Розв'язування задач на кратні інтеграли

Завдання 1

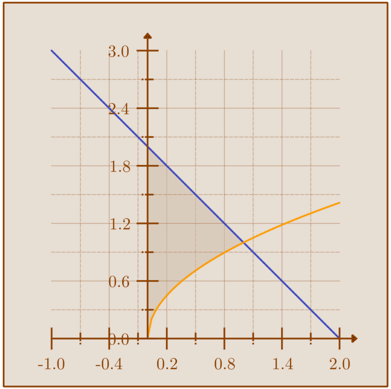
Умова

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f \mathrm{d}x$.

Завдання 1

Умова

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2} f \mathrm{d}x + \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2-y} f \mathrm{d}x.$



$$x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x};$$

$$x = 2 - y \Rightarrow y = 2 - x$$

Розв'язання

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f \,\mathrm{d}y$$

Відповідь

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{\sqrt{x}}^{2-x} f \,\mathrm{d}y$$

Завдання 1

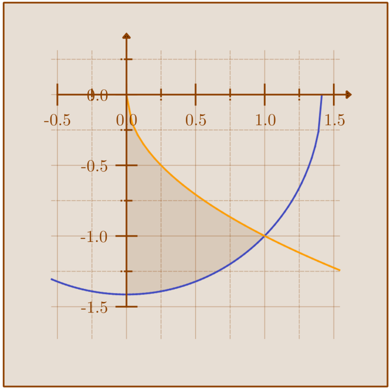
Умова

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f \mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int\limits_{0}^{y^2} f \mathrm{d}x.$

Завдання 1

Умова

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y^2} f dx.$



$$x = y^2 \Rightarrow y = -\sqrt{x};$$

$$x = \sqrt{2 - y^2} \Rightarrow y = -\sqrt{2 - x^2}$$

Розв’язання

$$\int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f \, \mathrm{d}y$$

Відповідь

$$\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{-\sqrt{x}} f \,\mathrm{d}y$$

Завдання 2.1

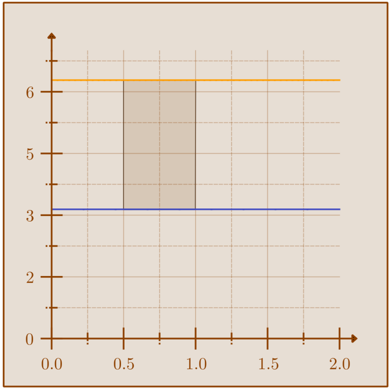
Обчислити:

$$\iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Завдання 2.1

Обчислити:

$$\iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$



Розв'язання

$$\iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y \sin xy \mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y \sin xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \mathrm{d}y \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y \sin xy \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} y \left[-\frac{\cos xy}{y} \bigg|_{\frac{1}{2}}^{1} \right] \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y\sin xy\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} y\left[-\frac{\cos xy}{y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\left[\cos\frac{y}{2} - \cos y\right]\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: y=\pi, y=2\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y\sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y\sin xy\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} y\left[-\frac{\cos xy}{y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\left[\cos\frac{y}{2} - \cos y\right]\mathrm{d}y = \left[2\sin\frac{y}{2} - \sin y\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi} =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y\sin xy\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} y\left[-\frac{\cos xy}{y}\bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\left[\cos\frac{y}{2} - \cos y\right]\mathrm{d}y = \left[2\sin\frac{y}{2} - \sin y\right]\bigg|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 2\sin\pi - \sin 2\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}y\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} y\sin xy\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{\pi}^{2\pi} y\left[-\frac{\cos xy}{y}\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}\right]\mathrm{d}y = \int\limits_{\pi}^{2\pi}\left[\cos\frac{y}{2} - \cos y\right]\mathrm{d}y = \left[2\sin\frac{y}{2} - \sin y\right]\Bigg|_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= 2\sin\pi - \sin 2\pi - 2\sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi = -2.$$

Завдання 2.1

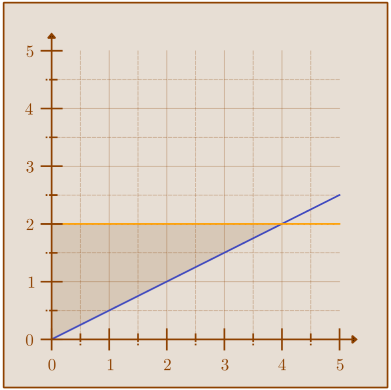
Обчислити:

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Завдання 2.1

Обчислити:

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$



Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \left[-\frac{\exp\left(-\frac{xy}{8}\right)}{\frac{y}{8}} \Bigg|_0^{2y} \right] \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \left[-\frac{\exp\left(-\frac{xy}{8}\right)}{\frac{y}{8}} \Bigg|_0^{2y} \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[8y - 8y \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \mathrm{d}y =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \left[-\frac{\exp\left(-\frac{xy}{8}\right)}{\frac{y}{8}} \Bigg|_0^{2y} \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[8y - 8y \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \left[4y^2 + 16 \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \Bigg|_0^2$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \left[-\frac{\exp\left(-\frac{xy}{8}\right)}{\frac{y}{8}} \Bigg|_0^{2y} \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[8y - 8y \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \left[4y^2 + 16 \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \Bigg|_0^2 = 4 \cdot 2^2 + 16 \exp\left(-\frac{2^2}{4}\right) - 4 \cdot 0^2 - 16 \exp\left(-\frac{0^2}{4}\right)$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{2y} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^2 y^2 \left[-\frac{\exp\left(-\frac{xy}{8}\right)}{\frac{y}{8}} \Bigg|_0^{2y} \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left[8y - 8y \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \left[4y^2 + 16 \exp\left(-\frac{y^2}{4}\right) \right] \Bigg|_0^2 = 4 \cdot 2^2 + 16 \exp\left(-\frac{2^2}{4}\right) - 4 \cdot 0^2 - 16 \exp\left(-\frac{0^2}{4}\right) = \frac{16}{e}.$$

Завдання 2.2

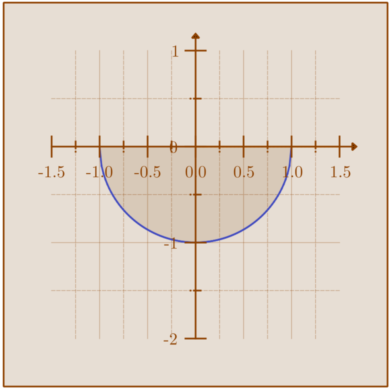
Обчислити:

$$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Завдання 2.2

Обчислити:

$$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$



Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u, v), \varphi(u, v))\, |i|\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$|i| = \rho$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R}\mathrm{d}\rho\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{\rho\cos^2\rho}\rho\mathrm{d}\theta =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R}\mathrm{d}\rho\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{\rho\cos^2\rho}\rho\mathrm{d}\theta =$$

$$= \operatorname{tg}\rho\big|_0^R \cdot \theta\big|_{-\pi}^0$$

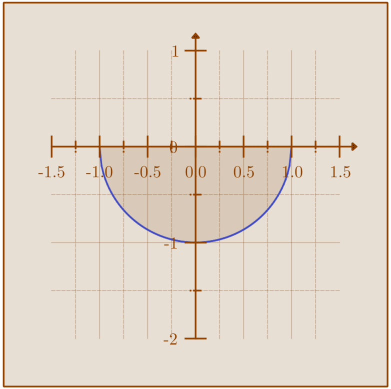
Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R}\mathrm{d}\rho\int\limits_{-\pi}^{0}\frac{1}{\rho\cos^2\rho}\rho\mathrm{d}\theta =$$

$$= \operatorname{tg}\rho\big|_0^R \cdot \theta\big|_{-\pi}^0 = \pi\operatorname{tg}R.$$

Момент інерції за допомогою подвійного інтеграла

Знайти момент інерції відносно вісі x зображеного на рисунку перерізу



Розв’язання

Перехід до полярної системи координат:

$$J_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 \mathrm{d}F$$

Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$J_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 \mathrm{d}F$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Розв'язання

Перехід до полярної системи координат:

$$J_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 \mathrm{d}F$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$\mathrm{d}F = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

Розв'язання

$$J_x = \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{0} (\rho \sin\theta)^2 \, \rho \mathrm{d}\theta =$$

Розв'язання

$$J_x = \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{0} (\rho \sin\theta)^2 \, \rho \mathrm{d}\theta =$$

$$= \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R \cdot \left.\left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\right|_{-\pi}^{0}$$

Розв'язання

$$J_x = \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{0} (\rho \sin\theta)^2 \, \rho \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{\rho^4}{4}\bigg|_0^R \cdot \left(\frac{1}{2}\theta - \frac{\sin 2\theta}{4} \right)\bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{8}\pi R^4.$$

Завдання 2.2

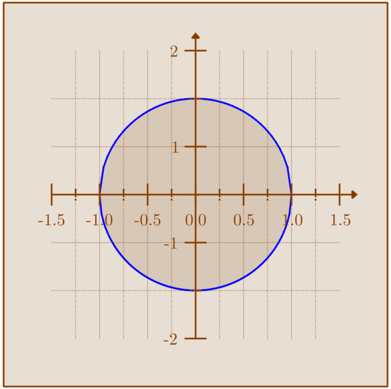
Обчислити:

$$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Завдання 2.2

Обчислити:

$$\int\limits_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$



Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R}\mathrm{d}\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\rho\cdot\rho\mathrm{d}\theta =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R} \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\rho\cdot\rho\mathrm{d}\theta =$$

$$= (\sin\rho - \rho\cos\rho)\big|_0^R \cdot \theta\big|_{-\pi}^{\pi}$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int\limits_{0}^{R}\mathrm{d}\rho\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\rho\cdot\rho\mathrm{d}\theta =$$

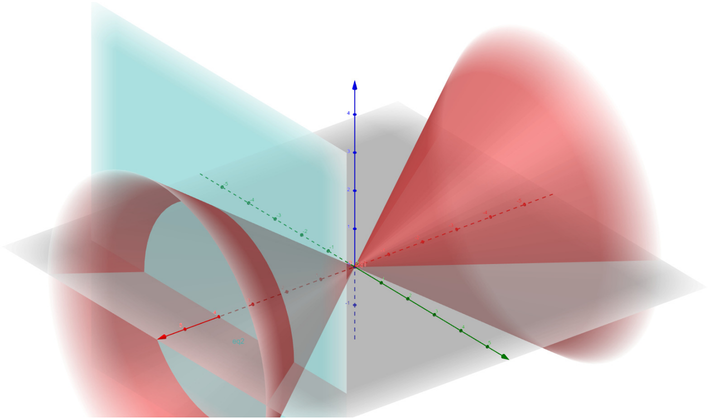
$$= \left.\left(\sin\rho - \rho\cos\rho\right)\right|_0^R \cdot \left.\theta\right|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi\left(\sin R - R\cos R\right).$$

Завдання 2.3

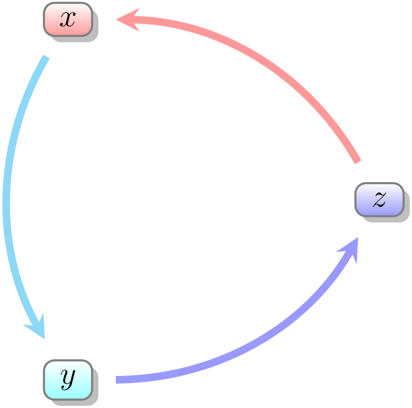
$$\text{Обчислити} \iiint\limits_{V:\ \begin{array}{c} x^2 = 2(y^2+z^2), \\ x = 4, x \geqslant 0 \end{array}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Завдання 2.3

$$\text{Обчислити} \iiint\limits_{V:\ \begin{cases} x^2 = 2(y^2+z^2), \\ x = 4, x \geqslant 0 \end{cases}} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$



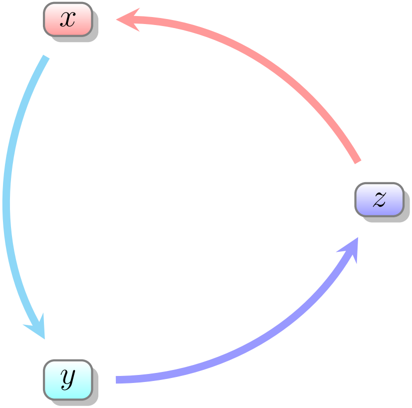
Перехід до циліндричної системи координат



$$\begin{cases} y = \rho \cos\varphi \\ z = \rho \sin\varphi \\ x = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2}; \, |i| = \rho;$$

Перехід до циліндричної системи координат

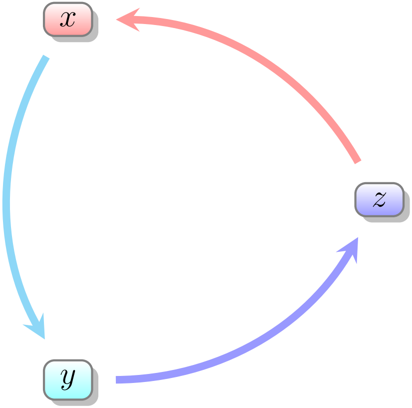


$$\begin{cases} y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ x = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2};\ |i| = \rho;$$

$$x^2 = 2(y^2 + z^2) \Rightarrow z^2 = 2\rho^2 \Rightarrow$$

Перехід до циліндричної системи координат



$$\begin{cases} y = \rho\cos\varphi \\ z = \rho\sin\varphi \\ x = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2};\ |i| = \rho;$$

$$x^2 = 2(y^2 + z^2) \Rightarrow z^2 = 2\rho^2 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{2}\rho \Rightarrow \rho = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2=2(y^2+z^2),\\ x=4,\, x\geqslant 0}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^4 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} z\rho\,\mathrm{d}\rho =$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2=2(y^2+z^2),\\ x=4,\, x\geqslant 0}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^4 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_0^4 z\,\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{z}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Розв’язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2=2(y^2+z^2),\\ x=4,\, x\geqslant 0}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^4 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} z\rho\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_0^4 z\, \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{z}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^4 \frac{z^3}{4}\mathrm{d}z$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2=2(y^2+z^2),\\ x=4,\, x\geqslant 0}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^4 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_0^4 z\ \frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{z}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^4 \frac{z^3}{4}\mathrm{d}z = 2\pi\ \frac{z^4}{4\cdot 4}\bigg|_0^4$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2=2(y^2+z^2),\\ x=4,\, x\geqslant 0}} x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_0^4 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\frac{z}{\sqrt{2}}} z\rho\,\mathrm{d}\rho =$$

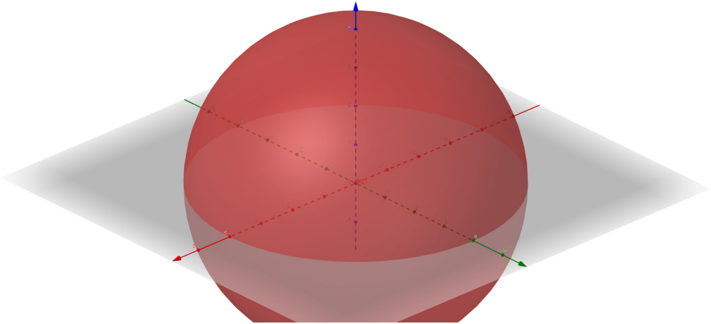
$$= \int\limits_0^4 z\ \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\frac{z}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^4 \frac{z^3}{4}\mathrm{d}z = 2\pi\ \frac{z^4}{4\cdot 4}\Bigg|_0^4 = 32\pi.$$

Завдання 2.3

Обчислити:
$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

Завдання 2.3

Обчислити: $$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$



Сферична система координат

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$|i| = \rho^2 \sin\varphi$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int\limits_0^4 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta =$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int\limits_0^4 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^4 \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int\limits_0^4 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^4 \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^4 \cdot \left(-\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int\limits_0^4 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^4 \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^4 \cdot \left(-\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_{V:\ \substack{x^2+y^2+z^2=16,\\ z\geqslant 0}} \frac{x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int\limits_0^4 \mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(\rho\sin\varphi\cos\theta)^2}{\rho^3}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int\limits_0^4 \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\mathrm{d}\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^4 \cdot \left(-\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi = \frac{32}{3}\pi.$$

Задача

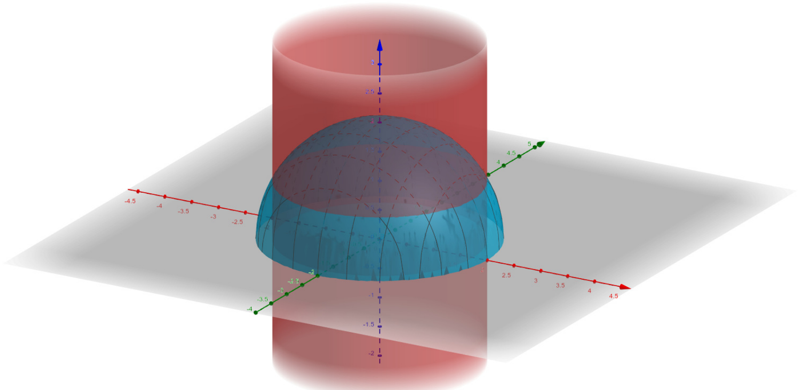
Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0, x^2 + y^2 \geqslant 3.$$

Задача

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = 0, x^2 + y^2 \geqslant 3.$$



Циліндрична система координат

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \quad z = z;$$

$$|i| = \rho;$$

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \Rightarrow z = \sqrt{4 - \rho^2}$$

Розв'язання

$$V = \int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} z\Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \mathrm{d}\rho$$

Розв'язання

$$V = \int\limits_{0}^{\sqrt{4-\rho^2}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} z\Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \cdot \left[-\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]\Bigg|_{\sqrt{3}}^{2}$$

Розв'язання

$$V = \int\limits_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\sqrt{3}}^{2} z\Big|_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho \mathrm{d}\rho = 2\pi \cdot \left[-\frac{\left(4-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right] \Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Завдання 3

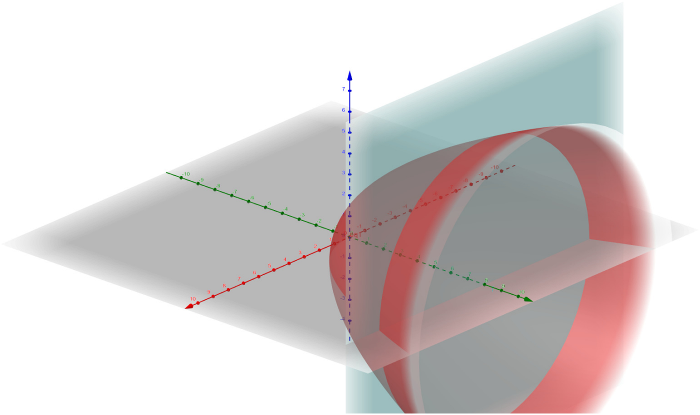
Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$$

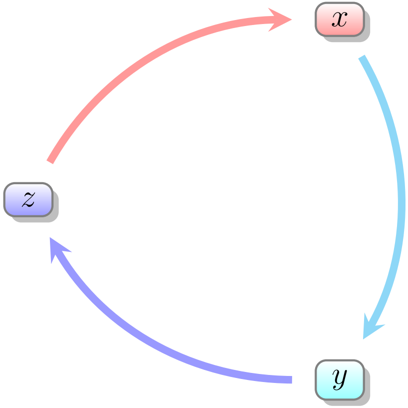
Завдання 3

Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$$



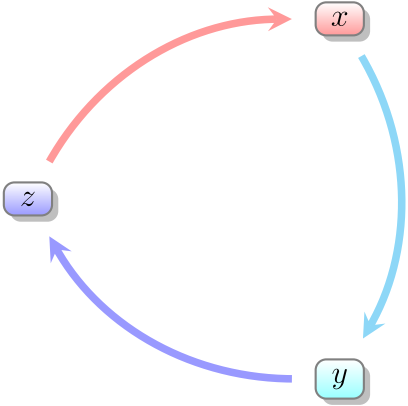
Перехід до циліндричної системи координат



$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \\ y = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + z^2}; \ |i| = \rho;$$

Перехід до циліндричної системи координат

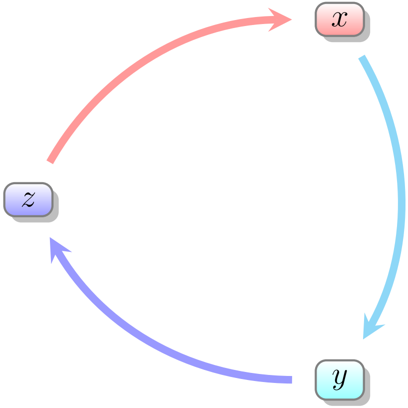


$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \\ y = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + z^2}; |i| = \rho;$$

$$6y = x^2 + z^2 \Rightarrow 6z = \rho^2 \Rightarrow$$

Перехід до циліндричної системи координат



$$\begin{cases} z = \rho\cos\varphi \\ x = \rho\sin\varphi \\ y = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + z^2}; \, |i| = \rho;$$

$$6y = x^2 + z^2 \Rightarrow 6z = \rho^2 \Rightarrow$$

$$\rho = \sqrt{6z}$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0$.

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0.$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0.$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 z\, \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0$.

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 z\,\frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z^2\mathrm{d}z$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0.$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 z\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z^2\mathrm{d}z = 2\pi\, \frac{3z^3}{3}\Big|_0^8$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = z_C = 0.$

$$y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V y\mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 z\, \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z^2\mathrm{d}z = 2\pi\, \frac{3z^3}{3}\Bigg|_0^8 = 1024\pi.$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z\mathrm{d}z$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z\mathrm{d}z = 2\pi \left. \frac{3z^2}{2} \right|_0^8$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \left.\frac{\rho^2}{2}\right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z \mathrm{d}z = 2\pi \left.\frac{3z^2}{2}\right|_0^8 = 192\pi.$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z\mathrm{d}z = 2\pi \left. \frac{3z^2}{2} \right|_0^8 = 192\pi.$$

$$y_C = \frac{1024\pi}{192\pi}$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^8 \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{6z}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^8 \frac{\rho^2}{2}\bigg|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{6z}} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^8 3z\mathrm{d}z = 2\pi\, \frac{3z^2}{2}\bigg|_0^8 = 192\pi.$$

$$y_C = \frac{1024\pi}{192\pi} = \frac{16}{3}.$$

Завдання 3

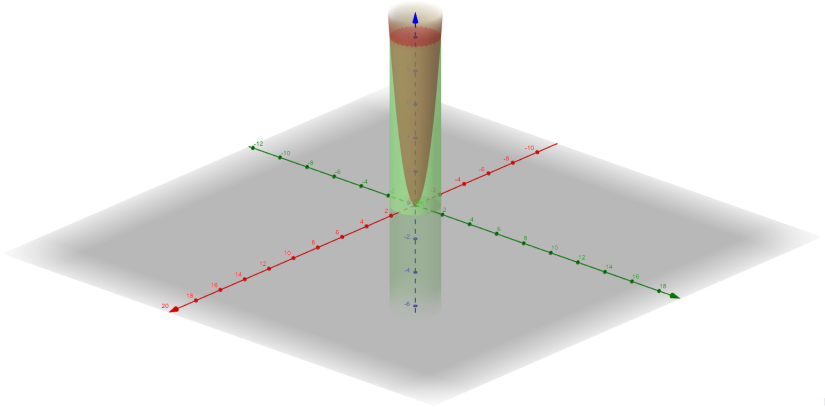
Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0.$$

Завдання 3

Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 5(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 2, z = 0.$$



Циліндрична система координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad z = z;$$

$$|i| = \rho;$$

$$z = 5(x^2 + y^2) \Rightarrow z = 5\rho^2$$

Розв’язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0$.

Розв’язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0.$

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0$.

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2}\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0$.

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{25\rho^5}{2}\mathrm{d}\rho$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0$.

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{25\rho^5}{2}\mathrm{d}\rho = 25\pi\ \frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^{\sqrt{2}}$$

Розв'язання

Симетрія $\Rightarrow x_C = y_C = 0.$

$$z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; w = 1.$$

$$\iiint\limits_V z\mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} z\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \frac{25\rho^5}{2}\mathrm{d}\rho = 25\pi \left.\frac{\rho^6}{6}\right|_0^{\sqrt{2}} = \frac{100\pi}{3}.$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} 5\rho^3 \mathrm{d}\rho$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} 5\rho^3 \mathrm{d}\rho = 10\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\sqrt{2}}$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} 5\rho^3 \mathrm{d}\rho = 10\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} = 10\pi.$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} 5\rho^3 \mathrm{d}\rho = 10\pi \left. \frac{\rho^4}{4} \right|_0^{\sqrt{2}} = 10\pi.$$

$$z_C = \frac{100\pi/3}{10\pi}$$

Розв'язання

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}v = \int\limits_0^{5\rho^2} \mathrm{d}z \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} z\Big|_{z=0}^{z=5\rho^2} \rho \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\sqrt{2}} 5\rho^3 \mathrm{d}\rho = 10\pi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} = 10\pi.$$

$$z_C = \frac{100\pi/3}{10\pi} = \frac{10}{3}.$$