з енергією $W_\Phi = 10 eB$ падає на срібну пластинку і викликає фотоефект. Визначити імпульс p, одержаний пластиною, вважаючи, що напрями руху фотона й фотоелектрона лежать на одній прямій, перпендикулярній до поверхні пластини.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$p - ?$
$W_\Phi = 10 eB = 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ *Дж*

При падінні фотона на срібну пластинку з неї вибивається фотоелектрон. Імпульс, що передається пластинці, складається з імпульсу фотоелектрона та імпульсу фотона:

$$p = p_\phi + p_e. \qquad (1)$$

Імпульс фотона дорівнює

$$p_\Phi = \frac{W_\Phi}{c}, \qquad (2)$$

де c – швидкість світла.

Імпульс електрона визначається співвідношенням

$$p_e = m\text{v}_e. \qquad (3)$$

Швидкість фотоелектрона визначимо з рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$W_\Phi = A + \frac{m\text{v}_e^2}{2} \Rightarrow \text{v}_e = \sqrt{\frac{2(W - A)}{m}}. \qquad (4)$$

Підставивши вираз (4) в (3), одержимо

$$p_e = m\sqrt{\frac{2(W - A)}{m}} = \sqrt{2m(W - A)}. \qquad (5)$$

Тепер підставимо співвідношення (2) і (5) в (1):

$$p = \frac{W_\Phi}{c} + \sqrt{2m(W - A)}. \qquad (6)$$

Після підставлення числових значень величин одержимо відповідь

$$p = \frac{10 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}}{3 \cdot 10^8} + \sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-19}(10 \cdot 1{,}6 - 7{,}5)} = 1{,}24 \cdot 10^{-25}\,(кг \cdot м/с).$$

Зробимо перевірку розмірності фізичної величини:

$$[p] = \frac{[W]}{[c]} + \sqrt{[m][W]} = \frac{Дж}{м/с} + \sqrt{кг \cdot Дж} = \frac{Н \cdot м \cdot с}{м} + \sqrt{кг \cdot Н \cdot м} =$$

$$= \frac{кг \cdot м \cdot с}{с^2} + \sqrt{\frac{кг \cdot кг \cdot м \cdot м}{с^2}} = \frac{кг \cdot м}{с} + \frac{кг \cdot м}{с} = \frac{кг \cdot м}{с}.$$

Відповідь: $p = 1{,}24 \cdot 10^{-25}\, кг \cdot м/с$.

Задача_25

Яку частину енергії фотона становить енергія, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, якщо червона межа фотоефекту для матеріалу фотокатода дорівнює $\lambda_0 = 540\,нм$. Кінетична енергія фотоелектронів дорівнює $W_к = 0,5\,еВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$
$\lambda_0 = 540\,нм = 5,4 \cdot 10^{-7}\,м,$ $W_к = 0,5\,еВ = 8 \cdot 10^{-20}\,Дж,$ $h = 6,63 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с,$ $c = 3 \cdot 10^{8}\,м/с$

Формула Ейнштейна для фотоефекта

$$W_Ф = h\nu = A + W_{к,\max}, \tag{1}$$

де $W_Ф = h\nu$ – енергія фотона, який падає на поверхню металу; де h – стала Планка; A – робота виходу електрона з металу; $W_{к,\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Довжина хвилі червоної межі дорівнює $\lambda_0 = hc/A$, звідси визначимо роботу виходу електрона $A = hc/\lambda_0$ та підставимо у формулу (1):

$$W_Ф = \frac{hc}{\lambda_0} + W_к. \tag{2}$$

Частина енергії фотона, витрачена на виконання роботи виходу електронів із фотокатода, дорівнює

$$\eta = \frac{A}{W_Ф} = \frac{hc}{\lambda_0\left(hc/\lambda_0 + W_к\right)}. \tag{3}$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо остаточно

$$\eta = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}/5,4 \cdot 10^{-7}}{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}/5,4 \cdot 10^{-7} + 8 \cdot 10^{-20}} = \frac{3,68 \cdot 10^{-19}}{3,68 \cdot 10^{-19} + 0,8 \cdot 10^{-19}} = 0,82.$$

Відповідь: $\eta = 82\,\%$.

Задача_26

Визначити максимальну швидкість електрона, вибитого з поверхні металу γ-квантом з енергією $W_Ф = 1,53\, МеВ$.

$\mathrm{v} - ?$
$W_0 = 0,511\, МеВ = 8,18\cdot 10^{-12}$ *Дж*,
$W_Ф = 1,53\, МеВ = 2,45\cdot 10^{-13}$ *Дж*,
$c = 3\cdot 10^8\, м/с$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Формула Ейнштейна для фотоефекту

$$W_Ф = h\nu = A + W_{к,\max}, \qquad (1)$$

де $W_Ф = h\nu$ – енергія фотона, який падає на поверхню металу; де h – стала Планка; A – робота виходу електрона з металу; $W_{к,\max}$ – максимальна кінетична енергія фотоелектрона.

Оскільки робота виходу є набагато меншою за енергію γ-кванта $A \ll W_Ф$, то електрон буде релятивістським і його кінетичну енергію можна визначити зі співвідношення

$$W_к = W_0\left(\frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} - 1\right) = \frac{W_0}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} - W_0,$$

де W_0 – енергія спокою електрона; c – швидкість світла у вакуумі.

Виконаємо нескладні перетворення:

$$W_к + W_0 = \frac{W_0}{\sqrt{1-\mathrm{v}^2/c^2}} \Rightarrow 1 - \frac{\mathrm{v}^2}{c^2} = \left(\frac{W_0}{W_к + W_0}\right)^2,$$

$$\mathrm{v} = c\sqrt{1 - \left(\frac{W_0}{W_к + W_0}\right)^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо обчислення:

$$\mathrm{v} = 3\cdot 10^8\sqrt{1 - \left(\frac{0,511}{1,53 + 0,511}\right)^2} = 2,9\cdot 10^8\,(м/с).$$

Відповідь: $\mathrm{v} = 2,9\cdot 10^8\, м/с$.

Задача_27

При почерговому опроміненні катода фотоелемента світлом з довжинами хвилі λ і $n\lambda$ виявилося, що затримуючі напруги відрізняються в n^2 разів.

Визначити

довжину хвилі червоної межі фотоефекту λ_0.

Дано:
$\lambda_1 = \lambda$
$\lambda_2 = n\lambda$
$U_1/U_2 = n^2$
λ_0 - ?

Розв'язання

Енергія фотона та робота виходу визначаються через довжини хвиль опромінюючого світла та червоної межі фотоефекту виразами **(19.1б)** та **(19.8а)**. Кінетична енергія фотоелектронів визначається затримуючою напругою згідно із співвідношенням **(19.6)**. Тому рівняння Ейнштейна **(19.7)** для вказаних двох випадків опромінення набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{hc}{\lambda} &= \frac{hc}{\lambda_0} + eU_1, \\ \frac{hc}{n\lambda} &= \frac{hc}{\lambda_0} + e\frac{U_1}{n^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) &= eU_1 \\ hc\left(\frac{1}{n\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) &= \frac{eU_1}{n^2}. \end{aligned} \qquad (1)$$

У другому рівнянні враховано, що при збільшенні довжини хвилі енергія фотона зменшується, тому затримуюча напруга також зменшується. Поділивши ліві та праві частини рівнянь **(1)**, після нескладних викладок отримаємо:

$$\lambda_0 = (n+1)\lambda.$$

Задача_28

За певних умов опромінення катода струм у фотоелементі припиняється при зворотній напрузі $U_з$ = 2 В.

Визначити

максимальну швидкість v, з якою електрони будуть потрапляти на анод, якщо до фотоелемента прикласти пряму напругу $U_п = U_з$.

Дано:
$U_з$ = 2 В
$U_п = U_з$
v - ?

Розв'язання

Згідно із законом збереження енергії кінетична енергія електрона при попаданні на анод

$$W = W_о + eU_п, \qquad (1)$$

де $W_о$ – кінетична енергія електрона при виході з катода, $eU_п$ – робота поля, створюваного у фотоелементі прямою напругою $U_п$ ($e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд).

Згідно з співвідношенням **(19.6)**, максимальна кінетична енергія електрона при виході з катода

$$W_о = eU_з.$$

Тоді з рівнянням **(1)** максимальна кінетична енергія електрона при попаданні на анод

$$W = \frac{mv^2}{2} = e(U_з + U_п).$$

Оскільки за умовою $U_п = U_з$, то

$$\frac{mv^2}{2} = 2eU_з \quad \Rightarrow \quad v = 2\sqrt{\frac{eU_з}{m}}.$$

Взявши з таблиць масу електрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, отримаємо

$$v = 2\sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,2 \cdot 10^{6} \text{ м/с}.$$

Задача_29

До якого максимального потенціалу φ_m зарядиться віддалена від інших тіл мідна кулька при її опроміненні ультрафіолетовим світлом з довжиною хвилі $\lambda = 140$ нм? Робота виходу електронів з міді A = 4 еВ (1 еВ = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж).

Дано:
λ = 140 нм = $1{,}4\cdot10^{-7}$ м
A = 4 еВ = $6{,}4\cdot10^{-19}$ Дж
φ_m - ?

Розв'язання

Внаслідок фотоефекту кулька втрачає електрони, отже заряджається позитивно (Нагадаємо, що первісно всі тіла є електрично-нейтральними, тобто алгебраїчна сума зарядів в тілі дорівнює нулю. Тому втрата заряду одного знаку означає набуття тілом такого ж заряду протилежного знаку). При цьому в міру втрати електронів потенціал кульки поступово зростає. Тому вирвані електрони рухаються в усе сильнішому гальмівному електричному полі. Через певний час після початку опромінення позитивний потенціал кульки стає таким, що всі вирвані випромінюванням електрони повертаються назад на кульку. Інакше кажучи, встановлюється динамічна рівновага: кількості електронів, що вириваються та повертаються, стають однаковими. Тому потенціал кульки перестає збільшуватися. Процес встановлення динамічної рівноваги відбувається дуже швидко – практично миттєво. Згідно з формулою **(10.13)** для подолання притягання кульки електрон має виконати роботу

$$A_0 = e\varphi, \tag{1}$$

де φ – потенціал кульки, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – елементарний заряд. Цю роботу електрон виконує за рахунок кінетичної енергії W, яку отримує від опромінюючого світла. Отже максимальна робота, яку може виконати електрон

$$A_{omax} = W,$$

і з виразу **(1)**, максимальний потенціал кульки

$$\varphi = \frac{W}{e}. \tag{2}$$

Згідно з рівнянням Ейнштейна (19.7а) кінетична енергія вильоту електрона з кульки

$$\frac{mv^2}{2} = W = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Отже з виразу **(2)** максимальний потенціал кульки дорівнює

$$\varphi_m = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e}.$$

Після підстановки числових значень величин у цю формулу, обчислення дають:

$$\varphi = 4,87 \text{ В}.$$

Задача_30

Ультрафіолетове випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 232$ нм нормально падає на платинову пластинку (робота виходу A = 5,29 еВ). Вважаючи, що всі фотоелектрони вириваються з максимальною швидкістю і рухаються назустріч падаючим фотонам,

визначити

імпульс p, що його одержує пластинка при вильоті кожного електрона.

Дано:
λ = 232 нм = $2{,}32\cdot10^{-7}$ м
A = 5,29 еВ
p - ?

Розв'язання

Пластинка одержує імпульс внаслідок двох процесів: поглинання фотона та вильоту електрона. При поглинанні фотона, пластинка отримує імпульс p_1, рівний імпульсу фотона (формула **(19.3а)**):

$$p_1 = \frac{h}{\lambda}. \qquad (1)$$

При вильоті електрона пластинка одержує імпульс віддачі p_2, котрий за величиною дорівнює імпульсу електрона: $p_2 = p_e$ Згідно з формулою **(4.3б)**

$$p_e = \sqrt{2mW}, \qquad (2)$$

де W – кінетична енергія, m – маса електрона.

Кінетична енергія електрона визначається з рівняння Ейнштейна для фотоефекту **(19.7а)**:

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A.$$

Підставивши цей вираз у формулу **(2)**, дістанемо:

$$p_2 = p_e\sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}. \qquad (3)$$

Отже повний імпульс, що його отримує пластинка, відповідно до виразів **(1)** і **(3)** дорівнює:

$$p = p_1 + p_2 = \frac{h}{\lambda} + \sqrt{2m\left(\frac{hc}{\lambda} - A\right)}.$$

Підставивши у цю формулу числові значення величин і виконавши обчислення, одержимо відповідь:

$$p = 1,35 \cdot 10^{-25} \text{ кг·м/с}.$$

Задача_31_1

Фотон розсіявся під кутом $\theta = 120^0$ на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Внаслідок ефекту Комптона електрон одержав кінетичну енергію $W_к = 0,45\, МеВ$. Визначити енергію фотона до розсіювання.

$W - ?$
$W_к = 0,45\, МеВ = 7,2 \cdot 10^{-14}$ *Дж*,
$\theta = 120^0$,
$c = 3 \cdot 10^8\, м/с$,
$W_0 = 0,511\, МеВ = 8,176 \cdot 10^{-14}$ *Дж*

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зміна довжини хвилі $\Delta\lambda$ фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається за формулою

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta), \qquad (1)$$

де λ та λ' – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до і після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Розділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{m_0 c^2}(1 - \cos\theta). \qquad (3)$$

Кінетична енергія, яку отримав електрон внаслідок ефекту Комптона, дорівнює різниці енергій фотона до розсіювання та його енергії після розсіювання:

$$W_к = W - W', \quad \text{звідси} \quad W' = W - W_к. \qquad (4)$$

Підставимо вираз (4) у співвідношення (3) та одержимо

Задача_31_2

$$\frac{1}{W-W_{\kappa}}-\frac{1}{W}=\frac{1}{m_0c^2}(1-\cos\theta). \qquad (5)$$

Врахуємо, що енергія спокою електрона дорівнює $W_0=m_0c^2$.

Виконаємо перетворення та одержимо квадратне рівняння відносно W:

$$W\cdot W_0-(W-W_{\kappa})W_0=(W-W_{\kappa})W(1-\cos\theta),$$

або

$$(1-\cos\theta)W^2-W_{\kappa}(1-\cos\theta)\cdot W-W_{\kappa}\cdot W_0=0. \qquad (6)$$

Позитивний корінь цього рівняння визначається виразом

$$W=\frac{W_{\kappa}(1-\cos\theta)+\sqrt{W_{\kappa}^{\,2}(1-\cos\theta)^2+4(1-\cos\theta)W_{\kappa}\cdot W_0}}{2(1-\cos\theta)}. \qquad (7)$$

Підставимо у цей вираз числові значення фізичних величин та визначимо енергію фотона до розсіювання:

$$W=\frac{0,45(1-\cos120^0)+\sqrt{\left[0,45(1-\cos120^0)\right]^2+4(1-\cos120^0)0,45\cdot0,511}}{2(1-\cos120^0)}=$$

$$=0,68(\textit{МеВ})=0,68\cdot1,6\cdot10^{-13}=1,09\cdot10^{-13}(\textit{Дж}).$$

Відповідь: $W=0,68\,\textit{МеВ}$.

Задача_32

Яка частка енергії фотона припадає при ефекті Комптона на електрон віддачі, якщо розсіювання фотона відбувається на кут $\theta = \pi/2$? Енергія фотона до розсіювання дорівнювала $W_1 = 0,51 МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\eta - ?$
$W_1 = 0,51 МеВ = 8,16 \cdot 10^{-14}$ *Дж*, $\theta = \frac{\pi}{2}$

Відповідно до формули Комптона зміна довжини хвилі фотона, що розсіявся на електроні, дорівнює

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

де λ та λ' – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до і після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc, тоді одержимо

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta).$$

Із цього співвідношення визначимо енергію фотона, що розсіявся:

$$W' = \frac{W}{\frac{W}{mc^2}(1 - \cos\theta) + 1}.$$

Відповідно до закону збереження енергії кінетична енергія електрона віддачі дорівнює

$$W_K = W - W' = W - \frac{W \cdot mc^2}{W(1 - \cos\theta) + mc^2}.$$

Тепер можемо знайти частину енергії, що припадає на електрон віддачі:

$$\eta = \frac{W_K}{W} = 1 - \frac{mc^2}{W(1 - \cos\theta) + mc^2}. \qquad (2)$$

Після підставлення у (2) числових значень фізичних величин одержимо

$$\eta = 1 - \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{0,51 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) + 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (3 \cdot 10^8)^2} = 0,499.$$

Відповідь: $\eta = 0,499$.

Задача_33_1

Визначити імпульс електрона віддачі, якщо фотон з енергією $W_ф = 1,53\,МеВ$ у результаті розсіювання на вільному електроні втратив 1/3 своєї енергії.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$p - ?$
$W_ф = 1,53\,МеВ = 1,53 \cdot 10^{-13}\,Дж,$ $W'_ф = \frac{1}{3} W_ф$

Для розв'язування задачі спочатку визначимо енергію розсіяного фотона. Для цього скористаємося формулою Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta),$$

де λ', λ – довжини хвиль фотона, що падає на електрон, та розсіяного фотона.

Виразимо довжини хвиль λ' і λ відповідних фотонів через їх енергії W' і W. У результаті одержимо

$$\frac{hc}{W'} - \frac{hc}{W} = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta). \qquad (1)$$

Поділимо обидві частини цієї рівності на hc:

$$\frac{1}{W'} - \frac{1}{W} = \frac{1}{mc^2}(1 - \cos\theta). \qquad (2)$$

Задача_33_2

Урахуємо, що за умовою задачі енергія розсіяного фотона становить $W' = 2W/3$, звідси одержимо

$$\frac{3}{2W} - \frac{1}{W} = \frac{1-\cos\theta}{mc^2} \Rightarrow \frac{1}{2W} = \frac{1-\cos\theta}{mc^2} \Rightarrow 1-\cos\theta = \frac{mc^2}{2W}. \qquad (3)$$

Тоді визначимо зі співвідношення (2) енергію розсіяного фотона W':

$$W' = \frac{W}{W(1-\cos\theta)/mc^2 + 1}. \qquad (4)$$

Кінетичну енергію електрона віддачі можна визначити за законом збереження енергії:

$$W_к = W - W' = W - \frac{W}{W(1-\cos\theta)/mc^2 + 1}.$$

Кінетична енергія пов'язана з імпульсом частинки співвідношенням

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p_e^2}{2m},$$

звідси

$$p_e = \sqrt{2mW_к}. \qquad (5)$$

Підставивши у вираз (5) значення $W_к$ зі співвідношення (4), одержимо

$$p_e = \sqrt{2m\left(W - \frac{W}{W(1-\cos\theta)/mc^2 + 1}\right)}. \qquad (6)$$

Нарешті, підставимо в (6) значення кута розсіювання фотона з виразу (3) та визначимо

$$p_e = \sqrt{2m\left(W - \frac{W}{\frac{Wmc^2}{2W/mc^2} + 1}\right)} = \sqrt{2m\left(W - \frac{2W}{3}\right)} = \sqrt{2mW\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}mW}.$$

Після підставлення числових величин одержимо остаточно

$$p_e = \sqrt{\frac{2}{3}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}53\cdot 10^{6}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 4{,}71\cdot 10^{-22}\,(кг\cdot м/с).$$

Задача_34_1

Фотон із довжиною хвилі $\lambda = 6\,пм$ розсіявся під прямим кутом на вільному електроні, що перебував у стані спокою. Визначити: а) частоту розсіяного фотона; б) кінетичну енергію електрона віддачі.

$\nu' - ?\ W_к - ?$
$\lambda = 6\,пм = 6\cdot10^{-12}\,м$, $\theta = 90^0$, $m = 9{,}1\cdot10^{-31}\,кг$, $c = 3\cdot10^8\,м/с$, $\lambda_к = 2{,}436\,пм = 2{,}436\cdot10^{-12}\,м$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зміна довжини хвилі фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається формулою Комптона

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta), \quad (1)$$

де m – маса частинки віддачі (у нашій задачі – електрона); λ та λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль; c – швидкість світла у вакуумі; $\lambda_c = h/mc$ – комптонівська довжина хвилі.

При розсіюванні фотона на електроні комптонівська довжина хвилі дорівнює $\lambda_c = 2{,}436\ пм$.

При розсіюванні фотона під прямим кутом $\cos\theta$

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c, \quad (2)$$

звідси

а) частота пов'язана з довжиною хвилі співвідношенням

$$\nu' = \frac{c}{\lambda + \lambda_c}; \quad (3)$$

б) виразимо довжини хвиль λ та λ' фотона до та після розсіювання через енергію, врахувавши, що $W = h\nu = hc/\lambda$, тоді

Задача_34_1

$$\frac{hc}{W'}-\frac{hc}{W}=\frac{h}{mc}. \qquad (4)$$

Поділимо обидві частини рівності (1) на hc та одержимо

$$\frac{1}{W'}-\frac{1}{W}=\frac{1}{mc^2}. \qquad (5)$$

Із цього співвідношення визначимо енергію фотона, що розсіявся:

$$W'=\frac{W}{\dfrac{W}{mc^2}+1}. \qquad (6)$$

Відповідно до закону збереження енергії кінетична енергія електрона віддачі дорівнює

$$W_k=W-W'=W-\frac{W}{W/(mc^2)+1},$$

або

$$W_k=\frac{hc}{\lambda}-\frac{\dfrac{hc}{\lambda}}{\dfrac{h}{\lambda mc}+1}=\frac{hc}{\lambda}\left(1-\frac{1}{\dfrac{h}{\lambda mc}+1}\right). \qquad (7)$$

Підставимо числові значення фізичних величин у співвідношення (3) і (5) та одержимо:

$$\text{а) } \nu'=\frac{3\cdot10^8}{6\cdot10^{-12}+2{,}436\cdot10^{-12}}=3{,}56\cdot10^{19}\,(Гц);$$

$$\text{б) } W_k=\frac{6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{6\cdot10^{-12}}\left(1-\frac{1}{\dfrac{6{,}63\cdot10^{-34}}{6\cdot10^{-12}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot3\cdot10^8}+1}\right)=$$

$$=9{,}55\cdot10^{-14}\,(Дж)=(60кеВ).$$

Відповідь: а) $\nu'=3{,}56\cdot10^{19}\,Гц$; б) $W_k=60кеВ$.

Задача_35_1

Гамма-фотон ѕз довжиною хвилі $\lambda = 1{,}2\,пм$ унаслідок комптонівського розсіювання на вільному електроні відхилився від початкового напрямку на кут $\theta = 60^0$. Визначити кінетичну енергію та імпульс електрона віддачі. До зіткнення електрон перебував у стані спокою.

$W_к - ?\; p - ?$

$\lambda = 1{,}2\,пм = 1{,}2 \cdot 10^{-12}\,м,$
$\theta = 60^0,$
$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,кг,$
$c = 3 \cdot 10^8\,м/с,$
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с,$
$\lambda_C = 2{,}43\,пм = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,м,$
$W_0 = 8{,}16 \cdot 10^{-14}\,Дж$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Зміна довжини хвилі фотона при розсіюванні його на частинці (ефект Комптона) на кут θ визначається формулою Комптона

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = \lambda_C(1 - \cos\theta), \quad (1)$$

де m – маса частинки віддачі (у нашій задачі – електрона); λ і λ' – довжини падаючої та розсіяної хвиль; c – швидкість світла у вакуумі; $\lambda_C = h/mc$ – комптонівська довжина хвилі.

При розсіюванні фотона на електроні комптонівська довжина хвилі дорівнює $\lambda_C = 2{,}436\,пм$.

З виразу (2) визначимо довжину хвилі розсіяного фотона:

$$\lambda' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta). \quad (2)$$

Виразимо енергію падаючого та розсіяного фотонів через їх довжини хвиль:

$$W = h\frac{c}{\lambda},\; W' = h\frac{c}{\lambda'} = \frac{hc}{\lambda + \lambda_C(1 - \cos\theta)}. \quad (3)$$

Кінетична енергія електрона віддачі відповідно до закону збереження енергії дорівнює

$$W_k = W - W', \quad (4)$$

Підставимо у (4) вирази (3) та одержимо

Задача_35_2

$$W_k = h\frac{c}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda + \lambda_C(1-\cos\theta)} = hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda + \lambda_C(1-\cos\theta)}\right). \quad (5)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та одержимо

$$W_k = 6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}\left(\frac{1}{1{,}2\cdot10^{-12}} - \frac{1}{1{,}2\cdot10^{-12} + 2{,}43\cdot10^{-12}(1-\cos60^0)}\right) =$$
$$= 8{,}34\cdot10^{-14}\,(Дж) = 0{,}52\,(МеВ).$$

Знаючи кінетичну енергію електрона, визначимо його імпульс. Оскільки кінетична енергія електрона того самого порядку, що й його енергія спокою W_0, то імпульс та кінетична енергія пов'язані релятивістським співвідношенням

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K(W_K + 2W_0)}. \quad (6)$$

Підставимо числові значення в одержаний вираз (6) та проведемо розрахунки:

$$p = \frac{1}{3\cdot10^8}\sqrt{8{,}34\cdot10^{-14}\left(8{,}34\cdot10^{-14} + 2\cdot8{,}16\cdot10^{-14}\right)} = 4{,}78\cdot10^{-22}\,(кг\cdot м/с).$$

Відповідь: $W_K = 0{,}52\,МеВ$; $p = 4{,}8\cdot10^{-22}\,кг\cdot м/с$.

Задача_36

Згідно з теорією Бора, електрон в атомі Гідрогену може рухатися тільки по таких колових орбітах, для яких добуток імпульсу електрона на довжину орбіти кратний сталій Планка:

$$mv \cdot 2\pi r = nh,\ n = 1, 2, 3,...$$

Виходячи з цього,

визначити

кутову швидкість електрона ω на другій орбіті ($n = 2$).

Дано:	Розв'язання
$mv \cdot 2\pi r = nh$ $n = 2$	
ω - ?	

Розв'язання

В теорії Бора рух електрона в атомі Гідрогену навколо ядра розглядається як рух точкового заряду під дією кулонівської сили, яка створює доцентрове прискорення. Тому згідно з рівнянням **(2.5)** та формулами **(10.3)** і **(2.17)** можна записати

$$\frac{ke^2}{r^2} = m\omega r \Rightarrow ke^2 = m\omega^2 r^3, \qquad (1)$$

де ω – шукана кутова швидкість електрона, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – його маса,

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}.$$

Крім того враховано, що заряди електрона та ядра атома Гідрогену по модулю рівні $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Зробимо в заданій у тексті задачі умові стаціонарності заміни $v = \omega \cdot r$, $h = h/2\pi = \hbar$, і об'єднаємо її з рівнянням **(1)**:

$$\begin{cases} n\hbar = m\omega r^2 \\ m\omega^2 r^3 = ke^2 \end{cases}.$$

Розв'язавши отриману систему відносно , дістанемо

$$\omega = \frac{k^2 e^4 m}{\hbar^3 n^3} = \frac{(9 \cdot 10^9)^2 (1,6 \cdot 10^{-19})^4 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{(1,05 \cdot 10^{-34})^3 2^3} = 5,2 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}.$$

Задача_37

У спектрі випромінювання атомарного Гідрогену при заданих умовах збудження спостерігається тільки три спектральні лінії.

Визначити

довжини хвиль цих ліній $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Дано:
$N = 3$
$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - ?

Розв'язання

Згідно з квантовим механізмом випромінювання і умовою **(20.1)** атом Гідрогену випромінює фотон при переході електрона з будь-якого збудженого енергетичного рівня на будь-який з більш низьких рівнів.

Якщо нижчий рівень сам є збудженим, то через короткий час (час життя збудженого стану) електрон знову переходить на один з більш низьких рівнів. Так продовжується, доки електрон не опиниться в основному стані. З наведених міркувань і схеми енергетичних рівнів (рис.2) неважко збагнути, що найвищий рівень, на якому знаходяться електрони в умовах задачі, відповідає головному квантовому числу $n_3 = 3$. Тільки в цьому випадку можливі лише три переходи, показані стрілками на рис.2, і відповідно - три спектральні лінії з енергіями фотонів $h\nu_1$, $h\nu_2$, $h\nu_3$. Частоти ν_1, ν_2, ν_3 визначаються формулою Бальмера **(20.4)**. Врахувавши значення $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}$ Гц, отримаємо

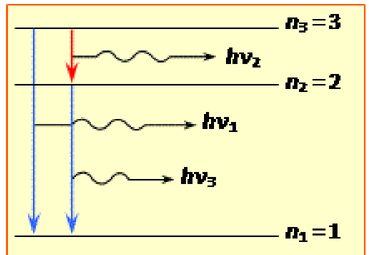


Рис. 2

$$\nu_1 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 2,93 \cdot 10^{15} \text{ Гц},$$

$$\nu_2 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = 4,58 \cdot 10^{14} \text{ Гц},$$

$$\nu_3 = 3,29 \cdot 10^{15} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 2,47 \cdot 10^{15} \text{ Гц}.$$

Довжини хвиль визначаються формулою **(15.4a)**, отже

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,93 \cdot 10^{15}} = 102,7 \text{ нм};$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,58 \cdot 10^{14}} = 656 \text{ нм};$$

$$\lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = \frac{3 \cdot 10^8}{2,47 \cdot 10^{15}} = 121 \text{ нм};$$

Задача_38

Збуджені атоми Гідрогену знаходяться на n-ому енергетичному рівні.

Визначити

повну кількість ліній N, що спостерігаються у спектрі випромінювання цих атомів.

Дано:
n
N - ?

Розв'язання

На рис. 3 схематично показані всі енергетичні рівні, на яких можуть перебувати електрони за умовою задачі.

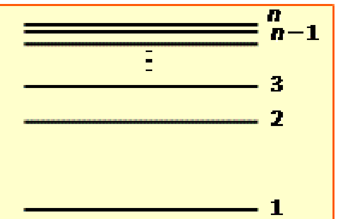


Рис. 3

Відповідь на поставлене запитання можна отримати прямим підрахунком, взявши до уваги, що шукане число N дорівнює сумі кількостей всіх можливих переходів електронів на кожен з рівнів від першого до (n –1)-го. Очевидно, що таких можливих переходів є:

на перший рівень – n - 1,

на другий рівень – n – 2,

на третій рівень – n – 3,

....

на (n - 1)-й рівень – 1.

Отримана числова послідовність є арифметичною прогресією з (n - 1) членів, причому $a_1 = n - 1$, $a_{n-1} = 1$. Сума арифметичної прогресії дорівнює добутку півсуми першого та останнього членів на їх кількість:

$$N = \frac{(n-1)+1}{2}(n-1) \quad \Rightarrow \quad N = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Примітка. Той, хто знає основи комбінаторики, може отримати відповідь коротше. У кожному переході беруть участь 2 з n рівнів. Тому кількість переходів дорівнює кількості комбінацій з n по 2:

$$N = C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Задача_39

Електрон в нерухомому атомі Гідрогену знаходиться на енергетичному рівні $n_2 = 2$.

Визначити

швидкість v руху атома після випромінювання фотона.

Дано:	Розв'язання
$n_2 = 2$	
v - ?	

Розв'язання

Фотон випромінюється при переході електрона зі збудженого рівня $n_2 = 2$ на основний рівень $n_1 = 1$. Енергія фотона W визначається співвідношенням **(20.1)** і формулою **(20.3а)**:

$$W = E_0\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = \frac{3E_0}{4}, \qquad (1)$$

де $E_0 = 13{,}6$ еВ.

Система атом – фотон є ізольованою, тому в ній зберігається імпульс. Оскільки до випромінювання імпульс системи дорівнював нулю, то

$$0 = \vec{p}_ф + \vec{p}_а \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_а = -\vec{p}_ф,$$

де $\vec{p}_а$, $\vec{p}_ф$ – імпульси атома та випроміненого фотона. Таким чином, атом отримує імпульс "віддачі", рівний за величиною та протилежний за напрямком імпульсу фотона, що випромінюється. Імпульс фотона $p_ф$ визначається через його енергію W співвідношенням **(19.4)**:

$$p_ф = \frac{W}{c},$$

де c – швидкість світла.

В такому разі для модулів маємо:

$$\frac{W}{c} = mv_а \quad \Rightarrow \quad v = \frac{W}{m_а c},$$

де $m_а = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг – маса атома Гідрогену. Підставивши в цей вираз значення W з виразу **(1)**, отримаємо

$$v = \frac{3E_0}{4m_а c}.$$

Виразивши величину Eо = 13,6 еВ у джоулях і виконавши обчислення, дістанемо відповідь:

$$v = \frac{3 \cdot 13,6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 3 \cdot 10^8} \approx 3{,}26 \text{ м/с}.$$

Задача_40

На нерухомий атом Гідрогену налітає інший атом Гідрогену. До зіткнення обидва атоми знаходилися в основному стані (n_1 = 1).

Визначити

мінімальну кінетичну енергію W_1, яку повинен мати рухомий атом, щоб при прямому непружному зіткненні один з атомів випустив фотон.

Дано:
$n_1 = 1$
W_1 - ?

Розв'язання

Зіткнення атомів відбувається з виконанням законів збереження енергії та імпульсу. При непружному зіткненні частина кінетичної енергії налітаючого атома перетворюється на внутрішню енергію, що означає перехід одного або двох атомів у збуджений стан. Мінімальна необхідна енергія очевидно відповідає переходу одного атома з основного стану (n_1 = 1) у перший збуджений (n_2 = 2). При зворотному переході цей атом випускає фотон.

За законом збереження енергії

$$W_1 = W_2 + \Delta W, \tag{1}$$

де W_1 – кінетична енергія атома, що налітає, W_2 – кінетична енергія атомів після непружного зіткнення, ΔW – зміна внутрішньої енергії, тобто енергія збудження.

Згідно виразами **(20.1)** і **(20.3а)**

$$\Delta W = E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right). \tag{2}$$

За законом збереження імпульсу

$$p_1 = p_2, \tag{3}$$

де p_1 – імпульс атома, що налітає, p_2 – імпульс атомів після непружного удару.

Імпульс і кінетична енергія зв'язані співвідношенням (4.3б)

$$W = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt{2mW}.$$

Тому вираз **(3)** можна записати у вигляді

$$\sqrt{2mW_1} = \sqrt{2 \cdot 2nW_2} \quad \Rightarrow \quad W_1 = 2W_2, \tag{4}$$

де враховано, що після непружного удару атоми рухаються разом, як одна частинка з масою 2m (m – маса одного атома). З огляду на вирази **(2)** і **(4)**, формула **(1)** набуває вигляду

$$W_1 = \frac{W_1}{2} + E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \Rightarrow \quad W_1 = E_0 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Підставивши сюди значення E_0 = 13,6 еВ, n_1 = 1, n_2 = 2, дістанемо:

$$W_1 = 2 \cdot 13,6 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) = 20,4 \text{ еВ}.$$

Задача_41_1

Визначити енергію електрона, що перебуває на другій орбіті атома водню.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W_n - ?$
$n = 2$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти і швидкість v електрона на ній зв'язані співвідношенням

$$m v r = n\hbar, \tag{1}$$

де e і m – заряд і маса електрона; n – головне квантове число ($n = 1, 2, 3, ...$); $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра та електроном надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{2}$$

звідси

$$mv^2 r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо

$$v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{4}$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \tag{5}$$

Енергія атома складається з кінетичної енергії електрона та енергії взаємодії електрона з ядром:

$$W = \frac{mv^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}. \tag{6}$$

Задача_41_2

З використанням співвідношень (4) та (5) одержимо для енергії електрона на n-му рівні

$$W_n = \frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2} - \frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^4}{\hbar^2 n^2} = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин визначимо

$$W_n = -\frac{1}{2}\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{\left(4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\right)^2 2^2\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2} = -5{,}47\cdot 10^{-19}\,(Дж) = -3{,}42\,(еВ).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = \frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2} = \frac{кг\cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\,(Дж\cdot с)^2} = \frac{Кл^4\cdot кг\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot с^2} = \frac{Ф^4\cdot В^4\cdot Н\cdot м}{Ф^2\cdot Дж^2} =$$

$$= \frac{Ф^2\cdot В^4}{Дж} = \frac{Кл^2 В^4}{В^2 Дж} = \frac{Кл^2 В^2}{Дж} = \frac{Дж^2}{Дж} = Дж.$$

Відповідь: $W_n = -5{,}47\cdot 10^{-19}\ Дж = -3{,}42\,еВ$.

Задача_42_1

Розрахувати, користуючись теорією Бора, період обертання електрона в атомі водню, що перебуває у збудженому стані з головним квантовим числом $n=2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T-?$
$n=2$

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти і швидкість v електрона на ній пов'язані співвідношенням

$$mvr = n\hbar, \tag{1}$$

де m – маса електрона; n – головне квантове число $(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r і v. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}, \tag{2}$$

звідси

Задача_42_2

$$mv^2r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Поділимо (3) на (2) та одержимо, що швидкість електрона на n-й орбіті дорівнює

$$\text{v}_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \qquad (4)$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2 n^2}{me^2}. \qquad (5)$$

Період обертання електрона на орбіті визначається співвідношенням

$$T = \frac{2\pi r}{\text{v}}. \qquad (6)$$

Підставивши у вираз (6) значення v та r, із співвідношень (4) та (5) одержимо

$$T = \frac{2\pi 4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}{me^2 \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar n}} = \frac{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}{me^4}. \qquad (7)$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (7) одержимо

$$T = \frac{32\cdot(3{,}14)^3\cdot\left(8{,}85\cdot10^{-12}\right)^2\cdot\left(1{,}05\cdot10^{-34}\right)^3\cdot 2^3}{9{,}1\cdot10^{-31}\left(1{,}6\cdot10^{-19}\right)^4} = 1{,}21\cdot10^{-17}\,(c).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[T] = \frac{[\varepsilon_0]^2[\hbar]^3}{[m][e]^4} = \frac{(\Phi/\text{м})^2(\text{Дж}\cdot c)^3}{\text{кг}\cdot\text{Кл}^4} = \frac{\Phi^2\cdot\text{Дж}^3 c^3}{\text{Кл}^4\text{кг}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{Кл}^2\text{Дж}^3 c}{B^2\text{Кл}^4 H\cdot\text{м}} =$$

$$= \frac{\text{Дж}^2\cdot c}{B^2\text{Кл}^2} = \frac{\text{Дж}^2\cdot c}{\text{Дж}^2} = c.$$

Відповідь: $T = 1{,}21\cdot10^{-17}\ c$.

Задача_43

Скільки ліній спектра атома водню потрапляє у видиму область $(0,4\,мкм \le \lambda \le 0,76\,мкм)$? Визначити довжини цих хвиль.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$
$0,4\,мкм \le \lambda \le 0,76\,мкм,$ $R' = 1,097\cdot 10^7\,м^{-1}$

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R'\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z=1$ для водню); $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ k = n+1;\ n+2;\ ...$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера $(n=2,\ k=3;\ 4;\ 5;6...)$. Довжини цих хвиль дорівнюють:

$$\frac{1}{\lambda_1} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_1 = \frac{36}{5R'} = \frac{36}{5\cdot 1,097\cdot 10^7} = 6,56\cdot 10^{-7}\,(м) = 0,656\,(мкм),$$

$\lambda_1 = 0,656\,(мкм)$ – червона лінія.

$$\frac{1}{\lambda_2} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_2 = \frac{16}{3R'} = \frac{16}{3\cdot 1,097\cdot 10^7} = 4,86\cdot 10^{-7}\,(м) = 0,486\,(мкм),$$

$\lambda_2 = 0,486\,(мкм)$ – блакитна лінія.

$$\frac{1}{\lambda_3} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{25}{21R'} = \frac{25}{21\cdot 1,097\cdot 10^7} = 4,34\cdot 10^{-7}\,(м) = 0,434\,(мкм),$$

$\lambda_3 = 0,434\,(мкм)$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_4} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{36}{8R'} = \frac{36}{8\cdot 1,097\cdot 10^7} = 4,1\cdot 10^{-7}\,(м) = 0,41\,(мкм),$$

$\lambda_4 = 0,41\,(мкм)$ – фіолетова лінія.

$$\frac{1}{\lambda_5} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{7^2}\right) \Rightarrow \lambda_5 = \frac{49\cdot 4}{45R'} = \frac{49\cdot 4}{45\cdot 1,097\cdot 10^7} = 3,9\cdot 10^{-7}\,(м) = 0,39\,(мкм),$$

$\lambda_5 = 0,39\,(мкм) < 0,4\,мкм$ – ультрафіолетова лінія.

Відповідь: у видимій області спектра містяться чотири лінії серії Бальмера $\lambda_1 = 0,656\,мкм$ – червона лінія; $\lambda_2 = 0,486\,мкм$ – блакитна лінія; $\lambda_3 = 0,434\,мкм$ – фіолетова лінія; $\lambda_4 = 0,41\,мкм$ – фіолетова лінія.

Задача_44_1

Визначити найбільші та найменші довжини світлових хвиль, що випромінюються в серіях Лаймана, Бальмера та Пашена.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda - ?$
$R' = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ м^{-1}$

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається воднеподібним атомом при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \qquad (1)$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра у відносних одиницях ($Z = 1$ для водню); $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...,\ k = n+1;\ n+2;\ ...$

З формули (1) знайдемо довжину хвилі

$$\lambda = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)}.$$

У серії Лаймана переходи електрона здійснюються на першу орбіту з усіх інших, тобто $n = 1$, $k = 2,\ 3,\ 4,\ ...,\ \infty$. Отже, максимальна та мінімальна довжини хвиль визначаються таким чином:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left(1 - \frac{1}{2^2} \right)} = \frac{4}{3R'} = \frac{4}{3 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 1{,}22 \cdot 10^{-7}\,(м) = 0{,}122\,(мкм).$$

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{R' \left(1 - \frac{1}{\infty} \right)} = \frac{1}{R'} = \frac{1}{1{,}097 \cdot 10^7} = 9{,}1 \cdot 10^{-8}\,(м) = 0{,}091\,(мкм).$$

У видимій області спектра містяться лінії серії Бальмера $(n = 2,\ k = 3;\ 4;\ 5;\ ...,\ \infty)$:

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right)} = \frac{36}{5R'} = \frac{36}{5 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 6{,}56 \cdot 10^{-7}\,(м) = 0{,}656\,(мкм).$$

Задача_44_2

$$\lambda_{min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{4}{R'} = \frac{4}{1{,}097 \cdot 10^7} = 3{,}65 \cdot 10^{-7}(м) = 0{,}365(мкм).$$

У серії Пашена перехід електрона відбувається на орбіту з головним квантовим числом $n = 3$, тоді $k = 4, 5, 6, \ldots \infty$.

$$\lambda_{max} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = \frac{144}{7R'} = \frac{144}{7 \cdot 1{,}097 \cdot 10^7} = 1{,}875 \cdot 10^{-6}(м) = 1{,}875(мкм).$$

$$\lambda_{min} = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{9}{R'} = \frac{9}{1{,}097 \cdot 10^7} = 8{,}2 \cdot 10^{-7}(м) = 0{,}82(мкм).$$

Відповідь: серія Лаймана $\lambda_{max} = 0{,}122\ мкм$; $\lambda_{min} = 0{,}091\ мкм$.

Серія Бальмера $\lambda_{max} = 0{,}656\ мкм$; $\lambda_{min} = 0{,}365\ мкм$.

Серія Пашена $\lambda_{max} = 1{,}875\ мкм$; $\lambda_{min} = 0{,}82\ мкм$.

Задача_45_1

Визначити колову частоту ω обертання електрона на n-й коловій орбіті водневоподібного атома. Визначити цю величину для іона He^{+} при $n=2$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$n=2$, $Z=2$

Частоту обертання електрона на n-ій коловій орбіті водневоподібного атома визначимо за формулою

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \tag{1}$$

де T – період обертання електрона. Він дорівнює

$$T = \frac{2\pi r_n}{v_n}, \tag{2}$$

де v_n – швидкість електрона.

Згідно з теорією Бора радіус r електронної орбіти водневоподібного атома і швидкість v_n електрона на ній зв'язані співвідношенням

$$m v_n r_n = n\hbar, \tag{3}$$

Задача_45_1

де m – маса електрона; n – головне квантове число $(n=1, 2, 3, \ldots)$; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

До цього виразу входять дві невідомі величини r_n і v_n. За друге рівняння використаємо рівняння руху електрона. Згідно з теорією Бора електрон обертається навколо ядра. При цьому сила взаємодії між електричним зарядом ядра Ze та електроном e надає електрону доцентрового прискорення. З використанням другого закону Ньютона можна записати

$$\frac{m\mathrm{v}_n^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2}, \tag{4}$$

звідси

$$m\mathrm{v}_n^2 r=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Поділимо (5) на (4) та одержимо

$$\mathrm{v}_n=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}. \tag{6}$$

Тоді радіус n-ї орбіти електрона

$$r_n=4\pi\varepsilon_0\frac{\hbar^2 n^2}{mZe^2}. \tag{7}$$

Підставимо вирази (2), (6) і (7) у співвідношення (1) та одержимо

$$\omega=\frac{\mathrm{v}_n}{r_n}=\frac{mZe^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar^2 n^2}\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}=\frac{mZ^2e^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2 n^3\hbar^3}=\frac{2Z^2}{n^3}R', \tag{1}$$

де $R'=\dfrac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^3}$ – стала Рідберга, вона дорівнює $R'=2{,}07\cdot 10^{16}\,c^{-1}$.

Для іона He^+ $(Z=2)$ при $n=2$ колова частота дорівнює

$$\omega=\frac{2Z^2}{n^3}R'=\frac{2\cdot 2^2}{2^3}R'=R' \Rightarrow \omega=2{,}07\cdot 10^{16}\left(c^{-1}\right).$$

Відповідь: $\omega=2{,}07\cdot 10^{16}\,c^{-1}$.

Задача_46_1

Визначити, які спектральні лінії з'являються у видимій області спектра випромінювання атома водню під дією ультрафіолетових променів із довжиною хвилі $\lambda = 95\,нм$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda_n - ?$

$\lambda = 95\,нм = 9{,}5 \cdot 10^{-8}\,м,$
$Z = 1$

Енергія кванта світла $\varepsilon = hc/\lambda$ дорівнює різниці енергій збудженого та основного станів, тобто

$$W_n - W_1 = \varepsilon \;\Rightarrow\; W_n = \varepsilon + W_1. \qquad (1)$$

Енергія збудженого стану дорівнює

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \text{ звідси } n = \sqrt{\frac{W_1}{W_n}} = \sqrt{\frac{W_1}{\varepsilon + W_1}}. \qquad (2)$$

Енергія кванта світла дорівнює

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{9{,}5 \cdot 10^{-8}} = 20{,}9 \cdot 10^{-19}\,(Дж) = 13{,}08\,(еВ).$$

Енергія електрона в основному стані дорівнює

$$W_1 = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2} = -13{,}6\,(еВ).$$

Тоді номер збудженого стану

$$n = \sqrt{\frac{-13{,}6}{13{,}08 - 13{,}6_1}} = 5. \qquad (4)$$

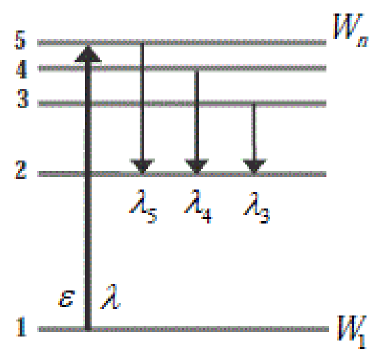


Рисунок 6.3 – До задачі 6.6

Серіальна формула (узагальнена формула Бальмера) визначає довжину хвилі світла, що випромінюється або поглинається атомом водню при переході електрона з однієї орбіти на іншу,

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad (5)$$

де R' – стала Рідберга $\left(R' = R/c = 1{,}097 \cdot 10^{7}\,м^{-1}\right)$.

Для видимої області спектра $m = 2$, тоді можна застосувати формулу Бальмера

Задача_46_2

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right). \qquad (6)$$

У нашому випадку квантове число n може набувати значень $n = 5$, $n = 4$ та $n = 3$, тоді

$$\frac{1}{\lambda_5} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right) \Rightarrow \lambda_5 = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_4} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)},$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)}.$$

Розрахунки дають

$$\lambda_5 = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)} = 434 \cdot 10^{-9}\,(м) = 434\,(нм),$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 486 \cdot 10^{-9}\,(м) = 486\,(нм),$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3{,}29 \cdot 10^{15}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 656 \cdot 10^{-9}\,(м) = 656\,(нм).$$

Відповідь: $\lambda_3 = 656\,нм$, $\lambda_4 = 486\,нм$, $\lambda_5 = 434\,нм$.

Задача_47

Електрон в іонізованому атомі гелію перейшов із п'ятого енергетичного рівня на другий. Визначити енергію фотона, що при цьому випромінюється.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W-?$
$n=2,$ $m=5$

Для визначення енергії фотона скористаємося серіальною формулою для воднеподібних іонів

$$\frac{1}{\lambda}=Z^2R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right), \qquad (1)$$

де λ – довжина хвилі фотона; R – стала Рідберга; z – заряд ядра у відносних одиницях (при $Z=1$ формула набирає вигляду, що є характерним для водню); n – номер орбіти, на яку перейшов електрон; m – номер орбіти, з якої перейшов електрон (n і m – головні квантові числа).

Енергія фотона W визначається співвідношенням

$$W=\frac{hc}{\lambda}.$$

Тому, помноживши обидві частини рівняння (1) на hc, одержимо вираз для енергії фотона у вигляді

$$W=Z^2hcR\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right).$$

Оскільки всі величини у співвідношенні відомі, проведемо розрахунок W:

$$W=1{,}1\cdot10^7\cdot6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8\cdot2^2\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{5^2}\right)=$$
$$=1{,}83\cdot10^{-18}\,(Дж)=11{,}48\,(еВ).$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W]=[R][h][c]=м^{-1}\cdot Дж\cdot c\cdot м/с=Дж.$$

Відповідь: $W=1{,}83\cdot10^{-18}\,Дж=11{,}48\,еВ$.

Задача_48

Фотон вибиває з атома водню, який перебуває в основному стані, електрон із кінетичною енергією $W_K = 10\,eB$. Визначити енергію W цього фотона.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W - ?$
$W_K = 10\,eB$

Енергія фотона витрачається на іонізацію атома водню і надання електрону кінетичної енергії:

$$W = W_K + W_i. \quad (1)$$

Енергія іонізації атома водню дорівнює

$$W_i = h\nu = h\frac{c}{\lambda}, \quad (2)$$

де λ знайдемо застосувавши серіальну формулу та врахувавши, що відбувається перехід електрона між основним станом n=1 і рівнем вакууму $m = \infty$:

$$\frac{1}{\lambda} = R'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right), \quad (3)$$

де R' – стала Рідберга; Z – заряд ядра атома водню; n і m – головні квантові числа.

Підставивши співвідношення (3) у (4), одержимо

$$W_i = hcR'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right). \quad (4)$$

Тепер із виразів (1) (4) знайдемо енергію фотона:

$$W = W_K + hcR'Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо

$$W = 10\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19} + 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 1{,}1\cdot 10^{7}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = 2{,}35\left(Дж\right).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W] = [W_k] + [R][h][c] = Дж + м^{-1}\cdot Дж\cdot с\cdot м/с = Дж.$$

Відповідь: $W = 2{,}35\,Дж$.

Задача_49_1

Позитроній – це атомоподібна система, яка містить позитрон і електрон, що обертається навколо загального центра мас. Визначити мінімальні розміри подібної системи в рамках теорії Бора.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{\min} - ?$
$\lvert e^+\rvert = \lvert e^-\rvert = \lvert e\rvert = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ Кл$, $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}\ Ф/м$, $h = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ Дж/с$, $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}\ кг$

Застосуємо правило квантування орбіт (другий постулат Бора) до позитронію

$$\left(m_{e^+}\mathrm{v}r\right)_+ + \left(m_{e^-}\mathrm{v}r\right)_- = n\hbar, \tag{1}$$

де $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Оскільки маси електрона і позитрона однакові $m_{e^+} = m_{e^-} = m_e$, то

$$2m_e\mathrm{v}r = n\hbar. \tag{2}$$

Сила Кулона надає електрону доцентрового прискорення навколо загального центра мас, тобто

$$\frac{m_e\mathrm{v}^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(2r)^2} \Rightarrow 2m_e\mathrm{v}^2 r = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}, \tag{3}$$

де e – заряд електрона.

Поділимо рівняння (3) на рівняння (2) та одержимо вираз для швидкості електрона

$$\mathrm{v} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n\hbar}, \tag{4}$$

який підставимо у рівняння (2) та визначимо вираз для радіусів борівських орбіт позитронію:

$$2m_e\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 n\hbar}r = n\hbar \Rightarrow r = \frac{4\pi\varepsilon_0 n^2\hbar^2}{m_e e^2}. \tag{5}$$

Розміри позитронію будуть мінімальними за умови $n = 1$ З урахуванням, що $\hbar = h/2\pi$, одержимо для мінімального радіуса вираз

Задача_49_2

$$r_{\min} = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}, \tag{6}$$

тоді мінімальний діаметр позитронію дорівнює

$$d_{\min} = 2r_{\min} = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2}. \tag{7}$$

Підставимо в одержаний вираз числові значення фізичних величин, виконаємо розрахунки та одержимо

$$d_{\min} = \frac{2 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 6{,}63^2 \cdot 10^{-68}}{3{,}14 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 1{,}6^2 \cdot 10^{-38}} = 1{,}06 \cdot 10^{-10}\,(м) = 106\,(пм).$$

Відповідь: $d_{\min} = 106\,пм$.

Задача_50

Визначити швидкість v електронів, що падають на антикатод рентгенівської трубки, якщо мінімальна довжина хвилі в суцільному спектрі рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda_{\min} = 1\,нм$.

$v - ?$
$\lambda_{\min} = 1\,нм = 10^{-9}\,м$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Скористаємося формулою для короткохвильової межі суцільного рентгенівського спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}, \tag{1}$$

де U – різниця потенціалів, прикладена до рентгенівської трубки.

Тоді

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{\min}}. \tag{2}$$

Прискорювальна різниця потенціалів, прикладена до трубки, надає електрону кінетичної енергії

$$eU = \frac{mv^2}{2}. \tag{3}$$

З виразів (2) і (3) одержимо формулу для швидкості

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda_{\min}}}.$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 10^{-9}}} = 2{,}08 \cdot 10^{7}\,(м/с).$$

Одержаний вираз свідчить, що електрони, які падають на антикатод, є нерелятивістськими.

Відповідь: $v = 2{,}08 \cdot 10^{7}\,м/с$.

Задача_51

Визначити довжину хвилі λ_{K_α} та енергію W_{K_α} фотона K_α-лінії рентгенівського спектра, що випромінюється ренієм $(Z=75)$ при бомбардуванні його швидкими електронами.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\lambda_{K_\alpha}-?\quad W_{K_\alpha}-?$
$Z=75$

При бомбардуванні ренію швидкими електронами виникає рентгенівське випромінювання, що має лінійчастий спектр. Ці електрони проникають усередину електронної оболонки атома та вибивають електрони, які належать до глибинних електронних оболонок. Найближча до ядра електронна оболонка (K-оболонка) має два електрони. Якщо один із цих електронів виявляється вибитим за межі атома, то на вільне місце переходить електрон з оболонки, що лежить вище $(L,\ M,\ N)$. При цьому виникає відповідна лінія K -серії. При переході електрона з L-оболонки на K-оболонку випромінюється найінтенсивніша K_α-лінія рентгенівського спектра.

Довжина хвилі цієї лінії визначається за законом Мозлі для ліній K_α:

$$\omega_{K_\alpha}=R'(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}R'(Z-1)^2.$$

Ураховуючи, що $\omega=2\pi c/\lambda$, одержимо

$$\frac{1}{\lambda_{K_\alpha}}=\frac{3}{4}R(Z-1)^2.$$

Із цього співвідношення довжина хвилі дорівнює

$$\lambda_{K_\alpha}=\frac{4}{3R(Z-1)^2}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в останнє співвідношення одержимо відповідь

$$\lambda_{K_\alpha}=\frac{4}{31{,}097\cdot10^7(75-1)^2}=2{,}2\cdot10^{-11}(м).$$

Знаючи довжину хвилі, визначимо енергію фотона за виразом

$$W_{K_\alpha}=\frac{hc}{\lambda}.$$

Після підставлення числових значень величин визначимо енергію фотона

$$W_{K_\alpha}=\frac{2\cdot3{,}14\cdot6{,}63\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^8}{2{,}2\cdot10^{-11}}=5{,}64\cdot10^{-14}(Дж).$$

Виконаємо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W_{K_\alpha}]=\frac{[\hbar][c]}{[\lambda]}=\frac{Дж\cdot c\cdot м/с}{м}=Дж.$$

Відповідь: $\lambda_{K_\alpha}=2{,}2\cdot10^{-11}\,м$; $W_{K_\alpha}=5{,}64\cdot10^{-14}\,Дж$.

Задача_52

Гранична довжина хвилі K-серії характеристичного рентгенівського випромінювання дорівнює $\lambda = 0{,}11284\,нм$. Визначити, який це елемент.

$Z - ?$
$\lambda = 0{,}1284\,нм = 1{,}284 \cdot 10^{-10}\,м$, $\sigma = 1$, $n = 1$, $m = \infty$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довжина хвилі рентгенівського випромінювання визначається законом Мозлі

$$\frac{1}{\lambda} = R(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

де n і m – енергетичні рівні, між якими відбувається перехід електрона.

Фотон із граничною довжиною хвилі в K-серії випромінюється при переході з рівня $m = \infty$ на рівень $n = 1$.

Тоді

$$(Z-\sigma)^2 = \frac{1}{\lambda R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)} = \frac{1}{\lambda R\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)} = \frac{1}{\lambda R},$$

$$Z - \sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{1}{\lambda R}} + a.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз:

$$Z = \sqrt{\frac{1}{1{,}284 \cdot 10^{-10} \cdot 1{,}097 \cdot 10^{7}}} + 1 \approx 27.$$

Визначили, що порядковий номер елемента в таблиці Менделєєва дорівнює $Z = 27$. Цим елементом є кобальт.

Відповідь: $Z = 27$ – кобальт.

Задача_53_1

Електрон, початковою швидкістю якого можна знехтувати, пройшов прискорювальну різницю потенціалів U. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для двох випадків: 1) $U_1 = 60\,В$; 2) $U_2 = 600\,кВ$.

$\lambda - ?$
$U_1 = 60\,В$,
$U_2 = 600\,кВ = 6\cdot 10^5\,В$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її імпульсу p і визначається виразом

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}. \qquad (1)$$

Імпульс частинки можна знайти, якщо відома її кінетична енергія W_K. Зв'язок імпульсу з кінетичною енергією для нерелятивістського (коли $W_K \le W_0$) і релятивістського (коли $W_K \approx W_0$) випадків визначається співвідношеннями

$$p = \sqrt{2m_0 W_K}, \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)},$$

де $W_0 = m_0 c^2$ – енергія спокою частинки.

Вираз (1) з урахуванням цих співвідношень запишеться у нерелятивістському та релятивістському випадках таким чином:

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 W_K}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{W_K\left(W_K + 2W_0\right)}}. \qquad (2)$$

Порівняємо кінетичні енергії електронів, що пройшли задані в умові задачі різниці потенціалів $U_1 = 60\,В$ і $U_2 = 600\,кВ$, з енергією спокою електрона і залежно від цього зробимо висновок, яку з наведених формул необхідно використовувати для розрахунків довжини хвилі де Бройля.

Кінетична енергія електрона, що пройшов прискорювальну різницю потенціалів U, дорівнює

$$W_K = |e|U. \qquad (3)$$

Задача_53_2

У першому випадку

$$W_{K1} = |e|U_1 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60\,Дж = 60\,еВ = 0,5 \cdot 10^{-4}\,МеВ,$$

тобто енергія набагато менша від енергії спокою електрона $W_0 = m_0c^2 = 0,51\,МеВ$. Тому для розрахунків можна використати нерелятивістську формулу.

У другому випадку кінетична енергія

$$W_{K2} = |e|U_2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5\,Дж = 0,6\,МеВ,$$

тобто більша за енергію спокою електрона. Тому в цьому випадку необхідно використати релятивістську формулу.

З урахуванням виразу (3) співвідношення (2) наберуть вигляду

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0eU_1}}, \quad \lambda_2 = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{eU_2\left(eU_2 + 2m_0c^2\right)}}. \tag{4}$$

Після підставлення числових значень фізичних величин у співвідношення (4) одержимо відповідь

$$\lambda_1 \frac{6,63 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 60}} = 1,58 \cdot 10^{-10}\,(м),$$

$$\lambda_2 = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\sqrt{\left(2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2 + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5\right) 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6 \cdot 10^5}} = = 1,26 \cdot 10^{-12}\,(м).$$

Перевіримо розмірність одиниць одержаної величини:

$$[\lambda] = \frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][e][U]}} = \frac{1Дж \cdot с}{\sqrt{1кг \cdot 1Кл \cdot 1В}} = \sqrt{\frac{1Дж}{1кг}}1с = \sqrt{\frac{1кг \cdot м^2/с^2}{1кг}}1с = 1м.$$

Відповідь: $\lambda_1 = 158\,пм$; $\lambda_2 = 1,26\,пм$.

Задача_54

Паралельний пучок моноенергетичних електронів спрямований на вузьку щілину шириною $b=1\,мкм$. Визначити швидкість цих електронів, якщо на екрані, який міститься на відстані $l=20\,см$ від щілини, ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x=48\,мкм$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

v-?

$m=9{,}11\cdot10^{-31}\,кг,$

$b=1\,мкм=10^{-6}\,м,$

$l=20\,см=0{,}2\,м,$

$\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}\,Дж/с,$

$\Delta x=48\,мкм=4{,}8\cdot10^{-5}\,м$

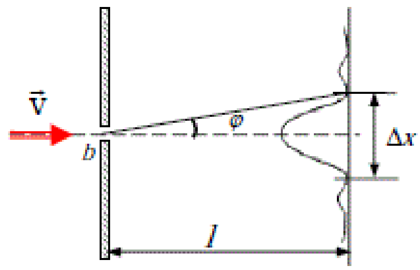


Рисунок 2.3 – До задачі 2.2

Умова мінімумів при дифракції на щілині

$$b\sin\varphi=\pm k\lambda, \qquad (1)$$

де b – ширина щілини; φ і k – кут і порядок дифракції; λ – довжина хвилі. В умові цієї задачі $k=1$, тоді $\sin\varphi=\lambda/b$. З рисунка 2.3 знаходимо, що ширина центрального дифракційного максимуму дорівнює $\Delta x=2l\,\mathrm{tg}\varphi$. Оскільки кут φ є малим $(\Delta x\ll l)$, то $\sin\varphi\simeq\mathrm{tg}\varphi$. Отже,

$$\Delta x=2l\sin\varphi=\frac{2l\lambda}{b}\;\Rightarrow\lambda=\frac{\Delta xb}{2l}. \qquad (3)$$

Довжина хвилі де Бройля λ частинки залежить від її швидкості й визначається виразом

$$\lambda=\frac{2\pi\hbar}{m\mathrm{v}}\Rightarrow\mathrm{v}=\frac{2\pi\hbar}{m\lambda}=\frac{4\pi\hbar l}{m\Delta xb}. \qquad (4)$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$\mathrm{v}=\frac{4\cdot3{,}14\cdot1{,}05\cdot10^{-34}\cdot0{,}2}{9{,}11\cdot10^{-31}\cdot4{,}8\cdot10^{-5}\cdot10^{-6}}=6{,}06\cdot10^{6}\,(м/с)=6{,}06\,(Мм/с).$$

Відповідь: $\mathrm{v}=6{,}06\,Мм/с$.

Задача_55

Кінетична енергія електрона в атомі водню приблизно дорівнює $W_K = 10\,eB$. Використовуючи співвідношення невизначеностей, оцінити мінімальні лінійні розміри атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$l_{\min} - ?$
$W_K = 10\,eB = 1{,}6\cdot10^{-18}$ *Дж*

Для розв'язування задачі використаємо співвідношення невизначеностей

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

де Δx – невизначеність координати частинки; Δp_x – невизначеність імпульсу частинки; $\hbar$ – стала Планка – Дірака.

Нехай атом має лінійні розміри l, тоді електрон атома перебуватиме десь у межах цієї області з похибкою

$$\Delta x = l/2.$$

У цьому випадку співвідношення невизначеностей набирає вигляду

$$\frac{l}{2}\Delta p_x \geq \hbar,$$

звідси

$$l \geq \frac{2\hbar}{\Delta p_x}. \quad (1)$$

Фізично розумна невизначеність імпульсу Δp_x не повинна перевищувати значення самого імпульсу p_x, тобто $\Delta p_x \leq p_x$ Імпульс p_x пов'язаний із кінетичною енергією W_K співвідношенням

$$p_x = \sqrt{2mW_K}.$$

Підставивши ці вирази у (1) та перейшовши від нерівності до рівності, одержимо

$$l_{\min} = \frac{2\hbar}{\sqrt{2mW_K}}.$$

Після підставлення числових значень фізичних величин одержимо відповідь

$$l_{\min} = \frac{2\cdot1{,}05\cdot10^{-34}}{\sqrt{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10}} = 1{,}23\cdot10^{-10}\,(м).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{\sqrt{[m][W_k]}} = \frac{1Дж\cdot c}{\sqrt{1кг\cdot1Дж}} = \sqrt{\frac{1Дж}{1кг}}\cdot1c = \sqrt{\frac{1кг\cdot м^2/c^2}{1кг}}\cdot1c = 1м.$$

Відповідь: $l_{\min} = 1{,}23\cdot10^{-10}\,м$.

Задача_56_1

Електрон із кінетичною енергією $W_K = 15\,eB$ локалізований в області розміром $l = 1\,мкм$. Оцінити за допомогою співвідношення невизначеностей відносну невизначеність його швидкості.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta v_x / v_x - ?$
$W_K = 15\,eB = 2{,}4 \cdot 10^{-18}$ *Дж*

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга має вигляд

$$\Delta x \Delta p_x \ge \hbar, \tag{1}$$

де Δx – невизначеність координати електрона; Δp_x – невизначеність його імпульсу.

Врахуємо, що імпульс частинки дорівнює

$$p = mv \Rightarrow \Delta p = m\Delta v_x. \tag{2}$$

Підставимо вираз (1) в (2) та одержимо

$$\Delta x\, m\Delta v_x \ge \hbar.$$

Врахуємо, що $\Delta x = d/2$.

$$\frac{d}{2} m\Delta v_x \ge \hbar,$$

звідси

$$\Delta v_x \ge \frac{2\hbar}{md}. \tag{3}$$

Задача_56_2

Імпульс частинки пов'язаний із його кінетичною енергією виразом

$$p = mv = \sqrt{2mW_K}\,.$$

Із рівняння знайдемо, що

$$v = \sqrt{\frac{2mW_K}{m^2}} = \sqrt{\frac{2W_K}{m}}\,. \qquad (4)$$

Відносну невизначеність швидкості електрона визначимо розділивши рівняння (3) на (4):

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2\hbar}{md\sqrt{\frac{2W_K}{m}}} = \frac{2\hbar}{d\sqrt{2mW_K}}\,.$$

Після підставлення числових значень величин одержимо

$$\frac{\Delta v_x}{v} = \frac{2\cdot 1{,}05\cdot 10^{-34}}{10^{-6}\sqrt{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 1{,}5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10}} = 3{,}18\cdot 10^{-4}\,.$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$\frac{[\hbar]}{[d]\sqrt{[m][W_K]}} = \frac{Дж\cdot с}{м\cdot\sqrt{кг\cdot Дж}} = \sqrt{\frac{Дж}{кг}}\cdot\frac{с}{м} = \sqrt{\frac{кг\cdot м^2}{кг\cdot с^2}} = \frac{м}{с}\cdot\frac{с}{м} = 1\,.$$

Відповідь: $\Delta v / v = 3{,}18\cdot 10^{-4}$.

Задача_57

Довжина хвилі фотона, який випромінюється атомом, дорівнює $\lambda = 0{,}6\,мкм$. Ураховуючи, що час життя збудженого стану $\Delta t = 10^{-8}\,с$, визначити відношення природної ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W/W - ?$

$\lambda = 0{,}6\,мкм = 6\cdot 10^{-7}\,м,$
$\Delta t = 10^{-8}\,с$

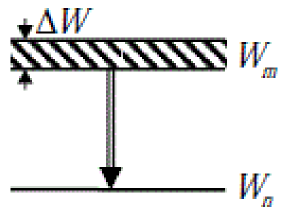


Рисунок 2.4 – До задачі 2.5

Співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar,$$

де ΔW – невизначеність енергії даного квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

$$\Delta W = \hbar / \Delta t.$$

Енергія, що випромінюється атомом, дорівнює

$$W = h\nu = \frac{hc}{\lambda},$$

тоді відношення ширини енергетичного рівня, на який електрон був збуджений, до енергії, випромінюваної атомом, дорівнює

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\hbar\lambda}{\Delta t hc} = \frac{\hbar\lambda}{2\pi\hbar c\Delta t} = \frac{\lambda}{2\pi c\Delta t}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та виконаємо розрахунки

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{6\cdot 10^{-7}}{2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^{8}\cdot 10^{-8}} = 3{,}18\cdot 10^{-8}.$$

Відповідь: $\Delta W/W = 3{,}18\cdot 10^{-8}$.

Задача_58

Атом випромінює фотон із довжиною хвилі $\lambda = 0,55\,мкм$. Тривалість випромінювання $\Delta t = 10\,нс$. Визначити найменшу похибку, з якою можна виміряти довжину хвилі випромінювання.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$
$\lambda = 0,55\,мкм = 5,5\cdot10^{-7}\,м,$ $\Delta t = 10^{-8}\,c$

Енергія фотона дорівнює

$$W = \frac{hc}{\lambda}, \tag{1}$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.

Продиференціюємо вираз (1) $dW = -hc\dfrac{d\lambda}{\lambda^2}$, тоді $\Delta W = -hc\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, звідси

$$\Delta\lambda = \frac{|\Delta W|\lambda^2}{hc}. \tag{2}$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar, \tag{3}$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – час перебування системи в цьому стані.

Із виразу (3) визначимо невизначеність енергії $\Delta W = \dfrac{\hbar}{\Delta t} = \dfrac{h}{2\pi\Delta t}$, підставимо у вираз (2) та одержимо

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi\Delta t c}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз, проведемо обчислення:

$$\Delta\lambda = \frac{0,55^2\cdot10^{-12}}{2\cdot\pi\cdot10^{-8}\cdot3\cdot10^{8}} = 1,6\cdot10^{-14}\,(м).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 1,6\cdot10^{-14}\,м$.

Задача_59_1

Середній час життя атома у збудженому стані дорівнює $\tau = 10\,нс$. Визначити природну ширину $\Delta\lambda$ спектральної лінії $(\lambda = 12\,мкм)$, що відповідає переходу між збудженими рівнями атома.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta\lambda - ?$
$\lambda = 12\,мкм = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,м$, $\tau = 10^{-8}\,с$

При переході електрона з одного стаціонарного стану в інший випромінюється (або поглинається) енергія, що дорівнює

$$\frac{hc}{\lambda} = W_m - W_n, \tag{1}$$

де h – стала Планка; c – швидкість світла у вакуумі; λ – довжина хвилі випромінювання.

З виразу (1) випливає, що невизначеність довжини хвилі $\Delta\lambda$ випромінювання пов'язана з невизначеністю енергії рівнів W_m і W_n атома співвідношенням

$$\frac{hc}{\lambda^2}\Delta\lambda = \Delta W_m + \Delta W_n. \tag{2}$$

Візьмемо співвідношення невизначеностей Гейзенберга для енергії та часу

$$\Delta W \Delta t \geq \hbar, \text{ або } \Delta W \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}, \tag{3}$$

де ΔW – невизначеність енергії цього квантового стану; Δt – невизначеність часу переходу атома з одного стаціонарного стану в інший.

Оскільки Δt не перевищує середнього часу життя τ збудженого стану атома, то мінімальна невизначеність енергії збуджених рівнів згідно з (3) дорівнює

$$\Delta W_{\min} = \frac{h}{2\pi\tau}. \tag{4}$$

З виразу (2) з урахуванням (4) знайдемо мінімальну невизначеність довжини хвилі випромінювання, що називається природною шириною спектральної лінії:

Задача_59_2

$$\Delta\lambda_{\min} = \lambda^2 \frac{\Delta W_m + \Delta W_n}{hc} = \frac{\lambda^2}{2\pi c}\left(\frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n}\right). \quad (5)$$

Коли один зі станів, між якими здійснюється перехід, є основним, то

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda^2}{2\pi c\tau}. \quad (6)$$

Підставимо у вираз (6) числові значення й одержимо

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\left(1,2\cdot 10^{-5}\right)^2}{2\cdot\pi\cdot 3\cdot 10^8\cdot 10^{-8}} = 5,2\cdot 10^{-14}\,(м).$$

Відповідь: $\Delta\lambda = 5,2\cdot 10^{-14}\,м$.

Задача_60_1

Електрон перебуває у збудженому стані $(n=3)$ в нескінченно глибокій одновимірній прямокутній потенціальній ямі, ширина якої l. Визначити ймовірність Ψ виявлення електрона в середній третині ями. Зобразити графічно густину ймовірності виявлення електрона у цьому стані та пояснити фізичний зміст одержаного результату.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W-?$

$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x,$

$n=3,$

$\frac{1}{3}\le x\le\frac{2}{3}$

Власна функція для частинки в потенціальній ямі має вигляд

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{1}$$

де l – ширина ями; n – головне квантове число (номер енергетичного рівня); x – координата частинки.

У нашому випадку

$$\psi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right). \tag{2}$$

Густина ймовірності є квадратом модуля хвильової функції

Задача_60_1

$$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \frac{2}{l}\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right);$$

$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \max$ за умови

$$\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \;\; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Таким чином, координати максимумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = \frac{l(1/2 + k)}{3}; \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{l}{6}, \;\; x_2 = \frac{l}{2}, \;\; x_3 = \frac{5l}{6}.$$

$\left|\psi_3(x)\right|^2 = \min$ за умови $\sin^2\left(\frac{3\pi}{l}x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{l}x = \pi k, \;\; k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Відповідно координати мінімумів густини ймовірності виявлення частинки

$$x = kl/3, \;\; \Rightarrow \;\; x_1 = 0; \;\; x_2 = l/3; \;\; x_3 = 2l/3; \;\; x_4 = l.$$

Графічно густина ймовірності виявлення електрона в цьому стані зображена на рисунку 2.5.

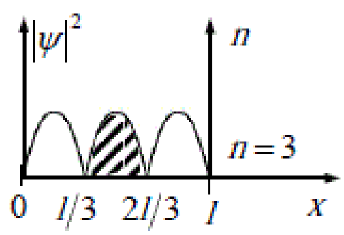


Рисунок 2.5 – Густина ймовірності виявлення електрона в потенціальній ямі на енергетичному рівні з головним квантовим числом $n = 3$

Ймовірність W виявлення електрона в середній третині ями визначається інтегралом, після розв’язування якого одержимо

Задача_60_3

$$W=\int_{l/3}^{2l/3}\left|\psi_3(x)\right|^2 dx=\int_{l/3}^{2l/3}\frac{2}{l}\sin^2\frac{3\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{6\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{l}\frac{l}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin\frac{6\pi}{l}\frac{2l}{3}-\sin\frac{6\pi}{l}\frac{l}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin 4\pi-\sin 2\pi\right)=\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $W=1/3$.

Задача_61_1

Електрон перебуває в потенціальному ящику шириною l (рис. 2.6). В яких точках в інтервалі ($0 \le x \le l$) густина ймовірності перебування електрона на першому та другому енергетичних рівнях однакова? Розрахувати густину ймовірності для цих точок.

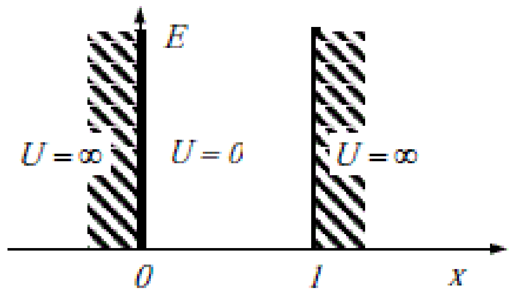


Рисунок 2.6 – Частинка в одновимірній потенціальній ямі

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x - ?$ $\lvert\psi\rvert^2 - ?$
l $\lvert\psi_1\rvert^2 = \lvert\psi_2\rvert^2$

Припустимо, що квантова частинка може рухатися лише вздовж осі x. При цьому рух обмежується непроникними для частинки стінками: $x = 0$ і $x = l$. Потенціальна енергія в цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 2.5: вона дорівнює нулю при $0 \le x \le l$ та перетворюється на нескінченність при $x < 0$ та $x > l$.

Для розв'язування задачі використаємо рівняння Шредінгера для одновимірного випадку

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0\,. \qquad (1)$$

Задача_61_2

За межі потенціальної ями частинка потрапити не може. Тому ймовірність виявлення частинки зовні ями дорівнює нулю. Відповідно і функція ψ за межами потенціальної ями повинна дорівнювати нулю. З умови неперервності випливає, що хвильова функція ψ дорівнює нулю і на межах ями, тобто

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \quad (2)$$

Цю умову повинен задовольняти розв'язок рівняння (1).

В області $0<x<l$, де хвильова функція не дорівнює нулю, рівняння (1) має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}+\frac{2m}{\hbar^2}W\psi=0 \quad (3)$$

(у цій області $U=0$). Уведемо позначення $k^2=\frac{2m}{\hbar^2}W$,

в результаті одержимо рівняння, добре відоме з теорії коливань,

$$\psi''+k^2\psi=0.$$

Це диференціальне рівняння гармонічних коливань.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\psi(x)=A\sin(kx+\alpha). \quad (4)$$

Умову (2) можна задовольнити відповідним вибором сталих k і α. З умови $\psi(0)=0$ одержимо

$$\psi(0)=A\sin\alpha=0,$$

звідси випливає, що стала α повинна дорівнювати нулю: $\alpha=0$. Крім того, повинна виконуватись умова

$$\psi(l)=A\sin(kl+\alpha), \quad (5)$$

що можливо лише в разі, якщо

$$kl=\pm n\pi \quad (n=1,2,3,...). \quad (6)$$

Підставивши значення k у співвідношення (5), одержимо власні функції частинки в потенціальному ящику шириною *l:*

Задача_61_3

$$\psi_n(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}. \qquad (7)$$

Для знаходження коефіцієнта A використаємо умову нормування хвильової функції, яка в цьому разі має вигляд

$$A^2\int_0^l \sin^2\frac{n\pi x}{l}dx = 1. \qquad (8)$$

На кінцях проміжку інтегрування підінтегральна функція перетворюється на нуль. Тому значення інтеграла можна одержати помноживши середнє значення $\sin^2\frac{n\pi x}{l}$ (яке, як добре відомо, дорівнює 0,5) на довжину проміжку l: $A^2(1/2)l = 1$, звідси $A = \sqrt{2/l}$. Таким чином, власні функції мають вигляд

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

де $n = 1, 2, 3, \ldots$.

На першому та другому енергетичних рівнях ці функції мають вигляд

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{2\pi x}{l}. \qquad (9)$$

Ймовірність перебування частинки в будь-якій точці потенціальної ями на цих рівнях визначається співвідношеннями

$$\Psi_1 = \int_0^l \psi_1^2(x)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx,$$

$$\Psi_2 = \int_0^l \psi_2^2(x)dx = \int_0^l \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}dx.$$

Згідно з умовою задачі густина ймовірності перебування квантової частинки в деяких точках на першому і другому рівнях енергії однакова, звідси $|\psi_1|^2 = |\psi_2|^2$. Після зіставлення співвідношень (9) одержимо

$$\frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l}.$$

Задача_61_4

Розв'язавши тригонометричне рівняння $\sin\frac{\pi x}{l} = \pm\sin\frac{2\pi x}{l}$, одержимо $x_1 = l/3$, $x_2 = 2l/3$.

Підставимо відповідні значення x у співвідношення

$$|\psi|_1^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{3} = \frac{2}{l}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2l}, \quad |\psi|_2^2 = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi x}{l} = \frac{2}{l}\sin^2\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2l}.$$

На рисунку 2.7 схематично зображені графіки розподілу хвильової функції та густини ймовірності в одновимірній потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях.

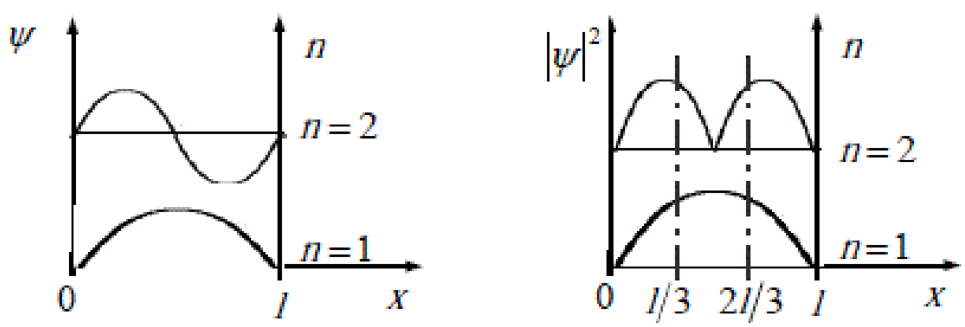


Рисунок 2.7 – Хвильова функція (ліворуч) та густина ймовірності виявлення електрона (праворуч) у потенціальній ямі на першому та другому енергетичних рівнях

Відповідь: $x_1 = l/3$; $x_2 = 2l/3$; $|\psi|^2 = \frac{3}{2l}$.

Задача_62_1

Знайти енергію основного стану атома водню.

$W-?$
$n=1$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Рівняння Шредінгера для тривимірного випадку має вигляд

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi=0.$$

Оскільки задача є симетричною, це рівняння зручно записати у сферичних координатах. Зв'язок між декартовими та сферичними координатами має такий вигляд:

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$$

Після підставлення цих виразів рівняння Шредінгера набирає вигляду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial^2\varphi}=-\frac{2m}{\hbar^2}(W-U)\psi. \quad (1)$$

Для того щоб одержати рівняння Шредінгера для атома водню, необхідно врахувати, що потенціальна енергія електрона має вигляд $U=-ke^2/r$, де $k=1/(4\pi\varepsilon_0)$. Як розв'язок диференціального рівняння хвильову функцію візьмемо у вигляді $\psi=e^{-r/a}$. Підставляючи цей вираз у співвідношення (1) і враховуючи, що часткові похідні $\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$ та $\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$ перетворюються на нуль, одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\left(e^{-r/a}\right)}{\partial r}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right)e^{-r/a}.$$

Після ряду перетворень одержимо

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{r^2}{a}e^{-r/a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right)e^{-r/a},\quad \frac{1}{r^2}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2r}{a}\right)=-\frac{2m}{\hbar^2}\left(W+\frac{ke^2}{r}\right),$$

Задача_62_2

$$\frac{1}{a^2}-\frac{2}{a}\frac{1}{r}=-\frac{2m}{\hbar^2}W-\frac{2mk_0e^2}{\hbar^2}\frac{1}{r}. \qquad (2)$$

Прирівнявши члени, що містять $1/r$, знайдемо

$$\frac{2}{a}=\frac{2mke^2}{\hbar^2},$$

звідси

$$a=\frac{\hbar^2}{mke^2}. \qquad (3)$$

Прирівнявши вільні члени рівняння (2), одержимо вираз для енергії

$$W=-\frac{\hbar^2}{2ma^2},$$

Підставляючи у це рівняння співвідношення (3), одержимо кінцевий результат

$$W=-\frac{\left(mke^2\right)^2}{2m\hbar^2}=-\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{me^4}{2\hbar^2}.$$

Після підставлення числових значень m, e, $\hbar$ знайдемо

$$W=-\left(\frac{1}{4\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}\right)^2\frac{9{,}1\cdot 10^{-31}\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^4}{2\left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}=-21{,}8\cdot 10^{-19}\,(Дж)=-13{,}6\,(eB).$$

Проведемо перевірку одиниць одержаної величини:

$$[W]=\frac{1}{[\varepsilon_0]^2}\frac{[m][e]^4}{[\hbar]^2}=\frac{кг\cdot Кл^4}{(Ф/м)^2\,(Дж\cdot c)^2}=\frac{Кл^4\cdot кг\cdot м^2}{Ф^2\cdot Дж^2\cdot c^2}=\frac{Ф^4\cdot B^4\cdot H\cdot м}{Ф^2\cdot Дж^2}=$$
$$=\frac{Ф^2\cdot B^4}{Дж}=\frac{Кл^2B^4}{B^2Дж}=\frac{Кл^2B^2}{Дж}=\frac{Дж^2}{Дж}=Дж.$$

Відповідь: $W=-13{,}6\,eB$.

Задача_63

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Використовуючи умову нормування ймовірностей, визначити нормувальний коефіцієнт A.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$A - ?$
$\psi = Ae^{-r/a}$, $a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ м$

Умова нормування хвильової функції

$$\int\limits_0^{\infty} \left|\psi(x,t)\right|^2 dV = 1. \qquad (1)$$

У нашому випадку елементарний об'єм $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції дорівнює

$$\left|\psi(x,t)\right|^2 = A^2 e^{-2r/a}, \qquad (2)$$

тоді вираз (1):

$$\int\limits_0^{\infty} A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = 1. \qquad (3)$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} r^2 e^{-2r/a} dr = \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \frac{a^3}{4}. \qquad (4)$$

Підставимо значення інтеграла у співвідношення (3) та одержимо

$$4\pi A^2 \frac{a^3}{4} = 1 \;\Rightarrow\; A = 1\Big/\sqrt{\pi a^3}. \qquad (5)$$

Підставимо значення борівського радіуса та визначимо нормувальний коефіцієнт A:

$$A = 1\Big/\sqrt{3{,}14 \cdot \left(5{,}29 \cdot 10^{-11}\right)^3} = 1{,}47 \cdot 10^{15}\left(м^{-3/2}\right).$$

Відповідь: $A = 1\Big/\sqrt{\pi a^3} = 1{,}47 \cdot 10^{15}\ м^{-3/2}$.

Задача_64_1

ψ – функція частинки має вигляд $\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a}$, де r – відстань цієї частинки від силового центра; a – стала. Визначити середню відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\langle r \rangle - ?$
$\psi = \frac{A}{r} e^{-r/a}$, $a = \text{const}$

Середнє значення фізичної величини визначається за формулою

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dV. \quad (1)$$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r \rangle = \int_0^{\infty} r |\psi|^2 dV, \quad (2)$$

де dV – елементарний об'єм, $dV = 4\pi r^2 dr$. Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a}. \quad (3)$$

Нормувальний коефіцієнт A визначимо з умови нормування хвильової функції

$$\int_0^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dV = 1. \quad (4)$$

Підставимо значення елементарного об'єму та вираз (3) в умову (4) та одержимо

$$\int_0^{\infty} \frac{A^2}{r^2} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 \int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr = 1. \quad (5)$$

Інтеграл $\int_0^{\infty} e^{-2r/a} dr$ визначимо використовуючи таблицю А.8:

Задача_64_2

$$\int_0^\infty e^{-2r/a}dr = \frac{a}{2}e^{-2r/a}\Big|_0^\infty = \frac{a}{2},$$

підставимо його значення в (5) та визначимо нормувальний коефіцієнт

$$4\pi A^2\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}. \quad (6)$$

Для визначення середньої відстані частинки до силового центра підставимо в умову (2) вирази елементарного об'єму (3) та (6):

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r\frac{A^2}{r^2}e^{-2r/a}4\pi r^2 dr = \frac{2}{a}\int_0^\infty re^{-2r/a}dr. \quad (7)$$

Із таблиці А.8 знаходимо інтеграл

$$\int_0^\infty re^{-2r/a}dr = \frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{4}, \quad (8)$$

підставимо його значення в (7) та визначимо середню відстань частинки до силового центра:

$$\langle r\rangle = \frac{2}{a}\frac{a^2}{4} = \frac{a}{2}.$$

Відповідь: $\langle r\rangle = a/2$.

Задача_65_1

Хвильова функція $\psi = Ae^{-r/a}$ описує основний стан електрона в атомі водню: r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити середнє значення квадрата відстані $\langle r^2 \rangle$ електрона до ядра в основному стані.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\langle r^2 \rangle - ?$
$\psi = Ae^{-r/a}$, $a = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ м

Середнє значення фізичної величини визначається за формулою

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi|^2 dV. \qquad (1)$$

У нашому випадку середня відстань $\langle r \rangle$ частинки до силового центра дорівнює

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 |\psi|^2 dV, \qquad (2)$$

де dV – елементарний об'єм,

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (3)$$

Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = A^2 e^{-2r/a}. \qquad (4)$$

Значення нормувального коефіцієнта A визначимо з умови нормування хвильової функції (див. приклад 2.11):

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}. \qquad (5)$$

З урахуванням виразів (3), (4) та (5) середня відстань (2) частинки до силового центра набере вигляду

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^{\infty} r^2 \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{a^3}\int_0^{\infty} r^4 e^{-2r/a} dr.$$

З таблиці А.8 знаходимо інтеграл

Задача_65_2

$$\int_0^\infty r^4 e^{-2r/a} dr = \frac{4!}{\left(\frac{2}{a}\right)^5} = \frac{2\cdot 3\cdot 4a^5}{32} = \frac{3}{4}a^5,$$

тоді

$$\langle r^2 \rangle = \frac{4}{a^3}\cdot\frac{3}{4}a^5 = 3a^2. \qquad (6)$$

Підставимо значення борівського радіуса в одержаний вираз для середнього значення квадрата відстані електрона до ядра в основному стані та проведемо розрахунки:

$$\langle r^2 \rangle = 3\cdot 5{,}29^2\cdot 10^{-22} = 8{,}4\cdot 10^{-21}\left(м^2\right).$$

Відповідь: $\langle r^2 \rangle = 3a^2 = 8{,}4\cdot 10^{-21} м^2$.

Задача_66

Визначити, за якої температури дискретність енергії електрона, що перебуває в одновимірній прямокутній ямі з нескінченно високими стінками шириною $l = 2 \cdot 10^{-9}\ м$, дорівнює енергії теплового руху.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$T - ?$
$l = 2 \cdot 10^{-9}\ м$

Енергія електрона, що перебуває в потенціальній ямі на n-му енергетичному рівні, дорівнює

$$W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \ (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

де l – ширина потенціальної ями.

Дискретність (різниця) ΔW енергій на n-му та $(n+1)$-му енергетичних рівнях

$$\Delta W = W_{n+1} - W_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}\left[(n+1)^2 - n^2\right] = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}\left(n^2 + 2n + 1 - n^2\right) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n+1).$$

Енергія теплового руху електрона $W = \frac{3}{2}kT$.

За умовою задачі $\Delta W = W$, звідси визначимо температуру:

$$\frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}(2n+1) = \frac{3}{2}kT \ \Rightarrow \ T = \frac{\pi^2 \hbar^2}{3kml^2}(2n+1).$$

ΔW має мінімальне значення при $n = 1$, тоді

$$T = \frac{\pi^2 \hbar^2}{kml^2}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та одержимо

$$T = \frac{\pi^2 \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\right)^2}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \left(2 \cdot 10^{-9}\right)^2} = 2166(K).$$

Відповідь: $T = 2166\,K$.

Задача_67

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; a – перший борівський радіус. Визначити найбільш імовірну відстань r_i електрона до ядра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$r_i - ?$

$\psi = Ae^{-r/a}$,

$a = 5,29 \cdot 10^{-11}\, м$

Ймовірність виявити частинку в об'ємі dV дорівнює

$$d\Psi = |\psi(r)|^2 dV, \qquad (1)$$

де dV – елементарний об'єм,

$$dV = 4\pi r^2 dr. \qquad (2)$$

Квадрат модуля хвильової функції

$$|\psi|^2 = A^2 e^{-2r/a}. \qquad (3)$$

Тоді ймовірність

$$d\Psi = A^2 e^{-2r/a} 4\pi r^2 dr = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} dr. \qquad (4)$$

Густина ймовірності дорівнює

$$w = \frac{d\Psi}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a}. \qquad (5)$$

Найбільш імовірна швидкість визначається з умови $\dfrac{dw}{dr} = 0$.

Знайдемо похідну від густини ймовірності:

$$\frac{dw}{dr} = 4\pi A^2 r^2 e^{-2r/a} = 4\pi A^2 \frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-2r/a}\right) = 4\pi A^2 \left(2re^{-2r/a} - r^2 e^{-2r/a}\frac{2}{a}\right) =$$

$$= 8\pi A^2 r e^{-2r/a}\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

та прирівняємо її до нуля:

$$8\pi A^2 r e^{-2r_i/a}\left(1 - \frac{r_i}{a}\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{r_i}{a} = 0 \Rightarrow r_i = a.$$

Ураховуючи, що a – борівський радіус, дійдемо висновку

$$r_i = a = 5,29 \cdot 10^{-11}\,(м).$$

Відповідь: $r_i = 5,29 \cdot 10^{-11}\, м$.

Задача_68_1

Хвильова функція, що описує основний стан електрона в атомі водню, має вигляд $\psi = Ae^{-r/a}$, де r – відстань електрона від ядра; А і a – сталі. Визначити:

а) сталі А і a;

б) енергію електрона W_1;

в) найбільш імовірну відстань між електроном і ядром;

г) середнє значення модуля кулонівської сили, що діє на електрон;

д) середнє значення потенціальної енергії електрона в полі ядра.

$A-?\ \ a-?\ \ W_1-?$ $r_i-?\ \ \langle F_K \rangle -?\ U-?$
$\psi = Ae^{-r/a}$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Значення нормувальної сталої A візьмемо з прикладу 2.11:

$$A = 1/\sqrt{\pi a^3}. \tag{1}$$

Підставимо вираз для хвильової функції з умови задачі

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \tag{2}$$

у рівняння Шредінгера для стаціонарних станів

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 r} + \frac{2m}{\hbar^2}(W - U)\psi = 0. \tag{3}$$

Потенціальна енергія електрона в кулонівському полі

$$U = \frac{-ke^2}{r}, \tag{4}$$

де $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$; e – заряд електрона; ε_0 – електрична стала.

Після ряду перетворень одержимо:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 r} = \frac{\partial^2}{\partial^2 r}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a}\right) = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a},$$

$$\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{ke^2}{r}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} = 0,$$

Задача_68_2

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\right)+\frac{2}{r}\left(+\frac{kme^2}{\hbar^2 r}\right)=0,$$

$$a=\frac{\hbar^2}{kme^2} \qquad W=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}. \tag{5}$$

При $n=1$ $$W_1=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}=-\frac{ke^2}{2}=-2\pi\varepsilon_0 e^2. \tag{6}$$

Ймовірність того, що частинка міститься між двома нескінченно близькими сферичними поверхнями з радіусами r і $r+dr$, визначається виразом

$$d\Psi=4\pi\left|\psi(r)\right|^2 r^2 dr. \tag{7}$$

З виразу (7) випливає, що найбільш імовірна відстань між електроном і ядром відповідає максимуму функції $d\Psi/dr$. Продиференціюємо цю функцію та прирівняємо її до нуля:

$$\frac{d}{dr}\left[4\pi\left|\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}\right|^2 r^2\right]=0,$$

$$4\pi\left[\frac{1}{\pi a^3}e^{-2r/a}\left(-\frac{2}{a}\right)r^2+\frac{1}{\pi a^3}e^{-2r/a}2r\right]=0 \;\Rightarrow e^{-2r/a}2r\left[\left(-\frac{1}{a}\right)r+1\right]=0.$$

Таким чином, найімовірніша відстань дорівнює

$$r_i=a.$$

Середнє значення модуля кулонівської сили $F(r)=ke^2/r^2$, що діє на електрон, визначається формулою

$$\langle F_K\rangle=\int_0^\infty F(r)\left|\psi^2\right|4\pi r^2 dr=\frac{4ke^2}{a^3}\int_0^\infty e^{-2r/a}dr=\frac{4ke^2}{a^3}\frac{a}{2}=\frac{2ke^2}{a^2}.$$

Аналогічно визначається середнє значення потенціальної енергії $U(r)=-ke^2/r$:

$$\langle U\rangle=\int_0^\infty U(r)\left|\psi^2\right|4\pi r^2 dr=-4\pi\int_0^\infty\frac{ke^2}{r}e^{-2r/a}r^2dr=-\frac{4\pi ke^2}{\pi a^3}\int_0^\infty re^{-2r/a}dr=-\frac{ke^2}{a}.$$

Відповідь: а) $A=1/\sqrt{\pi a^3}$; $a=\hbar^2/kme^2$; б) $W_1=-2\pi\varepsilon_0 e^2$; в) $r_i=a$;
г) $\langle F_K\rangle=2ke^2/a^2$; д) $\langle U\rangle=-ke^2/a$.

Задача_69

Визначити енергію Фермі для міді, виходячи з припущення, що кількість вільних електронів дорівнює кількості атомів металу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\varepsilon_F - ?$
$\rho = 8{,}93\cdot10^3\ кг/м^3$, $M = 63{,}5\cdot10^{-3}\ кг/моль$

Енергія Фермі у металі при $T=0$ визначається співвідношенням

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}, \qquad (1)$$

де m – маса електрона; n – концентрація вільних носіїв; $\hbar$ – стала Планка – Дірака; $\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}\ Дж\cdot с$.

Концентрація атомів міді дорівнює

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \qquad (2)$$

де N_A – стала Авогадро; ρ – густина міді; M – молярна маса міді.

Підставимо формулу (2) у співвідношення (1) та одержимо

$$W_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2\rho N_A}{M}\right)^{2/3}.$$

Виконаємо перевірку розмірності

$$[W_F] = \frac{[\hbar]^2}{[m]}\left(\frac{[\rho][N_A]}{[M]}\right)^{2/3} = \frac{(Дж\cdot с)^2}{кг}\left(\frac{[кг/м^3][моль^{-1}]}{[кг/моль]}\right)^{2/3} =$$

$$= \frac{Дж\cdot с^2\cdot кг\cdot м\cdot м}{кг\cdot с^2\cdot м^2} = Дж.$$

Підставимо числові значення та виконаємо розрахунки

$$W_F = \frac{1{,}05^2\cdot10^{-68}}{2\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}\left(\frac{3\cdot3{,}14^2\cdot8{,}93\cdot10^3\cdot6{,}02\cdot10^{23}}{63{,}5\cdot10^{-3}}\right)^{2/3} == 1{,}13\cdot10^{-18}\,(Дж).$$

Відповідь: $W_F = 1{,}13\cdot10^{-18}\ Дж$.

Задача_70

Визначити ширину забороненої зони власного напівпровідника ΔW, якщо за температури $T_1 = 27\,^0C$ і $T_2 = 127\,^0C$ його опір відповідно дорівнює $R_1 = 157\,кОм$ та $R_2 = 10\,Ом$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$

$T_1 = 27\,^0C = 300\,K,$

$T_2 = 127\,^0C = 400\,K,$

$R_1 = 157\,кОм = 1{,}57 \cdot 10^5\,Ом,$

$R_2 = 10\,Ом$

Залежність питомої електропровідності від температури визначається за законом

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT}}, \qquad (1)$$

де ΔW – ширина забороненої зони; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,Дж/К$.

Знайдемо зв'язок між питомою електропровідністю та опором

$$\sigma = \frac{1}{\rho},\; R = \rho\frac{l}{S} \Rightarrow \rho = R\frac{S}{l} \Rightarrow \sigma = \frac{l}{RS}. \qquad (2)$$

Визначимо відношення питомих електропровідностей для різних температур з урахуванням співвідношення (1):

$$\sigma_1 = \frac{l}{R_1 S} \Rightarrow \sigma_2 = \frac{l}{R_2 S} \Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1}.$$

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT_2}}}{\sigma_0 e^{-\frac{\Delta W}{kT_2}}} = e^{\frac{\Delta W}{k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)} \Rightarrow \frac{\Delta W}{k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = \ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta W = \frac{k}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \Delta W = \frac{kT_1T_2}{T_1 - T_2}\ln\frac{R_2}{R_1}.$$

Підставимо значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$\Delta W = \frac{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cdot 400}{400 - 300}\ln\frac{1{,}57 \cdot 10^5}{10} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,(Дж) = 1(еВ).$$

Відповідь: $\Delta W = 1еВ$.

Задача_71

Питома провідність кремнію дорівнює $\sigma_1 = 19\,См/м$ за температури $T_1 = 600\,K$ і $\sigma_2 = 4\,095\,См/м$ за температури $T_2 = 1\,200\,K$. Визначити ширину ΔW забороненої зони для кремнію.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$
$\sigma_1 = 19\,См/м$, $T_1 = 600\,K$, $\sigma_2 = 4095\,См/м$, $T_2 = 1200\,K$

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \qquad (1)$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,Дж/K$.

Злогарифмуємо вираз (1) та одержимо

$$\ln\sigma = \ln\sigma_0 + \ln\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right) \Rightarrow \ln\sigma = \ln\sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT}.$$

$$\ln\sigma_1 = \ln\sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_1}, \qquad \ln\sigma_2 = \ln\sigma_0 - \frac{\Delta W}{2kT_2}.$$

Знайдемо різницю логарифмів

$$\ln\sigma_2 - \ln\sigma_1 = \frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right).$$

Тоді ширина забороненої зони

$$\Delta W = 2k\frac{\ln\sigma_2/\sigma_1}{(1/T_1 - 1/T_2)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки

$$\Delta W = 2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\ln 4095/19}{(1/600 - 1/1200)} = 1{,}78 \cdot 10^{-19}\,(Дж) = 1{,}11\,(еВ).$$

Відповідь: $\Delta W = 1{,}78 \cdot 10^{-19}\,Дж = 1{,}11\,еВ$.

Задача_72

Визначити концентрацію n вільних електронів у металі, якщо відомо, що при густині струму провідності $j = 5\,A/см^2$ середня швидкість спрямованого руху електронів дорівнює $\langle v \rangle = 0,05\,см/с$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n - ?$

$j = 5\,A/см^2 = 5 \cdot 10^4\,A/м^2$,

$\langle v \rangle = 0,05\,см/с = 5 \cdot 10^{-4}\,м/с$,

$e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,Кл$

Густина струму пов'язана із середньою швидкістю спрямованого руху $\langle v \rangle$ співвідношенням

$$j = ne\langle v \rangle,$$

де n – концентрація вільних електронів у металі; e – заряд електрона.

З цього виразу визначимо концентрацію

$$n = \frac{j}{e\langle v \rangle}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо розрахунки:

$$n = \frac{5 \cdot 10^4}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 6,25 \cdot 10^{26}\left(м^{-3}\right).$$

Відповідь: $n = 6,25 \cdot 10^{26}\,м^{-3}$.

Задача_73

У скільки разів зміниться у разі підвищення температури від $T_1 = 300\,K$ до $T_2 = 330\,K$ електропровідність власного напівпровідника, ширина забороненої зони якого дорівнює $\Delta W = 0,5\,eB$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta W - ?$
$T_1 = 300\,K$,
$T_2 = 330\,K$,
$\Delta W = 0,5\,eB = 0,8 \cdot 10^{-19}$ *Дж*

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \qquad (1)$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ *Дж/К*.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{0,8 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{300} - \frac{1}{330}\right)\right] = 2,41.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2,41$, питома електропровідність збільшиться у 2,41 раза.

Задача_74_1

Зразок германію нагрівають від 0 до 17 ^0C. Визначити, як зміниться його опір. Ширина забороненої зони германію дорівнює $\Delta W = 0,72\,eB$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_1/R_2 - ?$
$T_1 = 0^0\,C = 273\,K$, $T_2 = 17^0\,C = 290\,K$, $\Delta W = 0,72\,eB = 1,152\cdot10^{-19}$ *Дж*

Залежність питомої електропровідності власного напівпровідника від температури визначається за формулою

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right), \qquad (1)$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; γ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає; k – стала Больцмана, $k = 1,38\cdot10^{-23}$ *Дж/К*.

Тоді

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right),$$

звідси

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)}{\sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Задача_74_2

Питома провідність є оберненою величиною питомого опору $\rho = 1/\sigma$. Опір циліндричного провідника дорівнює

$$R = \rho\frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S},$$

де l – довжина провідника; S – площа його перерізу.

Зі збільшенням температури опір власного напівпровідника зменшується, відношення опорів дорівнює

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \exp\left[\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right].$$

Підставимо числові значення фізичних величин та виконаємо обчислення:

$$\frac{R_1}{R_2} = \exp\left[\frac{1{,}152\cdot 10^{-19}}{2\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{290}\right)\right] = 2{,}45.$$

Відповідь: $\sigma_2/\sigma_1 = 2{,}45$.

Задача_75

Опір $p-n$-переходу, що перебуває під зворотною напругою $U = 0,1\,B$, дорівнює $R = 692\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу при прямому підключенні? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 0,1\,B,$ $R_1 = 692\,Ом,$ $T = 300\,K$

Сила струму у $p-n$-переході

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1,6\cdot 10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1,38\cdot 10^{-23}\,Дж/K = 8,625\cdot 10^{-5}\,еВ/K$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

У випадку зворотного та прямого підключень маємо

$$R_1 = \frac{-U}{I_S\left(e^{-eU/(kT)} - 1\right)} \text{ та } R_2 = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

$$\frac{R_2}{R_1} = -\frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1} \quad\Rightarrow\quad R_2 = -R_1\frac{e^{-eU/(kT)} - 1}{e^{eU/(kT)} - 1}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки

$$R_2 = -692\frac{e^{-1,6\cdot 10^{-19}\cdot 0,1/\left(1,38\cdot 10^{-23}\cdot 300\right)} - 1}{e^{1,6\cdot 10^{-19}\cdot 0,1/\left(1,38\cdot 10^{-23}\cdot 300\right)} - 1} = 692\frac{0,979}{46,7} = 14,5\,(Ом).$$

Відповідь: $R_2 = 14,5\,Ом$.

Задача_76

Опір $p-n$-переходу, що перебуває під прямою напругою $U = 1\,B$, дорівнює $R_1 = 10\,Ом$. Чому дорівнює опір переходу при зворотному підключенні? Температура дорівнює $T = 300\,K$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$R_2 - ?$
$U = 1\,B$,
$R_1 = 10\,Ом$,
$T = 300\,K$

Сила струму у $p-n$-переході

$$I = I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right),$$

де I_S – максимальне значення зворотного струму; U – зовнішня напруга на переході; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}\,Кл$; k – стала Больцмана, $k = 1{,}38\cdot10^{-23}\,Дж/K = 8{,}625\cdot10^{-5}\,еВ/K$; T – абсолютна температура.

За законом Ома для ділянки кола опір дорівнює

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)}.$$

У випадку прямого та зворотного підключень маємо

$$R_1 = \frac{U}{I_S\left(e^{eU/(kT)} - 1\right)} \text{ та } R_2 = \frac{-U}{I_S\left(e^{-eU/(kT)} - 1\right)}.$$

$$R_2 = -R_1\frac{e^{eU/(kT)} - 1}{e^{-eU/(kT)} - 1}.$$

Під час розрахунку врахуємо, що $e^{eU/(kT)} \gg 1 \;\Rightarrow\; e^{eU/(kT)} - 1 \approx e^{eU/(kT)}$ і $e^{-eU/(kT)} \ll 1 \;\Rightarrow\; e^{eU/(kT)} - 1 = -1$. Тоді

$$R_2 \approx R_1 e^{eU/(kT)}.$$

Проведемо обчислення $R_2 \approx e^{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot1/\left(1{,}38\cdot10^{-23}\cdot300\right)} = 6{,}1\cdot10^{17}\ (Ом)$.

Відповідь: $R_2 = 6{,}1\cdot10^{17}\ Ом$.

Задача_77

Визначити мінімальну енергію W_{min}, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$, якщо його питома провідність змінюється в 10 разів за зміни температури від $T_1 = 20^0 C$ до $T_2 = 3^0 C$.

$W_{min} - ?$
$U = 1\,B,$
$R_1 = 10\,Ом,$
$T_1 = 20^0 C = 293\,K,$
$T_2 = 3^0 C = 276\,K$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Мінімальна енергія, необхідна для утворення пари електрон – дірка у власному напівпровіднику, дорівнює ширині забороненої зони $W_{min} = \Delta W$. Питома провідність власних напівпровідників залежить від температури згідно з виразом

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT}\right),$$

де ΔW – ширина забороненої зони матеріалу; σ_0 – стала, на значення якої температура практично не впливає.

Запишемо цей вираз для двох температур

$$\sigma_1 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right) \quad \text{і} \quad \sigma_2 = \sigma_0 \exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right).$$

Поділимо перший вираз на другий та визначимо ширину забороненої зони напівпровідника

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_1}\right)}{\exp\left(-\frac{\Delta W}{2kT_2}\right)} = \exp\frac{\Delta W}{2k}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \Rightarrow \Delta W = \frac{2kT_1T_2}{T_1 - T_2}\ln\frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Підставимо числові значення відповідних фізичних величин в одержаний вираз та знайдемо мінімальну енергію, необхідну для утворення пари електрон – дірка в кристалі арсеніду галію $GaAs$:

$$W_{min} = \Delta W = \frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 \cdot 276}{293 - 276}\ln 10 = 3{,}023 \cdot 10^{-19}\,(Дж) = 1{,}89\,(еВ).$$

Відповідь: $W_{min} = 1{,}89\,еВ.$

Задача_78

Визначити товщину шару половинного ослаблення $d_{1/2}$ паралельного пучка γ-випромінювання для води, якщо лінійний коефіцієнт поглинання води для цього випромінювання дорівнює $\mu = 0,047\,см^{-1}$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{1/2} - ?$
$\mu = 0,047\,см^{-1}$

При проходженні γ-випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ-випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \qquad (1)$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ-випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\frac{1}{2}I_0 = I_0 e^{-\mu d} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow\; \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \;\Rightarrow\; -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \qquad (2)$$

Підставимо в одержаний вираз (2) значення $\ln 2$ та коефіцієнта поглинання μ та проведемо розрахунки:

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{4,7} = 0,147\,м.$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,147\,м$ зменшує інтенсивність γ-випромінювання вдвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,147\,м$.

Задача_79

На поверхню води падає гамма-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414\,пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшиться вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$d_{1/2} - ?$
$\mu = 0,047\,см^{-1}$

При проходженні γ-випромінювання через шар речовини його поглинання здійснюється за рахунок трьох факторів: фотоефекту, ефекту Комптона та утворення пар (електрон – позитрон). Унаслідок дії цих трьох факторів інтенсивність γ-випромінювання зменшується за експонентою залежно від товщини шару:

$$I = I_0 e^{-\mu d}. \tag{1}$$

Після проходження шару води, товщина якого дорівнює товщині шару половинного ослаблення $d_{1/2}$, інтенсивність пучка γ-випромінювання буде дорівнювати $I = I_0/2$, тоді після підставлення у вираз (1) та виконання низки нескладних перетворень одержимо

$$\frac{1}{2} I_0 = I_0 e^{-\mu d} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = \ln e^{-\mu d_{1/2}} \Rightarrow -\ln 2 = -\mu d_{1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{1/2} = \frac{\ln 2}{\mu}. \tag{2}$$

Для визначення коефіцієнта лінійного поглинання обчислимо енергію фотонів гамма-квантів:

$$W_ф = \frac{hc}{\lambda}. \tag{3}$$

Підставимо у вираз (3) числові значення фізичних величин та одержимо

$$W_ф = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{4,14 \cdot 10^{-13}} = 4,8 \cdot 10^{-13}\,(Дж) = 3\,(МеВ).$$

За таблицею 5.1 залежності лінійного коефіцієнта поглинання гамма-променів від їх енергії знаходимо $\mu = 0,039\ \left(см^{-1}\right)$.

Підставимо у вираз (2) числові значення $\ln 2$, коефіцієнта поглинання μ та одержимо

$$d_{1/2} = \frac{\ln 2}{3} = 0,178\,(м).$$

Таким чином, шар води товщиною $d_{1/2} = 0,178\,м$ зменшує інтенсивність γ-випромінювання з енергією $W_ф = 3\,МеВ$ удвічі.

Відповідь: $d_{1/2} = 0,178\,м$.

Задача_80

На поверхню води падає γ-випромінювання з довжиною хвилі $\lambda = 0,414\,пм$. На якій глибині інтенсивність випромінювання зменшується вдвічі?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$x - ?$
$\lambda = 0,414\,пм = 4,14 \cdot 10^{-13}\,м$; $I_0/I = 2$

Згідно із законом поглинання γ-випромінювання речовиною

$$I = I_0 e^{-\mu x}. \tag{1}$$

Розв'язуючи рівняння відносно x, обчислимо

$$x = \frac{1}{\mu}\ln\frac{I_0}{I}. \tag{2}$$

Для визначення коефіцієнта лінійного послаблення знайдемо енергію фотонів

$$W_ф = \frac{hc}{\lambda}. \tag{3}$$

Підставимо в (3) числові значення та одержимо

$$W_ф = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{4,14 \cdot 10^{-13}} = 4,8 \cdot 10^{-13}\,(Дж) = 3\,(МеВ).$$

За графіком на рисунку 5.1 знайдемо коефіцієнт поглинання води для енергії кванта $W_ф = 3\,(МеВ)$, він дорівнює $\mu = 0,02\,см^{-1} = 2\,м^{-1}$. Підставимо одержане значення у формулу (2):

$$x = \frac{1}{2}\ln 2 = 0,35\,(м).$$

Відповідь: $x = 0,35\,м$.

Задача_81

Іонний струм у циклотроні під час роботи з α-частинками $I = 15\,мкА$. У скільки разів такий циклотрон продуктивніший за $m = 1\,г$ радію $^{226}_{88}Ra$?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n_2/n_1 - ?$

$m = 1\,г = 10^{-3}\,кг,$
$I = 15\,мкА = 1,5\cdot10^{-5}\,А,$
$q_\alpha = 3,2\cdot10^{-19}\,Кл,$
$T_{1/2} = 1,62\cdot10^3\,р = 5,11\cdot10^{10}\,с$

Знайдемо, яку кількість α-частинок випромінює за 1 секунду $m = 1\,г$ радію. Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right).$$

Якщо проміжок часу $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для визначення кількості атомів, які розпалися, можна використовувати наближену формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t.$$

Кількість атомів, яка міститься в радіоактивному ізотопі, дорівнює

$$N = \frac{m}{M} N_A,$$

де m – маса ізотопу; M – його молярна маса; N_A – стала Авогадро.

Період півррозпаду пов'язаний зі сталою розпаду співвідношенням

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Тоді кількість α-частинок випромінює за 1 секунду m радію, що дорівнює

$$n_1 = \Delta N \approx \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{m}{M} N_A \Delta t.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та проведемо розрахунки:

$$n_1 = \frac{\ln 2}{5,11\cdot10^{10}} \cdot \frac{10^{-3}}{226\cdot10^{-3}} 6,02\cdot10^{23}\cdot 1 = 3,61\cdot10^{10}\left(c^{-1}\right).$$

Струм $I = 15\,мкА$ відповідає потоку α-частинок $n_2 = I/q_\alpha$

$$n_2 = 1,5\cdot10^{-5}/3,2\cdot10^{-19} = 4,7\cdot10^{13}\left(c^{-1}\right).$$

Таким чином, цей циклотрон продуктивніший за $m = 1\,г$ радію в

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{4,7\cdot10^{13}}{3,7\cdot10^{10}} = 1270 \text{ разів}.$$

Відповідь: $n_2/n_1 = 1270$.

Задача_82

Електрон і позитрон, утворені фотоном з енергією $W=5{,}7\,MeB$, рухаються в камері Вільсона, що міститься в магнітному полі, за траєкторіями з радіусом кривизни $R=3\,см$. Визначити магнітну індукцію B поля.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$n_2/n_1-?$

$W=5{,}7\,MeB=9{,}12\cdot10^{-13}\,Дж;$

$R=3\,см=0{,}03\,м$

Кінетична енергія електрона (позитрона) дорівнює $W_K=0{,}5(W-W_0)$, де W_0 – енергія спокою електрона. Енергія спокою електрона дорівнює $W_0=0{,}511\,MeB$.

На електрон (позитрон) у магнітному полі діє сила Лоренца, модуль якої дорівнює

$$qBv=\frac{mv^2}{R}\;\Rightarrow\;B=\frac{mv}{qR}\;\Rightarrow\;B=\frac{p}{qR}. \tag{1}$$

Згідно з теорією відносності імпульс частинки $p=mv$ пов'язаний з її кінетичною енергією співвідношенням

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{W_K\left(W_K+2m_0c^2\right)}, \tag{2}$$

де m_0 – маса спокою частинки.

Підставимо вираз (2) у співвідношення (1) та одержимо вираз для індукції магнітного поля, що діє на частинки в камері Вільсона:

$$B=\frac{1}{qcR}\sqrt{W_K\left(W_K+2m_0c^2\right)}\;\Rightarrow\;\frac{1}{qcR}\sqrt{0{,}5(W-W_0)\left(0{,}5(W-W_0)+2m_0c^2\right)}.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в одержаний вираз та проведемо розрахунки:

$$B=\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot3\cdot10^{8}\cdot3\cdot10^{-2}}\times$$

$$\times\sqrt{0{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-13}(5{,}7-0{,}511)\left(0{,}5\cdot1{,}6\cdot10^{-13}(5{,}7-0{,}511)+1{,}022\cdot1{,}6\cdot10^{-13}\right)}=$$

$$=\frac{1{,}6\cdot10^{-13}}{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot9\cdot10^{6}}\cdot\sqrt{0{,}5(5{,}7-0{,}511)\left(0{,}5(5{,}7-0{,}511)+1{,}022\right)}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\sqrt{2{,}59(2{,}59+1{,}022)}=0{,}34\,(Тл).$$

Відповідь: $B=0{,}34\,Тл$.

Задача_83

Позитрон та електрон анігілюють з утворенням двох фотонів. Визначити: а) енергію кожного з утворених фотонів за умови, що кінетична енергія електрона та позитрона до їх зіткнення дорівнювала нулю; б) довжину хвилі цих фотонів.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,кг$

Запишемо реакцію, яка відбулася:

$$e_{-1}^{0} + e_{1}^{0} \rightarrow 2\gamma .$$

Енергія γ-квантів, що утворилися, згідно з формулою Ейнштейна для зв'язку маси та енергії дорівнює

$$2W_\phi = 2m_e c^2 \;\;\Rightarrow\;\; W_\phi = m_e c^2 ,$$

де m_e – маса спокою електрона (позитрона); c – швидкість світла у вакуумі.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та визначимо енергію фотона:

$$W_\phi = 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(3 \cdot 10^{8}\right)^2 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}\,(Дж) = -0{,}51(МеВ).$$

Із формули для енергії фотона визначимо його довжину хвилі

$$W_\phi = \frac{hc}{\lambda} \;\;\Rightarrow\;\; \lambda = \frac{hc}{W_\phi},$$

де $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\, Дж/c$ – стала Планка.

Підставимо числові значення фізичних величин в одержане співвідношення та виконаємо обчислення:

$$\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{8{,}19 \cdot 10^{-14}} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,(м).$$

Відповідь: а) енергія кожного фотона – $W_\phi = 0{,}51 МеВ$; б) $\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-12}\, м$.

Задача_84

На який елемент перетворюється ${}^{238}_{92}U$ після трьох α - та двох β-перетворень?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Z' - ?$ $A' - ?$
$A = 238,$ $Z = 92$

Кожний альфа-розпад супроводжується зменшенням зарядового числа Z на 2 та зменшенням масового числа A на 4. Кожний бета-розпад призводить до збільшення зарядового числа Z на 1, а масове число A не змінюється. Таким чином, зарядове число Z' одержаного елемента дорівнює

$$Z' = Z - 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 92 - 6 + 2 = 88,$$

а масове число

$$A' = A - 3 \cdot 4 = 238 - 12 = 226.$$

Із таблиці Менделєєва бачимо, що цим елементом є радій ${}^{226}_{88}Ra$.

Відповідь: ${}^{226}_{88}Ra$.

Задача_85

Період піврозпаду ізотопу стронцію $^{90}_{38}Sr$ складає 28 років. Знайти середній час життя ядра цього ізотопу.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\tau - ?$
$T_{1/2} = 28\ років$

Кількість ядер $dN(t)$, що розпадаються за проміжок часу від t до $t+dt$, дорівнює

$$dN = -\lambda N dt, \tag{1}$$

де λ – стала розпаду.

Час життя кожного з цих ядер дорівнює t. Сума часів життя всіх N_0 ядер, які були при $t=0$, може бути отримана інтегруванням виразу $tdN(t)$. Розділивши результат на N_0, одержимо середній час життя радіоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t dN(t) = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N(t) dt = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty t\lambda N_0 \exp(-\lambda t) dt =$$
$$= \int_0^\infty t\lambda \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

З урахуванням того, що стала розпаду λ і період піврозпаду пов'язані співвідношенням

$$\lambda = \ln 2 / T_{1/2}, \quad \text{одержимо} \quad \tau = T_{1/2} / \ln 2. \tag{3}$$

Після підставлення числових значень величин у співвідношення (3) визначимо

$$\tau = \frac{28}{0,693} = 40,4 \text{ р.}$$

Відповідь: $\tau = 40,4$ року.

Задача_86

Середній час життя атомів деякої радіоактивної речовини $\tau = 1$ с. Визначити ймовірність ω того, що ядро атома розпадеться за проміжок часу $t = 1$ с.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$\tau = 1c$, $t = 1c$

За проміжок часу t розпадається кількість атомів

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left[1 - \exp(-\lambda t)\right] = N_0\left[1 - \exp(-t/\tau)\right],$$

де N – кількість атомів, що не розпалися за час t; N_0 – кількість атомів, що не розпалися, на момент, взятий за початковий (при $t = 0$); λ – стала радіоактивного розпаду; τ – середній час життя радіоактивних атомів.

Ймовірність розпаду одного атома дорівнює

$$\omega = \frac{\Delta N}{N_0} = 1 - \exp(-\frac{t}{\tau}).$$

Після підставлення числових значень у це співвідношення визначимо

$$\omega = 1 - \exp(-1) = 0,63.$$

Відповідь: $\omega = 0,63$.

Задача_87

Визначити початкову активність A_0 радіоактивного магнію ^{27}Mg масою $m = 0,2\,мкг$, а також його активність A через одну годину. Припустимо, що всі атоми ізотопу – радіоактивні.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$A_0 - ?\ \ A - ?$

$m = 0,2\,мкг = 2\cdot10^{-10}\,кг$,
$t = 1\,год = 3600\,с$,
$M = 27\cdot10^{-3}\,кг/моль$

Активність ізотопу у початковий момент часу ($t = 0$) дорівнює

$$A_0 = \lambda N_0, \qquad (1)$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Візьмемо до уваги, що стала розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \qquad (2)$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду, для ^{27}Mg $T_{1/2} = 10\,хв = 600\,с$.

Кількість атомів визначимо із співвідношення

$$N_0 = \frac{m}{M}N_A, \qquad (3)$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6,02\cdot10^{23}\,моль^{-1}$; M – молярна маса магнію.

З урахуванням виразів (2) і (3) співвідношення (1) набере вигляду

$$A_0 = \frac{mN_A}{MT_{1/2}}\ln 2. \qquad (4)$$

Активність ізотопу змінюється з часом за законом

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \qquad (5)$$

Замінимо у формулі (5) сталу розпаду її значенням (2) та одержимо

$$A = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}t} = A_0\left(e^{\ln 2}\right)^{-t/T_{1/2}} = \frac{A_0}{2^{t/T_{1/2}}}. \qquad (6)$$

Після підставлення числових значень у співвідношення (4) та (6) визначимо

$$A_0 = \frac{2\cdot10^{-10}\cdot6,02\cdot10^{23}}{27\cdot10^{-3}\cdot600}0,697 = 5,15\cdot10^{12}\,Бк = 5,15(ТБк).$$

$$A = \frac{5,15\cdot10^{12}}{2^{3600/600}} = 8,05\cdot10^{10}\,Бк = 80,5(ГБк).$$

Відповідь: $A_0 = 5,15\,ТБк$; $A = 80,5\,ГБк$.

Задача_88

Скільки ядер, що містяться в $m=1г$ тритію ${}_1^3H$ розпадеться за середній час життя цього ізотопу?

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta N - ?$
$m = 1г = 10^{-3}\,кг,$ $t = \tau,$ $M = 3\cdot 10^{-3}\,кг/моль$

Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \qquad (1)$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Середній час життя радіоактивного ізотопу обернено пропорційний сталі розпаду $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Кількість атомів, що розпалися за час $t = \tau$, дорівнює

$$\Delta N = N_0\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) = N_0\left(1 - e^{-1}\right). \qquad (2)$$

Кількість атомів у початковий момент часу визначимо із співвідношення

$$N_0 = \frac{m}{M}N_A, \qquad (3)$$

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6{,}02\cdot 10^{23}\,моль^{-1}$; M – молярна маса тритію.

З урахуванням виразів (3) співвідношення (2) набере вигляду

$$\Delta N = \frac{m}{M}N_A\left(1 - e^{-1}\right). \qquad (4)$$

Підставимо в (4) числові значення та одержимо

$$\Delta N = \frac{10^{-3}}{3\cdot 10^{-3}}6{,}02\cdot 10^{23}\left(1 - 2{,}72^{-1}\right) = 1{,}27\cdot 10^{23}.$$

Відповідь: $\Delta N = 1{,}27\cdot 10^{23}$.

Задача_89

Період піврозпаду $^{60}_{27}Co$ дорівнює $T_{1/2} = 5{,}3$ року. Визначити, яка частка початкової кількості ядер розпадеться за $t = 5$ років.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\Delta N - ?$
$t = 5$ *років*, $T_{1/2} = 5{,}3$ *року*

Кількість атомів, які розпалися за час t, дорівнює

$$\Delta N = N_0 - N = N_0\left(1 - e^{-\lambda t}\right), \qquad (1)$$

де λ – стала радіоактивного розпаду; N_0 – кількість атомів у початковий момент.

Частка початкової кількості ядер, що розпадеться за час t,

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Візьмемо до уваги, що стала розпаду

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \qquad (2)$$

де $T_{1/2}$ – період піврозпаду

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} t}.$$

За допомогою розрахунків одержимо

$$\frac{\Delta N}{N_0} = 1 - e^{-\frac{\ln 2}{5{,}3} 5} = 0{,}48.$$

Відповідь: $\Delta N / N_0 = 0{,}48$.

Задача_90

Визначити кількість теплоти, що вивільняється $m=1\,мг$ препарату ^{210}Po за період, що дорівнює середньому часу життя цих ядер. Кінетична енергія випромінюваних альфа-частинок дорівнює $W_K = 5{,}3\,МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$Q-?$

$m=1\,мг=10^{-6}\,кг,$

$t=\tau,$

$M=210\cdot10^{-3}\,кг/моль,$

$W_K=5{,}3\,МеВ=8{,}48\cdot10^{-13}\,Дж$

Початкова кількість радіонуклідів дорівнює

$$N_0=\frac{m}{M}N_A,$$

де m – маса препарату; M – його молярна маса.

Тоді кількість ядер, що розпалися, дорівнює

$$\Delta N=\frac{mN_A}{M}(1-e^{-\lambda\tau})=\frac{mN_A}{M}(1-\frac{1}{e}).$$

Середній час життя препарату визначається співвідношенням

$$\tau=\frac{1}{\lambda}.$$

Тоді кількість теплоти, що вивільняється за цей час, дорівнює

$$Q=\Delta N\cdot W_K=W_K\frac{mN_A}{M}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

Після підставлення числових значень фізичних величин в одержане співвідношення визначимо

$$Q=\frac{5{,}5\cdot10^{-3}1{,}6\cdot10^{-19}\cdot10^{-6}6{,}02\cdot10^{23}}{210\cdot10^{-3}}\left(1-\frac{1}{e}\right)\approx1{,}6\cdot10^{6}=1{,}6\,(МДж).$$

Відповідь: $Q=1{,}6\,МДж$.

Задача_91

Визначити дефект маси Δm, енергію зв'язку $W_{зв}$ та питому енергію зв'язку ядра ${}_{5}^{11}B$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Дефект маси ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n \right] - m_a,$$

де Z – зарядове число; А – масове число; m_p, m_n і m_a – маси протона, нейтрона та атома.

У нашому випадку $Z = 5$, $A = 11$. У таблицях визначимо маси протона m_p, нейтрона m_n та атома ${}_{5}^{11}B$ m_a:

$$m_p = 1{,}00728\, а.о.м.,$$

$$m_n = 1{,}00867\, а.о.м.,$$

$$m_a = 11{,}00931\, а.о.м.$$

Підставимо ці дані у формулу для дефекту маси та одержимо

$$\Delta m = 5 \cdot 1{,}00728 + (11 - 5) \cdot 1{,}00867 - 11{,}00931 = 0{,}08186\, а.о.м.$$

Енергія зв'язку нуклона в ядрі

$$W_{зв} = \Delta m c^2,$$

де $c^2 = 931{,}4\, МеВ/а.о.м.$

Розрахунки приводять до

$$W_{зв} = 0{,}08186 \cdot 931{,}4 = 76{,}2(МеВ) = 12{,}2(пДж).$$

Питома енергія зв'язку (енергія, що припадає на один нуклон) дорівнює

$$w_{зв} = \frac{W_{зв}}{A}.$$

За допомогою обчислень одержимо

$$w_{зв} = \frac{76{,}2}{11} = 6{,}93(МеВ/нуклон).$$

Відповідь: $\Delta m = 0{,}08186\, а.о.м.$; $W_{зв} = 12{,}2\, пДж$; $w_{зв} = 6{,}93\, МеВ/нуклон$.

Задача_92_1

Знайти енергію реакції ${}_{4}^{9}Be + {}_{1}^{1}p \to {}_{2}^{4}He + {}_{3}^{6}Li$, якщо відомо, що кінетична енергія протона $W_p = 5,45\,MeB$, ядра гелію $W_{He} = 4\,MeB$ і що ядро гелію вилетіло під кутом $\alpha = 90^0$ до напряму руху протона. Ядро-мішень ${}_{4}^{9}Be$ нерухоме.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$
$W_p = 5,45\,MeB$,
$W_{He} = 4\,MeB$,
$\alpha = 90^0$

Енергія реакції Q є різницею між сумою кінетичних енергій ядер-продуктів реакції та кінетичною енергією ядра, що викликає реакцію

$$Q = E_{Li} + E_{He} - E_p. \qquad (1)$$

У цьому виразі невідома кінетична енергія $m_B = 50\text{т}$ літію. Для її визначення скористаємося законом збереження імпульсу

$$\vec{p}_p = \vec{p}_{He} + \vec{p}_{Li}. \qquad (2)$$

Вектори $\vec{p}_H$ і $\vec{p}_{He}$ за умовою задачі взаємно перпендикулярні і, отже, разом з вектором $\vec{p}_{Li}$ утворюють прямокутний трикутник. Тому

$$(p_{Li})^2 = (p_{He})^2 + (p_p)^2. \qquad (3)$$

Виразимо в цій рівності імпульси ядер через їх кінетичні енергії. Оскільки кінетичні енергії ядер за умовою набагато менші від енергій спокою цих ядер, то можна скористатися формулою класичної фізики

$$p^2 = 2mE. \qquad (4)$$

Замінивши в рівнянні (3) квадрати імпульсів ядер їх виразами (4), після спрощення одержимо

$$m_{Li}E_{Li} = m_{He}E_{He} + m_p E_p,$$

звідси

$$E_{Li} = \frac{m_{He}E_{He} + m_p E_p}{m_{Li}}.$$

Задача_92_2

Підставивши цей вираз у співвідношення (1), визначимо

$$Q = \frac{m_{He}E_{He} + m_p E_p}{m_{Li}} + E_{He} - E_H. \qquad (5)$$

Після підставлення у вираз (5) числових значень величин у МеВ та а. о. м., одержимо

$$Q = \frac{4,00260 \cdot 4 + 1,00728 \cdot 5,45}{6,01513} + 4 - 5,45 = 2,13\left(MeB\right).$$

Відповідь: $Q = 2,13\,MeB$.

Задача_93

Радіоактивне ядро магнію ${}^{23}_{12}Mg$ викинуло позитрон і нейтрино. Визначити енергію Q β^{+}-розпаду ядра.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Реакцію β^{+}-розпаду ядра магнію можна записати так:

$${}^{23}_{12}Mg \to {}^{23}_{11}Na + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu .$$

Припускаючи, що ядро магнію було нерухомим, і враховуючи, що маса спокою нейтрино практично дорівнює нулю, напишемо рівняння енергетичного балансу. На підставі закону збереження релятивістської повної енергії маємо

$$m_{Mg}c^2 = m_{Na}c^2 + E_{Na} + m_e c^2 + E_e + E_\nu . \quad (1)$$

Енергія розпаду дорівнює

$$Q = E_{Na} + E_e + E_\nu = \left(m_{Mg} - m_{Na} - m_e\right)c^2 . \quad (2)$$

Виразимо маси ядер магнію і натрію через маси відповідних нейтральних атомів:

$$Q = \left(\left(m_{Mg} - 12m_e\right) - \left(m_{Na} - 11m_e\right) - m_e\right)c^2 . \quad (3)$$

Оскільки маси спокою електрона і позитрона однакові, то після спрощень співвідношення (3) одержимо

$$Q = \left(m_{Mg} - m_{Na} - 2m_e\right)c^2 .$$

У таблицях визначимо маси електрона, ізотопів магнію та натрію:

$$m_e = 0{,}00055\,а.\,о.\,м.;\; m_{{}^{23}_{12}Mg} = 22{,}99414\,а.\,о.\,м.;\; m_{{}^{23}_{11}Na} = 22{,}98977\,а.\,о.\,м.$$

Підставимо числові значення фізичних величин з урахуванням, що $c^2 = 931{,}4\ МеВ/а.\,о.\,м.$, та проведемо розрахунки:

$$Q = (22{,}99414 - 22{,}98977 - 2 \cdot 0{,}00055) \cdot 931{,}4 = 3{,}05(МеВ).$$

Відповідь: $Q = 3{,}05\ МеВ$.

Задача_94_1

Яку масу води, взятої при $0\,^0C$, можна закип'ятити використовуючи енергію термоядерного синтезу гелію з дейтерієм і тритієм, якщо ККД перетворення енергії дорівнює $\eta = 10\,\%$? Маса гелію, що утворився, $m = 1\,г$.

$m - ?$
$\eta = 10\%$,
$m = 1\,г = 10^{-3}\,кг$,
$T = 0^0\,C$,
$C = 4200\,Дж/(моль \cdot К)$

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Запишемо рівняння ядерної реакції синтезу гелію:

$${}_1^2H + {}_1^3H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n.$$

Маса спокою частинок, що утворилися, менша за масу спокою частинок, що вступили в реакцію, тому в процесі синтезу ядер вивільниться енергія

$$Q_0 = \left(m_{{}_1^2H} + m_{{}_1^3H} - m_{He} - m_n\right)c^2. \qquad (1)$$

При одиничному акті термоядерного синтезу вивільняється енергія Q_0 і витрачається маса $T_{1/2} = 0{,}76$ дейтерію і тритію. Отже, використавши паливо масою m, ми вивільнимо енергію

Задача_94_2

$$Q = Q_0 \frac{m}{m_0}. \qquad (2)$$

Вода при цьому отримає кількість теплоти

$$Q_B = \eta Q. \qquad (3)$$

Використавши зв'язок між кількістю теплоти і теплоємністю води, можна записати

$$Q_A = C m_B \Delta t. \qquad (4)$$

Прирівнявши співвідношення (3) та (4), одержимо

$$\eta Q = C m_B \Delta t,$$

звідси

$$m_B = \frac{\eta Q}{C \Delta t}. \qquad (5)$$

Підставивши в цей вираз співвідношення (1) та (2), одержимо остаточно

$$m_B = \frac{\eta\left(m_{{}^2_1H} + m_{{}^3_1H} - m_{He} - m_n\right)c^2}{C m_0 \Delta t}. \qquad (69)$$

Після підставлення числових значень у цей вираз визначимо

$$m_B = \frac{0{,}1 \cdot (2{,}01410 + 3{,}01605 - 4{,}00260 - 1{,}00867) \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot \left(3 \cdot 10^8\right)^2}{4190 \cdot 5 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 100} = 5 \cdot 10^4 (кг).$$

Це у 50 млн разів більше за масу термоядерного палива, яке було використане на нагрівання!

Відповідь: $m_B = 50$ т.

Задача_95_1

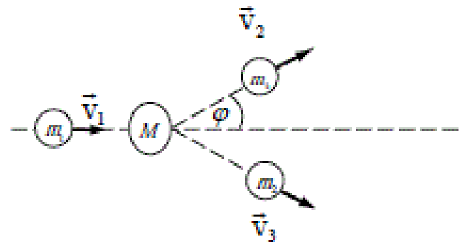
У реакції ${}^{14}_{7}N(\alpha,p){}^{17}_{8}O$ кінетична енергія α-частинки дорівнює $W_\alpha = 7,7\,MeB$. Визначити, під яким кутом до напрямку руху α-частинки вилітає протон, якщо відомо, що його кінетична енергія дорівнює $W_p = 7,7\,MeB$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$\omega - ?$

$W_\alpha = 7,7\,MeB,$

$W_p = 8,5\,MeB$



Позначимо, як показано на рисунку m_1, m_2, m_3, масові числа відповідно α-частинки, протона та ядра віддачі (в нашому випадку це ядро атома кисню), W_1, W_2, W_3 – їх кінетичні енергії. Оскільки ядро атома азоту не рухається (його масове число дорівнює M), то закон збереження енергії має вигляд

$$W_1 + Q = W_2 + W_3, \tag{1}$$

де Q – енергія ядерної реакції.

Запишемо закон збереження імпульсу

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{p}_3. \tag{2}$$

З рівняння (2) та рисунка маємо для числових значень імпульсу

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 - 2p_1p_2\cos\varphi. \tag{3}$$

Оскільки

$$p^2 = (m\text{v})^2 = \frac{m\text{v}^2}{2}2m = W2m,$$

то рівняння (3) набере вигляду

$$2m_3W_3 = 2m_1W_1 + 2m_2W_2 - 2\cos\varphi\sqrt{2m_1W_12m_2W_2}$$

Задача_95_2

або

$$W_3 = \frac{m_1}{m_3} W_1 + \frac{m_2}{m_3} W_2 - \frac{2\cos\varphi}{m_3} \sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}. \qquad (4)$$

Виключимо з (1) та (4) енергію W_3 та одержимо формулу, що пов'язує кінетичну енергію частинок, які бомбардують, із кінетичною енергією одержаних частинок:

$$W_1 \left(\frac{m_3 - m_1}{m_3} \right) + Q = W_2 \left(\frac{m_2 + m_3}{m_3} \right) - \frac{2\cos\varphi}{m_3} \sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}. \qquad (6)$$

Визначимо енергію ядерної реакції

$$Q = \left[(m_1 + M) - (m_2 + m_3) \right] c^2. \qquad (7)$$

Розв'яжемо рівняння (6) відносно $\cos\varphi$ та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{m_2 + m_3}{2} \sqrt{\frac{W_2}{m_1 m_2 W_1}} - \frac{m_3 - m_1}{2} \sqrt{\frac{W_1}{m_1 m_2 W_2}} - \frac{m_3 Q}{2\sqrt{m_1 m_2 W_1 W_2}}. \qquad (8)$$

Візьмемо значення мас частинок, що беруть участь у реакції, з таблиць та підрахуємо енергію реакції:

$$m_1 = 4{,}00388\, а.\,о.\,м.,\ M = 14{,}00752\, а.\,о.\,м.,$$
$$m_2 = 1{,}00814\, а.\,о.\,м.,\ m_3 = 17{,}00453\, а.\,о.\,м.$$

$$Q = \left[(4{,}00388 + 14{,}00752) - (1{,}00814 + 17{,}00453) \right] 931{,}4 = -1{,}183 (МеВ).$$

Підставимо числові значення у співвідношення (8) та одержимо

$$\cos\varphi = \frac{1+17}{2} \sqrt{\frac{8{,}5}{4 \cdot 1 \cdot 7{,}7}} - \frac{17-4}{2} \sqrt{\frac{7{,}7_1}{4 \cdot 1 \cdot 8{,}5}} - \frac{17 \cdot (-1{,}183)}{2\sqrt{4 \cdot 1 \cdot 7{,}7 \cdot 8{,}5}} = 0{,}59.$$

$$\varphi = arctg 0{,}59 = 30{,}5^0.$$

Відповідь: $\varphi = 30{,}5^0$.

Задача_96_1

Яка енергія вивільняється при згорянні $m = 1\,г$ ядерного пального в термоядерній реакції ${}_{3}^{6}Li\left({}_{1}^{2}H,\alpha\right){}_{2}^{4}He$? Порівняти одержаний результат з енергією, яку можна отримати під час розпаду $m = 1\,г$ урану ${}^{235}U$. При кожному акті розпаду ядра ${}^{235}U$ вивільняється енергія $W_1 = 200\,МеВ$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

$W_{Li} - ?$ $W_U - ?$
$m = 1\,г = 10^{-3}\,кг,$ $W_1 = 200\,МеВ$

Запишемо рівняння термоядерної реакції

$${}_{3}^{6}Li + {}_{1}^{2}H \rightarrow {}_{2}^{4}\alpha + {}_{2}^{4}He.$$

Енергію, яка вивільняється під час цієї реакції, можна визначити із співвідношення

$$Q = \Delta m c^2, \qquad (1)$$

де $c^2 = 931{,}4\,МеВ/а.о.м.$ для дефекту маси виміряної в $а.о.м.$

Дефект маси дорівнює $\Delta m = \left(m_{{}_{3}^{6}Li} + m_{{}_{1}^{2}H}\right) - 2m_{{}_{2}^{4}He}$. У таблицях додатку Б визначимо маси частинок, що беруть участь у реакції:

$$m_{{}_{3}^{6}Li} = 6{,}01513\,а.о.м.; \quad m_{{}_{1}^{2}H} = 2{,}01410\,а.о.м.; \quad m_{{}_{2}^{4}He} = 4{,}00260\,а.о.м.$$

Підставимо ці дані у формулу для дефекту маси та одержимо

$$\Delta m = (6{,}01513 + 2{,}01410) - 4{,}00260 = 0{,}024\,(а.о.м.).$$

При одиничному акті термоядерного синтезу вивільняється енергія

$$Q = 0{,}024 \cdot 931{,}4 = 22{,}38\,(МеВ)$$

і витрачаються маси літію ${}_{3}^{6}Li$ та дейтерію у співвідношенні 3:1. Отже, з $m = 1\,г$ на літій ${}_{3}^{6}Li$ припадає $m_1 = 0{,}75\,г = 0{,}75 \cdot 10^{-3}\,кг$.

Кількість атомів ${}_{3}^{6}Li$ визначимо із співвідношення

$$N_{Li} = \frac{m_1}{M_{Li}} N_A, \qquad (2)$$

Задача_96_2

де N_A – стала Авогадро (кількість атомів в одному молі речовини), $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ моль^{-1}$; M_{Li} – молярна маса літію ${}^{6}_{3}Li$, $M_{Li} = 6 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

Таким чином, кількість актів термоядерного синтезу N. Енергія, що при цьому вивільняється, дорівнює

$$W_{Li} = NQ = \frac{m_1}{M_{Li}} N_A Q.$$

За допомогою обчислень одержимо

$$W_{Li} = \frac{0{,}75 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 22{,}38 = 16{,}84 \cdot 10^{23}\,(МеВ)$$

або

$$W_{Li} = 16{,}84 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} = 2{,}69 \cdot 10^{11}\,(Дж) = 2{,}69 \cdot 10^{5}\,(МДж).$$

Визначимо, яка кількість атомів міститься в $m = 1г$ урану ${}^{235}U$:

$$N_U = \frac{m}{M_U} N_A. \qquad (2)$$

Молярна маса урану ${}^{235}U$, $M_U = 235 \cdot 10^{-3}\ кг/моль$.

Енергія, що вивільняється при розпаді N_U атомів урану, дорівнює

$$W_U = N_U W_1 = \frac{m}{M_U} N_A W_1.$$

Підставимо числові значення фізичних величин в останній вираз та одержимо

$$W_U = \frac{10^{-3}}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 200 = 5{,}12 \cdot 10^{23}\,(МеВ),$$

$$W_U = 5{,}12 \cdot 10^{23} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-13} = 8{,}2 \cdot 10^{10}\,(Дж) = 0{,}82 \cdot 10^{5}\,(МДж).$$

Таким чином, енергія, що вивільняється при згорянні $m = 1г$ ядерного пального в термоядерній реакції ${}^{6}_{3}Li\left({}^{2}_{1}H,\alpha\right){}^{4}_{2}He$ у 3,28 раза більша за енергію, яку можна отримати під час розпаду $m = 1г$ урану ${}^{235}U$.

Відповідь: $W_{Li} = 2{,}69 \cdot 10^{5}\ МДж$; $W_U = 0{,}82 \cdot 10^{5}\ МДж$.

Задача_97

Запропонований Бете вуглецевий цикл зоряних термоядерних реакцій містить такі перетворення:

$$^{1}H+{}^{12}C\rightarrow{}^{13}N+\gamma; \qquad {}^{1}H+{}^{14}N\rightarrow{}^{15}O+\gamma;$$
$$^{13}N\rightarrow{}^{13}C+{}^{0}_{1}e+\nu_e; \qquad {}^{15}O\rightarrow{}^{15}N+{}^{0}_{1}e+\nu_e;$$
$$^{1}H+{}^{13}C\rightarrow{}^{14}N+\gamma; \qquad {}^{1}H+{}^{15}N\rightarrow{}^{12}C+{}^{4}He.$$

Визначити енергію, що вивільняється в цьому циклі при утворенні одного моля гелію. Врахувати, що з кожним нейтрино втрачається енергія $W_{\nu_e}=0,527\,MeB$.

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Додамо окремо частини рівнянь, що містяться ліворуч та праворуч від знака $\rightarrow$:

$$4\,{}^{1}H+{}^{12}C+{}^{14}N+{}^{13}N+{}^{15}O+{}^{13}C+{}^{15}N\rightarrow$$
$$\rightarrow{}^{13}N+{}^{15}O+{}^{13}C+2{}^{0}_{1}e+{}^{15}N+{}^{14}N+{}^{12}C+{}^{4}He+2\nu_e,$$
$$4\,{}^{1}H\rightarrow 2{}^{0}_{1}e+{}^{4}He+2\nu_e.$$

При такому перетворенні вивільняється енергія

$$Q=\Delta mc^2=\left(4m_H-m_{He}-2m_e\right)c^2-2\cdot 0,527,$$

де $c^2=931,4\,MeB/a.\,o.\,м.$ для дефекту маси, виміряної в $a.\,o.\,м.$; $2\cdot 0,527\,MeB$ – енергія електронного нейтрино.

У таблицях додатка Б визначимо маси частинок, що беруть участь у реакції:

$$m_{{}^{1}_{1}H}=1,00783\,a.\,o.\,м.; \quad m_{{}^{4}_{2}He}=4,00260\,a.\,o.\,м.; m_e=0,00055\,a.\,o.\,м.$$
$$Q=\left(4\cdot 1,00783-4,00260-2\cdot 0,00055\right)931,4-2\cdot 0,527=24,67\,MeB.$$

В одному молі речовини число Авогадро молекул $N_A=6,02\cdot 10^{23}\,моль^{-1}$. Таким чином, енергія, що вивільняється в циклі Бете при утворенні одного моля гелію, дорівнює

$$W=24,67\cdot 6,02\cdot 10^{23}=1,485\cdot 10^{25}\,(MeB)=2,38\,(TДж).$$

Відповідь: $W=2,38\,TДж$.

Задача_98

Визначити

енергію зв'язку ядра, яке має однакову кількість протонів і нейтронів, а його радіус у k = 1,5 разів менший, ніж у ядра ^{27}Al. Вважати середню густину ядерної речовини однаковою для всіх ядер.

Маси:

протона m_p = 1,00867 а.о.м.,

нейтрона m_n = 1,00728 а.о.м.,

ядра ^{27}Al m_{Al} = 26,96661 а.о.м.

Дано:
k = 1,5
m_{Al} = 26,96661 а.о.м.

$E_{зв}$ - ?

Розв'язання

З урахуванням рівності кількості протонів і нейтронів ($Z = N\ A - Z$), формула **(21.7 б)** для енергії зв'язку ядра набуває вигляду:

$$E_{зв} = (N(m_p + m_n) - m) \cdot 931,5, \qquad \textbf{(1)}$$

де m_p, m_n, m – маса протона, нейтрона і ядра, виражена в а.о.м.

Таким чином, розв'язування задачі зводиться до визначення m і N. Обидві величини знайдемо з умови незмінності середньої густини ядерної речовини $\rho = m/V$ (V – об'єм ядра):

$$\frac{m}{V} = \frac{m_{Al}}{V_{Al}} \Rightarrow \frac{m}{m_{Al}} = \frac{V}{V_{Al}}. \qquad \textbf{(2)}$$

Будемо вважати ядра кулями, тоді $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ і $V_{Al} = \frac{4}{3}\pi(kR)^3$. Врахувавши, що за умовою $k = 3/2$, із співвідношення **(2)** отримуємо:

$$m = \frac{8}{27} m_{Al}. \qquad \textbf{(3)}$$

Маса ядра приблизно дорівнює добутку маси одного нуклона $m_н$ на їх кількість у ядрі A. Тому $m = 2Nm_н$, $m_{Al} = 27m_н$ (27 – масове число для ^{27}Al). Підставивши ці значення у вираз **(2)**, знаходимо

$$2Nm_н = \frac{8}{27} 27m_н \Rightarrow N = 4.$$

Знайдені значення N і m (формула **(3)**) підставляємо у формулу **(1)** і остаточно одержуємо:

$$E_{зв} = \left(4(m_p + m_n) - \frac{8}{27} m_{Al}\right) \cdot 931,5.$$

Виконаємо обчислення:

$$E_{зв} = \left(4(1,00728 + 1,00867) - \frac{8}{27} \cdot 26,96661\right) \cdot 931,5 = 68,6 \text{ МеВ}.$$

Задача_99

За допомогою табличних значень мас ядер нуклідів та протона й нейтрона

$m_{Li} = 7{,}01601$	$m_{Be} = 7{,}01693$
$m_{O} = 15{,}99491$	$m_{H} = 2{,}01410$
$m_{He} = 4{,}00260$	$m_{N} = 14{,}00307$
$m_{p} = 1{,}00728$	$m_{n} = 1{,}00867$

(маси подані в а.о.м.)

Визначити

енергію Q наступних реакцій:

1) ${}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{1}_{1}p \to {}^{1}_{0}n + {}^{7}_{4}\mathrm{Be}$;

2) ${}^{16}_{8}\mathrm{O} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \to {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{14}_{7}\mathrm{N}$

Розв'язання

Згідно з наведеними числовим даними, енергетичний вихід ядерної реакції слід визначати за формулою **(21.7a)**, враховуючи при цьому енергетичний еквівалент $c^2 \cdot 1$ а.о.м. = 931,5 МеВ

$$Q = \Delta m \cdot 931,5 \text{ МеВб}$$

де $\Delta m = m_1 - m_2$ – різниця сумарних мас вихідних та кінцевих ділянок учасників реакції.

Для реакції **1)**

$$Q = ((7{,}01601 + 1{,}00728) - (1{,}00867 + 7{,}01693))\cdot 931{,}5 = -1{,}64 \text{ МеВ.}$$

Знак "–" свідчить про те, що дана реакція йде з поглинанням енергії (**ендотермічна реакція**), тобто вихідним продуктам необхідно надавати енергію, щоб дана реакція стала можлива. Звичайно кінетичну енергію надають більш легким частинкам (тут це протон), розганяючи їх в прискорювачах.

Для випадку **2)**

$$Q = ((15{,}99491 + 2{,}01410) - (4{,}0026 + 14{,}00307)\cdot 931{,}5 = 3{,}11 \text{ МеВ.}$$

В цій реакції енергія виділяється, і її називають **екзотермічною реакцією**.

Задача_100

У приведених нижче рівняннях ядерних реакцій:

а) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{1}_{0}n \rightarrow X + ^{4}_{2}\mathrm{He}$;

б) $^{12}_{6}\mathrm{C} + X \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C}$;

в) $^{56}_{25}\mathrm{Mn} \rightarrow \mathrm{X} + ^{0}_{-1}e$.

Визначити

не вказані частинки X.

Розв'язання

У будь-якій ядерній реакції зберігаються зарядове Z і масове A числа:

$$\sum_i Z_{ni} = \sum_i Z_{ki}, \quad \sum_i Z_{ni} = \sum_i A_{ki},$$

де індекс "n" відповідає початковому значенню, "k" – кінцевому. Виконавши відповідні підрахунки для заданих реакцій, знаходимо:

а) $^{27}_{13}\mathrm{Al} + ^{1}_{0}n \rightarrow X + ^{4}_{2}\mathrm{He}$ $\qquad$ $^{24}_{11}\mathrm{X} = ^{24}_{11}\mathrm{Na}$

б) $^{12}_{6}\mathrm{C} + X \rightarrow ^{13}_{6}\mathrm{C}$ $\qquad$ $^{1}_{0}\mathrm{X} = ^{1}_{0}n$

в) $^{56}_{25}\mathrm{Mn} \rightarrow \mathrm{X} + ^{0}_{-1}e$ $\qquad$ $^{56}_{26}\mathrm{X} = ^{56}_{26}\mathrm{Fe}$

Задача_101

Вважаючи, що в одному акті поділу ядра ^{235}U вивільняється енергія E = 200 МеВ,

визначити:

А) енергію W, що виділяється при поділі m_U = 1 кг урану ^{235}U;

Б) масу m кам'яного вугілля з теплотворною здатністю q = 30 МДж/кг яка еквівалентна в тепловому відношенні одному кілограму ^{235}U.

Дано:
^{235}U
E = 200 МеВ
m_U = 1 кг
q = 30 МДж/кг
W - ?
m - ?

Розв'язання

Енергія, що виділяється при поділі одного кілограма урану дорівнює

$$W = N \cdot E, \qquad \textbf{(1)}$$

де N – кількість атомів, що розпалися.

Число N знайдемо на підставі виразів **(7.3)** і **(7.6)**:

$$\nu = \frac{m_U}{M} = \frac{N}{N_0} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{m_U}{M} N_0, \qquad \textbf{(2)}$$

де $M = 235 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – атомна маса урану, $N_0 = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – стала Авагадро. Підставивши значення N (формула **(2)**) у вираз **(1)**, одержимо:

$$W = \frac{m_U}{M} N_0 \cdot E = \frac{1}{235 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \cdot 200 = 5,12 \cdot 10^{26} \text{ МеВ} = 8,2 \cdot 10^{13} \text{ Дж}.$$

При згорянні вугілля маси m виділяється кількість тепла (формула **(8.18)**)

$$Q = qm \quad \Rightarrow \quad m = \frac{Q}{q}.$$

За умовою енергії, що виділяються, однакові $Q = W$, тому еквівалентна маса вугілля

$$m = \frac{W}{q} = \frac{8,2 \cdot 10^{13}}{30 \cdot 10^{6}} = 2,37 \cdot 10^{6} \text{ кг} = 2733 \text{ т}.$$

Задача_102

З ядер дейтерію (^{2}H) утворився гелій ^{4}He масою m_{He} = 1 г.

Визначити:

А) енергію Q, що при цьому виділилася;

Б) масу m кам'яного вугілля з теплотворною здатністю q = 30 МДж/кг, яку потрібно спалити для одержання такої ж кількості теплової енергії.

Дано:	**Розв'язання**
^{2}H ^{4}H m_{He} = 1 г q = 30 МДж/кг	Реакція утворення більш важких нуклідів з легких називається реакцією синтезу. Схема цієї реакції має вигляд: $${}^2_1\mathrm{H} + {}^2_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He}.$$
Q - ? m - ?	Енергія реакції дорівнює

$$E = (2m_H - m_{He})\cdot 931{,}5 \text{ МеВ},$$

де m_H = 2,01410 а.о.м. – маса ядра дейтерію, m_{He} = 4,0026 а.о.м. – маса ядра гелію.

Виконаємо обчислення

$$E = (2\cdot 2{,}01410 - 4{,}00260)\cdot 931{,}5 = 23{,}846 \text{ МеВ}.$$

В одному грамі гелію міститься кількість атомів (дивись формули **(7.3)**, **(7.6)**)

$$N = \frac{m_{\mathrm{He}}}{M} N_0 = \frac{10^{-3}}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{23} = 1,505 \cdot 10^{23},$$

тому загальна енергія, що виділилася, складає

$$Q = E \cdot N = 3,59 \cdot 10^{24} \text{ МеВ} = 5,74 \cdot 10^{11} \text{ Дж}.$$

Для одержання такої ж енергії з вугілля, необхідно спалити масу вугілля

$$m = \frac{Q}{q} = \frac{5,74 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^{7}} = 19140 \text{ кг} = 19{,}14 \text{ т}.$$

Зауваження. Якщо порівняти результати цієї і попередньої задач, то стане очевидно, що термоядерна реакція (реакція синтезу) у багато разів ефективніша, ніж реакція поділу урану.

Задача_103

Визначити

енергетичний вихід Q реакції, якщо кінетична енергія α—частинки, що налітає, $T_\alpha = 4,0$ МеВ, а утворений протон вилітає під кутом $\theta = 60^\circ$ до напрямку руху α—частинки і має кінетичну енергію T_p = 2,09 МеВ.

Дано:
T_α = 4,0 МеВ
θ = 60°
T_p = 2,09 МеВ
Q - ?

Розв'язання

Енергетичний вихід ядерної реакції можна визначити як різницю сумарної кінетичної енергії частинок, що утворилися в реакції, і сумарної кінетичної енергії вихідних ядер (формула **(21.16а)**):

$$Q = (T_p + T_O) - (T_N + T_\alpha) = T_p + T_O - T_\alpha. \qquad \textbf{(1)}$$

Тут враховано, що ядро Нітрогену до реакції перебувало у спокої.

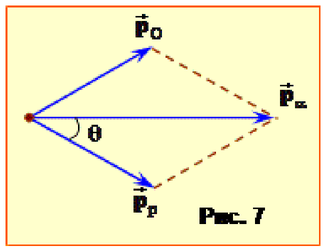


Рис. 7

Таким чином, для отримання відповіді необхідно визначити кінетичну енергію ядра ^{17}O. Для цього скористаємося законом збереження імпульсу:

$$\vec{p}_\alpha = \vec{p}_p + \vec{p}_O, \qquad \textbf{(2)}$$

де $\vec{p}_\alpha, \vec{p}_p, \vec{p}_O$ – вектори імпульсу відповідно α—частинки, протона і Оксигену. Векторному рівнянню **(2)** відповідає діаграма імпульсів на **рис.**7. З неї очевидно, що модуль вектора $\vec{p}_O$ легко визначити за теоремою косинусів:

$$p_O^2 = p_\alpha^2 - 2p_p p_\alpha \cos\theta.$$

Модуль імпульсу і кінетична енергія T зв'язані співвідношенням $p^2 = 2mT$ (див. формулу **(4.3б)**), тому

$$2m_O T_O = 2m_p T_p - 4\sqrt{m_\alpha m_p T_\alpha T_p}\cos\theta.$$

Звідси

$$T_0 = \eta_p T_p + \eta_\alpha T_\alpha - 2\sqrt{\eta_\alpha \eta_p T_\alpha T_p}\cos\theta,$$

де введені позначення $\eta_p = \dfrac{m_p}{m_O} = 5,9287 \cdot 10^{-2}$, $\eta_\alpha = \dfrac{m_\alpha}{m_O}$ = 0,23546.

Підставивши вираз T_O в формулу **(1)**, знаходимо

$$Q = (1+\eta)T_p - (1-\eta_\alpha)T_\alpha - 2\sqrt{\eta_\alpha \eta_p T_\alpha T_p}\cos\theta = -1,2 \text{ МеВ}.$$

Задача_104

В урановій руді відношення кількості ядер ^{238}U до кількості ядер ^{206}Pb складає $\eta = 2,8$.

Оцінити

вік τ уранової руди.

Період піврозпаду ^{238}U $T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років. Вважати, що весь Плюмбум ^{206}Pb є кінцевим продуктом розпаду урану.

Дано:
$\eta = 2,8$
$T_{1/2} = 4,5 \cdot 10^9$ років
τ - ?

Розв'язання

Число радіоактивних ядер, що не розпалися на момент часу τ, визначається законом радіоактивного розпаду **(21.11)**:

$$N_U = N_0 e^{-\lambda\tau}$$

де N_o – число вихідних ядер, λ – стала розпаду.

Із співвідношень **(21.12)** і **(21.14)** випливає, що

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

Тоді можна записати:

$$N_U = N_0 e^{-\frac{\tau \ln 2}{T}} = N_0 \cdot 2^{-\frac{\tau}{T}}. \qquad \textbf{(1)}$$

Число ядер, що розпалися, яке дорівнює числу ядер свинцю Pb, що утворилися:

$$N_{Pb} = N_0 - N = N_0(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}). \qquad \textbf{(2)}$$

Розділивши вирази **(1)** на **(2)**, одержимо:

$$\eta = \frac{N_U}{N_{Pb}} = \frac{1}{2^{-\frac{\tau}{T}} - 1} \quad \Rightarrow \quad 2^{\frac{\tau}{T}} = \frac{\eta + 1}{\eta}.$$

Із цього виразу після логарифмування отримуємо

$$\tau = T \cdot \frac{\ln \frac{\eta+1}{\eta}}{\ln 2} \approx 2 \cdot 10^9 \text{ років.}$$

Задача_105

У калориметр вмістили β–радіоактивний препарат ^{24}Na масою m = 1 мг. Період піврозпаду препарату T = 15 годин

Оцінити

кількість тепла Q, що виділяється в калориметрі за добу. Вважати, що всі частинки мають кінетичну енергію, рівну $\eta = 1/3$ максимально можливої в цій реакції.

Енергія зв'язку: ядра ^{24}Na E_1 = 193,5 МеВ ядра ^{24}Mg E_2 = 198,3 МеВ.

Дано:
m = 1 мг = 10^{-6} кг
T = 15 годин
η = 1/3
E_1 = 193,5 МеВ
E_2 = 198,3 МеВ

Q - ?

Розв'язання

Згідно з виразом **(21.10)** реакція β–розпаду ^{24}Na має вигляд

$$^{24}_{11}\mathrm{Na} \to {}^{24}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{0}_{-1}e.$$

Енергетичний вихід реакції Q_1 через енергії зв'язку визначається формулою **(21.18)**:

$$Q_1 = E_2 - E_1 = 4,8 \text{ МеВ}.$$

В реакції β–розпаду крім електрона ${}^{0}_{-1}e$ утворюється ще одна елементарна частинка – антинейтрино, яка не показана в схемі реакції **(21.10)**. Антинейтрино відносить енергію, що може мати величину від 0 і аж до Q_1. Тому Q_1 є максимально можливою енергією електрона, а її середнє значення набагато менше і, згідно з умовою, становить

$$Q' = Q/3 = 1,6 \text{ МеВ} = 2,56 \cdot 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Кінетичну енергію ядра ^{24}Mg можна не брати до уваги. Справді, згідно з законом збереження імпульсу, імпульси ядра ^{24}Mg та електрона за величиною однакові. Тому відношення їх кінетичних енергій (формула **(4.3б)**

$$T_я/T_e = m_e/m_я = 0,00055/24 = 2 \cdot 10^{-5}.$$

Загальна енергія, що виділяється в калориметрі, дорівнює енергії Q', помноженій на кількість ядер N', що розпалися:

$$Q = Q'N'. \qquad \textbf{(1)}$$

Відповідно до закону розпаду **(21.15)** число ядер, що розпалися $N' = N - N_0$, визначається виразом:

$$N' = N_0\left(1 - e^{-\lambda\tau}\right) = N_0\left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}\right). \qquad \textbf{(2)}$$

Кількість ядер ^{24}Na у початковий момент N_0 знаходимо згідно з основними положеннями молекулярно-кінетичної теорії (формули **(7.3)** і **(7.6)**):

$$N_0 \frac{m}{M} N_A, \qquad \textbf{(3)}$$

де $M = 24 \cdot 10^{-3}$ кг/моль – молярна маса ізотопу ^{24}Na, $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль – стала Авогадро.

Підставивши значення **(3)** у вираз **(2)**, а його – у формулу **(1)**, дістанемо:

$$Q = Q'N' = Q'\frac{m}{M}N_A\left(1 - 2^{-\frac{\tau}{T}}\right) =$$

$$=2,56 \cdot 10^{-13} \cdot \frac{10^{-6}}{24 \cdot 10^{-3}} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}\left(1 - 2^{-\frac{24}{15}}\right) = 4,3 \cdot 10^{6} \text{ Дж} \approx 4,3 \text{ МДж}.$$