Інтегрування раціональних функцій. Невизначені інтеграли, які зводяться до інтегрування раціональних функцій

Елементарні дроби

<u>Означення:</u> Елементарними називаються дроби наступних чотирьох типів:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральні числа ($m \geqslant 2$, $n \geqslant 2$) і $b^2-4ac<0$.

Інтегрування елементарних дробів

Перші два типи інтегралів від елементарних дробів досить просто приводяться до табличних підстановкою $t = ax + b$.

Інтегрування елементарних дробів першого типу

I.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b}$$

Інтегрування елементарних дробів першого типу

I.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Інтегрування елементарних дробів першого типу

I.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C$$

Інтегрування елементарних дробів першого типу

I.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

Інтегрування елементарних дробів другого типу

II.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^m}$$

Інтегрування елементарних дробів другого типу

II.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^m}$$

Інтегрування елементарних дробів другого типу

II.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C$$

Інтегрування елементарних дробів другого типу

II.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \mathrm{d}x$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}$$

Інтегрування елементарних дробів третього типу

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\mathrm{d}x + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x+3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u-3; & \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x+3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u-3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}\mathrm{d}u$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x+3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u-3; & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}\mathrm{d}u = 5\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2-49} - 18\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-49}$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x+3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u-3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}\mathrm{d}u = 5\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2-49} - 18\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-49} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C$$

Приклад

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}\mathrm{d}x = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x+3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u-3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5u-15-3}{u^2-49}\mathrm{d}u = 5\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2-49} - 18\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-49} =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left|u^2-49\right| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{u-7}{u+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln\left|x^2+6x-40\right| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+3; & \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} + 13\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}}$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} + 13\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} =$$

$$= -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C$$

Приклад

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-3; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+3; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} + 13\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{16-u^2}} =$$

$$= -3\sqrt{16-u^2} + 13\arcsin\frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13\arcsin\frac{x-3}{4} + C$$

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

Спочатку розглянемо окремий випадок при $M = 0$, $N = 1$.

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

Спочатку розглянемо окремий випадок при $M = 0$, $N = 1$.

Тоді інтеграл типу $\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2 + bx + c)^n}$ можна шляхом виділення в знаменнику повного квадрата представити у вигляді добутку сталого коефіцієнта на $\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + s)^n}$.

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx + N}{(ax^2 + bx + c)^n} \mathrm{d}x$$

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]^n}\mathrm{d}x$$

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2ax+b; & \mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{array} \right|$$

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2ax+b; & \mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{array} \right| = \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u$$

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2ax+b; & \mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{array} \right| = \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}\right]$$

Інтегрування елементарних дробів четвертого типу

У загальному випадку:

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}\mathrm{d}x = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]^n}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2ax+b; & \mathrm{d}u = 2a\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u-b}{2a}; & s = 4ac-b^2; \end{array} \right| = \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{\dfrac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}\right]$$

В отриманій рівності перший інтеграл за допомогою підстановки $t = u^2+s$ приводиться до табличного $\int \dfrac{\mathrm{d}t}{t^n}$, а до другого інтеграла застосовується розглянута вище рекурентна формула.

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2}$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} = \left| \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u; \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} = \left| \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3}\right]$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} = \left| \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C$$

Приклад

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x-2; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; \\ x = u+2. & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}\mathrm{d}u = 3\int \frac{u\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} + 11\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+3)^2} = \left| \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ \mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u; \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 11\left[\frac{u}{3\cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3\cdot 2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+3}\right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{3}} + C$$

Раціональна функція

Означення: Раціональною функцією $R(x)$ називається відношення двох многочленів

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n;$$

$$P(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Раціональна функція

Означення: Раціональною функцією $R(x)$ називається відношення двох многочленів

$$R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

$$Q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n;$$

$$P(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m.$$

Якщо $n \geqslant m$, дріб раціональної функції називається неправильним; якщо $n < m$ – правильним.

Розкладення раціональної функції на елементарні дроби

Теорема: Якщо $R(x) = \dfrac{Q(x)}{P(x)}$ – правильний раціональний дріб, знаменник $P(x)$ якого представлений у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників (відзначимо, що будь-який многочлен з дійсними коефіцієнтами може бути представлений у такому вигляді: $P(x) = (x-a)^{\alpha}$ $\dots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\dots(x^2+rx+s)^{\mu}$), то цей дріб може бути розкладений на елементарні за наступною схемою:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + ... + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + ...$$

$$+\frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + ... + \frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{(x^2+px+q)^{\lambda}} + ...$$

$$+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + ... + \frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{(x^2+rx+s)^{\mu}}$$

де A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – деякі сталі величини.

Інтегрування раціональної функції

При інтегруванні раціональних дробів вдаються до розкладу вихідного дробу на елементарні. Для знаходження величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i застосовують так званий **метод невизначених коефіцієнтів**, суть якого полягає у тому, що для того, щоб два многочлени були тотожно рівні, необхідно і достатньо, щоб були рівні коефіцієнти при однакових степенях x.

Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} \mathrm{d}x$$

Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

Оскільки $\left(x^2 - 6x + 8\right)\left(x^2 + 4\right) = (x - 2)\,(x - 4)\left(x^2 + 4\right)$, то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x - 2)(x - 4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 4} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

Приводячи до спільного знаменника і дорівнюючи відповідні чисельники, одержуємо:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A + B + C)x^3 + (-4A - 2B - 6C + D)x^2 + (4A + 4B + 8C - 6D)x +$$
$$+(-16A - 8B + 8D) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A + B + C = 9 \\ -4A - 2B - 6C + D = -30 \\ 4A + 4B + 8C - 6D = 28 \\ -16A - 8B + 8D = -88 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = -30 + 4A + 2B + 54 - 6A - 6B \\ 2A + 2B + 4C - 3D = 14 \\ 2A + B - D = 11 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Розв'язання

Отже:

$$\int \frac{5}{x-2}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Отже:

$$\int \frac{5}{x-2}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+4}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Отже:

$$\int \frac{5}{x-2}\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-4}\mathrm{d}x + \int \frac{x+2}{x^2+4}\mathrm{d}x =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4}\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x^2+4}\mathrm{d}x =$$

$$= 5\ln|x-2| + 3\ln|x-4| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\mathrm{d}x$$

Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Оскільки дріб неправильний, попередньо слід виділити у ньому цілу частину:

$$\begin{array}{l}
\big(\ \ 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x \ \ - 7\big) \div \big(3x^3 - 4x^2 - 17x + 6\big) = 2x^2 + 3 + \dfrac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \\
\ \ \underline{-6x^5 + 8x^4 + 34x^3 - 12x^2} \\
\qquad\qquad\qquad 9x^3 \ \ + 8x^2 - 76x \ \ - 7 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-9x^3 + 12x^2 + 51x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 20x^2 - 25x - 25
\end{array}$$

Розв'язання

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\right] \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int 2x^2 \mathrm{d}x + \int 3 \mathrm{d}x + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \left[2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int 2x^2 \mathrm{d}x + \int 3 \mathrm{d}x + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

Розкладемо знаменник отриманого дробу на множники. Видно, що при $x = 3$ знаменник дробу перетворюється в нуль. Тоді:

$$
\begin{array}{rl}
\big(\quad 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6\big) \div (x-3) = 3x^2 + 5x - 2 \\
\underline{-\,3x^3 + 9x^2} \\
5x^2 - 17x \\
\underline{-\,5x^2 + 15x} \\
-\,2x + 6 \\
\underline{2x - 6} \\
0
\end{array}
$$

Таким чином

$$3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x-3)(3x^2 + 5x - 2) = (x-3)(x+2)(3x-1).$$

Розв'язання

Тоді:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Метод довільних значень

Суть методу полягає у тому, що в отриманий вище вираз підставляються почергово декілька (за кількістю невизначених коефіцієнтів) довільних значень x.

Метод довільних значень

Суть методу полягає у тому, що в отриманий вище вираз підставляються почергово декілька (за кількістю невизначених коефіцієнтів) довільних значень x.
Для спрощення обчислень прийнято як довільні значення приймати точки, при яких знаменник дробу дорівнює нулю, тобто в нашому випадку 3, -2, $1/3$.

Розв'язання

Одержуємо:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Розв'язання

Одержуємо:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Остаточно одержуємо:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

Одержуємо:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Остаточно одержуємо:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-3} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$.

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли цього типу обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли цього типу обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли цього типу обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тоді $x = 2\operatorname{arctg} t$; $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$

Тут R – позначення деякої раціональної функції від змінних $\sin x$ і $\cos x$. Інтеграли цього типу обчислюються за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Ця підстановка дозволяє перетворити тригонометричну функцію в раціональну.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

Тоді $x = 2\operatorname{arctg} t$; $\mathrm{d}x = \dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Отже, $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int R\left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)\dfrac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int r(t)\mathrm{d}t$.

Описане вище перетворення називається **універсальною тригонометричною підстановкою**

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 + 8t + 8}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\dfrac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{4\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 4t + 4} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 2} + C.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left[9 + \dfrac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \dfrac{2t}{1+t^2}\right]} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 17}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 + 16}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)\left[9 + \frac{8(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right]} =$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 2t + 17} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2 + 16} =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{4} + C.$$