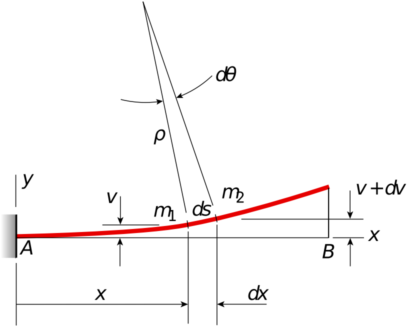
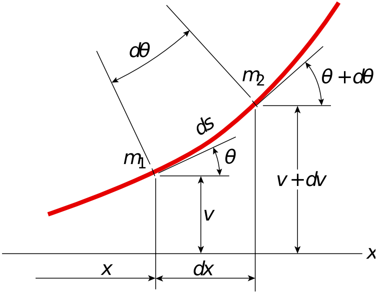
Диференціальні рівняння вищих порядків. Розв'язування задач на диференціальні рівняння.

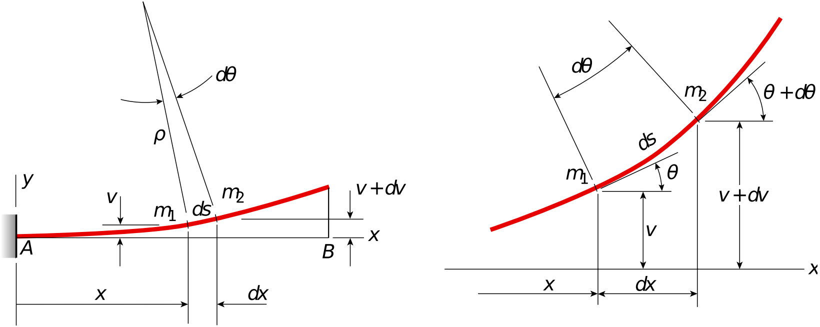
Диференціальне рівняння зігнутої вісі балки





$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

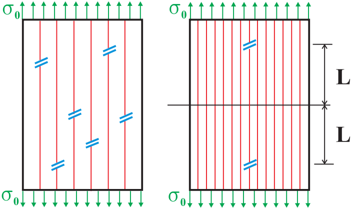
Диференціальне рівняння зігнутої вісі балки



$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EJ}$$

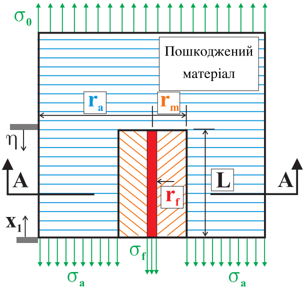
Для розв'язання достатньо просто проінтегрувати потрібну кількість разів!

Перерозподіл напружень у пластині із розірваними волокнами



Пластина із розірваним армуванням

Пластина із розірваним волокном



$$\sigma_f'' - \lambda^2 \sigma_f = -\lambda^2 \frac{E_f}{E_a} \sigma_0, \text{ де } \lambda^2 = 8 \frac{G_m}{E_f} \frac{r_f}{r_m} \frac{1}{1 - r_f/r_m}.$$

Автономне рівняння. Зниження порядку.

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Автономне рівняння. Зниження порядку.

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Зниження порядку:

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

Автономне рівняння. Зниження порядку.

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Зниження порядку:

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y}p = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p\right)}{\mathrm{d}y}p = \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2}p^2 + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)^2 p$$

Задача 7

Умова:

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння вищого порядку

$$2yy'' = 1 + \left(y'\right)^2 .$$

Задача 7

Розв'язання:

Підстановка

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$$

Задача 7

Розв'язання:

Підстановка
$$y' = p$$
$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$$
Отже, маємо
$$2yp(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1 + p(y)^2$$

Задача 7

Розв'язання:

Підстановка

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$$

Отже, маємо

$$2yp(y)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 1 + p(y)^2$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Задача 7

Дописуємо інтеграли

$$\int \frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Звідки

$$\ln(1+p^2) = \ln|y| + C.$$

Задача 7

Дописуємо інтеграли

$$\int \frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Звідки

$$\ln(1+p^2) = \ln|y| + C.$$

Потенціюємо обидві частини рівності

$$1+p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Задача 7

Дописуємо інтеграли

$$\int \frac{2p}{1+p^2}\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Звідки

$$\ln(1+p^2) = \ln|y| + C.$$

Потенціюємо обидві частини рівності

$$1+p^2 = C_1 y \Rightarrow p = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Згадуємо, що $p = y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm\sqrt{C_1 y - 1}$$

Задача 7

Відокремлення змінних

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm \int \mathrm{d}x$$

Звідки

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2.$$

Задача 7

Відокремлення змінних

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm \int \mathrm{d}x$$

Звідки

$$\frac{2}{C_1}\sqrt{C_1 y - 1} = \pm x + C_2.$$

$$y = \frac{1}{C_1}\left\{\left(\pm\frac{C_1 x}{2} + \frac{C_1 C_2}{2}\right)^2 + 1\right\}.$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

або, коротше,

$$L(y) = 0$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

або, коротше,

$$L(y) = 0$$

Підстановка Ойлера $y = e^{kx}$, де $k = const$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

або, коротше,

$$L(y) = 0$$

Підстановка Ойлера $y = e^{kx}$, де $k = const$

Характеристичне рівняння:

$$F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

або, коротше,

$$L(y) = 0$$

Підстановка Ойлера $y = e^{kx}$, де $k = const$
Характеристичне рівняння:

$$F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$$

Лінійне однорідне диференціальне рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами

а) кожному дійсному кореню відповідає розв'язок e^{kx};
б) кожному дійсному кореню кратності m ставиться у відповідність m розв'язків:

$$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad ... \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

в) кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність два розв'язки: $e^{\alpha x} \cos \beta x$ та $e^{\alpha x} \sin \beta x$
г) кожній парі m-кратних комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність $2m$ розв'язків:

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad xe^{\alpha x} \cos \beta x, \quad ... \quad x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x,$$
$$e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad xe^{\alpha x} \sin \beta x, \quad ...x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Задача 8

Умова:

Розв'язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами $y^{\mathrm{IV}} + 2y'' + y = 0$,
$y\,(0) = 0,\ y'\,(0) = 1,\ y''\,(0) = -1, y'''\,(0) = -5.$

Задача 8

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Його розв'язки

$$k_{1,2} = \mathrm{i}; k_{3,4} = -\mathrm{i};$$

Задача 8

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Його розв'язки

$$k_{1,2} = \mathrm{i}; k_{3,4} = -\mathrm{i};$$

Маємо випадок г).

$$y_1 = \cos x; y_2 = x\cos x; y_3 = \sin x; y_4 = x\sin x.$$

Задача 8

Характеристичне рівняння

$$k^4 + 2k^2 + 1 = 0.$$

Його розв'язки

$$k_{1,2} = \mathrm{i}; k_{3,4} = -\mathrm{i};$$

Маємо випадок г).

$$y_1 = \cos x; y_2 = x\cos x; y_3 = \sin x; y_4 = x\sin x.$$

Загальний розв'язок

$$y(x) = C_1\cos x + C_2 x\cos x + C_3\sin x + C_4 x\sin x.$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y'(x) = (C_3 + C_2)\cos x + C_4 x \cos x + (C_4 - C_1)\sin x - C_2 x \sin x.$$

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y'(x) = (C_3 + C_2)\cos x + C_4 x\cos x + (C_4 - C_1)\sin x - C_2 x\sin x.$$

$$y''(x) = (2C_4 - C_1)\cos x - C_2 x\cos x - (C_3 + 2C_2)\sin x - C_4 x\sin x.$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y'(x) = (C_3 + C_2)\cos x + C_4 x\cos x + (C_4 - C_1)\sin x - C_2 x\sin x.$$

$$y''(x) = (2C_4 - C_1)\cos x - C_2 x\cos x - (C_3 + 2C_2)\sin x - C_4 x\sin x.$$

$$y'''(x) = -(C_3 + 3C_2)\cos x + C_4 x\cos x + (C_1 - 3C_4)\sin x + C_2 x\sin x.$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow C_2 + C_3 = 1$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow C_2 + C_3 = 1$$

$$y''(0) = -1 \Rightarrow 2C_4 - C_1 = -1$$

Задача 8

Умови задачі Коші задовольняємо після знаходження похідних від загального розв'язку

$$y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow C_2 + C_3 = 1$$

$$y''(0) = -1 \Rightarrow 2C_4 - C_1 = -1$$

$$y'''(0) = -5 \Rightarrow -C_3 - 3C_2 = -5$$

$$C_1 = 0; C_2 = 2; C_3 = -1; C_4 = -\frac{1}{2}$$

Отже, розв'язок задачі Коші –

$$y(x) = 2x\cos x - \sin x - \frac{1}{2}x\sin x.$$

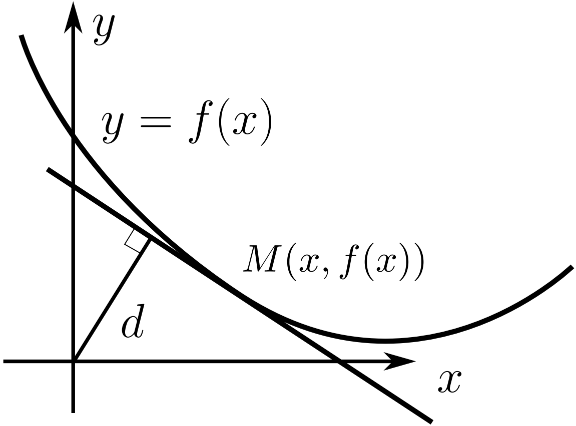
Задача 12

Умова:

За умовою задачі записати диференціальне рівняння та проінтегрувати його. Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1; 2)$ і має таку властивість, що відстань від початку координат до довільної її дотичної дорівнює абсцисі точки дотику.

Задача 12

Рисунок до задачі:



Задача 12

Рівняння дотичної:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Задача 12

Рівняння дотичної:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Переходимо до загального рівняння прямої:

$$f'(x)X - Y + f(x) - f'(x)x = 0$$

Задача 12

Рівняння дотичної:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Переходимо до загального рівняння прямої:

$$f'(x)X - Y + f(x) - f'(x)x = 0$$

Множимо на нормувальний множник:

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

Задача 12

Рівняння дотичної:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

Переходимо до загального рівняння прямої:

$$f'(x)X - Y + f(x) - f'(x)x = 0$$

Множимо на нормувальний множник:

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}$$

Отже

$$d(X, Y) = |\delta| = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \left| f'(x)X - Y + f(x) - f'(x)x \right|$$

Задача 12

Умова задачі:

$$d(0;0) = \pm x$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\left|f(x) - f'(x)x\right| = \pm x$$

або

$$\pm x\sqrt{1+f'^2} = \left|f - f'x\right|.$$

Задача 12

Умова задачі:

$$d(0;0) = \pm x$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}} \left| f(x) - f'(x)x \right| = \pm x$$

або

$$\pm x\sqrt{1 + f'^2} = \left| f - f'x \right|.$$

Підносячи до квадрату, маємо

$$x^2 + x^2 f'^2 = f^2 - 2ff'x + f'^2 x^2$$

Задача 12

Умова задачі:

$$d(0;0) = \pm x$$

Отже,

$$\frac{1}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}\left|f(x)-f'(x)x\right| = \pm x$$

або

$$\pm x\sqrt{1+f'^2} = \left|f - f'x\right|.$$

Підносячи до квадрату, маємо

$$x^2 + x^2 f'^2 = f^2 - 2ff'x + f'^2 x^2$$

Звідки

$$x^2 = f^2 - 2ff'x$$

або

$$f' - \frac{1}{2x}f = -\frac{x}{2}f^{-1}.$$

Отримали рівняння Бернуллі.

Задача 12

Виконуємо заміну

$$z = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{z} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'.$$

Задача 12

Виконуємо заміну

$$z = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{z} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} z' - \frac{1}{2x}\sqrt{z} = \frac{x}{2\sqrt{z}}$$

або після множення на $2\sqrt{z}$

$$z' - \frac{1}{x} z = -x.$$

Задача 12

Виконуємо заміну

$$z = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{z} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\sqrt{z}} z'.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} z' - \frac{1}{2x}\sqrt{z} = \frac{x}{2\sqrt{z}}$$

або після множення на $2\sqrt{z}$

$$z' - \frac{1}{x} z = -x.$$

$$z = x(C - x) = Cx - x^2.$$

Задача 12

Виконуємо заміну

$$z = f^2 \Rightarrow f = \sqrt{z} \Rightarrow f' = \frac{1}{2\sqrt{z}}z'.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{z}}z' - \frac{1}{2x}\sqrt{z} = \frac{x}{2\sqrt{z}}$$

або після множення на $2\sqrt{z}$

$$z' - \frac{1}{x}z = -x.$$

$$z = x(C - x) = Cx - x^2.$$

$$f = \sqrt{z} = \sqrt{x(C - x)}.$$

Умова задачі Коші — $f(1) = 2$:

$$2 = \sqrt{1(C - 1)} \Rightarrow C - 1 = 4 \Rightarrow C = 5 \Rightarrow f = \sqrt{x(5 - x)}.$$