Приклади розв'язування диференціальних рівнянь першого порядку

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' + y\cos x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x \mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + C_1$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' + y\cos x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x\mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + C_1$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' + y\cos x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x \mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + C_1$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}$$

$$y = Ce^{-\sin x}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x$ з початковою умовою $y(0) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$y' + y\cos x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\cos x\mathrm{d}x; \quad \ln|y| = -\sin x + C_1$$

$$|y| = e^{-\sin x} \cdot e^{C_1}$$

$$y = Ce^{-\sin x}$$

Для лінійного неоднорідного рівняння загальний розв'язок буде мати вигляд:

$$y = C(x)e^{-\sin x}$$

Розв'язання

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$$

Розв'язання

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

Розв'язання

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} V = e^{\sin x}; & \mathrm{d}U = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}V = e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x; & U = \sin x; \end{array} \right|$$

Розв'язання

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} V = e^{\sin x}; & \mathrm{d}U = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}V = e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x; & U = \sin x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Для визначення функції $C(x)$ знайдемо похідну функції y і підставимо її у вихідне диференціальне рівняння.

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

$$C'(x)e^{-\sin x} = \sin x\cos x; \qquad C'(x) = e^{\sin x}\sin x\cos x;$$

$$C(x) = \int e^{\sin x}\sin x\cos x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} V = e^{\sin x}; & \mathrm{d}U = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}V = e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x; & U = \sin x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{\sin x}\sin x - \int e^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x = e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C.$$

Розв'язання

Разом

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$$

Розв'язання

Разом

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$$

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Розв'язання

Разом

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$$

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Перевіримо отриманий загальний розв'язок підстановкою у вихідне диференціальне рівняння.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

Розв'язання

Разом

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$$

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Перевіримо отриманий загальний розв'язок підстановкою у вихідне диференціальне рівняння.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

Знайдемо частинний розв'язок при $y(0) = 0$.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^{0}; \qquad C = 1.$$

Розв'язання

Разом

$$y = e^{-\sin x}\left(e^{\sin x}\sin x - e^{\sin x} + C\right)$$

$$y = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Перевіримо отриманий загальний розв'язок підстановкою у вихідне диференціальне рівняння.

$$\cos x + Ce^{-\sin x}(-\cos x) + \sin x\cos x - \cos x + Ce^{-\sin x}\cos x = \sin x\cos x$$

Знайдемо частинний розв'язок при $y(0) = 0$.

$$0 = \sin 0 - 1 + Ce^{0}; \qquad C = 1.$$

Остаточно $y = \sin x + e^{-\sin x} - 1$.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$20x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 5xy^2\mathrm{d}x$$

з початковою умовою $y(1) = 1$.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$20x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 5xy^2\mathrm{d}x$$

з початковою умовою $y(1) = 1$.

Розв'язання

Це рівняння може бути перетворене і представлене як рівняння з розділеними змінними.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$20x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 5xy^2\mathrm{d}x$$

з початковою умовою $y(1) = 1$.

Розв'язання

Це рівняння може бути перетворене і представлене як рівняння з розділеними змінними.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2$$

$$3yy'(x^2 + 1) = 5x(y^2 + 4);$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$20x\mathrm{d}x - 3y\mathrm{d}y = 3x^2y\mathrm{d}y - 5xy^2\mathrm{d}x$$

з початковою умовою $y(1) = 1$.

Розв'язання

Це рівняння може бути перетворене і представлене як рівняння з розділеними змінними.

$$20x - 3yy' = 3x^2yy' - 5xy^2$$

$$3yy'(x^2 + 1) = 5x(y^2 + 4);$$

$$y'\frac{3y}{y^2 + 4} = \frac{5x}{x^2 + 1}$$

$$\frac{3y}{y^2 + 4}\mathrm{d}y = \frac{5x}{x^2 + 1}\mathrm{d}x;$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C \cdot (x^2+1)^5$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C \cdot (x^2+1)^5$$

$$y^2+4 = C \cdot \sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C\cdot(x^2+1)^5$$

$$y^2+4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

$$y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4$$

Розв'язання

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\mathrm{d}y = \int \frac{5x}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

$$\frac{3}{2}\ln(y^2+4) = \frac{5}{2}\ln(x^2+1) + \ln C_1$$

$$(y^2+4)^3 = C\cdot(x^2+1)^5$$

$$y^2+4 = C\cdot\sqrt[3]{(x^2+1)^5}$$

$$y^2 = C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4$$

$$y = \sqrt{C(x^2+1)^{\frac{5}{3}} - 4}$$

Розв'язання

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}$$

Розв'язання

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}$$

$$1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}$$

Розв'язання

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}$$

$$1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}$$

$$125 = 8C^3 \cdot 4$$

Розв'язання

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}$$

$$1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}$$

$$125 = 8C^3 \cdot 4$$

$$C^3 = \frac{125}{32}; C = \frac{5}{2\sqrt[3]{4}}$$

Розв'язання

З урахуванням початкової умови:

$$1 = \sqrt{C \cdot 2^{\frac{5}{3}} - 4} = \sqrt{C\sqrt[3]{32} - 4}$$

$$1 = 2C\sqrt[3]{4} - 4; \qquad 5 = 2C\sqrt[3]{4}$$

$$125 = 8C^3 \cdot 4$$

$$C^3 = \frac{125}{32}; C = \frac{5}{2\sqrt[3]{4}}$$

Остаточно $y = \sqrt{5\left(\frac{x^2+1}{2}\right)^{\frac{5}{3}} - 4}.$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв'яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

Приклад

Розв’язати диференціальне рівняння $xy' + y = x + 1$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв’язання

Це лінійне неоднорідне рівняння.

Розв’яжемо відповідне йому однорідне рівняння.

$$xy' + y = 0$$

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

$$xy = C$$

Розв'язання

$$y = \frac{C}{x}$$

Розв'язання

$$y = \frac{C}{x}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Розв'язання

$$y = \frac{C}{x}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Підставимо у вихідне рівняння:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1$$

Розв'язання

$$y = \frac{C}{x}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Підставимо у вихідне рівняння:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1$$

$$\frac{C'(x)x}{x} = x + 1$$

Розв'язання

$$y = \frac{C}{x}$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = \frac{C(x)}{x}$$

Підставимо у вихідне рівняння:

$$x\frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x} = x + 1$$

$$\frac{C'(x)x}{x} = x + 1$$

$$C'(x) = x + 1$$

Розв'язання

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Розв'язання

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}$$

Розв'язання

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2} + 1 + C$$

Розв'язання

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2} + 1 + C$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

Розв'язання

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + x + C$$

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{x}{2} + 1 + \frac{C}{x}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = \frac{1}{2} + 1 + C$$

$$C = -\frac{3}{2}$$

Частинний розв'язок:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2x} + 1$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Розв'язання

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Розв'язання

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Позначимо:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Розв'язання

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Позначимо:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u$$

$$\frac{y}{x} = e^u$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Розв'язання

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Позначимо:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u$$

$$\frac{y}{x} = e^u$$

$$y = xe^u$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $xy' = y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$ з початковою умовою $y(1) = e$.

Розв'язання

Це рівняння може бути зведене до типу рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою заміни змінних.

Позначимо:

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = u$$

$$\frac{y}{x} = e^u$$

$$y = xe^u$$

$$y' = xu'e^u + e^u$$

Розв'язання

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u$$

Розв'язання

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u$$

$$xu' + 1 = u$$

Розв'язання

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u$$

$$xu' + 1 = u$$

$$xu' = u - 1$$

Розв'язання

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u$$

$$xu' + 1 = u$$

$$xu' = u - 1$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u - 1$$

Розв'язання

Рівняння набуває такого вигляду:

$$xu'e^u + e^u = e^u u$$

$$xu' + 1 = u$$

$$xu' = u - 1$$

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними.

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u-1| = \ln|x| + \ln C$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$u - 1 = Cx$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$u - 1 = Cx$$

Зробимо зворотну заміну:

$$Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$u - 1 = Cx$$

Зробимо зворотну заміну:

$$Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1$$

Розв'язання

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|u-1| = \ln|x| + \ln C$$

$$u - 1 = Cx$$

Зробимо зворотну заміну:

$$Cx = \ln\left(\frac{y}{x}\right) - 1$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = Cx + 1$$

$$\frac{y}{x} = e^{Cx+1}$$

Розв’язання

Загальний розв’язок:

$$y = xe^{Cx+1}$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = xe^{Cx+1}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = e$:

$$e = e^{C+1}$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = xe^{Cx+1}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = e$:

$$e = e^{C+1}$$

$$C = 0$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = xe^{Cx+1}$$

З врахуванням початкової умови $y(1) = e$:

$$e = e^{C+1}$$

$$C = 0$$

Частинний розв'язок: $y = ex$.

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$xy' = y \ln y - y \ln x$$

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$xy' = y \ln y - y \ln x$$

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = -\frac{y}{x} \ln x$$

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$xy' = y \ln y - y \ln x$$

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = -\frac{y}{x} \ln x$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$xy' = y \ln y - y \ln x$$

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = -\frac{y}{x} \ln x$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.
Відповідне однорідне:

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = 0$$

Другий спосіб розв'язання

$$xy' = y \ln \frac{y}{x}$$

$$xy' = y \ln y - y \ln x$$

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = -\frac{y}{x} \ln x$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.
Відповідне однорідне:

$$y' - \frac{y}{x} \ln y = 0$$

$$y' = \frac{y}{x} \ln y$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln y\right)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln y\right)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|x\right| + \ln C$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln y\right)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|x\right| + \ln C$$

$$\ln y = Cx$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y \ln y} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln y\right)}{\ln y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|x\right| + \ln C$$

$$\ln y = Cx$$

$$y = e^{Cx}$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Тоді

$$y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Тоді

$$y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$$

Підставимо отримані результати у вихідне рівняння:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x}$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Тоді

$$y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$$

Підставимо отримані результати у вихідне рівняння:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x}$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Тоді

$$y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$$

Підставимо отримані результати у вихідне рівняння:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x}$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x$$

$$x^2C'(x) = -\ln x$$

Розв'язання

Розв'язок вихідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = e^{C(x)x}$$

Тоді

$$y' = e^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right)$$

Підставимо отримані результати у вихідне рівняння:

$$xe^{C(x)x}\left(C'(x)x + C(x)\right) = e^{C(x)x}\ln\frac{e^{C(x)x}}{x}$$

$$x^2C'(x) + xC(x) = C(x)x - \ln x$$

$$x^2C'(x) = -\ln x$$

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

Розв'язання

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{array} \right|$$

Розв'язання

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{array} \right| = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-\mathrm{d}x}{x^2}\right]$$

Розв'язання

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{array} \right| = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-\mathrm{d}x}{x^2}\right] =$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

Розв'язання

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}; & v = -\dfrac{1}{x}; \end{array} \right| = -\left[-\frac{\ln x}{x} - \int \frac{-\mathrm{d}x}{x^2}\right] =$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C$$

$$y = e^{C(x)x} = e^{\ln x + 1 + Cx} = xe^{Cx+1}$$

Одержуємо загальний розв'язок:

$$y = xe^{Cx+1}$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

У цьому рівнянні також зручно застосувати заміну змінних.

$$e^{\frac{y}{x}} = u$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

У цьому рівнянні також зручно застосувати заміну змінних.

$$e^{\frac{y}{x}} = u$$

$$\frac{y}{x} = \ln u$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \dfrac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

У цьому рівнянні також зручно застосувати заміну змінних.

$$e^{\frac{y}{x}} = u$$

$$\frac{y}{x} = \ln u$$

$$y = x \ln u$$

Приклад

Розв'язати диференціальне рівняння $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ з початковою умовою $y(1) = 0$.

Розв'язання

У цьому рівнянні також зручно застосувати заміну змінних.

$$e^{\frac{y}{x}} = u$$

$$\frac{y}{x} = \ln u$$

$$y = x \ln u$$

$$y' = \ln u + \frac{xu'}{u}$$

Розв'язання

Рівняння набуває вигляду:

$$\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0$$

Розв'язання

Рівняння набуває вигляду:

$$\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0$$

$$xu' + u^2 = 0$$

Розв'язання

Рівняння набуває вигляду:

$$\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0$$

$$xu' + u^2 = 0$$

$$xu' = -u^2$$

Розв'язання

Рівняння набуває вигляду:

$$\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0$$

$$xu' + u^2 = 0$$

$$xu' = -u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Рівняння набуває вигляду:

$$\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0$$

$$xu' + u^2 = 0$$

$$xu' = -u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв’язання

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

Розв'язання

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{u} = \ln Cx$$

Розв'язання

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{u} = \ln Cx$$

Робимо зворотну підстановку:

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx$$

Розв'язання

$$\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C$$

$$\frac{1}{u} = \ln Cx$$

Робимо зворотну підстановку:

$$e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx$$

$$-\frac{y}{x} = \ln(\ln Cx)$$

Розв'язання

Загальний розв'язок: $y = -x \ln(\ln Cx)$;

Розв'язання

Загальний розв'язок: $y = -x \ln(\ln Cx)$;
З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = -\ln(\ln C)$$

Розв'язання

Загальний розв'язок: $y = -x\ln(\ln Cx)$;
З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = -\ln(\ln C)$$

$$C = e$$

Розв'язання

Загальний розв'язок: $y = -x \ln(\ln Cx)$;
З врахуванням початкової умови $y(1) = 0$:

$$0 = -\ln(\ln C)$$

$$C = e$$

Частинний розв'язок: $y = -x \ln(\ln ex)$;

Інший спосіб розв'язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Інший спосіб розв’язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної:

$$u = \frac{y}{x}$$

Інший спосіб розв'язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

Інший спосіб розв'язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

Інший спосіб розв'язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u + e^{u} - u = 0$$

Інший спосіб розв'язання

$$y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

Заміна змінної:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux$$

$$y' = u'x + u$$

$$u'x + u + e^u - u = 0$$

$$u'x + e^u = 0$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^u$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^u$$

$$-e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^u$$

$$-e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\int e^{-u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^u$$

$$-e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\int e^{-u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}x = -e^{u}$$

$$-e^{-u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\int e^{-u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$e^{-u} = \ln|x| + \ln C$$

$$e^{-u} = \ln|Cx|$$

Розв'язання

$$-u = \ln(\ln|Cx|)$$

Розв’язання

$$-u = \ln(\ln|Cx|)$$

$$u = -\ln(\ln|Cx|)$$

Розв'язання

$$-u = \ln(\ln|Cx|)$$

$$u = -\ln(\ln|Cx|)$$

Загальний розв'язок:

$$y = -x\ln(\ln Cx)$$

Приклад

Швидкість розмноження бактерій пропорційна їхній кількості. За який проміжок часу кількість бактерій збільшиться в m разів, порівнюючи з їхньою початковою кількістю.

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t$$

Розв’язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C|$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0}$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = x_0$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k\cdot 0} = C \Rightarrow C = x_0$$

Потрібний проміжок часу T знаходимо зі співвідношення

$$mx_0 = x_0e^{kT}$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = x_0$$

Потрібний проміжок часу T знаходимо зі співвідношення

$$mx_0 = x_0 e^{kT} \Rightarrow kT = \ln m$$

Розв'язання

Нехай $x(t)$ – кількість бактерій у момент часу t, а k – коефіцієнт пропорційності між швидкістю та кількістю.

$$\dot{x} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = k \int \mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C| \Rightarrow$$

$$x = Ce^{kt}$$

Нехай у початковий момент часу бактерій було x_0 особин.
Тоді

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0} = C \Rightarrow C = x_0$$

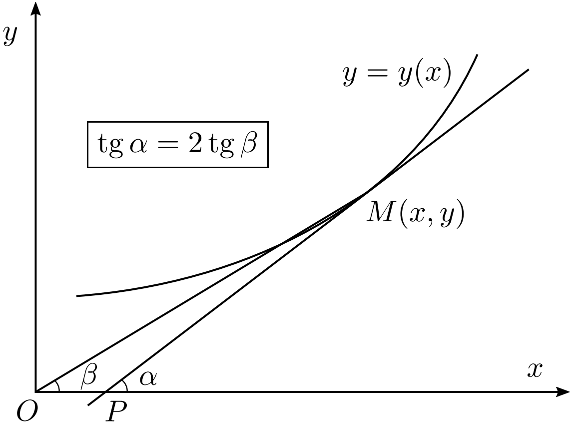
Потрібний проміжок часу T знаходимо зі співвідношення

$$mx_0 = x_0 e^{kT} \Rightarrow kT = \ln m \Rightarrow T = \frac{\ln m}{k}.$$

Приклад

Знайти рівняння кривої, що проходить через точку $(1;1)$ і має таку властивість, що кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці M кривої вдвічі більший кутового коефіцієнта радіус-вектора точки дотику.

Розв'язання



y
$y = y(x)$
$\operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{tg}\beta$
$M(x, y)$
x
β
α
O
P

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg} \beta = y/x$.

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$$

Розв'язання

Нехай $y = y(x)$ – рівняння шуканої кривої.
MP – дотична, отже $\operatorname{tg}\alpha = y'(x)$.
$\overrightarrow{MO}$ – радіус-вектор, тому $\operatorname{tg}\beta = y/x$.
Отже, маємо диференціальне рівняння:

$$y' = 2\frac{y}{x}$$

Розв'язуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx^2$$

Розв'язання

Для визначення C використовуємо умову проходження крізь точку $(1;1)$:

$$1 = C \cdot 1^2$$

Розв'язання

Для визначення C використовуємо умову проходження крізь точку $(1; 1)$:

$$1 = C \cdot 1^2 \Rightarrow C = 1.$$

Розв'язання

Для визначення C використовуємо умову проходження крізь точку $(1;1)$:

$$1 = C \cdot 1^2 \Rightarrow C = 1.$$

Отже, шуканою кривою є крива $y = x^2$.

Приклад

За законом Ньютона, швидкість охолодження нагрітого тіла пропорційна до різниці температур тіла і навколишнього середовища. Визначити, за який час тіло, нагріте до температури $x_0 = 300$°C, занурене у рідину, температура якої 60°C, охолодиться до 150°C, якщо вважати кількість рідини настільки великою, що її температура лишається майже незмінною. При цьому відомо, що за 10 хвилин після початку процесу температура тіла дорівнює 200°C.

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Тоді, якщо k – коефіцієнт пропорційності, диференціальне рівняння процесу буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(x - 60)$$

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла ($60 \leqslant x \leqslant 300$).
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Тоді, якщо k – коефіцієнт пропорційності, диференціальне рівняння процесу буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(x - 60)$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = k\mathrm{d}t$$

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Тоді, якщо k – коефіцієнт пропорційності, диференціальне рівняння процесу буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(x - 60)$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = \int k\mathrm{d}t$$

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Тоді, якщо k – коефіцієнт пропорційності, диференціальне рівняння процесу буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(x - 60)$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = \int k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x - 60| = kt + \ln|C|$$

Розв'язання

Нехай x неперервно спадна температура тіла $(60 \leqslant x \leqslant 300)$.
Різниця температур тіла і рідини дорівнює $x - 60$.
Швидкість охолодження – $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
Тоді, якщо k – коефіцієнт пропорційності, диференціальне рівняння процесу буде таким:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(x - 60)$$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = k\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x - 60} = \int k\mathrm{d}t \Rightarrow \ln|x - 60| = kt + \ln|C| \Rightarrow x = 60 + Ce^{kt}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k \cdot 0}$$

Розв'язання

Початкова умова $(t = 0)$:

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Розв’язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200℃. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10}$$

Розв'язання

Початкова умова $(t = 0)$:

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k \cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200℃. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Розв'язання

Початкова умова $(t = 0)$:

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

$$150 = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200℃. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

$$150 = 60 + 240e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = \frac{90}{240}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

$$150 = 60 + 240e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = \frac{90}{240} \Rightarrow t = -\frac{\ln 3/8}{0,053}$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k\cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200°C. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k\cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

$$150 = 60 + 240e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = \frac{90}{240} \Rightarrow t = -\frac{\ln 3/8}{0,053} = 18,506$$

Розв'язання

Початкова умова ($t = 0$):

$$x_0 = 300 = 60 + Ce^{k \cdot 0} \Rightarrow C = 240.$$

Отже,

$$x = 60 + 240e^{kt}$$

Для визначення коефіцієнта пропорційності k скористаємося додатковою умовою: при $t = 10$ хвилин температура тіла дорівнює 200℃. Тому

$$200 = 60 + 240e^{k \cdot 10} \Rightarrow e^{10k} = \frac{140}{240} = \frac{7}{12} \Rightarrow k = \frac{\ln 7/12}{10} = -0,053$$

Звідси

$$x = 60 + 240e^{-0,053t}$$

Щоб відповісти на питання задачі, треба підставити сюди $x = 150$ і знайти t.

$$150 = 60 + 240e^{-0,053t} \Rightarrow e^{-0,053t} = \frac{90}{240} \Rightarrow t = -\frac{\ln 3/8}{0,053} = 18,506$$

Відповідь: $t = 18,5$ хв.

Приклад

Резервуар містить 200 *л* розсолу, в якому розчинено 5 *кг* солі. В цю посудину вливається вода зі швидкістю 4 *л/хв.*, а виливається з неї розчин зі швидкістю 3 *л/хв.*, при цьому концентрація розчину підтримується рівномірною шляхом помішування. Скільки солі опиниться в резервуарі по закінченню 2 годин від початку такого процесу?

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Переносимо $x(t)$ до лівої частини рівняння, ділимо на Δt і спрямовуємо Δt до нуля.

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Переносимо $x(t)$ до лівої частини рівняння, ділимо на Δt і спрямовуємо Δt до нуля.

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ якщо } \Delta t \to 0,$$

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Переносимо $x(t)$ до лівої частини рівняння, ділимо на Δt і спрямовуємо Δt до нуля.

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ якщо } \Delta t \to 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3x}{200 + t}$$

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Переносимо $x(t)$ до лівої частини рівняння, ділимо на Δt і спрямовуємо Δt до нуля.

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ якщо } \Delta t \to 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3x}{200 + t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{3\mathrm{d}t}{200 + t}$$

Розв'язання

Позначимо через $x(t)$ вагу солі у резервуарі у момент часу t. У цей момент у резервуарі буде $200 + t$ літрів розчину. У досить близький до t момент часу $t + \Delta t$ матимемо $x(t + \Delta t)$ *кг* солі у розчині. Приріст ваги солі буде результатом виливання $3\Delta t$ літрів розчину, концентрація солі у якому дорівнює $x(t)/(200 + t)$.
Отже, маємо таке співвідношення:

$$x(t + \Delta t) = x(t) - \frac{3\Delta t x(t)}{200 + t}$$

Переносимо $x(t)$ до лівої частини рівняння, ділимо на Δt і спрямовуємо Δt до нуля.

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \text{ якщо } \Delta t \to 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{3x}{200 + t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\frac{3\mathrm{d}t}{200 + t} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int \frac{3\mathrm{d}t}{200 + t}$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200 + t| + \ln|C|$$

Розв’язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

C визначаємо з умови про початкову кількість солі у розчині:

$$x(0) = C(200+0)^{-3} = 5$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

C визначаємо з умови про початкову кількість солі у розчині:

$$x(0) = C(200+0)^{-3} = 5 \Rightarrow C = 5 \cdot 200^3$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

C визначаємо з умови про початкову кількість солі у розчині:

$$x(0) = C(200+0)^{-3} = 5 \Rightarrow C = 5 \cdot 200^3$$

Отже,

$$x = 5\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

C визначаємо з умови про початкову кількість солі у розчині:

$$x(0) = C(200+0)^{-3} = 5 \Rightarrow C = 5 \cdot 200^3$$

Отже,

$$x = 5\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

Звідси

$$x(120) = 5\left(\frac{200}{200+120}\right)^3$$

Розв'язання

$$\ln|x| = -3\ln|200+t| + \ln|C| \Rightarrow x = C(200+t)^{-3}$$

C визначаємо з умови про початкову кількість солі у розчині:

$$x(0) = C(200+0)^{-3} = 5 \Rightarrow C = 5 \cdot 200^3$$

Отже,

$$x = 5\left(\frac{200}{200+t}\right)^3$$

Звідси

$$x(120) = 5\left(\frac{200}{200+120}\right)^3 \approx 1,22 \text{ кг}$$