Довільні числові ряди. Знакочергові ряди. Функціональні ряди

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

За граничною формою ознаки порівняння:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

За граничною формою ознаки порівняння:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний як узагальнений гармонійний ($\alpha < 1$).

Завдання 7

Сам ряд збіжний за ознакою Ляйбніца:

- $\left\{\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$ – монотонна.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$

Завдання 7

Сам ряд збіжний за ознакою Ляйбніца:

- $\left\{\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$ – монотонна.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 0$

Висновок: Ряд умовно збіжний.

Завдання 7

Умова:

Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

За граничною формою ознаки порівняння:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$$

Завдання 7

Умова:
Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\arcsin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.
Розв'язання: Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

За граничною формою ознаки порівняння:

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}, n \to \infty$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ – розбіжний як узагальнений гармонійний $(\alpha < 1)$.

Завдання 8

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{9^n}, \varepsilon = 0,001.$$

Завдання 8

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{9^n}, \varepsilon = 0,001.$$

Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

Завдання 8

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{9^n}, \varepsilon = 0,001.$

Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Завдання 8

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{9^n}, \varepsilon = 0,001.$

Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Тому достатньо порахувати суму членів ряду, які за модулем є більшими за ε, щоб дізнатися значення суми з потрібною точністю.

Завдання 8

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} \cdot n}{9^n}, \varepsilon = 0,001.$

Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{(k+1)} u_k \right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Тому достатньо порахувати суму членів ряду, які за модулем є більшими за ε, щоб дізнатися значення суми з потрібною точністю.

$$u_1 = \frac{1}{9^1} = \frac{1}{9}; u_2 = \frac{2}{9^2} = \frac{2}{81} \approx 0,0247; u_3 = \frac{3}{9^3} = \frac{1}{243} \approx 0,0041;$$

$$u_4 = \frac{4}{9^4} = \frac{4}{6561} \approx 0,0006;$$

Завдання 8

$$S \approx \frac{1}{9} - \frac{2}{81} + \frac{1}{243} \approx 0,091$$

Завдання 9

Умова:

Знайти область збіжності функціонального ряду.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n.$$

Завдання 9

Умова:
Знайти область збіжності функціонального ряду.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n$.
Розв'язання: Скористаймося ознакою д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}(9x^2+1)^{n+1}}{\dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n}$$

Завдання 9

Умова:
Знайти область збіжності функціонального ряду.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n$.
Розв'язання: Скористаймося ознакою д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}(9x^2+1)^{n+1}}{\dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n} = \frac{9x^2+1}{2}$$

Завдання 9

Умова:
Знайти область збіжності функціонального ряду.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n.$
Розв'язання: Скористаймося ознакою д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}(9x^2+1)^{n+1}}{\dfrac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n} = \frac{9x^2+1}{2} < 1.$$

Завдання 9

Умова:
Знайти область збіжності функціонального ряду.
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n.$
Розв'язання: Скористаймося ознакою д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2(n+1)^2+1}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}(9x^2+1)^{n+1}}{\frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n}(9x^2+1)^n} = \frac{9x^2+1}{2} < 1.$$

$$9x^2 < 1 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

Завдання 9

Перевіримо збіжність там, де ознака д'Аламбера не дає відповіді щодо збіжності ($x = \pm\dfrac{1}{3}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n} \left(9 \cdot \left(\pm\frac{1}{3} \right)^2 + 1 \right)^n$$

Завдання 9

Перевіримо збіжність там, де ознака д'Аламбера не дає відповіді щодо збіжності ($x = \pm\dfrac{1}{3}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n} \left(9 \cdot \left(\pm\frac{1}{3}\right)^2 + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2}$$

Завдання 9

Перевіримо збіжність там, де ознака д'Аламбера не дає відповіді щодо збіжності ($x = \pm\dfrac{1}{3}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n} \left(9 \cdot \left(\pm\frac{1}{3} \right)^2 + 1 \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2}$$

Очевидно, для отриманого ряду не виконується необхідна умова збіжності.

Завдання 9

Перевіримо збіжність там, де ознака д'Аламбера не дає відповіді щодо збіжності ($x = \pm\frac{1}{3}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2 \cdot 2^n} \left(9 \cdot \left(\pm\frac{1}{3}\right)^2 + 1\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n^2}$$

Очевидно, для отриманого ряду не виконується необхідна умова збіжності.

Висновок: Область збіжності – $x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Завдання 10

Умова:

Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому інтервалі. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, x \in [0; +\infty)$.

Завдання 10

Умова:
Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому інтервалі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+x)^2}, x \in [0; +\infty)$.
Розв'язання
На промені $x \in [0, +\infty]$ виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

Завдання 10

Умова:
Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому інтервалі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, x \in [0; +\infty)$.
Розв'язання
На промені $x \in [0, +\infty]$ виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний узагальнений гармонійний ряд.

Завдання 10

Умова:

Довести рівномірну збіжність функціонального ряду на заданому інтервалі. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2}, x \in [0; +\infty)$.

Розв'язання

На промені $x \in [0, +\infty]$ виконується нерівність

$$\left| \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ – збіжний узагальнений гармонійний ряд.}$$

За ознакою Веєрштраса досліджуваний ряд збігається рівномірно і абсолютно на вказаному в умові проміжку.