

Лінійні неоднорідні диференціальні  
рівняння вищих порядків.  
Розв'язування нормальних лінійних  
систем диференціальних рівнянь  
першого порядку.

## Завдання 9

*Умова:*

Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' - 5y' + 4y = 9 \cos 3x$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.п.}} = A \cos 3x + B \sin 3x$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = A \cos 3x + B \sin 3x$$

Маємо:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3B \cos 3x - 3A \sin 3x$$

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = A \cos 3x + B \sin 3x$$

Маємо:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3B \cos 3x - 3A \sin 3x$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x$$

Підставляємо до рівняння:

$$\begin{aligned}y'' - 5y' + 4y &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - \\ &- 5(3B \cos 3x - 3A \sin 3x) + \\ &+ 4(A \cos 3x + B \sin 3x) =\end{aligned}$$



Підставляємо до рівняння:

$$\begin{aligned}y'' - 5y' + 4y &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - \\ &-5(3B \cos 3x - 3A \sin 3x) + \\ &+4(A \cos 3x + B \sin 3x) = \\ &= (-5A - 15B) \cos 3x + (-5B + 15A) \sin 3x = 9 \cos 3x\end{aligned}$$

Підставляємо до рівняння:

$$\begin{aligned}y'' - 5y' + 4y &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - \\ &-5(3B \cos 3x - 3A \sin 3x) + \\ &+4(A \cos 3x + B \sin 3x) = \\ &= (-5A - 15B) \cos 3x + (-5B + 15A) \sin 3x = 9 \cos 3x\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{cases} -5A - 15B = 9 \\ 15A - 5B = 0 \end{cases}$$

Підставляємо до рівняння:

$$\begin{aligned}y'' - 5y' + 4y &= -9A \cos 3x - 9B \sin 3x - \\ &-5(3B \cos 3x - 3A \sin 3x) + \\ &+4(A \cos 3x + B \sin 3x) = \\ &= (-5A - 15B) \cos 3x + (-5B + 15A) \sin 3x = 9 \cos 3x\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{cases} -5A - 15B = 9 \\ 15A - 5B = 0 \end{cases}$$
$$A = -\frac{9}{50}; B = -\frac{27}{50}.$$

Отже,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - \frac{9}{50} \cos 3x - \frac{27}{50} \sin 3x$$

## Завдання 10

*Умова:*

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих  $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$ .

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння  $y'' + 4y = 0$ .

$$k^2 + 4 = 0; \quad k_1 = 2i; \quad k_2 = -2i$$

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння  $y'' + 4y = 0$ .

$$k^2 + 4 = 0; \quad k_1 = 2i; \quad k_2 = -2i$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x;$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x;$$

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ -C_1'(x) \sin 2x + C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{2 \sin 2x} \end{cases}$$



Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 2x + C_2'(x) \sin 2x = 0 \\ -C_1'(x) \sin 2x + C_2'(x) \cos 2x = \frac{1}{2 \sin 2x} \end{cases}$$

Правило Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x}{2 \sin 2x} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2x$$

Отже

$$C_1(x) = \int -1/2 dx = -\frac{x}{2} + C_1^*$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos 2x}{2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2^*$$

Отже

$$C_1(x) = \int -1/2 dx = -\frac{x}{2} + C_1^*$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos 2x}{2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2^*$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1^* \cos 2x + C_2^* \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln \sin 2x$$

# Завдання 11

$$\text{Умова: } \begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 8x_2. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -7 - k & 5 \\ 4 & -8 - k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-7 - k)(-8 - k) - 20 = 0; \quad 56 + 7k + 8k + k^2 - 20 = 0;$$

$$k^2 + 15k + 36 = 0; \quad k_1 = -3; \quad k_2 = -12;$$

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\text{Для } k_1: \begin{cases} (-7 + 3)\alpha_1 + 5\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 + (-8 + 3)\beta_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -4\alpha_1 + 5\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 - 5\beta_1 = 0 \end{cases}$$

Підставляючи  $\alpha_1 = 1$  (приймається будь-яке значення), одержуємо:  $\beta_1 = 4/5$ .

$$\text{Для } k_2: \begin{cases} (-7 + 12)\alpha_2 + 5\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 + (-8 + 12)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 5\alpha_2 + 5\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \end{cases}$$

Покладаючи  $\alpha_2 = 1$  (приймається будь-яке значення), одержуємо:  $\beta_2 = -1$ .

Загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-12t} \\ x_2 = \frac{4}{5} C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-12t} \end{cases}$$



*Умова:*

За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, воно витримує протидію середовища, пропорційну його швидкості. Знайти закон руху тіла (залежність шляху від часу).

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

$$F_{\text{зовн}} = Kt$$

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

$$F_{\text{зовн}} = Kt$$

$$F_{\text{пр}} = -\eta\dot{x}$$

Разом:

$$m\ddot{x} = Kt - \eta\dot{x}$$

Скорочуємо на  $m$  ( $\lambda = \frac{K}{m}$ ,  $\mu = \frac{\eta}{m}$ ):

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку.

Скорочуємо на  $m$  ( $\lambda = \frac{K}{m}$ ,  $\mu = \frac{\eta}{m}$ ):

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння для однорідного

$$k^2 + \mu k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -\mu.$$

Скорочуємо на  $m$  ( $\lambda = \frac{K}{m}$ ,  $\mu = \frac{\eta}{m}$ ):

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння для однорідного

$$k^2 + \mu k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -\mu.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$x_1 = e^{0 \cdot t} = 1; x_2 = e^{-\mu t}$$

Загальний розв'язок однорідного:

$$x = C_1 + C_2 e^{-\mu t}.$$

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$



Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Звідки

$$2A\mu = \lambda; 2A + \mu B = 0.$$

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Звідки

$$2A\mu = \lambda; 2A + \mu B = 0.$$

$$A = \frac{\lambda}{2\mu}; B = -\frac{\lambda}{\mu^2}.$$

Таким чином,

$$x_{\text{ч.н.}} = t \left( \frac{\lambda}{2\mu} t - \frac{\lambda}{\mu^2} \right)$$

Таким чином,

$$x_{\text{ч.н.}} = t \left( \frac{\lambda}{2\mu} t - \frac{\lambda}{\mu^2} \right)$$

$$x = x_{\text{з.о.}} + x_{\text{ч.н.}} = C_1 + C_2 e^{-\mu t} + t \left( \frac{\lambda}{2\mu} t - \frac{\lambda}{\mu^2} \right)$$