Розв'язування задач на ряди Фур'є

Завдання 17

Умова

Функцію $f(x)$ розвинути у ряд Фур'є. Побудувати графік суми ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, x \in (-\pi; 0) \\ x^2, x \in [0; \pi) \end{cases}.$$

Завдання 17

Умова

Функцію $f(x)$ розвинути у ряд Фур'є. Побудувати графік суми ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, x \in (-\pi; 0) \\ x^2, x \in [0; \pi) \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Завдання 17

Умова

Функцію $f(x)$ розвинути у ряд Фур'є. Побудувати графік суми ряду Фур'є.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, x \in (-\pi; 0) \\ x^2, x \in [0; \pi) \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x =$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi n\sin\pi n + \left(2-\pi^2 n^2\right)\cos\pi n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right)$$

Завдання 17

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x^2\cos nx\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

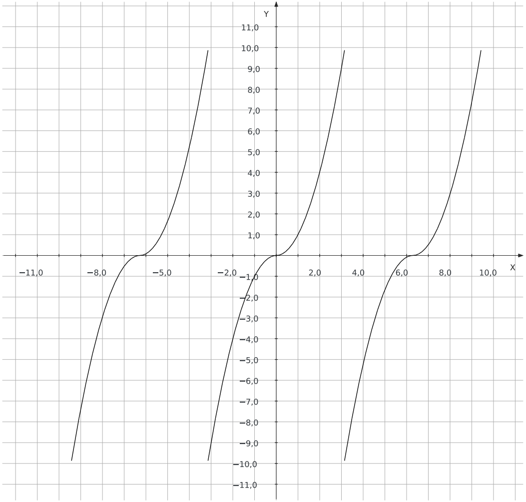
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin nx\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi n\sin \pi n + \left(2-\pi^2 n^2\right)\cos \pi n}{n^3} - \frac{2}{n^3}\right) = -2\frac{(-1)^n\pi}{n} + \left((-1)^n - 1\right)\frac{4}{\pi n^3}$$

Завдання 17

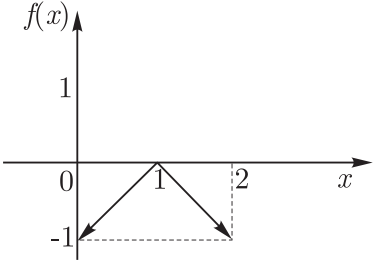
$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(2\frac{(-1)^n \pi}{n} + ((-1)^n - 1)\,\frac{4}{\pi n^3} \right) \sin nx$$

Завдання 17


Y
X
11,0
10,0
9,0
8,0
7,0
6,0
5,0
4,0
3,0
2,0
1,0
−1,0
−2,0
−3,0
−4,0
−5,0
−6,0
−7,0
−8,0
−9,0
−10,0
−11,0
−11,0
−8,0
−5,0
−2,0
2,0
4,0
6,0
8,0
10,0

Завдання 18

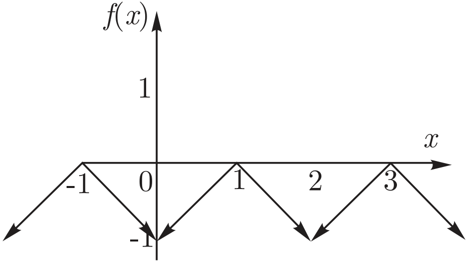
Умова Функцію $f(x)$ зображену графічно на інтервалі $(0, T)$, розвинути в ряд Фур'є з періодом T. Побудувати графік суми ряду Фур'є.



Завдання 18

<u>*Розв'язання:*</u>

Графік суми ряду:



Завдання 18

$$T = 2l = 2 \Rightarrow l = 1$$

Завдання 18

$$T = 2l = 2 \Rightarrow l = 1$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n}{l}x + b_n \sin\frac{\pi n}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Завдання 18

$$T = 2l = 2 \Rightarrow l = 1$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \mathrm{d}x; a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \pi n x + b_n \sin \pi n x)$$

Завдання 18

Функція є парною, тому

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 (x-1)\mathrm{d}x = -1;$$

Завдання 18

Функція є парною, тому

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 (x-1)\mathrm{d}x = -1;$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 (x-1)\cos \pi n x \mathrm{d}x$$

Завдання 18

Функція є парною, тому

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 (x-1)\mathrm{d}x = -1;$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 (x-1)\cos\pi n x \mathrm{d}x = 2\left(\frac{\cos\pi n}{\pi^2\, n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\right)$$

Завдання 18

Функція є парною, тому

$$a_0 = 2\int\limits_0^1 (x-1)\mathrm{d}x = -1;$$

$$a_n = 2\int\limits_0^1 (x-1)\cos\pi n x\mathrm{d}x = 2\left(\frac{\cos\pi n}{\pi^2 n^2} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\right) = \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, ...$$

Завдання 18

Відповідь:

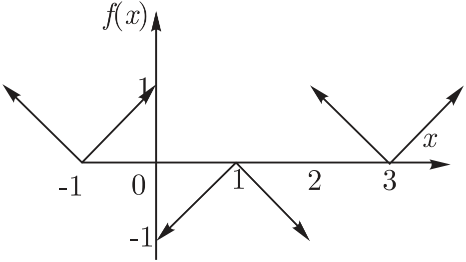
$$f(x) = -1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi^2 n^2} \cos \pi n x$$

Завдання 19

Умова

Функцію $f(x)$ зображену графічно на інтервалі $(0, T)$ попереднього завдання, розвинути в ряд Фур'є: а) за косинусами; б) за синусами. В кожному випадку побудувати графік суми ряду Фур'є.

Умова
Функцію $f(x)$ зображену графічно на інтервалі $(0, T)$ попереднього завдання, розвинути в ряд Фур'є: а) за косинусами; б) за синусами. В кожному випадку побудувати графік суми ряду Фур'є.
<u>*Розв'язання:*</u> Графік суми ряду за синусами:



Завдання 19

За синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, ...$$

Завдання 19

$$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$$

Завдання 19

$$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{2} x;$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int\limits_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x$$

Завдання 19

$$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{2} x;$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int\limits_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x-1) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (1-x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x =$$

Завдання 19

$$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{2} x;$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int\limits_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x-1) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (1-x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi n} + \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{4 \sin(\pi n) - 2\pi n \cos(\pi n)}{\pi^2 n^2}$$

Завдання 19

$$T = 2l = 4 \Rightarrow l = 2$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{2} x;$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int\limits_0^2 f(x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (x-1) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 (1-x) \sin \frac{\pi n}{2} x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi n} + \frac{4 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{4 \sin(\pi n) - 2\pi n \cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} =$$

$$= \frac{8 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2 n^2} - \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n)$$

Завдання 19

Відповідь:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi^2\, n^2} - \frac{2}{\pi n}(1 - (-1)^n) \right) \sin \frac{\pi n}{2} x$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f\left(t\right)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f\,(t)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$

Завдання 20

Умова:
Функцію $f(t)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos ut\mathrm{d}t$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f(t)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut \mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos ut \mathrm{d}t = -\frac{2u \sin(\pi u)}{u^2 - 1}$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f\left(t\right)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos ut\mathrm{d}t = -\frac{2u \sin\left(\pi u\right)}{u^2 - 1}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut\mathrm{d}t = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin ut\mathrm{d}t = 0$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f\,(t)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t)=\begin{cases}\cos t,\, |t|\leqslant\pi\\ 0,\, |t|>\pi\end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\cos ut\mathrm{d}t=-\frac{2u\sin(\pi u)}{u^2-1}$$

$$S(u)=-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t=-\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin ut\mathrm{d}t=0$$

$$A(u)=|F(u)|=\sqrt{C^2(u)+S^2(u)}$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f\left(t\right)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, \, |t| \leqslant \pi \\ 0, \, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos ut dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos ut dt = -\frac{2u \sin\left(\pi u\right)}{u^2 - 1}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin ut dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin ut dt = 0$$

$$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)} = \left| \frac{2u \sin\left(\pi u\right)}{u^2 - 1} \right|$$

$$\Phi(u) = \arg F(u) = \operatorname{arctg} \frac{S(u)}{C(u)}$$

Завдання 20

Умова:

Функцію $f(t)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(t) = \begin{cases} \cos t, |t| \leqslant \pi \\ 0, |t| > \pi \end{cases}$

Розв'язання:

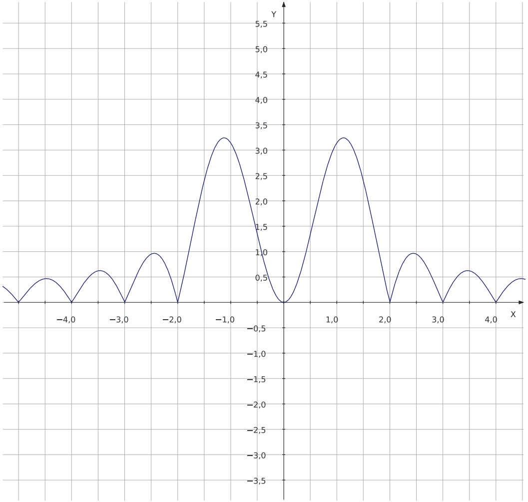
$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \cos ut dt = -\frac{2u\sin(\pi u)}{u^2 - 1}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut dt = -\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin ut dt = 0$$

$$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)} = \left|\frac{2u\sin(\pi u)}{u^2 - 1}\right|$$

$$\Phi(u) = \arg F(u) = \operatorname{arctg}\frac{S(u)}{C(u)} = 0$$

Графік частотної характеристики у декартовій системі



Графік частотної характеристики у полярній системі (діаграма Найквіста)