Розв'язування задач на степеневі ряди

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| =$$

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right|$$

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)}\right| =$$

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)}\right| =$$

$$= |x+1|.$$

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)}\right| =$$

$$= |x+1|.$$

$|x+1| < 1$ – збіжний, $x \in (-2; 0)$

Завдання 11

Умова

Знайти область збіжності степеневого ряду. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$.

Розв'язання:

Перший спосіб

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x+1)^{n+1}}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+1)^{n+1}}{(x+1)^n}\cdot\frac{n+2}{n+3}\cdot\frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)}\right| =$$

$$= |x+1|\,.$$

$|x+1| < 1$ – збіжний, $x \in (-2;0)$

$|x+1| > 1$ – розбіжний

Завдання 11

Другий спосіб

Завдання 11

Другий спосіб

Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Завдання 11

Другий спосіб
Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Завдання 11

Другий спосіб

Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}} \right|$$

Другий спосіб

Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)} \right|$$

Завдання 11

Другий спосіб
Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)} \right| = 1$$

Другий спосіб
Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)} \right| = 1$$

$$R = 1 \Rightarrow \ \textit{ряд збігається для } y \in (-1; 1)$$

Другий спосіб
Перепозначаємо $y = x + 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Радіус збіжності:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}}{\dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+2}{n+3} \cdot \frac{\ln^2(n+2)}{\ln^2(n+3)}\right| = 1$$

$$R = 1 \Rightarrow \ \textit{ряд збігається для } y \in (-1;1) \Rightarrow x \in (-2;0)$$

Завдання 11

Слід перевірити:

$$x = -2 \text{ і } x = 0$$

$x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=-2}$$

Завдання 11

Слід перевірити:

$$x = -2 \text{ і } x = 0$$

$x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Завдання 11

Слід перевірити:

$$x = -2 \text{ і } x = 0$$

$x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Ряд збіжний за ознакою Ляйбніца:

- $u_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} > u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$

Завдання 11

Слід перевірити:

$$x = -2 \text{ і } x = 0$$

$x = -2$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Ряд збіжний за ознакою Ляйбніца:

- $u_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} > u_{n+1} = \dfrac{1}{(n+3)\ln^2(n+3)}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} = 0$

Завдання 11

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=0}$$

Завдання 11

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Завдання 11

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Інтегральна ознака Коші:

$$\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} \sim \frac{1}{n\ln^2 n} \quad n \to \infty.$$

Завдання 11

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Інтегральна ознака Коші:

$$\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} \sim \frac{1}{n\ln^2 n} \quad n \to \infty.$$

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Завдання 11

$x = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+2)\ln^2(n+2)}\bigg|_{x=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)}$$

Інтегральна ознака Коші:

$$\frac{1}{(n+2)\ln^2(n+2)} \sim \frac{1}{n\ln^2 n} \quad n \to \infty.$$

$$\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Ряд збіжний.

Відповідь: Ряд є збіжним лише для $x \in [-2; 0]$.

Відомі розклади

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Відомі розклади

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, x \in (-1; 1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot(\alpha-n+1)\, x^n}{n!}, x \in (-1; 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1)$$

Завдання 12

Умова

Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n}.$$

Завдання 12

Умова

Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n}.$$

Розв'язання

Перепозначимо $y = -\ln x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n}$$

Завдання 12

Умова

Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n}.$$

Розв'язання

Перепозначимо $y = -\ln x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}.$$

Завдання 12

Умова
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n}.$$

Розв'язання
Перепозначимо $y = -\ln x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}.$$

За формулами інтегрування степеневої функції:

$$\frac{y^n}{n} = \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C$$

Завдання 12

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C$$

Завдання 12

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} \mathrm{d}y + C$$

Завдання 12

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=0}^{\infty} y^n \mathrm{d}y + C =$$

Завдання 12

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=0}^{\infty} y^n \mathrm{d}y + C =$$

Згортаємо ряд:

$$= \int \frac{1}{1-y} \mathrm{d}y + C$$

Завдання 12

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} \mathrm{d}y + C = \int \sum_{n=0}^{\infty} y^n \mathrm{d}y + C =$$

Згортаємо ряд:

$$= \int \frac{1}{1-y} \mathrm{d}y + C = -\ln|1-y| + C$$

Завдання 12

При $y = 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = 0$$

Завдання 12

При $y = 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = 0 = -\ln|1-0| + C = C$$

Завдання 12

При $y = 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = 0 = -\ln|1-0| + C = C$$

Отже $C = 0$.

Завдання 12

При $y = 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = 0 = -\ln|1-0| + C = C$$

Отже $C = 0$. Використаний ряд збігається для $y \in (-1; 1)$, тому збіжність гарантовано для $x = e^{-y} \in (1/e; e)$. Для цих значень x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n} = -\ln(1 + \ln x).$$

Завдання 12

При $y = 0$ маємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n} = 0 = -\ln|1-0| + C = C$$

Отже $C = 0$. Використаний ряд збігається для $y \in (-1; 1)$, тому збіжність гарантовано для $x = e^{-y} \in (1/e; e)$. Для цих значень x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n} = -\ln(1 + \ln x).$$

Відповідь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^n x}{n} = -\ln(1 + \ln x) \text{ для } x \in \left(\frac{1}{e}; e\right).$$

Завдання 12

Умова:

Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Завдання 12

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Розв'язання
Перетворюємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}$$

Завдання 12

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Розв'язання
Перетворюємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}.$$

Завдання 12

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Розв'язання
Перетворюємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}.$$

Перепозначимо $y = x/3$:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}$$

Завдання 12

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}}.$$

Розв'язання
Перетворюємо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}}.$$

Перепозначимо $y = x/3$:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)n\frac{x^{n-1}}{3^{n-1}} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1}$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)'$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1}$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})''$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty} y^{n+1}\right)''$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^{n+1}\right)'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^{n} - y - 1\right)'' =$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^{n+1}\right)'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^{n} - y - 1\right)'' =$$

Згортаємо суму

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-y} - y - 1\right)''$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^{n+1}\right)'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^{n} - y - 1\right)'' =$$

Згортаємо суму

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-y} - y - 1\right)'' = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(1-y)^2} - 1\right)'$$

Завдання 12

За формулами диференціювання степеневої функції:

$$(y^{n+1})'' = ((n+1)y^n)' = (n+1)ny^{n-1}$$

Підставляємо і переставляємо місцями похідні і суму:

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)ny^{n-1} = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}(y^{n+1})'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=1}^{\infty}y^{n+1}\right)'' = \frac{1}{9}\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^{n} - y - 1\right)'' =$$

Згортаємо суму

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{1-y} - y - 1\right)'' = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{(1-y)^2} - 1\right)' = \frac{2}{9(1-y)^3}$$

Завдання 12

Використаний ряд збігається для $y \in (-1;1)$, тому збіжність гарантовано для $x = 3y \in (-3;3)$. Для цих значень x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{9(1-x/3)^3}.$$

Завдання 12

Використаний ряд збігається для $y \in (-1;1)$, тому збіжність гарантовано для $x = 3y \in (-3;3)$. Для цих значень x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{9(1-x/3)^3}.$$

Відповідь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+n)x^{n-1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{9(1-x/3)^3} \text{ для } x \in (-3;3)\,.$$

Завдання 13

Умова

Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x-a)$ та вказати область збіжності ряду. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}$, $a=0$.

Завдання 13

Умова

Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}$, $a = 0$.

Розв'язання Оскільки $a = 0$, маємо розкласти за степенями x, тобто знайти розклад Маклорена.

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x-a)$ та вказати область збіжності ряду. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}$, $a=0$.
Розв'язання Оскільки $a=0$, маємо розкласти за степенями x, тобто знайти розклад Маклорена.
Користуємося відомим розкладом для $(1+x)^\alpha$ для $\alpha=-1/5$, підставляючи до нього x^2 замість x:

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{5}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/5\,(-1/5-1)\cdot\ldots\cdot(-1/5-n+1)\,x^{2n}}{n!},$$

Завдання 13

Умова

Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}}$, $a = 0$.

Розв'язання Оскільки $a = 0$, маємо розкласти за степенями x, тобто знайти розклад Маклорена.

Користуємося відомим розкладом для $(1+x)^\alpha$ для $\alpha = -1/5$, підставляючи до нього x^2 замість x:

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{5}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1/5\,(-1/5-1)\cdot\ldots\cdot(-1/5-n+1)\,x^{2n}}{n!},$$

Областю початкового ряду були значення у проміжку $(-1;1)$. Розв'язуючи нерівність $-1 < x^2 < 1$, маємо для області збіжності $x \in (-1;1)$.

Завдання 13

Умова

Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1 + e^x)^2$, $a = -1$.

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1 + e^x)^2$, $a = -1$.
Розв'язання Щоб звести до розкладу Маклорена, позначимо $x - a = x + 1 = y$. Тоді $x = y - 1$ і

$$(1 + e^x)^2 = (1 + e^{y-1})^2$$

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x-a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1+e^x)^2$, $a=-1$.
Розв'язання Щоб звести до розкладу Маклорена, позначимо $x-a=x+1=y$. Тоді $x=y-1$ і

$$(1+e^x)^2=(1+e^{y-1})^2=1+2e^{y-1}+e^{2(y-1)}$$

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1 + e^x)^2$, $a = -1$.
Розв'язання Щоб звести до розкладу Маклорена, позначимо $x - a = x + 1 = y$. Тоді $x = y - 1$ і

$$(1 + e^x)^2 = (1 + e^{y-1})^2 = 1 + 2e^{y-1} + e^{2(y-1)} = 1 + \frac{2}{e}e^y + \frac{1}{e^2}e^{2y}$$

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1 + e^x)^2$, $a = -1$.
Розв'язання Щоб звести до розкладу Маклорена, позначимо $x - a = x + 1 = y$. Тоді $x = y - 1$ і

$$(1 + e^x)^2 = (1 + e^{y-1})^2 = 1 + 2e^{y-1} + e^{2(y-1)} = 1 + \frac{2}{e}e^y + \frac{1}{e^2}e^{2y}$$

Користуємося відомим розкладом для e^x, підставляючи до нього y замість x:

$$1 + \frac{2}{e}e^y + \frac{1}{e^2}e^{2y} = 1 + \frac{2}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} + \frac{1}{e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2y)^n}{n!}$$

Завдання 13

Умова
Розвинути функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$ та вказати область збіжності ряду. $(1 + e^x)^2$, $a = -1$.
Розв'язання Щоб звести до розкладу Маклорена, позначимо $x - a = x + 1 = y$. Тоді $x = y - 1$ і

$$(1 + e^x)^2 = (1 + e^{y-1})^2 = 1 + 2e^{y-1} + e^{2(y-1)} = 1 + \frac{2}{e}e^y + \frac{1}{e^2}e^{2y}$$

Користуємося відомим розкладом для e^x, підставляючи до нього y замість x:

$$1 + \frac{2}{e}e^y + \frac{1}{e^2}e^{2y} = 1 + \frac{2}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!} + \frac{1}{e^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2y)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{e} + \frac{2^n}{e^2}\right)\frac{y^n}{n!}$$

Завдання 13

Областю збіжності використаного ряду були значення $y \in \mathbb{R}$. Тому область збіжності отриманого ряду буде такою самою: $x = y - 1 \in \mathbb{R}$.

Завдання 13

Областю збіжності використаного ряду були значення $y \in \mathbb{R}$. Тому область збіжності отриманого ряду буде такою самою: $x = y - 1 \in \mathbb{R}$.

Відповідь:

$$(1 + e^x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{e} + \frac{2^n}{e^2} \right) \frac{(x+1)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Завдання 14

Умова

Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.

Завдання 14

Умова
Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.
Розв'язання
Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225 + 5}$$

Завдання 14

Умова

Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання

Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225 + 5} = \sqrt{15^2 + 5}$$

Завдання 14

Умова

Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання

Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225 + 5} = \sqrt{15^2 + 5} = \sqrt{15^2 \left(1 + \frac{5}{225}\right)}$$

Завдання 14

Умова
Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.
Розв'язання
Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225+5} = \sqrt{15^2+5} = \sqrt{15^2\left(1+\frac{5}{225}\right)} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}}$$

Завдання 14

Умова

Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.

Розв'язання

Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225+5} = \sqrt{15^2+5} = \sqrt{15^2\left(1+\frac{5}{225}\right)} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}}$$

З відомого розкладу для $(1+x)^\alpha$ для $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2\,(1/2-1)\cdot\ldots\cdot(1/2-n+1)\,x^n}{n!} =$$

Умова
Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення величини. $\sqrt{230}, \varepsilon = 10^{-3}$.
Розв'язання
Трохи перетворимо:

$$\sqrt{230} = \sqrt{225+5} = \sqrt{15^2+5} = \sqrt{15^2\left(1+\frac{5}{225}\right)} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}}$$

З відомого розкладу для $(1+x)^\alpha$ для $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1/2\,(1/2-1)\cdot\ldots\cdot(1/2-n+1)\,x^n}{n!} =$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} \ldots$$

Завдання 14

Отже,

$$\sqrt{230} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}} = 15\left(1+\frac{1/45}{2}-\frac{1/45^2}{8}+\frac{1/45^3}{16}-\frac{5\cdot 1/45^4}{128}+\frac{7\cdot 1/45^5}{256}\dots\right)$$

Завдання 14

Отже,

$$\sqrt{230} = 15\sqrt{1 + \frac{1}{45}} = 15\left(1 + \frac{1/45}{2} - \frac{1/45^2}{8} + \frac{1/45^3}{16} - \frac{5 \cdot 1/45^4}{128} + \frac{7 \cdot 1/45^5}{256} \dots\right)$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_0 = 15;$$

Завдання 14

Отже,

$$\sqrt{230} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}} = 15\left(1 + \frac{1/45}{2} - \frac{1/45^2}{8} + \frac{1/45^3}{16} - \frac{5\cdot 1/45^4}{128} + \frac{7\cdot 1/45^5}{256}\dots\right)$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_0 = 15; u_1 = \frac{15}{2\cdot 45} = \frac{1}{6};$$

Завдання 14

Отже,

$$\sqrt{230} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}} = 15\left(1+\frac{1/45}{2}-\frac{1/45^2}{8}+\frac{1/45^3}{16}-\frac{5\cdot 1/45^4}{128}+\frac{7\cdot 1/45^5}{256}\dots\right)$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_0 = 15; u_1 = \frac{15}{2\cdot 45} = \frac{1}{6}; u_2 = \frac{15}{8\cdot 45^2} = \frac{1}{1080} < \varepsilon = 0,001.$$

Отже,

$$\sqrt{230} = 15\sqrt{1+\frac{1}{45}} = 15\left(1+\frac{1/45}{2}-\frac{1/45^2}{8}+\frac{1/45^3}{16}-\frac{5\cdot 1/45^4}{128}+\frac{7\cdot 1/45^5}{256}\ldots\right)$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_0 = 15; u_1 = \frac{15}{2\cdot 45} = \frac{1}{6}; u_2 = \frac{15}{8\cdot 45^2} = \frac{1}{1080} < \varepsilon = 0,001.$$

Тому,

$$\sqrt{230} \approx 15 + \frac{1}{6} \approx 15,167$$

Завдання 15

Умова

Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$ інтеграл. $\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x.$

Завдання 15

Умова

Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$ інтеграл. $\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Підставивши $\sqrt{x}$ замість x до відомого розкладу для $\ln(1+x)$, маємо:

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n/2}}{n}$$

Завдання 15

Умова

Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$ інтеграл. $\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x.$

Розв'язання

Підставивши $\sqrt{x}$ замість x до відомого розкладу для $\ln(1+x)$, маємо:

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n/2}}{n}$$

Отже,

$$\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int\limits_0^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n/2}}{n}\mathrm{d}x$$

Завдання 15

Умова

Обчислити з точністю $\varepsilon = 0,001$ інтеграл. $\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x.$

Розв'язання

Підставивши $\sqrt{x}$ замість x до відомого розкладу для $\ln(1+x)$, маємо:

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n/2}}{n}$$

Отже,

$$\int\limits_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x = \int\limits_0^{1/4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^{n/2}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int\limits_0^{1/4} x^{n/2}\mathrm{d}x =$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \; \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \Bigg|_{0}^{1/4}$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^4}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^{2}}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^{3}}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^{4}}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12};$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^{2}}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^{3}}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^{4}}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12}; u_2 = \frac{1}{64};$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^4}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12}; u_2 = \frac{1}{64}; u_3 = \frac{1}{270};$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^4}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12}; u_2 = \frac{1}{64}; u_3 = \frac{1}{270}; u_4 = \frac{1}{768};$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^4}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12}; u_2 = \frac{1}{64}; u_3 = \frac{1}{270}; u_4 = \frac{1}{768}; u_5 = \frac{1}{2240} < \varepsilon = 0,001.$$

Завдання 15

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left. \frac{x^{n/2+1}}{n/2+1} \right|_0^{1/4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \frac{(1/4)^{n/2+1}}{n/2+1} =$$

$$= \frac{1 \cdot (1/4)^{3/2}}{1 \cdot 3/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^2}{2 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1/4)^{5/2}}{3 \cdot 5/2} - \frac{1 \cdot (1/4)^3}{4 \cdot 3} + \frac{1 \cdot (1/4)^{7/2}}{5 \cdot 7/2} + \frac{-1 \cdot (1/4)^4}{6 \cdot 4} + \ldots$$

Маємо знакочерговий ряд. Користуємося особливостями його збіжності:

$$u_1 = \frac{1}{12}; u_2 = \frac{1}{64}; u_3 = \frac{1}{270}; u_4 = \frac{1}{768}; u_5 = \frac{1}{2240} < \varepsilon = 0,001.$$

Тому,

$$\int_0^{1/4} \ln(1+\sqrt{x})\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12} - \frac{1}{64} + \frac{1}{270} - \frac{1}{768} \approx 0,07$$

Завдання 16

Умова

Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші. $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0, y\left(0\right)=2, y'\left(0\right)=0.$

Завдання 16

Умова

Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші. $\left(1+x^2\right) y'' + xy' - y = 0, y\left(0\right) = 2, y'\left(0\right) = 0.$

Розв'язання:

Нехай шукана функція має розклад Маклорена

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Завдання 16

Умова
Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші. $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0, y\left(0\right)=2, y'\left(0\right)=0.$
Розв'язання:
Нехай шукана функція має розклад Маклорена

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

Початкові умови: $y(0)=2$, $y'(0)=0$

Завдання 16

Умова
Знайти перші три ненульові члени розвинення у степеневий ряд розв'язку задачі Коші. $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=0, y\left(0\right)=2, y'\left(0\right)=0.$
Розв'язання:
Нехай шукана функція має розклад Маклорена

$$y=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

Початкові умови: $y(0)=2$, $y'(0)=0$
З самого рівняння

$$y''=-\frac{x}{1+x^2}y'+\frac{y}{1+x^2}$$

$$y''(0)=\left[-\frac{x}{1+x^2}y'+\frac{y}{1+x^2}\right]\Big|_{x=0}=2$$

Завдання 16

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = -\frac{xy''}{x^2+1} + \frac{2x^2y'}{(x^2+1)^2} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$$

Завдання 16

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = -\frac{xy''}{x^2+1} + \frac{2x^2y'}{(x^2+1)^2} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''(0) = 0$$

Завдання 16

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = -\frac{xy''}{x^2+1} + \frac{2x^2y'}{(x^2+1)^2} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = -\frac{x\,y'''}{x^2+1} - \frac{y''}{x^2+1} + \frac{4x^2y''}{(x^2+1)^2} + \frac{2xy'}{(x^2+1)^2} - \frac{8x^3y'}{(x^2+1)^3} - \frac{2y}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^2y}{(x^2+1)^3}$$

Завдання 16

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = -\frac{xy''}{x^2+1} + \frac{2x^2y'}{(x^2+1)^2} - \frac{2xy}{(x^2+1)^2}$$

$$y'''(0) = 0$$

$$y^{IV} = -\frac{x\,y'''}{x^2+1} - \frac{y''}{x^2+1} + \frac{4x^2y''}{(x^2+1)^2} + \frac{2xy'}{(x^2+1)^2} - \frac{8x^3y'}{(x^2+1)^3} - \frac{2y}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^2y}{(x^2+1)^3}$$

$$y^{IV}(0) = -6$$

Завдання 16

Після підстановки отриманих значень одержуємо:

$$y = 2 + \frac{2x^2}{2} + \frac{-6x^4}{24} + ... = 2 + x^2 - \frac{x^4}{4} + \dots$$