Розв'язання задач на елементи теорії поля

Задача 1

Дано векторне поле $\vec{a}$. Знайти дивергенцію поля у точці $M_0(3; 2; -1)$.

$$\vec{a} = \left(x^2 + \sin y; zx - y^3; 3z + \operatorname{tg} \frac{x}{y} \right).$$

Розв'язання

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

Розв'язання

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

Розв'язання

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial (x^2 + \sin y)}{\partial x} + \frac{\partial (zx - y^3)}{\partial y} + \frac{\partial \left(3z + \operatorname{tg} \dfrac{x}{y}\right)}{\partial z} = 2x - 3y^2 + 3$$

Розв'язання

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(x^2+\sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(zx-y^3)}{\partial y} + \frac{\partial\left(3z+\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)}{\partial z} = 2x - 3y^2 + 3$$

Підставляємо точку M:

$$\operatorname{div}\vec{a}\big|_M = \left(2x-3y^2+3\right)\Big|_{(3;2;-1)}$$

Розв'язання

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(x^2 + \sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(zx - y^3)}{\partial y} + \frac{\partial\left(3z + \operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)}{\partial z} = 2x - 3y^2 + 3$$

Підставляємо точку M:

$$\operatorname{div}\vec{a}\big|_M = \left(2x - 3y^2 + 3\right)\Big|_{(3;2;-1)} = 2\cdot 3 - 3\cdot 2^2 + 3$$

Розв'язання

$$\operatorname{div}\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial(x^2+\sin y)}{\partial x} + \frac{\partial(zx-y^3)}{\partial y} + \frac{\partial\left(3z+\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}\right)}{\partial z} = 2x - 3y^2 + 3$$

Підставляємо точку M:

$$\operatorname{div}\vec{a}\big|_M = \left(2x-3y^2+3\right)\Big|_{(3;2;-1)} = 2\cdot 3 - 3\cdot 2^2 + 3 = -3.$$

Задача 2

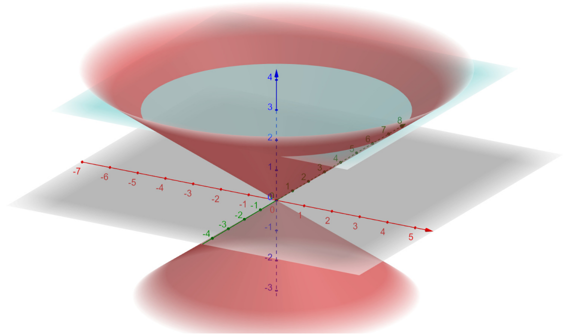
Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж контуру Г, використовуючи формулу Стокса.

$$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (3x-z)\vec{k}, \Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0; \\ z = 3. \end{cases}$$

Задача 2

Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж контуру Γ, використовуючи формулу Стокса.

$$\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (3x-z)\vec{k}, \Gamma : \begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0; \\ z=3. \end{cases}$$



Розв'язання

За формулою Стокса:

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta$$

Розв'язання

За формулою Стокса:

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta$$

У задачі, очевидно, $\vec{n} = \vec{k}$, тому лишилося знайти $\mathrm{rot}\ \vec{a}$.

Розв'язання

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Розв'язання

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Розв'язання

$$\text{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & z-x & 3x-z \end{vmatrix} =$$

Розв'язання

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x+y & z-x & 3x-z \end{vmatrix} =$$

$$= (-1; -3; -2)$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} (-1; -3; -2) \cdot (0; 0; 1)\mathrm{d}\Delta$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} (-1; -3; -2) \cdot (0; 0; 1)\mathrm{d}\Delta = -2 \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}\Delta =$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a}\cdot\vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} (-1;-3;-2)\cdot(0;0;1)\mathrm{d}\Delta = -2\iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}\Delta =$$

$$= -2\Delta$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a} \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} (-1; -3; -2) \cdot (0; 0; 1) \mathrm{d}\Delta = -2 \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}\Delta =$$

$$= -2\Delta = -2 \cdot \pi \cdot 18$$

Розв'язання

Маємо

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{a}\mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\ \vec{a} \cdot \vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} (-1; -3; -2) \cdot (0; 0; 1)\mathrm{d}\Delta = -2 \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}\Delta =$$

$$= -2\Delta = -2 \cdot \pi \cdot 18 = -36\pi.$$

Домашнє завдання

- Дано векторне поле $\vec{a}$. Знайти дивергенцію поля у точці $M_0(1;-3;1)$.

$$\vec{a} = \left(\cos z - 3x^3; 3\operatorname{arctg} x - 2y^2; 5z^3 + \ln\frac{y}{x}\right).$$

- Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{a}$ вздовж контуру Γ, використовуючи формулу Стокса.

$$\vec{a} = (2y - 3x)\vec{i} + (4z - y)\vec{j} + (2x + y)\vec{k}, \Gamma : \begin{cases} 4x^2 + y^2 = z; \\ z = 4. \end{cases}$$

Завдання 5

Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}\right|_M$ за умови, що $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$; $\vec{l} = (-2, -1, 1)$; $M(1, -3, 4)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\operatorname{grad} u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\text{grad } u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

$$\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\text{grad } u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

$$\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\text{grad } u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

$$\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\text{grad } u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

$$\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}; \frac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\sqrt{5^2}}; \frac{-3}{(1+\sqrt{5^2})\sqrt{5^2}}; \frac{4}{(1+\sqrt{5^2})\sqrt{5^2}}\right)$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\text{grad } u; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

$$\text{grad } u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial \left[\ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})\right]}{\partial x}; \frac{\partial \left[\ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})\right]}{\partial y}; \frac{\partial \left[\ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{x + \sqrt{y^2 + z^2}}; \frac{y}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}}; \frac{z}{(x + \sqrt{y^2 + z^2})\sqrt{y^2 + z^2}}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{1 + \sqrt{5^2}}; \frac{-3}{(1 + \sqrt{5^2})\sqrt{5^2}}; \frac{4}{(1 + \sqrt{5^2})\sqrt{5^2}}\right) = \left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; \frac{2}{15}\right)$$

Розв'язання

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; \frac{2}{15}\right) \cdot (-2, -1, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}}$$

Розв'язання

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; \frac{2}{15}\right) \cdot (-2, -1, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15}}{\sqrt{6}}$$

Розв'язання

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\frac{1}{6}; -\frac{1}{10}; \frac{2}{15}\right) \cdot (-2, -1, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-\frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{2}{15}}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{10\sqrt{6}}.$$

Завдання 5

Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}$; $S : z = x^2 - y^2$; $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ$; $M(1, 1, 0)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}\, u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad} u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad} u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad} u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad} u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad} u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad} u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}; \frac{z}{\sqrt{4 - z^2}}\right)\Bigg|_M$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}; \frac{z}{\sqrt{4 - z^2}}\right)\Bigg|_M = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}; \frac{0}{\sqrt{4 - 0^2}}\right)$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\sqrt{xy} - \sqrt{4 - z^2}\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}; \frac{z}{\sqrt{4 - z^2}}\right)\Bigg|_M = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1}}; \frac{0}{\sqrt{4 - 0^2}}\right) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | z = f(x, y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | z = f(x, y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1 \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial x}; \frac{\partial (x^2 - y^2)}{\partial y}; -1 \right)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z)|z = f(x, y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y}; -1\right) = (2x; -2y; -1)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 1; -2 \cdot 1; -1)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | z = f(x, y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y}; -1\right) = (2x; -2y; -1)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 1; -2 \cdot 1; -1) = (2; -2; -1)$$

Розв'язання

Якщо $S:\{(x;y;z)|z=f(x,y)\}$,

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};-1\right)$$

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x};\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y};-1\right)=(2x;-2y;-1)$$

У точці M:

$$\vec{n}=(2\cdot 1;-2\cdot 1;-1)=(2;-2;-1)$$

Отже (мінус взято через те, що $\angle(\vec{n},Oz)\leqslant 90^\circ$):

$$-\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=\frac{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)\cdot(2;-2;-1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x;y;z)|z = f(x,y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y}; -1\right) = (2x; -2y; -1)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 1; -2 \cdot 1; -1) = (2; -2; -1)$$

Отже (мінус взято через те, що $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ$):

$$-\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \cdot (2; -2; -1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{9}}$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x;y;z)|z = f(x,y)\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; -1\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial y}; -1\right) = (2x; -2y; -1)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 1; -2 \cdot 1; -1) = (2; -2; -1)$$

Отже (мінус взято через те, що $\angle(\vec{n}, Oz) \leqslant 90^\circ$):

$$-\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \cdot (2; -2; -1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{9}} = 0.$$

Задача 3

Перевірити чи є векторне поле $\vec{a}$ а) потенційним; б) соленоїдальним.

$$\vec{a} = (x + z^2)\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (z - \cos y)\vec{k}$$

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути rot $\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$$

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути $\mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + z^2 & z - 2y & z - \cos y \end{vmatrix} =$$

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + z^2 & z - 2y & z - \cos y \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin y - 1; 2z; 0)$$

Розв'язання

Якщо потенційне, має бути $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x + z^2 & z - 2y & z - \cos y \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin y - 1; 2z; 0)$$

Не потенційне.

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути div $\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\text{div } \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$$

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути div $\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial (x + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (z - 2y)}{\partial y} + \frac{\partial (z - \cos y)}{\partial z} =$$

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути div $\vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial (x + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (z - 2y)}{\partial y} + \frac{\partial (z - \cos y)}{\partial z} =$$

$$= 1 - 2 + 1$$

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial (x + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (z - 2y)}{\partial y} + \frac{\partial (z - \cos y)}{\partial z} =$$

$$= 1 - 2 + 1 = 0$$

Розв'язання

Якщо соленоїдальне, має бути $\operatorname{div} \vec{a} = 0$.
Перевіряємо:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial (x + z^2)}{\partial x} + \frac{\partial (z - 2y)}{\partial y} + \frac{\partial (z - \cos y)}{\partial z} =$$

$$= 1 - 2 + 1 = 0$$

Поле є соленоїдальним.