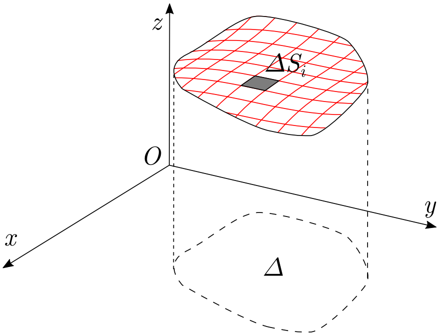
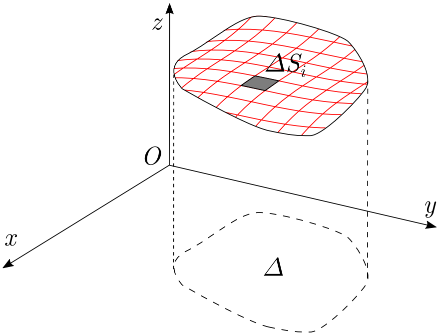
Поверхневі інтеграли

Поверхневі інтеграли першого роду

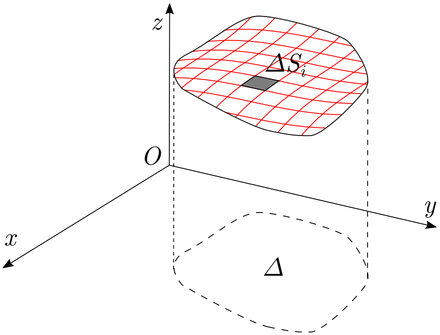


Поверхневі інтеграли першого роду



Розбиття — n частин.

Поверхневі інтеграли першого роду



Розбиття — n частин. Елементарний доданок:

$$F(\alpha, \beta, \gamma)\Delta S_i$$

Означення

Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття поверхні λ існує скінченна границя інтегральних сум, то ця границя називається **поверхневим інтегралом першого роду** або **інтегралом за площею поверхні.**

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)\Delta S_i$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_S \mathrm{d}S = S,$$

де S – площа поверхні.

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_S kF(x,y,z)\mathrm{d}S = k\iint\limits_S F(x,y,z)\mathrm{d}S; \quad k = const$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

$$\iint\limits_S \left[F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z)\right] \mathrm{d}S = \iint\limits_S F_1(x, y, z)\, \mathrm{d}S + \iint\limits_S F_2(x, y, z)\, \mathrm{d}S$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

Якщо $S = S_1 + S_2$,

$$\iint\limits_{S} F(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{S_1} F(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{S_2} F(x,y,z)\mathrm{d}S$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

Якщо $F_1(x,y,z) \leqslant F_2(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_S F_1(x,y,z)\mathrm{d}S \leqslant \iint\limits_S F_2(x,y,z)\mathrm{d}S$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

$$\left|\iint\limits_{S} F(x,y,z)\mathrm{d}S\right| \leqslant \iint\limits_{S} \left|F(x,y,z)\right| \mathrm{d}S$$

Властивості поверхневого інтеграла першого роду

Теорема про середнє
Якщо функція $F(x, y, z)$ *неперервна в будь-якій точці поверхні* S*, то існує точка* (α, β, γ) *така, що*

$$\iint\limits_S F(x, y, z)\mathrm{d}S = F(\alpha, \beta, \gamma) \cdot S,$$

де S *– площа поверхні.*

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Якщо поверхню задано рівнянням $z = f(x, y)$

$$\iint\limits_S F(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_\Delta F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

де Δ – проєкція S на площину Oxy.

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Якщо S задано параметрично у вигляді $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, де x, y, z – неперервно диференційовані у деякій області Σ площини Ouv,

$$\iint\limits_{S} F(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} F\left[x(u, v), y(u, v), z(u, v)\right]\sqrt{EH - F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

де

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad H = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

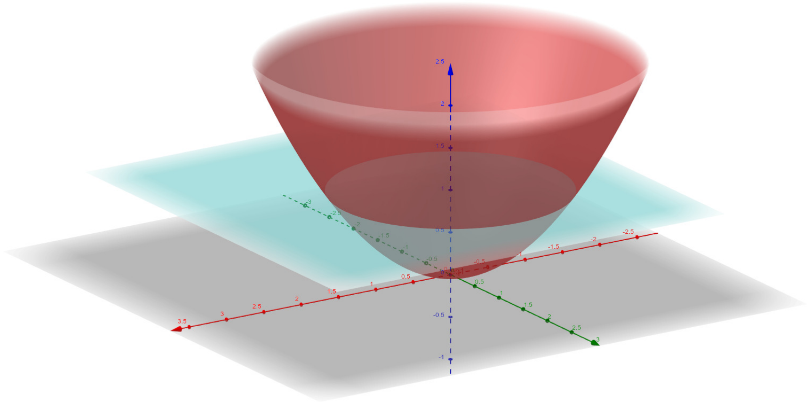
$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Приклад

Знайти масу частини поверхні Ω, обмеженої S, з густиною $\mu = \mu_0$:
$\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \leqslant 1\}$.

Приклад

Знайти масу частини поверхні Ω, обмеженої S, з густиною $\mu = \mu_0$:
$\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \leqslant 1\}$.



Розв'язання

$$M = \iint\limits_{S} \mu_0 \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} \mu(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2};$$

Розв'язання

$$M = \iint\limits_{S} \mu_0 \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} \mu(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}; f'_x = x; f'_y = y;$$

Розв'язання

$$M=\iint\limits_{S}\mu_0\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Delta}\mu(x,y,f(x,y))\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z=f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2};f'_x=x;f'_y=y;\sqrt{1+(f'_x(x,y))^2+(f'_y(x,y))^2}=\sqrt{1+x^2+y^2}.$$

Розв'язання

$$M = \iint\limits_{S} \mu_0 \mathrm{d}S = \iint\limits_{\Delta} \mu(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}; f'_x = x; f'_y = y; \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Δ – коло на площині Oxy з радіусом $R = \left. \sqrt{x^2 + y^2} \right|_{z=1} = \sqrt{2}$.

Розв'язання

У полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Розв'язання

У полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$|i| = \rho$$

Розв'язання

У полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$|i| = \rho$$

$$M = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \mu_0\sqrt{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$$

Розв'язання

У полярній системі координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$|i| = \rho$$

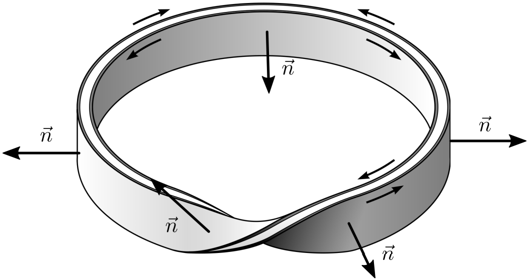
$$M = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \cdot \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \mu_0 \sqrt{1+\rho^2}\rho \mathrm{d}\rho = 2\pi\mu_0 \left[\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right].$$

Означення

Якщо на поверхні S є хоча б одна точка і хоча б один контур, що не перетинає границю поверхні, при обході за яким напрямок нормалі у точці міняється на протилежний, то така поверхня називається **однобічною**.

Означення

Якщо на поверхні S є хоча б одна точка і хоча б один контур, що не перетинає границю поверхні, при обході за яким напрямок нормалі у точці міняється на протилежний, то така поверхня називається **однобічною**.



Стрічка Мебіуса (Möbius strip)

Означення

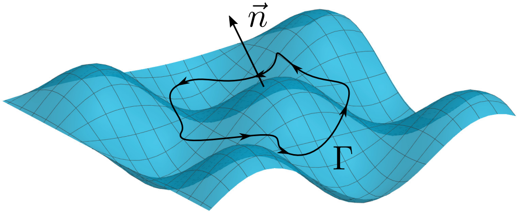
Якщо при обході умовах напрямок нормалі не міняється, то поверхня називається **двобічною**.

Означення

Якщо при обході умовах напрямок нормалі не міняється, то поверхня називається **двобічною**.
Будемо вважати додатним напрямком обходу контуру Γ, що належить поверхні, такий напрямок, при русі за яким за вибраним боком поверхні сама поверхня залишається ліворуч.

Означення

Якщо при обході умовах напрямок нормалі не міняється, то поверхня називається **двобічною**.
Будемо вважати додатним напрямком обходу контуру Γ, що належить поверхні, такий напрямок, при русі за яким за вибраним боком поверхні сама поверхня залишається ліворуч.
Двобічна поверхня із установленим додатним напрямком обходу називається **орієнтованою** поверхнею.



Поверхневі інтеграли другого роду

S – обмежена двобічна поверхня, що складається зі скінченного числа шматків, кожний з яких заданий або рівнянням вигляду $z = f(x, y)$, або є циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz.

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття поверхні S інтегральні суми, складені як суми добутків значень деякої функції на площу часткової поверхні, мають скінченну границю, то ця границя називається **поверхневим інтегралом другого роду.**

Поверхневі інтеграли другого роду

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\left(\Delta S_i\right)_{xy}$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\left(\Delta S_i\right)_{yz}$$

$$\iint\limits_S Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)\left(\Delta S_i\right)_{zx}$$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

– поверхневий інтеграл другого роду.

Властивості поверхневих інтегралів другого роду

Властивості поверхневого інтеграла другого роду аналогічні вже розглянутим нами властивостям поверхневого інтеграла першого роду.

Властивості поверхневих інтегралів другого роду

- Будь-який поверхневий інтеграл другого роду міняє знак при зміні сторони поверхні,
- сталий множник можна виносити за знак інтеграла,
- поверхневий інтеграл від суми двох і більше функцій дорівнює сумі поверхневих інтегралів від цих функцій,
- якщо поверхня розбита на скінченне число часткових поверхонь, інтеграл за усією поверхнею дорівнює сумі інтегралів за частинними поверхнями.

Властивості поверхневих інтегралів другого роду

Якщо S – циліндрична поверхня з твірними, паралельними осі Oz, то $\iint\limits_S R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. У випадку, якщо твірні поверхні паралельні осям Ox і Oy, то дорівнюють нулю відповідні складові поверхневого інтеграла другого роду.

Зв'язок поверхневих інтегралів першого і другого роду

Поверхневі інтеграли першого і другого роду пов'язані один з одним співвідношенням:

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

У цій формулі $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормалі до поверхні S в обрану сторону поверхні.

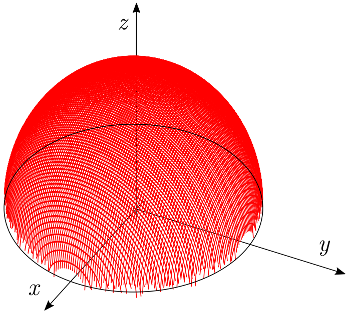
Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_S (z-R)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ за верхнім боком півсфери

$$x^2+y^2+z^2=2Rz, \quad R \leqslant z \leqslant 2R.$$

Перетворимо рівняння поверхні до вигляду: $x^2+y^2+(z-R)^2-R^2=0$

$$z = R + \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$



Приклад

Задана поверхня проєктується на площину xOy у круг, рівняння якого:

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2$$

$$\iint\limits_S (z - R)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(R^2 - x^2 - y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Приклад

Перехід до полярних координат:

$$\iint\limits_{\Delta}(R^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint\limits_{S}(z - R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Приклад

Перехід до полярних координат:

$$\iint\limits_{\Delta} (R^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} f(\rho, \varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint\limits_{S} (z - R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{0}^{R} \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\mathrm{d}\rho$$

Приклад

Перехід до полярних координат:

$$\iint\limits_{\Delta} (R^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\iint\limits_{S} (z - R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{R} \left(R^2 - \rho^2\right) \rho\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^2\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4} \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Приклад

Перехід до полярних координат:

$$\iint\limits_{\Delta}(R^2 - x^2 - y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi, \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\iint\limits_{S}(z-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{R}\left(R^2-\rho^2\right)\rho\mathrm{d}\rho = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^R\mathrm{d}\varphi =$$

$$= \frac{R^4}{4}\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi R^4}{2}$$

Формула Гауса-Остроградського (Gauss)

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Відзначимо, що ця формула застосовна для обчислення поверхневих інтегралів за замкненою поверхнею.
На практиці формулу Гауса-Остроградського можна застосовувати для обчислення об'єму тіл, якщо відома поверхня, що обмежує це тіло.
Так мають місце формули:

$$V = \oiint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \oiint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Приклад

Умова

Знайти формулу обчислення об'єму кулі.

Приклад

Умова

Знайти формулу обчислення об'єму кулі.

Розв'язання

Рівняння кулі має вигляд: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Знайти об'єм кулі можна за формулою:

$$V = \int\limits_{-R}^{R} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 8\int\limits_{0}^{R} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}y =$$

Розв'язання

$$= 8\int\limits_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$= 8\int\limits_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= 8\int\limits_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$= 8\int_0^R \left[\frac{y\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{2} + \frac{R^2-x^2}{2}\arcsin\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}x =$$

$$= 8\int_0^R \frac{R^2-x^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi\left[R^2x - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^R = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Розв'язання (сферичні координати)

$$V = \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \cdot 2 \int\limits_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{R} \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho$$

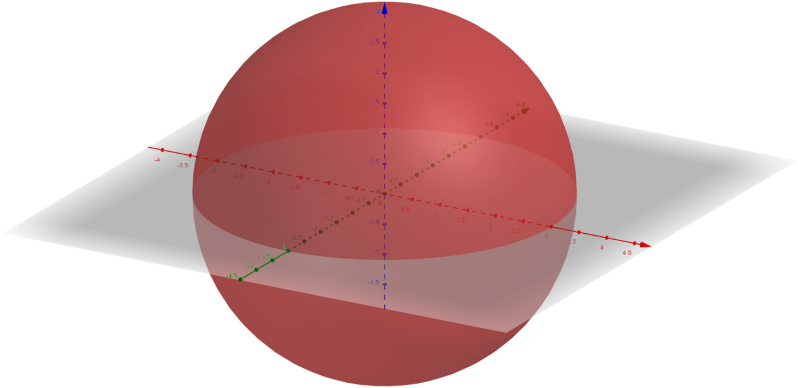
Розв'язання (сферичні координати)

$$V = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \cdot 2\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho = 2\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \int\limits_0^\pi \frac{R^3}{3} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_0^\pi 2R^3 \mathrm{d}\theta$$

Розв'язання (сферичні координати)

$$V = \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \cdot 2\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^R \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho = 2\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta \int\limits_0^\pi \frac{R^3}{3} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{2}{3}\int\limits_0^\pi 2R^3 \mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)



Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)

$$V = \oiint\limits_{S} z \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)

$$V = \oiint\limits_{S} z \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 2 \iint\limits_{S_c} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)

$$V = \oiint\limits_{S} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{S_c} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \mathrm{d}\theta =$$

Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)

$$V = \oiint\limits_{S} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{S_c} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^R \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho\mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho\mathrm{d}\rho$$

Розв'язання (формула Остроградського-Гауса)

$$V = \oiint\limits_{S} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{S_c} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{R} \mathrm{d}\rho \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int\limits_{0}^{R} \sqrt{R^2 - \rho^2} \cdot \rho \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Приклад

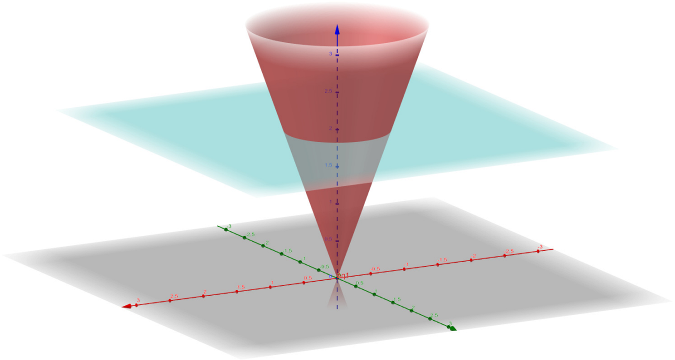
Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z} + y, 3x, 3z + 5x), S : z^2 = 8(x^2 + y^2), z = 2.$$

Приклад

Знайти потік векторного поля $\vec{a}$ крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

$$\vec{a} = (\sqrt{z} + y, 3x, 3z + 5x), S : z^2 = 8(x^2 + y^2), z = 2.$$



Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\underset{S}{\oiint} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underset{V}{\iiint} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3V$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

$$\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3V = 3 \cdot \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} h_{\text{кон.}}$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\iint\limits_S\!\!\!\!\!\!\!\!\;\bigcirc\; P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z}+y)}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0;\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z+5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

$$\iint\limits_S\!\!\!\!\!\!\!\!\;\bigcirc\; P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3V = 3\cdot\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h_{\text{кон.}} = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2$$

Розв'язання

Формула Остроградського-Гауса ($\vec{a} = (P; Q; R)$):

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(\sqrt{z} + y)}{\partial x} = 0; \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(3x)}{\partial y} = 0; \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(3z + 5x)}{\partial z} = 3;$$

Поверхня – конус: висота конуса – 2, радіус основи визначаємо з рівняння конуса: $x^2 + y^2 = R^2 = z^2_{\text{осн.}}/8 = 2^2/8 = 1/2$.

$$\oiint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_V 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3V = 3\cdot\frac{1}{3}S_{\text{осн.}}h_{\text{кон.}} = 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi.$$