Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків. Розв'язування нормальних лінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку.

Завдання 9

Умова:

Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$y'' - 5y' + 4y = 9\cos 3x$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Маємо:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3B\cos 3x - 3A\sin 3x$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^x; y_2 = e^{4x}$$

Розв'язок за правилами шукаємо у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x$$

Маємо:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 3B\cos 3x - 3A\sin 3x$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x$$

Розв'язання

Підставляємо до рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x -$$

$$-5(3B\cos 3x - 3A\sin 3x) +$$

$$+4(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$

Розв'язання

Підставляємо до рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x -$$

$$-5(3B\cos 3x - 3A\sin 3x) +$$

$$+4(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$

$$= (-5A - 15B)\cos 3x + (-5B + 15A)\sin 3x = 9\cos 3x$$

Розв'язання

Підставляємо до рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x -$$

$$-5(3B\cos 3x - 3A\sin 3x) +$$

$$+4(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$

$$= (-5A - 15B)\cos 3x + (-5B + 15A)\sin 3x = 9\cos 3x$$

Отже,

$$\begin{cases} -5A - 15B = 9 \\ 15A - 5B = 0 \end{cases}$$

Розв'язання

Підставляємо до рівняння:

$$y'' - 5y' + 4y = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x -$$

$$-5(3B\cos 3x - 3A\sin 3x) +$$

$$+4(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$

$$= (-5A - 15B)\cos 3x + (-5B + 15A)\sin 3x = 9\cos 3x$$

Отже,

$$\begin{cases} -5A - 15B = 9 \\ 15A - 5B = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{9}{50}; B = -\frac{27}{50}.$$

Розв'язання

Отже,

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x} - \frac{9}{50}\cos 3x - \frac{27}{50}\sin 3x$$

Завдання 10

Умова:

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння, використовуючи метод варіації довільних сталих
$y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + 4y = 0$.

$$k^2 + 4 = 0; \quad k_1 = 2\mathrm{i}; \quad k_2 = -2\mathrm{i}$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + 4y = 0$.

$$k^2 + 4 = 0; \quad k_1 = 2\mathrm{i}; \quad k_2 = -2\mathrm{i}$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x;$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1(x) \cos 2x + C_2(x) \sin 2x;$$

Розв'язання

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -C_1'(x)\sin 2x + C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{2\sin 2x} \end{cases}$$

Розв'язання

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos 2x + C_2'(x)\sin 2x = 0 \\ -C_1'(x)\sin 2x + C_2'(x)\cos 2x = \dfrac{1}{2\sin 2x} \end{cases}$$

Правило Крамера

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1/2}{1} = -\frac{1}{2}$$

$$C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\cos 2x}{2\sin 2x} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$$

Розв'язання

Отже

$$C_1(x) = \int -1/2 \mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + C_1^*$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos 2x}{2\sin 2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2^*$$

Розв'язання

Отже

$$C_1(x) = \int -1/2 \mathrm{d}x = -\frac{x}{2} + C_1^*$$

$$C_2(x) = \int \frac{\cos 2x}{2\sin 2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \ln \sin 2x + C_2^*$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1^* \cos 2x + C_2^* \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln \sin 2x$$

Завдання 11

Умова: $$\begin{cases} \dot{x}_1 = -7x_1 + 5x_2, \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 8x_2. \end{cases}$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 5 \\ 4 & -8-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(-7-k)(-8-k)-20=0; \qquad 56+7k+8k+k^2-20=0;$$

$$k^2+15k+36=0; \qquad k_1=-3; \qquad k_2=-12;$$

Розв'язання

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (-7+3)\alpha_1 + 5\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 + (-8+3)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -4\alpha_1 + 5\beta_1 = 0 \\ 4\alpha_1 - 5\beta_1 = 0 \end{cases}$

Підставляючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_1 = 4/5$.

Розв'язання

Для k_2: $\begin{cases} (-7+12)\alpha_2 + 5\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 + (-8+12)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 5\alpha_2 + 5\beta_2 = 0 \\ 4\alpha_2 + 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Покладаючи $\alpha_2 = 1$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_2 = -1$.

Розв'язок

Загальний розв'язок системи: $\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-12t} \\ x_2 = \dfrac{4}{5} C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-12t} \end{cases}$

Завдання 13

Умова:

За умовами протікання фізичного процесу скласти диференціальне рівняння та проінтегрувати його. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, воно витримує протидію середовища, пропорційну його швидкості. Знайти закон руху тіла (залежність шляху від часу).

Розв'язання

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

Розв'язання

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

$$F_{\text{зовн}} = Kt$$

Розв'язання

Другий закон Ньютона:

$$ma = m\ddot{x} = F = F_{\text{зовн}} + F_{\text{пр}}$$

$$F_{\text{зовн}} = Kt$$

$$F_{\text{пр}} = -\eta\dot{x}$$

Разом:

$$m\ddot{x} = Kt - \eta\dot{x}$$

Розв'язання

Скорочуємо на m ($\lambda = \dfrac{K}{m}$, $\mu = \dfrac{\eta}{m}$):

$$\ddot{x} + \mu \dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку.

Розв'язання

Скорочуємо на m ($\lambda = \dfrac{K}{m}$, $\mu = \dfrac{\eta}{m}$):

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку.
Характеристичне рівняння для однорідного

$$k^2 + \mu k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -\mu.$$

Розв'язання

Скорочуємо на m ($\lambda = \dfrac{K}{m}$, $\mu = \dfrac{\eta}{m}$):

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = \lambda t$$

Лінійне неоднорідне рівняння другого порядку.
Характеристичне рівняння для однорідного

$$k^2 + \mu k = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = -\mu.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$x_1 = e^{0\cdot t} = 1; x_2 = e^{-\mu t}$$

Загальний розв'язок однорідного:

$$x = C_1 + C_2 e^{-\mu t}.$$

Розв'язання

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

Розв'язання

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Розв'язання

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Розв'язання

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Звідки

$$2A\mu = \lambda; 2A + \mu B = 0.$$

Розв'язання

Шукаємо частинний розв'язок:

$$x_{\text{ч.н.}} = t(At + B)$$

$$\dot{x}_{\text{ч.н.}} = 2At + B; \ddot{x}_{\text{ч.н.}} = 2A.$$

Підставляємо до рівняння:

$$2A + \mu(2At + B) = \lambda t$$

Звідки

$$2A\mu = \lambda; 2A + \mu B = 0.$$

$$A = \frac{\lambda}{2\mu}; B = -\frac{\lambda}{\mu^2}.$$

Розв'язання

Таким чином,

$$x_{\text{ч.н.}} = t\left(\frac{\lambda}{2\mu}t - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)$$

Розв'язання

Таким чином,

$$x_{\text{ч.н.}} = t\left(\frac{\lambda}{2\mu}t - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)$$

$$x = x_{\text{з.о.}} + x_{\text{ч.н.}} = C_1 + C_2 e^{-\mu t} + t\left(\frac{\lambda}{2\mu}t - \frac{\lambda}{\mu^2}\right)$$