Степеневі ряди. Ряди Фур'є

Означення

Степеневий ряд (Power series):

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Означення

Степеневий ряд (Power series):

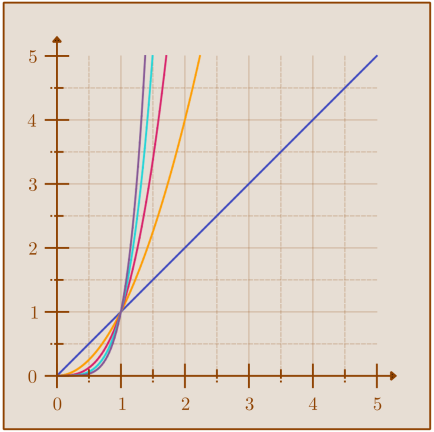
$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$

Узагальнений степеневий ряд:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

Функціональна послідовність степеневого ряду



Дослідження збіжності

Приклад. Досліджити на збіжність ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

Дослідження збіжності

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n}+...$

Розв'язання:

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| =$$

Дослідження збіжності

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

Розв'язання:

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right|$$

Дослідження збіжності

Приклад. Дослідити на збіжність ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

Розв'язання:

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right|$$

Дослідження збіжності

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

<u>*Розв'язання:*</u>

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right|$$

Дослідження збіжності

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n}+...$

<u>*Розв'язання:*</u>

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\dfrac{1}{n}}\right| = |x|\,.$$

Дослідження збіжності

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+...+\dfrac{x^n}{n}+...$

<u>*Розв'язання:*</u>

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\dfrac{1}{n}}\right| = |x|\,.$$

$|x|<1$ – збіжний

Дослідження збіжності

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^n}{n} + ...$

<u>*Розв'язання:*</u>

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\frac{1}{n}}\right| = |x|.$$

$|x| < 1$ – збіжний

$|x| > 1$ – розбіжний

<u>Приклад.</u> Дослідити на збіжність ряд $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + ... + \dfrac{x^n}{n} + ...$

<u>*Розв'язання:*</u>

Застосовуємо ознаку д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{x^n}{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{xn}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{1+\dfrac{1}{n}}\right| = |x|\,.$$

$|x| < 1$ – збіжний

$|x| > 1$ – розбіжний

Слід перевірити:

$$x = \pm 1$$

Приклад

$x = -1$:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$$

Приклад

$x = -1$:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$$

Ряд збіжний за ознакою Ляйбніца.$x = 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Ряд розбіжний (гармонійний ряд).

Приклад

$x = -1$:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - ...$$

Ряд збіжний за ознакою Ляйбніца.$x = 1$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

Ряд розбіжний (гармонійний ряд).

Відповідь: Ряд є збіжним лише для $x \in [-1; 1)$.

Теорема Абеля (Abel)

Якщо степеневий ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

збігається при

$$x = x_1,$$

то він збігається, причому абсолютно, для всіх

$$|x| < |x_1|.$$

Доведення

Ряд збігається для $x = x_1 \Rightarrow$ члени ряду обмежені,

$$|a_n x_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число.

Доведення

Ряд збігається для $x = x_1 \Rightarrow$ члени ряду обмежені,

$$|a_n x_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leqslant k \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Доведення

Ряд збігається для $x = x_1 \Rightarrow$ члени ряду обмежені,

$$|a_n x_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

$$\left\{\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\right\}$$

– геометрична прогресія (знаменник $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$)

Доведення

Ряд збігається для $x = x_1 \Rightarrow$ члени ряду обмежені,

$$|a_n x_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

$$\left\{\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\right\}$$

– геометрична прогресія (знаменник $\left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$)

Ряд збіжний $\Rightarrow$ На підставі ознаки Веєрштраса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ – збіжний

Доведення

Ряд збігається для $x = x_1 \Rightarrow$ члени ряду обмежені,

$$|a_n x_1^n| \leqslant k,$$

де k – деяке стале число.

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant k \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

$$\left\{\left|\frac{x}{x_1}\right|^n\right\}$$

– геометрична прогресія (знаменник $\left|\dfrac{x}{x_1}\right| < 1$)

Ряд збіжний $\Rightarrow$ На підставі ознаки Веєрштраса $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ – збіжний $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається абсолютно.

Радіус збіжності R

$$\exists R > 0 : \forall\, |x| < R :$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{– абсолютно збігається}$$

Радіус збіжності R

$$\exists R > 0 : \forall |x| < R :$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{– абсолютно збігається}$$

$$\forall |x| > R :$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{– розбіжний}$$

Радіус збіжності R

$$\exists R > 0 : \forall |x| < R :$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{– абсолютно збігається}$$

$$\forall |x| > R :$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{– розбіжний}$$

Інтервал $(-R, R)$ – **інтервал збіжності**.

Формули для радіуса збіжності

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Формули для радіуса збіжності

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Формула Коші-Адамара (Cauchy-Hadamard)

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right|$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Приклад

Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Розв'язання:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

$R = \infty \Rightarrow$ ряд збігається для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Теорема Абеля

Теорема. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається для додатного значення $x = x_1$, то він збігається рівномірно в будь-якому проміжку усередині $(-|x_1|\,;\ |x_1|)$.

Дії зі степеневими рядами

1) Інтегрування степеневих рядів.

Якщо деяка функція $f(x)$ визначається збіжним степеневим рядом:
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то інтеграл від цієї функції можна записати у вигляді ряду:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

Дії зі степеневими рядами

1) Інтегрування степеневих рядів.
Якщо деяка функція $f(x)$ визначається збіжним степеневим рядом:
$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то інтеграл від цієї функції можна записати у вигляді ряду:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + C$$

2) Диференціювання степеневих рядів.
Похідна функції, що визначається степеневим рядом, знаходиться за формулою:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

3) Додавання, віднімання, множення і ділення степеневих рядів.
Додавання і віднімання степеневих рядів зводиться до відповідних операцій з їхніми членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

3) Додавання, віднімання, множення і ділення степеневих рядів.
Додавання і віднімання степеневих рядів зводиться до відповідних операцій з їхніми членами:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

Добуток двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Коефіцієнти c_i знаходяться за формулою:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$$

Дії зі степеневими рядами

Ділення двох степеневих рядів виражається формулою:

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

Для визначення коефіцієнтів q_n розглядаємо добуток $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, отриманий із записаного вище рівності і розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 = q_0 b_0 \\ a_1 = q_0 b_1 + q_1 b_0 \\ a_2 = q_0 b_2 + q_1 b_1 + q_2 b_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n = q_0 b_n + q_1 b_{n-1} + \dots + q_n b_0 \end{cases}$$

Розклад функцій у степеневі ряди

Приклад. Розкласти в ряд функцію $\dfrac{1}{1-x}$.

Розклад функцій у степеневі ряди

Приклад. Розкласти в ряд функцію $\dfrac{1}{1-x}$.

Розв'язання

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1-x \\ \cline{2-2}
\underline{1-x} & 1+x+x^2+x^3+\ldots \\
\quad x & \\
\quad \underline{x-x^2} & \\
\qquad x^2 & \\
\qquad \underline{x^2-x^3} & \\
\qquad\quad x^3 &
\end{array}
$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0) = n!;$$

Приклад

Формула Маклорена (Maclaurin):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}; \quad f''(0) = 2;$$

$$f'''(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4}; \quad f'''(0) = 3!;$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}; \quad f^{(n)}(0) = n!;$$

Разом:

$$f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$$

Відомі розклади (expansions)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Відомі розклади (expansions)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Відомі розклади (expansions)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Відомі розклади (expansions)

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, x \in (-1;1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)\, x^n}{n!}, x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1;1)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1;1)$$

Приклад

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

Приклад

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

Розв'язання
Перенумеруємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{(2n+1)(2n+2)}$$

Приклад

Умова:
Користуючись почленним інтегруванням або диференціюванням ряду, знайти його суму та вказати область збіжності.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n-2)}.$$

Розв'язання
Перенумеруємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+4}}{(2n+1)(2n+2)} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Приклад

За формулами інтегрування степеневої функції:

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+1}\int x^{2n+1}\mathrm{d}x + C_1 =$$

$$\int\left(\int x^{2n}\mathrm{d}x + C_2\right)\mathrm{d}x + C_1$$

Приклад

За формулами інтегрування степеневої функції:

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+1}\int x^{2n+1}\mathrm{d}x + C_1 =$$

$$\int\left(\int x^{2n}\mathrm{d}x + C_2\right)\mathrm{d}x + C_1$$

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\left(\int x^{2n}\mathrm{d}x + C_2\right)\mathrm{d}x + C_1\right) =$$

Приклад

За формулами інтегрування степеневої функції:

$$\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2n+1}\int x^{2n+1}\mathrm{d}x + C_1 =$$

$$\int\left(\int x^{2n}\mathrm{d}x + C_2\right)\mathrm{d}x + C_1$$

Підставляємо і переставляємо місцями інтеграли і суму:

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int\left(\int x^{2n}\mathrm{d}x + C_2\right)\mathrm{d}x + C_1\right) =$$

$$= x^2\int\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n} + C_2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}x + C_1$$

Приклад

Згортаємо ряд:

$$= x^2 \int \int \left(\frac{1}{1 - x^2} + C_2 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}x + C_1$$

Приклад

Згортаємо ряд:

$$= x^2 \int\int \left(\frac{1}{1-x^2} + C_2 \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}x + C_1$$

$$= x^2 \frac{(x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2}{2} + C_2 x^3 + C_1 x^2$$

Приклад

Згортаємо ряд:

$$= x^2 \int \int \left(\frac{1}{1 - x^2} + C_2 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}x + C_1$$

$$= x^2 \frac{(x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2}{2} + C_2 x^3 + C_1 x^2$$

У початковому ряді не було x^2 та $x^3 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$. Збігається там же, де і ряд для $1/(1 - x^2)$, на $x \in (-1; 1)$.

Приклад

Згортаємо ряд:

$$= x^2 \int\int \left(\frac{1}{1-x^2} + C_2 \right) \mathrm{d}x \mathrm{d}x + C_1$$

$$= x^2 \frac{(x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2}{2} + C_2 x^3 + C_1 x^2$$

У початковому ряді не було x^2 та $x^3 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$. Збігається там же, де і ряд для $1/(1-x^2)$, на $x \in (-1;1)$.

Відповідь:

$$x^2 \frac{(x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1) - 2}{2}$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x; \quad f(0) = 0; \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$\begin{array}{llll|l}
1 & & & & 1+x^2 \\ \cline{5-5}
1+x^2 & & & & 1-x^2+x^4-\ldots \\ \cline{1-2}
 & -x^2 & & & \\
 & -x^2 & -x^4 & & \\ \cline{2-3}
 & & x^4 & & \\
 & & x^4 & +x^6 & \\ \cline{3-4}
 & & & -x^6 &
\end{array}$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - ... + (-1)^n x^{2n} + ...$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Знаходження розкладів інтегруванням

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots$$

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$$

Знаходження π

І зробив він лите море, десять ліктів від краю його аж до краю його, навколо круглясте, і п'ять ліктів височина його. А шнур на тридцять ліктів оточив би його навколо.

1 Цар 7.23

Знаходження π

Ряд Грегорі-Ляйбніца (Gregory-Leibniz):

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Знаходження π

Ряд Грегорі-Ляйбніца (Gregory-Leibniz):

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

$$S_{1000} = 0,7856479135848857$$

Збігається дуже повільно.

Знаходження π

Ряд Рамануджана (Ramanujan)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$$

кожен доданок – 8 цифр π.

Пришвидшення збіжності рядів

Метод Куммера (Kummer):

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} b_k; \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \rho \neq 0,$$

Метод Куммера (Kummer):

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} b_k; \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \rho \neq 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho \sum_{k=0}^{\infty} b_k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \rho \frac{b_k}{a_k}\right) a_k$$

Пришвидшення збіжності рядів

Метод Куммера (Kummer):

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} b_k; \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \rho \neq 0,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \rho \sum_{k=0}^{\infty} b_k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \rho \frac{b_k}{a_k}\right) a_k = \rho C + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \rho \frac{b_k}{a_k}\right)$$

Пришвидшення збіжності рядів

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

Пришвидшення збіжності рядів

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k(k+1)} \right) \frac{1}{k^2}$$

Пришвидшення збіжності рядів

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1$$

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{k^2}{k(k+1)} \right) \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}.$$

Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Розв'язок у околі $x = 0$:

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + ...$$

Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Розв'язок у околі $x = 0$:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

$$c_i - ?$$

Розв'язання диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Розв'язок у околі $x = 0$:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

$$c_i - ?$$

Порівняння коефіцієнтів при однакових x^k у різних частинах рівняння.

Приклад

Знайти розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Приклад

Знайти розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання:

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ...$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + ...$$

Приклад

Знайти розв'язок рівняння $y'' - xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання:

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ...$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + ...$$

Підставляємо отримані вирази у вихідне рівняння:

$$(2c_2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + ...) - (c_0 x + c_1 x^2 + c_2 x^3 + c_3 x^4 + ...) = 0$$

$$2c_2 + x(6c_3 - c_0) + x^2(12c_4 - c_1) + x^3(20c_5 - c_2) + x^4(30c_6 - c_3) + ... = 0$$

Приклад

$$2c_2 = 0$$

Приклад

$$2c_2 = 0$$

$$6c_3 - c_0 = 0$$

Приклад

$$2c_2 = 0$$

$$6c_3 - c_0 = 0$$

$$12c_4 - c_1 = 0$$

Приклад

$$2c_2 = 0$$

$$6c_3 - c_0 = 0$$

$$12c_4 - c_1 = 0$$

$$20c_5 - c_2 = 0$$

Приклад

$$2c_2 = 0$$

$$6c_3 - c_0 = 0$$

$$12c_4 - c_1 = 0$$

$$20c_5 - c_2 = 0$$

$$30c_6 - c_3 = 0$$

Приклад

Одержуємо, підставивши початкові умови у вираз для шуканої функції і її першої похідної:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

Приклад

Одержуємо, підставивши початкові умови у вираз для шуканої функції і її першої похідної:

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = 0$$

Остаточно одержимо: $c_0 = 1$; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$; $c_3 = \dfrac{1}{6}$; $c_4 = 0$; $c_5 = 0$; $c_6 = \dfrac{1}{180}$

Приклад

Одержуємо, підставивши початкові умови у вираз для шуканої функції і її першої похідної:

$$c_0 = 1$$
$$c_1 = 0$$

Остаточно одержимо: $c_0 = 1$; $c_1 = 0$; $c_2 = 0$; $c_3 = \dfrac{1}{6}$; $c_4 = 0$; $c_5 = 0$; $c_6 = \dfrac{1}{180}$

Разом: $y = 1 + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^6}{180} + \ldots$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
Саме рівняння

$$y'' = xy$$

$$y''(0) = (xy)|_{x=0} = 0$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
Саме рівняння

$$y'' = xy$$

$$y''(0) = (xy)|_{x=0} = 0$$

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = y + xy'$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Початкові умови: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
Саме рівняння

$$y'' = xy$$

$$y''(0) = \left.(xy)\right|_{x=0} = 0$$

Диференціюємо рівняння за x:

$$y''' = y + xy'$$

$$y'''(0) = y(0) = 1$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

$$y^{IV}(0) = 0$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

$$y^{IV}(0) = 0$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

$$y^{IV}(0) = 0$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''$$

$$y^{V}(0) = 0$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

$$y^{IV}(0) = 0$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''$$

$$y^{V}(0) = 0$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

$$y^{IV} = y' + y' + xy''$$

$$y^{IV}(0) = 0$$

$$y^{V} = 2y'' + y'' + xy'''$$

$$y^{V}(0) = 0$$

$$y^{VI} = 3y''' + y''' + xy^{IV}$$

$$y^{VI}(0) = 4$$

Приклад (з використанням розкладу Маклорена)

Після підстановки отриманих значень одержуємо:

$$y = 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + ...$$

Тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$

$$+(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

Тригонометричний ряд

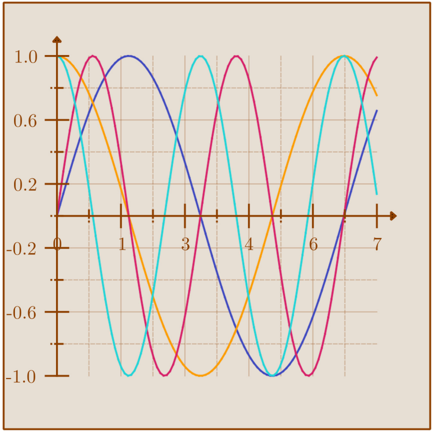
$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$

$$+(a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ – коефіцієнти тригонометричного ряду.

Функціональна послідовність тригонометричного ряду



Коефіцієнти тригонометричного ряду

Нехай тригонометричний ряд збігається до періодичної з періодом 2π неперервної функції $f(x)$ на $x \in [-\pi; \pi]$.

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Нехай тригонометричний ряд збігається до періодичної з періодом 2π неперервної функції $f(x)$ на $x \in [-\pi; \pi]$.

Маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0, 1, 2, .. \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad m = 0, 1, 2, ..., \quad n = 1, 2, ...$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Нехай тригонометричний ряд збігається до періодичної з періодом 2π неперервної функції $f(x)$ на $x \in [-\pi; \pi]$.
Маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \quad m = 0, 1, 2, .. \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \quad m, n = 1, 2, ... \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \mathrm{d}x = 0, \quad m = 0, 1, 2, ..., \quad n = 1, 2, ...$$

Члени функціональної послідовності тригонометричного ряду **взаємно ортогональні**.

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Оскільки $f(x) \in \mathbb{C}([-\pi;\pi])$, то існує інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

бо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x = 0$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Оскільки $f(x) \in \mathbb{C}([-\pi;\pi])$, то існує інтеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

бо

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\mathrm{d}x = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Множимо розклад функції на $\cos nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx + b_n \cos nx \sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_n$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Множимо розклад функції на $\cos nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx + b_n\cos nx\sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Множимо розклад функції на $\cos nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos^2 nx + b_n\cos nx\sin nx)\mathrm{d}x = \pi a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Множимо розклад функції на $\sin nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

Коефіцієнти тригонометричного ряду

Множимо розклад функції на $\sin nx$ і інтегруємо у межах від $-\pi$ до π.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Ряд Фур'є (Fourier)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x; \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

– **коефіцієнти Фур'є** для функції $f(x)$.

Ряд Фур'є (Fourier)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, \ldots$$

– **коефіцієнти Фур'є** для функції $f(x)$.

Означення. **Рядом Фур'є** для функції $f(x)$ називається тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є. Якщо ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається до неї у всіх її точках неперервності, то кажуть, що функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є.

Достатні ознаки розкладності в ряд Фур'є

Теорема Діріхле (Dirichlet) *Якщо функція $f(x)$ має період 2π і на відрізку $[-\pi;\pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду, і відрізок $[-\pi;\pi]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що усередині кожного з них функція $f(x)$ монотонна, то ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається при всіх значеннях x, причому у точках неперервності функції $f(x)$ його сума дорівнює $f(x)$, а у точках розриву його сума дорівнює $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень ліворуч і праворуч. При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.*

Достатні ознаки розкладності в ряд Фур'є

Теорема Діріхле (Dirichlet) *Якщо функція $f(x)$ має період 2π і на відрізку $[-\pi;\pi]$ неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду, і відрізок $[-\pi;\pi]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що усередині кожного з них функція $f(x)$ монотонна, то ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається при всіх значеннях x, причому у точках неперервності функції $f(x)$ його сума дорівнює $f(x)$, а у точках розриву його сума дорівнює $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень ліворуч і праворуч. При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.*
Функція $f(x)$, для якої виконуються умови теореми Діріхле називається **кусково-монотонною** на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Достатні ознаки розкладності в ряд Фур'є

<u>**Теорема Діріхле 2**</u> *Якщо функція $f(x)$ має період 2π, крім того, $f(x)$ і її похідна $f'(x)$ – неперервні функції на відрізку $[-\pi; \pi]$ або мають скінченне число точок розриву першого роду на цьому відрізку, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається при всіх значеннях x, причому у точках неперервності його сума дорівнює $f(x)$, а у точках розриву вона дорівнює $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.*
При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

Достатні ознаки розкладності в ряд Фур'є

<u>**Теорема Діріхле 2**</u> *Якщо функція* $f(x)$ *має період* 2π, *крім того,* $f(x)$ *і її похідна* $f'(x)$ *– неперервні функції на відрізку* $[-\pi;\pi]$ *або мають скінченне число точок розриву першого роду на цьому відрізку, то ряд Фур'є функції* $f(x)$ *збігається при всіх значеннях* x, *причому у точках неперервності його сума дорівнює* $f(x)$, *а у точках розриву вона дорівнює* $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
При цьому ряд Фур'є функції $f(x)$ *збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що належить інтервалу неперервності функції* $f(x)$.
Функція, що задовольняє умовам цієї теореми, називається **кусково-гладкою** на відрізку $[-\pi;\pi]$.