Числові ряди

Завдання 1

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2 + 24n + 5}.$$

Завдання 1

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2 + 24n + 5}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{4}{16n^2 + 24n + 5} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}$$

Завдання 1

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2 + 24n + 5}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{4}{16n^2 + 24n + 5} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{16k^2 + 24k + 5} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) =$$

Завдання 1

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2+24n+5}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{4}{16n^2+24n+5} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{16k^2+24k+5} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots - \frac{1}{4n+5} = 1 - \frac{1}{4n+5}$$

Завдання 1

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{16n^2+24n+5}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{4}{16n^2+24n+5} = \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5}$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{16k^2+24k+5} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) =$$

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots - \frac{1}{4n+5} = 1 - \frac{1}{4n+5}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{4n+5} \right) = 1$$

Завдання 2

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + (-4)^n}{5^n}.$$

Завдання 2

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + (-4)^n}{5^n}.$$

Розв'язання

Користуємося формулою суми геометричної прогресії;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5 \cdot 3^k + (-4)^k}{5^k} = 5 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{4}{5}\right)^k =$$

$$= 5 \frac{3/5(1 - (3/5)^{n+1})}{1 - (3/5)} - \frac{4/5(1 - (-4/5)^{n+1})}{1 - (-4/5)}$$

Завдання 2

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + (-4)^n}{5^n}.$$

Розв'язання

Користуємося формулою суми геометричної прогресії;

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5 \cdot 3^k + (-4)^k}{5^k} = 5 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{4}{5}\right)^k =$$

$$= 5 \frac{3/5(1-(3/5)^{n+1})}{1-(3/5)} - \frac{4/5(1-(-4/5)^{n+1})}{1-(-4/5)}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 5 \frac{3/5}{1-3/5} - \frac{4/5}{1-(-4/5)} = \frac{127}{18}$$

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Розв'язання

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Розв'язання

$$\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ – збіжний як узагальнений гармонійний $\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ – збіжний.

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2}$$

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2}$$

Розв'язання

$$\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2} \sim \frac{\pi/2}{n^2}, n \to \infty$$

Завдання 3

Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2}$$

Розв'язання

$$\frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2} \sim \frac{\pi/2}{n^2}, n \to \infty$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ – збіжний $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n+1)}{n^2+2}$ – збіжний.

Завдання 4

Дослідити на збіжність ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Завдання 4

Дослідити на збіжність ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Розв'язання

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$$

Завдання 4

Дослідити на збіжність ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Розв'язання

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2(n+1))!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1))^2 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)^2 (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (2n+2))} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

Завдання 4

Дослідити на збіжність ряд. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Розв'язання

$$u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad u_{n+1} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2(n+1))!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1))^2(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2n)}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n)^2(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2n\cdot (2n+1)\cdot (2n+2))} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1$$

Висновок: за ознакою д'Аламбера ряд збігається.

Завдання 5

Дослідити на збіжність ряд.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{3^n}.$$

Завдання 5

Дослідити на збіжність ряд.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^n}{3^n}$.
Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n-1)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3} = \infty > 1$$

Завдання 5

Дослідити на збіжність ряд.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n-1)^n}{3^n}$.
Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n-1)^n}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{3} = \infty > 1$$

Висновок: за радикальною ознакою Коші ряд розбіжний.

Завдання 6

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$.

Завдання 6

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+2)}}$.

Розв'язання

$$\frac{1}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+2)}} \sim \frac{1}{n \ln^{\frac{1}{3}} n} \quad n \to \infty.$$

Завдання 6

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+2)}}$.

Розв'язання

$$\frac{1}{(n+2) \cdot \sqrt[3]{\ln(n+2)}} \sim \frac{1}{n \ln^{\frac{1}{3}} n} \quad n \to \infty.$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\frac{1}{3}} x} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \ln^{1-\frac{1}{3}} x \Big|_{1}^{\infty} = \infty.$$

Завдання 6

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+2)}}$.

Розв'язання

$$\frac{1}{(n+2)\cdot\sqrt[3]{\ln(n+2)}} \sim \frac{1}{n\ln^{\frac{1}{3}} n} \quad n\to\infty.$$

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x\ln^{\frac{1}{3}} x}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\ln^{1-\frac{1}{3}} x\Big|_{1}^{\infty} = \infty.$$

Отже, за граничною формою ознаки порівняння та інтегральною ознакою Коші ряд є розбіжним.