Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – кусково-монотонна.

Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – кусково-монотонна.
$f_1(x)$ –періодична з періодом $2T = b - a$, $f_1(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – кусково-монотонна.
$f_1(x)$ –періодична з періодом $2T = b - a$, $f_1(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

$f_1(x)$ розкладається в ряд Фур'є. Сума цього ряду у всіх точках відрізку $[a, b]$ збігається з функцією $f(x)$, тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a, b]$.

Розклад в ряд Фур'є неперіодичної функції

$f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ – кусково-монотонна.
$f_1(x)$ –періодична з періодом $2T = b - a$, $f_1(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$.

$f_1(x)$ розкладається в ряд Фур'є. Сума цього ряду у всіх точках відрізку $[a, b]$ збігається з функцією $f(x)$, тобто можна вважати, що функція $f(x)$ розкладена в ряд Фур'є на відрізку $[a, b]$.

Таким чином, якщо функція $f(x)$ задана на відрізку рівному 2π, розклад в ряд Фур'є нічим не відрізняється від розкладу в ряд періодичної функції. Якщо ж відрізок, на якому задана функція, менше, ніж 2π, то функція продовжується на інтервал $(b,\ a + 2\pi)$ так, що умови розкладності в ряд Фур'є зберігалися.

Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) - \text{непарна} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x) - \text{парна} \end{cases}$$

Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(x) \text{ – непарна} \\ 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x, & f(x) \text{ – парна} \end{cases}$$

$\times$	П	Н
П	П	Н
Н	Н	П

Ряд Фур'є для парної функції

$f(x)$ – парна періодична розкладна функція з періодом 2π:

Ряд Фур'є для парної функції

$f(x)$ – парна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Ряд Фур'є для парної функції

$f(x)$ – парна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = 0; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Ряд Фур'є для парної функції

$f(x)$ – парна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Ряд Фур'є для непарної функції

$f(x)$ – непарна періодична розкладна функція з періодом 2π:

Ряд Фур'є для непарної функції

$f(x)$ – непарна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Ряд Фур'є для непарної функції

$f(x)$ – непарна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Ряд Фур'є для непарної функції

$f(x)$ – непарна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

Ряд Фур'є для непарної функції

$f(x)$ – непарна періодична розкладна функція з періодом 2π:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx;$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^3$ з періодом $T = 2\pi$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^3$ з періодом $T = 2\pi$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.
Розв'язання: Задана функція є непарною, отже, коефіцієнти Фур'є шукаємо у вигляді:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^3; & \mathrm{d}v = \sin nx \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 3x^2 \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array} \right\} =$$

Приклад

Розкласти в ряд Фур'є періодичну функцію $f(x) = x^3$ з періодом $T = 2\pi$ на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Розв'язання: Задана функція є непарною, отже, коефіцієнти Фур'є шукаємо у вигляді:

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x; \qquad (n = 1, 2, ...)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^3 \sin nx\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^3; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\left.\frac{x^3\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{3}{n}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\mathrm{d}x\right) = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \cos nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = \dfrac{\sin nx}{n}; \end{array} \right\} =$$

Приклад

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

Приклад

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

Приклад

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\left.\frac{x^2\sin nx}{n}\right|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\left.\frac{x\cos nx}{n}\right|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x\right)\right) =$$

Приклад

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{6\pi\cos\pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi\right)\right) =$$

Приклад

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{3}{n}\left[\frac{x^2\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\int_0^\pi x\sin nx\mathrm{d}x\right) = \left\{\begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin nx\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\dfrac{\cos nx}{n}; \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} - \frac{6}{n^2}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\bigg|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x\right)\right) =$$

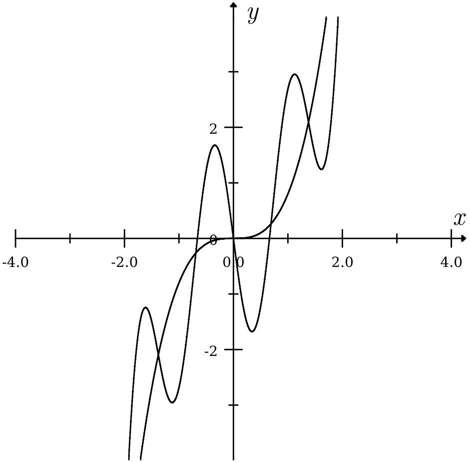
$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^3\cos\pi n}{n} + \frac{6\pi\cos\pi}{n^3} - \frac{6}{n^3}\left(\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^\pi\right)\right) =$$

$$-\frac{2\pi^2\cos\pi n}{n} + \frac{12\cos\pi n}{n^3} = (-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)$$

Приклад

$$x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx.$$

Приклад (графік суми перших чотирьох членів розкладу)



Ряди Фур'є для функцій довільного періоду

$f(x)$ – періодична з періодом $T = 2l$, неперервна або такої, що має скінченне число точок розриву першого роду на відрізку $[-l, l]$.

Ряди Фур'є для функцій довільного періоду

$f(x)$ – періодична з періодом $T = 2l$, неперервна або такої, що має скінченне число точок розриву першого роду на відрізку $[-l, l]$.
Підстановка для приведення до періоду 2π:

$$t = \frac{x}{l}$$

Ряди Фур'є для функцій довільного періоду

$f(x)$ – періодична з періодом $T = 2l$, неперервна або такої, що має скінченне число точок розриву першого роду на відрізку $[-l, l]$.
Підстановка для приведення до періоду 2π:

$$t = \frac{x}{l}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \mathrm{d}x; a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, ...$$

Ряди Фур'є для парних функцій довільного періоду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{l} x;$$

$$a_0 = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \mathrm{d}x;$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, ...$$

Ряди Фур'є для непарних функцій довільного періоду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{l} x;$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x \mathrm{d}x; \quad n = 1, 2, \ldots$$

Інтеграл Фур'є

$f(x)$ на кожному відрізку $[-l, l]$, де $l \in \mathbb{R}$, кусково-гладка або кусково-монотонна, крім того, $f(x)$ – абсолютно інтегрована функція, тобто збігається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

Інтеграл Фур'є

$f(x)$ на кожному відрізку $[-l, l]$, де $l \in \mathbb{R}$, кусково-гладка або кусково-монотонна, крім того, $f(x)$ – абсолютно інтегрована функція, тобто збігається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, \mathrm{d}x$$

Тоді функція $f(x)$ розкладається в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{\pi n}{l} t \mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$
$$b_n = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{\pi n}{l} t \mathrm{d}t, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Інтеграл Фур'є

Підставляємо до формули для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

Інтеграл Фур'є

Підставляємо до формули для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

Інтеграл Фур'є

Підставляємо до формули для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

$$l \to \infty$$

Інтеграл Фур'є

Підставляємо до формули для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

$$l \to \infty$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Інтеграл Фур'є

Підставляємо до формули для $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\cos\frac{\pi n}{l}x + \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{\pi n}{l}t\mathrm{d}t\sin\frac{\pi n}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

$$l \to \infty$$

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(t)\mathrm{d}t = 0$$

$$f(x) = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{\pi n}{l}(t-x)\mathrm{d}t$$

Інтеграл Фур'є

$$u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

Інтеграл Фур'є

$$u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

При $l \to \infty$, $\Delta u_n \to 0$.

Інтеграл Фур'є

$$u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

При $l \to \infty$, $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos u_n (t - x) \mathrm{d}t =$$

Інтеграл Фур'є

$$u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

При $l \to \infty$, $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos u_n(t-x) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) \mathrm{d}t$$

Інтеграл Фур'є

$$u_n = \frac{\pi n}{l}; \quad \Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l}; \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

При $l \to \infty$, $\Delta u_n \to 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^{l} f(t) \cos u_n(t-x) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) \mathrm{d}t$$

$f(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) \mathrm{d}t$ – **подвійний інтеграл Фур'є.**

Інтеграл Фур'є

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\,\mathrm{d}u$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

– подання функції $f(x)$ **інтегралом Фур'є**.

Інтеграл Фур'є

$$f(x) = \int_0^\infty [a(u)\cos ux + b(u)\sin ux]\,\mathrm{d}u$$

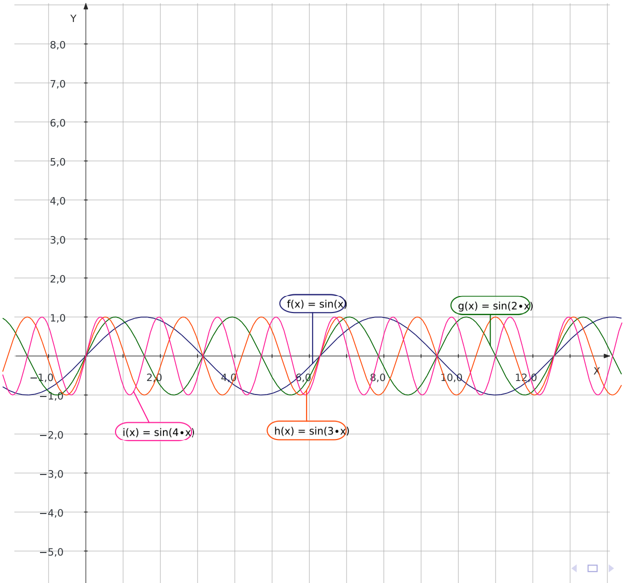
$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t$$

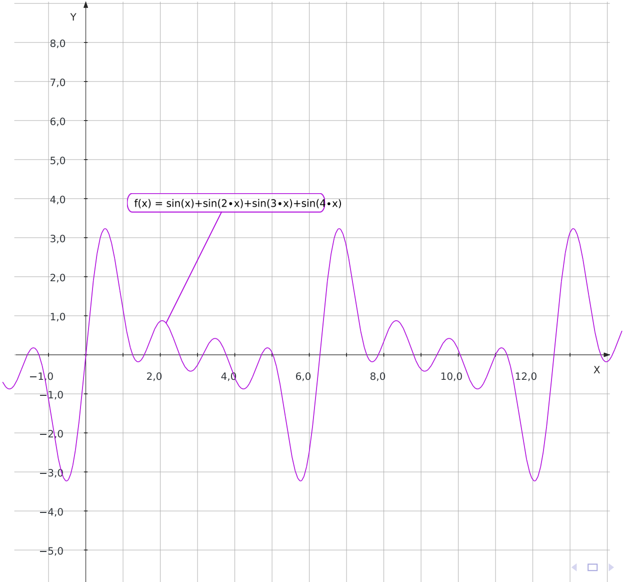
– подання функції $f(x)$ **інтегралом Фур'є**.
У комплексній формі:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iu(x-t)}\mathrm{d}t$$

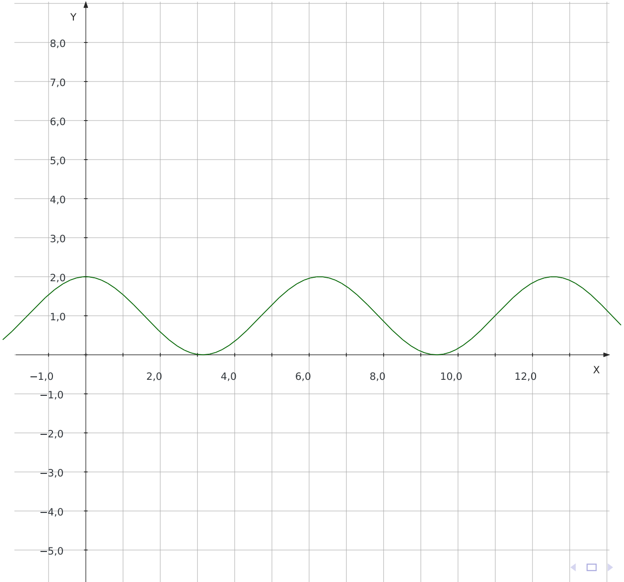
Розклади Фур'є і частоти (окремі доданки — синуси)



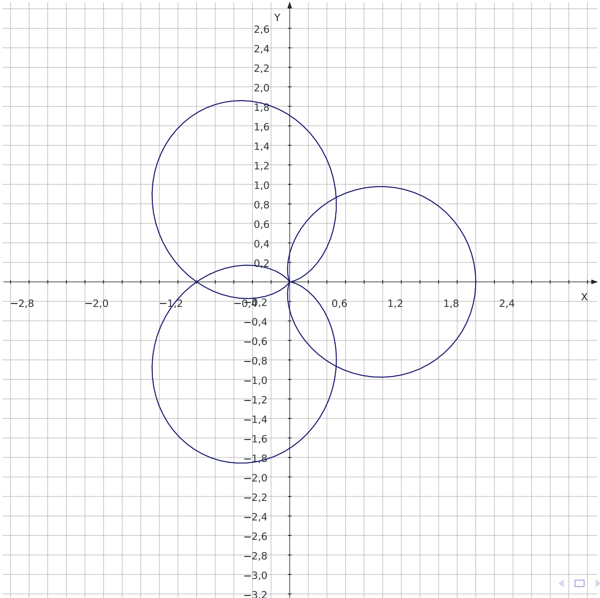
Розклади Фур'є і частоти (сума доданків)



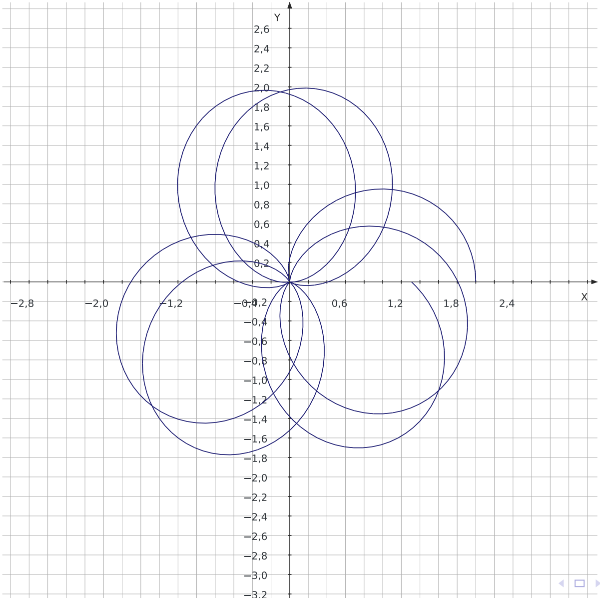
Початкова хвиля (косинусоїда)



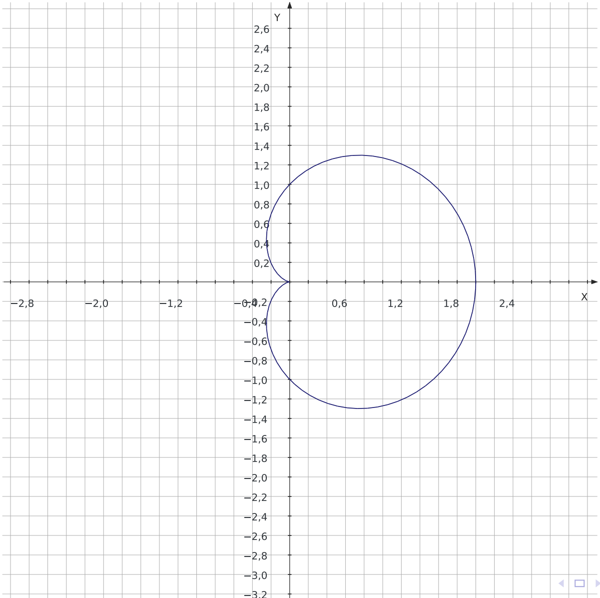
Закручування хвилі навколо початку координат (частота 1,5)



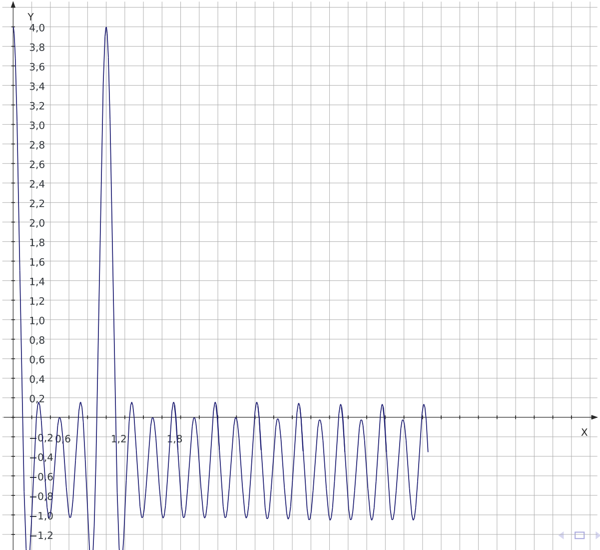
Закручування хвилі навколо початку координат (частота 1,55)



Закручування хвилі навколо початку координат (частота 1)



Залежність відстані центра фігури від початку координат від частоти



Перетворення Фур'є (Fourier transform)

$f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченне число точок розриву першого роду на кожному відрізку

Перетворення Фур'є (Fourier transform)

$f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченне число точок розриву першого роду на кожному відрізку

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\mathrm{d}x$$ – **перетворення Фур'є функції** $f(x)$.

Перетворення Фур'є (Fourier transform)

$f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченне число точок розриву першого роду на кожному відрізку

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\mathrm{d}x \text{ – } \textbf{перетворення Фур'є функції } f(x).$$

Функція $F(u)$ називається також **спектральною характеристикою функції $f(x)$.**

Перетворення Фур'є (Fourier transform)

$f(x)$ – будь-яка абсолютно інтегрована на всій числовій осі функція, неперервна або така, що має скінченне число точок розриву першого роду на кожному відрізку

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\mathrm{d}x \text{ – } \textbf{перетворення Фур'є функції } f(x).$$

Функція $F(u)$ називається також **спектральною характеристикою функції $f(x)$.**

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}\mathrm{d}u \text{ – зворотне перетворення Фур'є}$$

Косинус- і синус-перетворення Фур'є

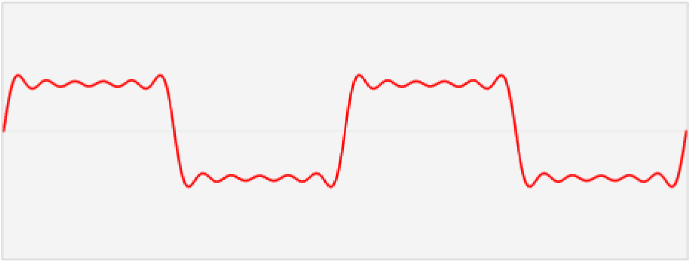
$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x \text{ – косинус-перетворення Фур'є}$$

Косинус- і синус-перетворення Фур'є

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(x) \cos ux \mathrm{d}x \text{ – косинус-перетворення Фур'є}$$

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\infty f(x) \sin ux \mathrm{d}x \text{ – синус-перетворення Фур'є}$$

Частотний аналіз



Амплітудна і фазово-частотна характеристики

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} \mathrm{d}x$$

Амплітудна і фазово-частотна характеристики

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \mathrm{d}x$$

Амплітудна і фазово-частотна характеристики

$$\hat{f}(u) = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \mathrm{d}x = C(u) + iS(u)$$

$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)}$ – амплітудна характеристика

$\Phi(u) = \arg F(u) = \operatorname{arctg} \dfrac{S(u)}{C(u)}$ – фазово-частотна характеристика

Приклад

Функцію $f\,(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Приклад

Функцію $f\,(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x$$

Приклад

Функцію $f\,(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2 \cos ux \mathrm{d}x$$

Приклад

Функцію $f(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2 \cos ux \mathrm{d}x = \frac{4 \sin 2u}{u}$$

Приклад

Функцію $f(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

<u>*Розв'язання:*</u>

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2 \cos ux \mathrm{d}x = \frac{4 \sin 2u}{u}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} 2 \sin ux \mathrm{d}x = 0$$

Приклад

Функцію $f(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Розв'язання:

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2\cos ux \mathrm{d}x = \frac{4\sin 2u}{u}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin ux \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} 2\sin ux \mathrm{d}x = 0$$

$$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)}$$

Приклад

Функцію $f\,(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

<u>*Розв'язання:*</u>

$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2 \cos ux \mathrm{d}x = \frac{4 \sin 2u}{u}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} 2 \sin ux \mathrm{d}x = 0$$

$$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)} = \left| \frac{4 \sin 2u}{u} \right|$$

$$\Phi(u) = \arg F(u) = \operatorname{arctg} \frac{S(u)}{C(u)}$$

Приклад

Функцію $f\,(x)$ розвинути в інтеграл Фур'є. Побудувати графік функції та її амплітудного і фазового частотного спектрів. $f(x) = \begin{cases} 2, |x| \leqslant 2 \\ 0, |x| > 2 \end{cases}$

Розв'язання:

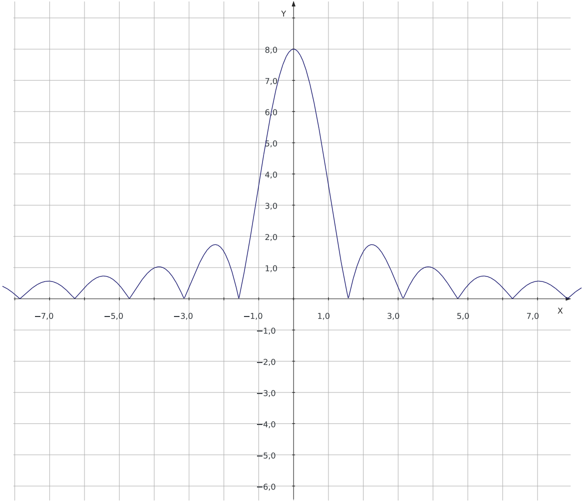
$$C(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ux \mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} 2 \cos ux \mathrm{d}x = \frac{4 \sin 2u}{u}$$

$$S(u) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ux \mathrm{d}x = -\int_{-2}^{2} 2 \sin ux \mathrm{d}x = 0$$

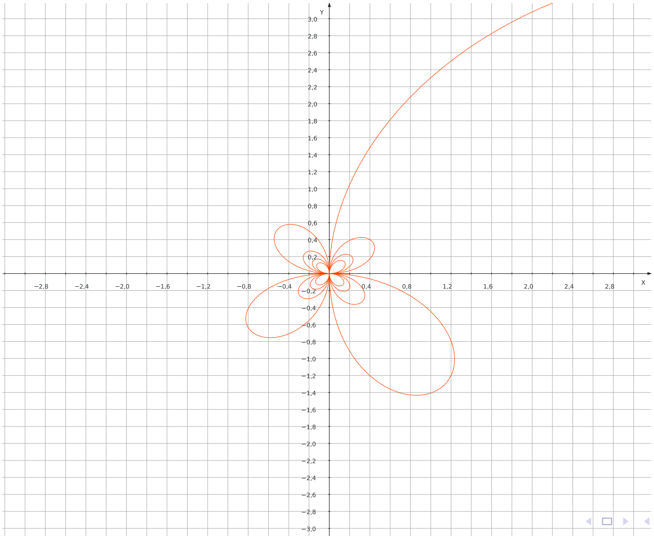
$$A(u) = |F(u)| = \sqrt{C^2(u) + S^2(u)} = \left| \frac{4 \sin 2u}{u} \right|$$

$$\Phi(u) = \arg F(u) = \operatorname{arctg} \frac{S(u)}{C(u)} = 0$$

Графік частотної характеристики у декартовій системі



Графік частотної характеристики у полярній системі (діаграма Найквіста)



CONFIDE

098-90-35-105

org2.knuba.edu.ua