Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння першого порядку

Однорідні рівняння

Означення. Функція $f(x,y)$ називається **однорідною n-го порядку** щодо своїх аргументів x і y, якщо для будь-якого значення параметра t (крім нуля) виконується тотожність:

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

Приклад

Чи є однорідною функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$?

Приклад

Чи є однорідною функція $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$?
Розв'язання

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty$$

Приклад

Чи є однорідною функція $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$?
Розв'язання

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y$$

Приклад

Чи є однорідною функція $f(x,y) = x^3 + 3x^2y$?

Розв'язання

$$f(tx,ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3f(x,y)$$

Приклад

Чи є однорідною функція $f(x, y) = x^3 + 3x^2y$?

Розв'язання

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2ty = t^3x^3 + 3t^3x^2y = t^3(x^3 + 3x^2y) = t^3f(x, y)$$

Таким чином, функція $f(x, y)$ є однорідною 3-го порядку.

Однорідне диференціальне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння типу $y' = f(x, y)$ називається **однорідним**, якщо його права частина $f(x, y)$ є однорідна функція нульового порядку щодо своїх аргументів.

Однорідне диференціальне рівняння

Означення. Диференціальне рівняння типу $y' = f(x, y)$ називається **однорідним**, якщо його права частина $f(x, y)$ є однорідна функція нульового порядку щодо своїх аргументів.
Будь-яке рівняння типу $P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$ є однорідним, якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції однакового порядку.

Розв'язання

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$.

Розв'язання

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$.
Оскільки функція $f(x, y)$ – однорідна нульового порядку, то можна записати:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Розв'язання

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x,y)$.
Оскільки функція $f(x,y)$ – однорідна нульового порядку, то можна записати:

$$f(tx,ty) = f(x,y).$$

Оскільки параметр t загалом кажучи довільний, припустимо, що $t = \dfrac{1}{x}$.
Одержуємо:

$$f(x,y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Розв'язання

Розглянемо однорідне рівняння $y' = f(x, y)$.
Оскільки функція $f(x, y)$ – однорідна нульового порядку, то можна записати:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Оскільки параметр t загалом кажучи довільний, припустимо, що $t = \dfrac{1}{x}$.
Одержуємо:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Права частина отриманої рівності залежить фактично тільки від одного аргументу $u = \dfrac{y}{x}$, тобто

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$$

Розв'язання

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Розв'язання

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Далі заміняємо

$$y = ux,$$
$$y' = u'x + ux'$$

Розв'язання

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Далі заміняємо

$$y = ux,$$
$$y' = u'x + ux'$$

$$u'x + ux' = \varphi(u)$$

Розв'язання

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Далі заміняємо

$$y = ux,$$
$$y' = u'x + ux'$$

$$u'x + ux' = \varphi(u)$$

$$u'x + u = \varphi(u)$$

Розв'язання

Вихідне диференціальне рівняння у такий спосіб можна записати у вигляді:

$$y' = \varphi(u)$$

Далі заміняємо

$$y = ux,$$
$$y' = u'x + ux'$$

$$u'x + ux' = \varphi(u)$$

$$u'x + u = \varphi(u)$$

$$u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}$$

Розв'язання

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними щодо невідомої функції u.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

Розв'язання

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними щодо невідомої функції u.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\frac{\mathrm{d}x}{x};\ \int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+C$$

Розв'язання

Одержали рівняння з відокремлюваними змінними щодо невідомої функції u.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}; \int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C$$

Далі, замінивши допоміжну функцію u на її вираз через x і y і знайшовши інтеграли, одержимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x};$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x}; y = ux;$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x}; y = ux; y' = u'x + u.$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x}; y = ux; y' = u'x + u.$$

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1)$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}\left(\ln\dfrac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x}; y = ux; y' = u'x + u.$$

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1)$$

$$u'x + u = u\ln u + u$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.
Розв'язання Уведемо допоміжну функцію u.

$$u = \frac{y}{x}; y = ux; y' = u'x + u.$$

Підставляємо у вихідне рівняння:

$$u'x + u = u(\ln u + 1)$$

$$u'x + u = u\ln u + u$$

$$u'x = u\ln u$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C$$

$$\ln u = Cx$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\ln u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Інтегруючи, одержуємо:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C$$

$$\ln u = Cx$$

$$u = e^{Cx}$$

Розв'язання

Переходячи від допоміжної функції обернено до функції y, одержуємо загальний розв'язок:

$$\boxed{y = xe^{Cx}}$$

Рівняння, що приводяться до однорідного

Крім рівнянь, описаних вище, існує клас рівнянь, які за допомогою певних підстановок можуть зведені до однорідного.

Це рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Рівняння, що приводяться до однорідного

Крім рівнянь, описаних вище, існує клас рівнянь, які за допомогою певних підстановок можуть зведені до однорідного.

Це рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$.

Якщо визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, то змінні можуть бути розділені підстановкою

$$x = u + \alpha; \qquad y = v + \beta;$$

де α і β – розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$

Приклад

Розв'язати рівняння $(x - 2y + 3)\mathrm{d}y + (2x + y - 1)\mathrm{d}x = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1$; $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3}$;

Приклад

Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1$; $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3}$;

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4+1=5\neq 0.$

Приклад

Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1$; $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3}$;

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1;\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3}$;

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $(x-2y+3)\mathrm{d}y+(2x+y-1)\mathrm{d}x=0$.

Одержуємо $(x-2y+3)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-2x-y+1$; $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-2x-y+1}{x-2y+3}$;

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0.$

Розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases}$$

Розв'язання

Застосовуємо підстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$ у вихідне рівняння:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)\mathrm{d}v + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)\mathrm{d}u = 0;$$

Розв'язання

Застосовуємо підстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5;$ у вихідне рівняння:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)\mathrm{d}v + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)\mathrm{d}u = 0;$$

$$(u - 2v)\mathrm{d}v + (2u + v)\mathrm{d}u = 0;$$

Розв'язання

Застосовуємо підстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5$; у вихідне рівняння:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)\mathrm{d}v + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)\mathrm{d}u = 0;$$

$$(u - 2v)\mathrm{d}v + (2u + v)\mathrm{d}u = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Розв'язання

Застосовуємо підстановку $x = u - 1/5; \quad y = v + 7/5$; у вихідне рівняння:

$$(u - 1/5 - 2v - 14/5 + 3)\mathrm{d}v + (2u - 2/5 + v + 7/5 - 1)\mathrm{d}u = 0;$$

$$(u - 2v)\mathrm{d}v + (2u + v)\mathrm{d}u = 0;$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2u + v}{2v - u} = \frac{2 + v/u}{2v/u - 1};$$

Заміняємо змінну $\dfrac{v}{u} = t; \quad v = ut; \quad v' = t'u + t$; при підстановці у вираз, записаний вище, маємо:

$$t'u + t = \frac{2 + t}{2t - 1}$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}\mathrm{d}t; \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)\mathrm{d}t}{1+t-t^2};$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}\mathrm{d}t; \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)\mathrm{d}t}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}\mathrm{d}t; \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)\mathrm{d}t}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$

Розв'язання

Відокремлюємо змінні

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}\mathrm{d}t; \quad \int\frac{\mathrm{d}u}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)\mathrm{d}t}{1+t-t^2};$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1 u|$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|; \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2};$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left(\frac{5y - 7}{5x + 1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left(\frac{5y - 7}{5x + 1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

$$(5x + 1)^2 + (5y - 7)(5x + 1) - (5y - 7)^2 = 25C_2$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left(\frac{5y - 7}{5x + 1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

$$(5x + 1)^2 + (5y - 7)(5x + 1) - (5y - 7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left(\frac{5y - 7}{5x + 1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

$$(5x + 1)^2 + (5y - 7)(5x + 1) - (5y - 7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

Розв'язання

Переходимо тепер до первісної функції y і змінної x.

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y - 7/5}{x + 1/5} = \frac{5y - 7}{5x + 1}; \quad u = x + 1/5;$$

$$1 + \frac{5y - 7}{5x + 1} - \left(\frac{5y - 7}{5x + 1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x + 1)^2};$$

$$(5x + 1)^2 + (5y - 7)(5x + 1) - (5y - 7)^2 = 25C_2$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7$$

$$x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C;$$

Розв'язання

Отже, вираз $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ є загальним інтегралом вихідного диференціального рівняння.

Вироджений випадок

У випадку якщо у вихідному рівнянні типу $y' = f\left(\dfrac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$, то змінні можуть бути розділені підстановкою

$$ax + by = t.$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2(x+y)\mathrm{d}y + (3x+3y-1)\mathrm{d}x = 0$.

Розв'язання Одержуємо

$$2(x+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x-3y+1; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}.$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2(x+y)\mathrm{d}y + (3x+3y-1)\mathrm{d}x = 0$.

Розв'язання Одержуємо

$$2(x+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x-3y+1; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\frac{3x+3y-1}{2x+2y}.$$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0.$

Приклад

Розв'язати рівняння $2(x+y)\mathrm{d}y + (3x+3y-1)\mathrm{d}x = 0$.

Розв'язання Одержуємо

$2(x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x-3y+1; \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y}$.

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0$.

Застосовуємо підстановку $3x+3y = t$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2(x+y)\mathrm{d}y + (3x+3y-1)\mathrm{d}x = 0$.

Розв'язання Одержуємо

$2(x+y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -3x-3y+1; \quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y}.$

Знаходимо значення визначника $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0.$

Застосовуємо підстановку $3x+3y=t$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{t'}{3} - 1;$$

Підставляємо цей вираз у вихідне рівняння:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9; \quad 2tt' = 6t-9t+9; \quad 2tt' = -3t+9;$$

Розв'язання

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x; \quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x;$

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}x;$$

Розв'язання

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x;\quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x;$

$$\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int\mathrm{d}x;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Розв'язання

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x;\quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x;$

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right) \mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}x;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далі повертаємося до первісної функції y і змінної x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

Розв'язання

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x; \quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x;$

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}x;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далі повертаємося до первісної функції y і змінної x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

Розв'язання

Розділяємо змінні: $\dfrac{2t}{-3t+9}\mathrm{d}t = \mathrm{d}x; \quad \dfrac{t}{t-3}\mathrm{d}t = -\dfrac{3}{2}\mathrm{d}x;$

$$\int \left(1 + \frac{3}{t-3}\right)\mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\int \mathrm{d}x;$$

$$t + 3\ln|t-3| = -\frac{3}{2}x + C_1$$

Далі повертаємося до первісної функції y і змінної x.

$$2x + 2y + 2\ln|3(x+y-1)| = -x + C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln 3 + 2\ln|x+y-1| = C_2;$$

$$3x + 2y + 2\ln|x+y-1| = C;$$

таким чином, ми одержали загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння.

Лінійні рівняння

<u>**Означення.**</u> Диференціальне рівняння називається **лінійним** щодо невідомої функції і її похідної, якщо воно може бути записане у вигляді:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

при цьому, якщо права частина $Q(x)$ дорівнює нулю, то таке рівняння називається **лінійним однорідним** диференціальним рівнянням, якщо права частина $Q(x)$ не дорівнює нулю, то таке рівняння називається **лінійним неоднорідним** диференціальним рівнянням.
$P(x)$ і $Q(x)$ – функції неперервні на деякому проміжку $a < x < b$.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо методи знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = 0.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо методи знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для цього типу диференціальних рівнянь відокремлення змінних не є складним.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Розглянемо методи знаходження загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння першого порядку вигляду

$$y' + P(x)y = 0.$$

Для цього типу диференціальних рівнянь відокремлення змінних не є складним.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + \ln|C|;$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

Загальний розв'язок: $y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння

Для інтегрування лінійних неоднорідних рівнянь ($Q(x) \neq 0$) застосовуються в основному два методи: метод Бернуллі і метод Лагранжа.

Метод Бернуллі

Суть методу полягає у тім, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

Метод Бернуллі

Суть методу полягає у тім, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

При цьому очевидно, що $y' = u \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – диференціювання частинами.

Метод Бернуллі

Суть методу полягає у тім, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

При цьому очевидно, що $y' = u \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – диференціювання частинами.

Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Метод Бернуллі

Суть методу полягає у тім, що шукана функція представляється у вигляді добутку двох функцій $y = uv$.

При цьому очевидно, що $y' = u \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ – диференціювання частинами.

Підставляючи у вихідне рівняння, одержуємо:

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)uv = Q(x)$$

$$u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$$

Далі треба зробити важливе зауваження – оскільки первісна функція була представлена нами у вигляді добутку, то кожний зі співмножників, що входять у цей добуток, може бути довільним, обраним як нам завгодно.

Наприклад, функція $y = 2x^2$ може бути представлена як $y = 1 \cdot 2x^2$; $y = 2 \cdot x^2$; $y = 2x \cdot x$ тощо.

Метод Бернуллі

Таким чином, можна одну зі складових добутку функцій вибрати так, що вираз $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u = 0$.

Метод Бернуллі

Таким чином, можна одну зі складових добутку функцій вибрати так, що вираз $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u = 0$.
Таким чином, можливо одержати функцію u, проінтегрувавши отримане співвідношення як однорідне диференціальне рівняння за описаною вище схемою:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -P(x)\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int P(x)\mathrm{d}x; \quad \ln|u| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

Метод Бернуллі

Таким чином, можна одну зі складових добутку функцій вибрати так, що вираз $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u = 0$.
Таким чином, можливо одержати функцію u, проінтегрувавши отримане співвідношення як однорідне диференціальне рівняння за описаною вище схемою:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u} = -P(x)\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\int P(x)\mathrm{d}x; \quad \ln|u| = -\int P(x)\mathrm{d}x;$$

$$\ln|C_1| + \ln|u| = -\int P(x)\mathrm{d}x; \qquad u = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}; \quad C = 1/C_1;$$

Метод Бернуллі

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо отриманий вираз для функції u у вихідне рівняння $u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$ з врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

Метод Бернуллі

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо отриманий вираз для функції u у вихідне рівняння $u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$ з врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Q(x); \quad C\mathrm{d}v = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x;$$

Метод Бернуллі

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо отриманий вираз для функції u у вихідне рівняння $u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$ з врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Q(x); \quad C\mathrm{d}v = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x;$$

Інтегруючи, можемо знайти функцію v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1; v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2;$$

Метод Бернуллі

Для знаходження другої невідомої функції v підставимо отриманий вираз для функції u у вихідне рівняння $u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + P(x)u\right) = Q(x)$ з врахуванням того, що вираз, що стоїть в дужках, дорівнює нулю.

$$e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Q(x); \quad C\mathrm{d}v = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x;$$

Інтегруючи, можемо знайти функцію v:

$$Cv = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1; v = \frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2;$$

Тобто була отримана друга складова добутку $y = uv$, що і визначає шукану функцію.

Метод Бернуллі

Підставляючи отримані значення, одержуємо:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$$

[1] Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli) (1654–1705) – швейцарський математик.

Метод Бернуллі

Підставляючи отримані значення, одержуємо:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$$

Остаточно одержуємо формулу:
$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$, C_2 – довільний коефіцієнт.

[1] Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli) (1654–1705) – швейцарський математик.

Метод Бернуллі

Підставляючи отримані значення, одержуємо:

$$y = uv = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$$

Остаточно одержуємо формулу:
$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \left(\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_2\right)$, C_2 – довільний коефіцієнт.
Це співвідношення може вважатися розв'язком неоднорідного лінійного диференціального рівняння у загальному вигляді за способом Бернуллі[1].

[1] Якоб Бернуллі (Jacob Bernoulli) (1654–1705) – швейцарський математик.

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають методом **варіації довільної сталої**.
Повернемося до поставленої задачі:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають методом **варіації довільної сталої**.
Повернемося до поставленої задачі:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Перший крок даного методу полягає у відкиданні правої частини рівняння і заміні її нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Метод Лагранжа

Метод Лагранжа розв'язання неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь ще називають методом **варіації довільної сталої**.
Повернемося до поставленої задачі:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Перший крок даного методу полягає у відкиданні правої частини рівняння і заміні її нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далі знаходиться розв'язок однорідного диференціального рівняння, що вийшло:

$$y = C_1 e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

Метод Лагранжа

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.

Метод Лагранжа

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.
Тоді за правилами диференціювання добутку функцій одержуємо:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C_1(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))$$

Метод Лагранжа

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.
Тоді за правилами диференціювання добутку функцій одержуємо:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C_1(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))$$

Підставляємо отримане співвідношення у вихідне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

Метод Лагранжа

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.
Тоді за правилами диференціювання добутку функцій одержуємо:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C_1(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))$$

Підставляємо отримане співвідношення у вихідне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x);$$

Метод Лагранжа

Для того, щоб знайти відповідний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння, будемо вважати сталу C_1 деякою функцією від x.
Тоді за правилами диференціювання добутку функцій одержуємо:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C_1(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))$$

Підставляємо отримане співвідношення у вихідне рівняння

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C_1(x)P(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C_1(x) e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}C_1(x)}{\mathrm{d}x} e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x);$$

Із цього рівняння визначимо змінну функцію $C_1(x)$:

$$\mathrm{d}C_1(x) = Q(x) e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

Метод Лагранжа

Інтегруючи, одержуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C;$$

Метод Лагранжа

Інтегруючи, одержуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C;$$

Підставляючи це значення у вихідне рівняння, одержуємо:

$$y = e^{-\int P(x) \mathrm{d}x} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C \right).$$

Метод Лагранжа

Інтегруючи, одержуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C;$$

Підставляючи це значення у вихідне рівняння, одержуємо:

$$y = e^{-\int P(x) \mathrm{d}x} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C \right).$$

Таким чином, ми одержали результат, що повністю збігається з результатом розрахунку за методом Бернуллі.

Метод Лагранжа

Інтегруючи, одержуємо:

$$C_1 = \int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C;$$

Підставляючи це значення у вихідне рівняння, одержуємо:

$$y = e^{-\int P(x) \mathrm{d}x} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C \right).$$

Таким чином, ми одержали результат, що повністю збігається з результатом розрахунку за методом Бернуллі.

Приклад

Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.
Розв'язання Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду:
$y' + \dfrac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.
Розв'язання Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду:
$y' + \dfrac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.
Застосуємо отриману вище формулу: $P = \dfrac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

Приклад

Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.
Розв'язання Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду:
$y' + \dfrac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.
Застосуємо отриману вище формулу: $P = \dfrac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a\mathrm{d}x + C\right)$$

Приклад

Розв'язати рівняння $x^2y' + y = ax^2e^{\frac{1}{x}}$.
Розв'язання Спочатку приведемо дане рівняння до стандартного вигляду:
$y' + \dfrac{1}{x^2}y = ae^{\frac{1}{x}}$.
Застосуємо отриману вище формулу: $P = \dfrac{1}{x^2}; \quad Q = ae^{\frac{1}{x}};$

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int ae^{\frac{1}{x}}e^{-\frac{1}{x}}\mathrm{d}x + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a\mathrm{d}x + C\right)$$

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$