Числові ряди

Означення

Сума членів нескінченної числової послідовності $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ називається **числовим рядом** (**series**).

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$u_1, u_2, ...$ – члени ряду (terms)
u_n – загальний член ряду (common term).

Частинні суми

Частинні (часткові) суми ряду:

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k, n = 1, 2, \ldots$$

Збіжність

$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – **збіжний**, якщо збігається послідовність його частинних сум.

Збіжність

$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – **збіжний**, якщо збігається послідовність його частинних сум. **Сума збіжного ряду** – границя послідовності його частинних сум.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Розбіжність

Якщо послідовність частинних сум ряду розбіжна, тобто не має границі, або має нескінченну границю, то ряд називається **розбіжним** і йому не ставлять у відповідність ніякої суми.

Властивості

Збіжність або розбіжність ряду не порушиться якщо змінити, відкинути або додати скінченне число членів ряду.

Властивості

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається і його сума дорівнює S, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Cu_n$ теж збігається, і його сума дорівнює CS. $(C \neq 0)$

Властивості

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і їхні суми рівні відповідно S і σ, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ теж збігається і його сума дорівнює $S + \sigma$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S + \sigma$$

Властивості

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і їхні суми рівні відповідно S і σ, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ теж збігається і його сума дорівнює $S + \sigma$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S + \sigma$$

Різниця двох збіжних рядів також буде збіжним рядом.

Властивості

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні і їхні суми рівні відповідно S і σ, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ теж збігається і його сума дорівнює $S + \sigma$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n = S + \sigma$$

Різниця двох збіжних рядів також буде збіжним рядом. Сума збіжного і розбіжного рядів буде розбіжним рядом. Про суму двох розбіжних рядів загального твердження зробити не можжна.

Критерій Коші для послідовності

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – збіжна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

__**Доведення.**__ (необхідність) Нехай $a_n \to a$, тоді для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться номер N такий, що нерівність $|a - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ виконується при $n > N$. При $n > N$ і будь-якому цілому $p > 0$ виконується також нерівність $|a - a_{n+p}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. З огляду на обидві нерівності, одержуємо:

$$|a_{n+p} - a_n| = |(a_{n+p} - a) + (a - a_n)| \leqslant$$

$$\leqslant |a_{n+p} - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Критерій Коші для рядів

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – збіжний} \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}:$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Необхідна умова збіжності

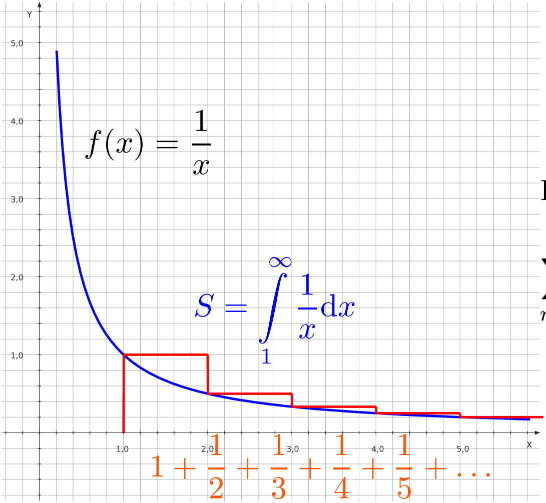
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – збіжний} \Rightarrow u_n \to 0, n \to \infty$$

Необхідна умова збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ – збіжний} \Rightarrow u_n \to 0, n \to \infty$$

Не є достатньою – гармонійний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ – розбіжний.

Доведення розбіжності



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$S = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Порівняння площ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > S = \ln x\big|_{1}^{\infty} = \infty$$

Приклади

Дослідити збіжність ряду $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{8}+...+\dfrac{n}{3n-1}+...$

Приклади

Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{3n-1}+...$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\neq 0$$

Приклади

Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{3n-1} + ...$

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3} \neq 0$$

Необхідна ознака збіжності не виконується, значить ряд розбіжний.

Приклади

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 8n + 3}.$$

Приклади

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 8n + 3}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{1}{4n^2 - 8n + 3} = \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2 - 8k + 3} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \dots - \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}$$

Приклади

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 8n + 3}.$$

Розв'язання

Розкладаємо загальний член на прості дроби:

$$\frac{1}{4n^2 - 8n + 3} = \frac{1}{2(2n-3)} - \frac{1}{2(2n-1)}$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{4k^2 - 8k + 3} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \cdots - \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n-1)}$$

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{2}$$

Приклади

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 4^n}{8^n}$.

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 4^n}{8^n}$.

Розв'язання

Користуємося формулою суми геометричної прогресії;

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k + 4^k}{8^k} =$$

$$= \frac{1(1-(-1/8)^{n+1})}{1-(-1/8)} + \frac{1(1-(1/2)^{n+1})}{1-1/2}$$

Приклади

Знайти n-ту частинну суму S_n і суму ряду S. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n + 4^n}{8^n}$.

Розв'язання

Користуємося формулою суми геометричної прогресії;

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k + 4^k}{8^k} =$$

$$= \frac{1(1-(-1/8)^{n+1})}{1-(-1/8)} + \frac{1(1-(1/2)^{n+1})}{1-1/2}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-(-1/8)} + \frac{1}{1-(1/2)} = \frac{26}{9}$$

Обмеженість частинних сум

Якщо ряд збігається, то послідовність його частинних сум обмежена. Однак, ця ознака також не є достатньою.

Обмеженість частинних сум

Якщо ряд збігається, то послідовність його частинних сум обмежена. Однак, ця ознака також не є достатньою.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

– розбіжний, оскільки

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при парних } n \\ 1, & \text{при непарних } n \end{cases}$$

Обмеженість частинних сум

Якщо ряд збігається, то послідовність його частинних сум обмежена. Однак, ця ознака також не є достатньою.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$$

– розбіжний, оскільки

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при парних } n \\ 1, & \text{при непарних } n \end{cases}$$

Але $|S_n| < 2$ при будь-якому n.

Розбіжні сумовані ряди

Ряд Гранді (Grandi):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

Розбіжні сумовані ряди

Ряд Гранді (Grandi):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

Розбіжні сумовані ряди

Ряд Гранді (Grandi):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - ...) = 1 - 1 + 1 - 1 + ... = S$$

Розбіжні сумовані ряди

Ряд Гранді (Grandi):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$$

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - ...) = 1 - 1 + 1 - 1 + ... = S$$

$$1 - S = S$$

Розбіжні сумовані ряди

Ряд Гранді (Grandi):

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

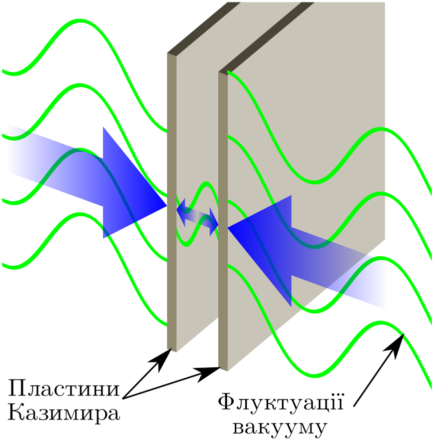
$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

$$1 - S = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = S$$

$$1 - S = S$$

$$S = \frac{1}{2}$$

Ефект Казимира



У розрахунках енергії вакууму:

$$\zeta(-1) = \sum_{n=1}^{\infty} n =$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12},$$

де $\zeta(x)$ – дзета-функція Рімана (Riemann)

Теорема. *Для збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *з невід'ємними членами необхідно і достатньо, щоб частині суми ряду були обмежені.*

Ознака порівняння (Comparison test)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ при $u_n, v_n \geqslant 0$.
Якщо $u_n \leqslant v_n$ при будь-якому n,

Ознака порівняння (Comparison test)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ при $u_n, v_n \geqslant 0$.
Якщо $u_n \leqslant v_n$ при будь-якому n,

- зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

Ознака порівняння (Comparison test)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ при $u_n, v_n \geqslant 0$.
Якщо $u_n \leqslant v_n$ при будь-якому n,

- зі збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ випливає збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
- з розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ випливає розбіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$.

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $\dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + ... + \dfrac{1}{\ln n} + ...$

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n} + ...$

Розв'язання

$$\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$$

$\sum \frac{1}{n}$ – розбіжний $\Rightarrow$ ряд $\sum \frac{1}{\ln n}$ – розбіжний.

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

Розв'язання

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$$

Приклад

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

Розв'язання

$$\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ – збіжний $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$ – збіжний.

Приклад

Дослідити збіжність узагальненого гармонійного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Приклад

Дослідити збіжність узагальненого гармонійного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання

Якщо $\alpha \leqslant 1$,

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n}$$

Приклад

Дослідити збіжність узагальненого гармонійного ряду
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання

Якщо $\alpha \leqslant 1$,

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \geqslant \frac{1}{n}$$

Гармонійний ряд розбіжний $\Rightarrow$ узагальнений гармонійний ряд також є розбіжним.

Якщо ж $\alpha > 1$, то, позначивши $\alpha = 1 + \delta$, матимемо

$$\frac{1}{(n+1)^{\alpha}} + \frac{1}{(n+2)^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{(2n)^{\alpha}} < \frac{n}{(n+1)^{\alpha}} < \frac{1}{n^{\delta}}$$

Приклад

Отже

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha} = \left(1+\frac{1}{2^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{(4+1)^\alpha}+\frac{1}{(4+2)^\alpha}+\frac{1}{(4+3)^\alpha}+\frac{1}{(2\cdot 4)^\alpha}\right)+\cdots <$$
$$< 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{2^\delta}+\frac{1}{4^\delta}+\frac{1}{8^\delta}+\cdots = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{\frac{1}{2^\delta}}{1-\frac{1}{2^\delta}}.$$

Тобто ряд з умови є меншим за збіжний ряд, тобто і сам є збіжним.

Гранична форма ознаки порівняння

Якщо $u_n > 0, \quad v_n > 0$ *і існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = h$, *де* h *– число, відмінне від нуля, то ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *поводять себе однаково в сенсі збіжності.*

Ознака д'Аламбера (Ratio test)

Якщо $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

- при $\rho < 1$ ряд збігається
- при $\rho > 1$ – розбіжний
- якщо $\rho = 1$, то на питання про збіжність відповісти не можна.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Розв'язання

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Розв'язання

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Висновок: ряд збігається.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+...+\dfrac{1}{n!}+...$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

Розв'язання

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + ... + \dfrac{1}{n!} + ...$

Розв'язання

$$u_n = \frac{1}{n!}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Висновок: ряд збігається.

Радикальна ознака Коші (Root test)

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ з невід'ємними членами існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,

- при $\rho < 1$ ряд збігається,
- при $\rho > 1$ ряд розбіжний.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\dfrac{1}{n^2}}{3+\dfrac{5}{n^2}}=\frac{2}{3}<1$$

Висновок: ряд збігається.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Перевіримо виконання необхідних умов збіжності.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0,$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

Розв'язання

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Перевіримо виконання необхідних умов збіжності.

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\neq 0,$$

Необхідна умова збіжності не виконується – ряд розбіжний.

Інтегральна ознака Коші (Integral test)

Якщо $\varphi(x)$ – неперервна додатна функція, що спадає на проміжку $[1;\infty)$, то ряд

$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n)+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ і невласний інтеграл

$\int\limits_{1}^{\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ однакові в сенсі збіжності.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}}$.

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}}$.

Розв'язання

$$\frac{\sin \dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}} \sim \frac{1}{n \ln^{\frac{2}{3}} n} \quad n \to \infty.$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}}$.

Розв'язання

$$\frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}} \sim \frac{1}{n \ln^{\frac{2}{3}} n} \quad n \to \infty.$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\frac{2}{3}} x} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \ln^{1-\frac{2}{3}} x \Big|_1^{\infty} = \infty.$$

Приклад

Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}}$.

Розв'язання

$$\frac{\sin \dfrac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln^2(n+3)}} \sim \frac{1}{n \ln^{\frac{2}{3}} n} \quad n \to \infty.$$

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x \ln^{\frac{2}{3}} x} \mathrm{d}x = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} \ln^{1-\frac{2}{3}} x \Bigg|_1^{\infty} = \infty.$$

Отже, за граничною формою ознаки порівняння та інтегральною ознакою Коші ряд є розбіжним.