Невласні інтеграли. Застосування визначених інтегралів до розв'язування задач геометрії

Невласні інтеграли

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, \infty)$. Тоді вона неперервна на будь-якому відрізку $[a, b]$.

Невласні інтеграли

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна на інтервалі $[a, \infty)$. Тоді вона неперервна на будь-якому відрізку $[a, b]$.

Означення: Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, то ця границя називається **невласним інтегралом** від функції $f(x)$ на інтервалі $[a, \infty)$.

Позначення та термінологія

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Позначення та термінологія

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Якщо ця границя **існує** і **скінченна**, то кажуть, що невласний інтеграл **збігається**.

Позначення та термінологія

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Якщо ця границя **існує** і **скінченна**, то кажуть, що невласний інтеграл **збігається**.
Якщо границя не існує або нескінченна, то невласний інтеграл **розбігається**.

Різновиди

Аналогічні міркування можна привести для невласних інтегралів вигляду:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

Різновиди

Аналогічні міркування можна привести для невласних інтегралів вигляду:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Різновиди

Аналогічні міркування можна привести для невласних інтегралів вигляду:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

Звичайно, ці твердження справедливі, якщо інтеграли, що до них входять, існують.

Приклад

$$\int_0^{\infty} \cos x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int_0^{\infty} \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \cos x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int_0^{\infty} \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \sin x \big|_0^b$$

Приклад

$$\int_0^{\infty} \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \sin x\big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

Приклад

$$\int_0^{\infty} \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \cos x \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \sin x\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty} (\sin b - \sin 0) = \lim_{b\to\infty} \sin b$$

Невласний інтеграл розбіжний.

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \int_b^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$$

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \Bigg|_{b}^{-1}$$

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \Bigg|_{b}^{-1} = \lim_{b \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right)$$

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \int_{b}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b \to -\infty} \left[-\frac{1}{x} \right] \Bigg|_{b}^{-1} = \lim_{b \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{b} \right) = 1$$

Приклад

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_b^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to-\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_b^{-1} = \lim_{b\to-\infty} \left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$$

Невласний інтеграл збіжний.

Ознаки збіжності

<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ збігається, то $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ теж збігається і $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Ознаки збіжності

Теорема: Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ збігається, то $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ теж збігається і $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Теорема: Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ розбігається, то $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ теж розбігається.

Ознаки збіжності

<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ збігається, то $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ теж збігається і $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.
<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ розбігається, то $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ теж розбігається.
<u>**Теорема:**</u> Якщо $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to \infty$, інтеграли $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ і $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ збіжні або розбіжні одночасно.

Ознаки збіжності

<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ збігається, то $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ теж збігається і $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.
<u>**Теорема:**</u> Якщо для всіх x $(x \geqslant a)$ виконується умова $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ розбігається, то $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ теж розбігається.
<u>**Теорема:**</u> Якщо $f(x) \sim \varphi(x)$ при $x \to \infty$, інтеграли $\int_a^\infty \varphi(x)\mathrm{d}x$ і $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ збіжні або розбіжні одночасно.
<u>**Теорема:**</u> Якщо $\int_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ збігається, то збігається і інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$. У цьому випадку інтеграл $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ називається **абсолютно збіжним**.

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = c$ функція або невизначена, або розривна, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b \to c-0} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = c$ функція або невизначена, або розривна, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to c-0} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Якщо інтеграл $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ існує, то інтеграл $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ – збігається, якщо інтеграл $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ не існує, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ – розбігається.

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = a$ функція терпить розрив, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = a$ функція терпить розрив, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці b на проміжку $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = a$ функція терпить розрив, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b\to a+0} \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.
Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці b на проміжку $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Таких точок всередині відрізку може бути кілька.

Інтеграл від розривної функції (другого роду)

Якщо у точці $x = a$ функція терпить розрив, то $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{b \to a+0} \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.
Якщо функція $f(x)$ має розрив у точці b на проміжку $[a, c]$, то

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$$

Таких точок всередині відрізку може бути кілька.
Якщо збігаються всі інтеграли, що входять у суму, то збігається і сумарний інтеграл.

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9 + y^2 x^5} \cdot \mathrm{d}x \ \ (y \in \mathbb{R})$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9+y^2x^5} \cdot \mathrm{d}x \ \ (y \in \mathbb{R})$$

Розв'язання

Зауважимо, що

$$\frac{xy}{9+y^2x^5} < \frac{xy}{y^2x^5} = \frac{1}{yx^4}$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9 + y^2 x^5} \cdot \mathrm{d}x \ \ (y \in \mathbb{R})$$

Розв'язання

Зауважимо, що

$$\frac{xy}{9 + y^2x^5} < \frac{xy}{y^2x^5} = \frac{1}{yx^4}$$

$$\lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{1}{yx^4} \cdot \mathrm{d}x$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9+y^2x^5} \cdot \mathrm{d}x \ \ (y \in \mathbb{R})$$

Розв'язання
Зауважимо, що

$$\frac{xy}{9+y^2x^5} < \frac{xy}{y^2x^5} = \frac{1}{yx^4}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{yx^4} \cdot \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3yx^3}\Big|_1^b$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9+y^2x^5} \cdot \mathrm{d}x \;\; (y \in \mathbb{R})$$

Розв'язання
Зауважимо, що

$$\frac{xy}{9+y^2x^5} < \frac{xy}{y^2x^5} = \frac{1}{yx^4}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{yx^4} \cdot \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3yx^3}\bigg|_1^b = \frac{1}{3y}$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{xy}{9+y^2x^5} \cdot \mathrm{d}x \quad (y \in \mathbb{R})$$

Розв'язання
Зауважимо, що

$$\frac{xy}{9+y^2x^5} < \frac{xy}{y^2x^5} = \frac{1}{yx^4}$$

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{yx^4} \cdot \mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} -\frac{1}{3yx^3}\bigg|_1^b = \frac{1}{3y}$$

Інтеграл є збіжним. Оскільки $\left|\frac{xy}{9+y^2x^5}\right| = |y|\frac{x}{9+y^2x^5}$ при $x>0$, інтеграл є абсолютно збіжним.

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x = 0$.

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x = 0$.

Праворуч від точки $x = 0$ маємо

$$6e^{2x^2} \sim 6 + 6 \cdot 2x^2; x \to 0;$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x = 0$. Праворуч від точки $x = 0$ маємо

$$6e^{2x^2} \sim 6 + 6 \cdot 2x^2; x \to 0; \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; x \to 0;$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x = 0$. Праворуч від точки $x = 0$ маємо

$$6e^{2x^2} \sim 6 + 6 \cdot 2x^2; x \to 0; \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; x \to 0; \sin x \sim x; x \to 0;$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x = 0$. Праворуч від точки $x = 0$ маємо

$$6e^{2x^2} \sim 6 + 6 \cdot 2x^2; x \to 0; \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}; x \to 0; \sin x \sim x; x \to 0;$$

тому

$$\frac{6e^{2x^2} + 24\cos x - 13x^2 - 30}{\sin^\alpha x} \sim \frac{6 + 12x^2 + 24 - 12x^2 - 13x^2 - 30}{x^\alpha}$$

Приклад

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність невласний інтеграл:

$$\int_0^1 \frac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^2-30}{\sin^\alpha x}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Точкою розриву підінтегральної функції на проміжку інтегрування є $x=0$.
Праворуч від точки $x=0$ маємо

$$6e^{2x^2}\sim 6+6\cdot 2x^2;\, x\to 0;\ \cos x\sim 1-\frac{x^2}{2};\, x\to 0;\ \sin x\sim x;\, x\to 0;$$

тому

$$\frac{6e^{2x^2}+24\cos x-13x^2-30}{\sin^\alpha x}\sim\frac{6+12x^2+24-12x^2-13x^2-30}{x^\alpha}=-13x^{2-\alpha}$$

Приклад

$$\lim_{b \to 0} \int_{b}^{1} -13x^{3-\alpha} \cdot \mathrm{d}x$$

Приклад

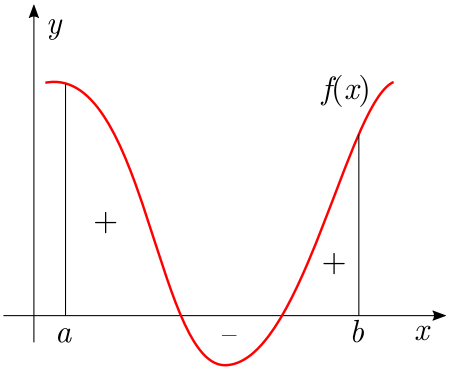
$$\lim_{b\to 0}\int_b^1 -13x^{3-\alpha}\cdot \mathrm{d}x = \lim_{b\to 0} -13\frac{x^{1-\alpha}}{3-\alpha}\bigg|_b^1$$

Приклад

$$\lim_{b\to 0}\int_b^1 -13x^{3-\alpha}\cdot \mathrm{d}x = \lim_{b\to 0} -13\frac{x^{1-\alpha}}{3-\alpha}\bigg|_b^1$$

Інтеграл є збіжним, якщо $\alpha > 3$, і розбіжним, якщо $\alpha \leqslant 3$. За наведеною вище теоремою інтеграл з умови задачі є збіжним і розбіжним за тих самих умов щодо α.

Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площ плоских фігур



Якщо графік розташований нижче осі Ox, тобто $f(x) < 0$, то площа має знак «$-$», якщо графік розташований вище осі Ox, тобто $f(x) > 0$, то площа має знак «$+$».

Обчислення площ плоских фігур

Для знаходження сумарної площі використовується формула $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$.

Обчислення площ плоских фігур

Для знаходження сумарної площі використовується формула $S = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$. Площа фігури, обмеженої деякими лініями може бути знайдена за допомогою визначених інтегралів, якщо відомі рівняння цих ліній.

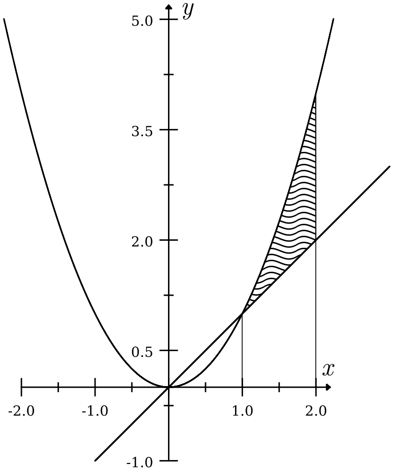
Приклад

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Приклад

Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Розв'язання



Розв'язання

Шукана площа (заштрихована на рисунку) може бути знайдена за формулою:

$$S = \int\limits_1^2 x^2 \mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x \mathrm{d}x$$

Розв'язання

Шукана площа (заштрихована на рисунку) може бути знайдена за формулою:

$$S = \int\limits_1^2 x^2 \mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2$$

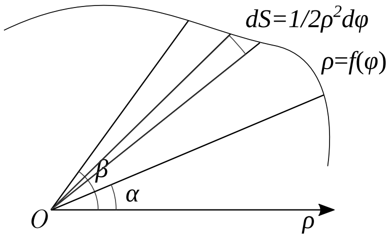
Розв'язання

Шукана площа (заштрихована на рисунку) може бути знайдена за формулою:

$$S = \int\limits_1^2 x^2 \mathrm{d}x - \int\limits_1^2 x \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(\text{од}^2).$$

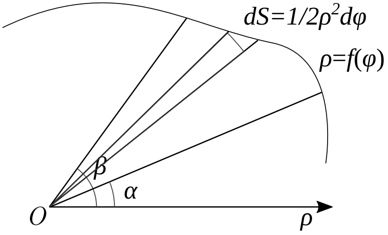
Знаходження площі криволінійного сектора

Рівняння кривої, що обмежує сектор у цій системі координат, має вигляд $\rho = f(\varphi)$, де ρ – довжина радіус-вектора, що з'єднує полюс із довільною точкою кривої, а φ – кут нахилу цього радіус-вектора до полярної осі.



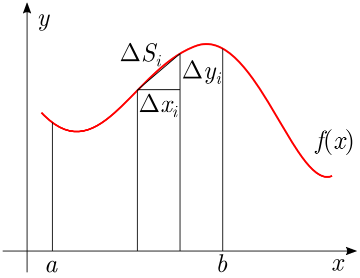
Знаходження площі криволінійного сектора

Рівняння кривої, що обмежує сектор у цій системі координат, має вигляд $\rho = f(\varphi)$, де ρ – довжина радіус-вектора, що з'єднує полюс із довільною точкою кривої, а φ – кут нахилу цього радіус-вектора до полярної осі.



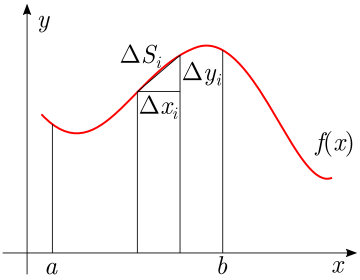
$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

Обчислення довжини дуги кривої



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

Обчислення довжини дуги кривої



$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

$$S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$$

Обчислення довжини дуги кривої

Теорема Піфагора:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Обчислення довжини дуги кривої

Теорема Піфагора:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

Обчислення довжини дуги кривої

Теорема Піфагора:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

У той же час $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Обчислення довжини дуги кривої

Теорема Піфагора:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

У той же час $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \mathrm{d}x$$

Обчислення довжини дуги кривої

Теорема Піфагора:

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$$

У той же час $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \mathrm{d}x$$

$$\boxed{S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x}$$

Обчислення довжини дуги кривої, заданої параметрично

Якщо рівняння кривої задане параметрично, то з урахуванням правил обчислення похідної параметрично заданої функції, одержуємо

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \mathrm{d}t,$$

де $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$.

Обчислення довжини дуги просторової кривої

Якщо задано **просторову криву**, і $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $z = Z(t)$, то

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2} \mathrm{d}t}$$

Обчислення довжини дуги кривої у полярних координатах

Якщо крива задана в **полярних координатах**, то

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\mathrm{d}\varphi}, \rho = f(\varphi)$$

Приклад

Знайти довжину кола, заданого рівнянням $x^2 + y^2 = r^2$.

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тоді

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x$$

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тоді

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = r \cdot \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r$$

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тоді

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = r \cdot \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}$$

Перший спосіб

Виразимо з рівняння змінну y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$
Знайдемо похідну $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$
Тоді

$$\frac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\mathrm{d}x = r \cdot \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2}$$

Тоді $S = 2\pi r$. Одержали загальновідому формулу довжини кола.

Другий спосіб

Якщо представити задане рівняння у полярній системі координат, то одержимо

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2,$$

тобто функція

$$\rho = f(\varphi) = r, \rho' = \frac{\mathrm{d} f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

тоді

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2} \mathrm{d}\varphi$$

Другий спосіб

Якщо представити задане рівняння у полярній системі координат, то одержимо

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2,$$

тобто функція

$$\rho = f(\varphi) = r, \rho' = \frac{\mathrm{d}f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

тоді

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}\mathrm{d}\varphi = r\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi$$

Другий спосіб

Якщо представити задане рівняння у полярній системі координат, то одержимо

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2,$$

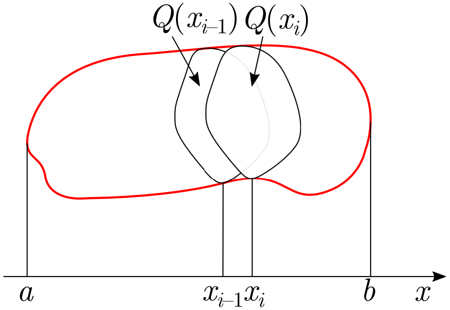
тобто функція

$$\rho = f(\varphi) = r, \rho' = \frac{\mathrm{d} f(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} = 0$$

тоді

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2} \mathrm{d}\varphi = r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi r$$

Обчислення об'ємів тіл. Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів



Нехай є тіло об'єму V. Площа будь-якого поперечного перерізу тіла Q, відома як неперервна функція $Q = Q(x)$.

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

Розіб'ємо тіло на «шари» поперечними перерізами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на будь-якому проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1},\, x_i]$ функція $Q(x)$ неперервна, то приймає на ньому найбільше і найменше значення. Позначимо їх відповідно M_i і m_i.

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

Розіб'ємо тіло на «шари» поперечними перерізами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на будь-якому проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1},\, x_i]$ функція $Q(x)$ неперервна, то приймає на ньому найбільше і найменше значення. Позначимо їх відповідно M_i і m_i.
Якщо на цих найбільшому і найменшому перетинах побудувати циліндри з твірними, паралельними осі x, то об'єми цих циліндрів будуть відповідно рівні $M_i \Delta x_i$ і $m_i \Delta x_i$ тут $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

Розіб'ємо тіло на «шари» поперечними перерізами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на будь-якому проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1},\, x_i]$ функція $Q(x)$ неперервна, то приймає на ньому найбільше і найменше значення. Позначимо їх відповідно M_i і m_i.
Якщо на цих найбільшому і найменшому перетинах побудувати циліндри з твірними, паралельними осі x, то об'єми цих циліндрів будуть відповідно рівні $M_i \Delta x_i$ і $m_i \Delta x_i$ тут $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Зробивши такі побудови для всіх відрізків розбиття, одержимо циліндри, об'єми яких рівні відповідно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ і $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

Розіб'ємо тіло на «шари» поперечними перерізами, що проходять через точки x_i розбиття відрізка $[a, b]$. Оскільки на будь-якому проміжному відрізку розбиття $[x_{i-1},\, x_i]$ функція $Q(x)$ неперервна, то приймає на ньому найбільше і найменше значення. Позначимо їх відповідно M_i і m_i.
Якщо на цих найбільшому і найменшому перетинах побудувати циліндри з твірними, паралельними осі x, то об'єми цих циліндрів будуть відповідно рівні $M_i \Delta x_i$ і $m_i \Delta x_i$ тут $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
Зробивши такі побудови для всіх відрізків розбиття, одержимо циліндри, об'єми яких рівні відповідно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ і $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.
При прямуванні до нуля кроку розбиття λ, ці суми мають спільну границю:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x) \mathrm{d}x$$

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

Таким чином, об'єм тіла може бути знайдений за формулою:

$$\boxed{V = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}$$

Обчислення об'єму тіла за відомими площами його паралельних перетинів

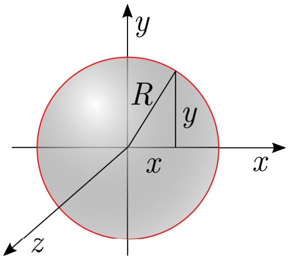
Таким чином, об'єм тіла може бути знайдений за формулою:

$$\boxed{V = \int_a^b Q(x)\mathrm{d}x}$$

Недоліком цієї формули є те, що для знаходження об'єму необхідно знати функцію $Q(x)$, що досить проблематично для складних тіл.

Приклад

Знайти об'єм кулі радіуса R.



Розв'язання

У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Розв'язання

У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$. Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Розв'язання

У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Одержуємо об'єм кулі:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x$$

Розв'язання

У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Одержуємо об'єм кулі:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}$$

Розв'язання

У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi\left(R^2 - x^2\right)$.
Одержуємо об'єм кулі:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right)$$

Розв'язання

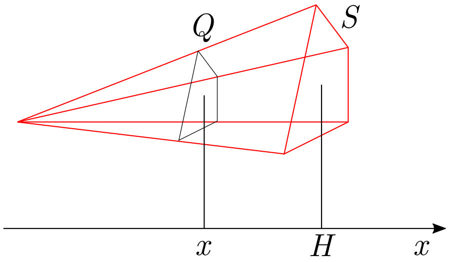
У поперечних перерізах кулі виходять кола змінного радіуса y. Залежно від поточної координати x цей радіус виражається за формулою $\sqrt{R^2 - x^2}$.
Тоді функція площ перетинів має вигляд: $Q(x) = \pi \left(R^2 - x^2\right)$.
Одержуємо об'єм кулі:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\mathrm{d}x = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi \left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Приклад

Знайти об'єм довільної піраміди з висотою H і площею основи S.



Розв'язання

При перетині піраміди площинами, перпендикулярними висоті, у перетині одержуємо фігури, подібні до основи. Коефіцієнт подібності цих фігур дорівнює відношенню x/H, де x – відстань від площини перетину до вершини піраміди.

Розв'язання

При перетині піраміди площинами, перпендикулярними висоті, у перетині одержуємо фігури, подібні до основи. Коефіцієнт подібності цих фігур дорівнює відношенню x/H, де x – відстань від площини перетину до вершини піраміди.

З геометрії відомо, що відношення площ подібних фігур дорівнює коефіцієнту подоби у квадраті, тобто

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Розв'язання

При перетині піраміди площинами, перпендикулярними висоті, у перетині одержуємо фігури, подібні до основи. Коефіцієнт подібності цих фігур дорівнює відношенню x/H, де x – відстань від площини перетину до вершини піраміди.

З геометрії відомо, що відношення площ подібних фігур дорівнює коефіцієнту подоби у квадраті, тобто

$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Звідси одержуємо функцію площ перетинів: $Q(x) = \dfrac{S}{H^2}x^2$.

Знаходимо об'єм піраміди:

$$V = \int\limits_0^H \frac{S}{H^2}x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{Sx^3}{3H^2}\right|_0^H$$

Розв'язання

При перетині піраміди площинами, перпендикулярними висоті, у перетині одержуємо фігури, подібні до основи. Коефіцієнт подібності цих фігур дорівнює відношенню x/H, де x – відстань від площини перетину до вершини піраміди.
З геометрії відомо, що відношення площ подібних фігур дорівнює коефіцієнту подоби у квадраті, тобто

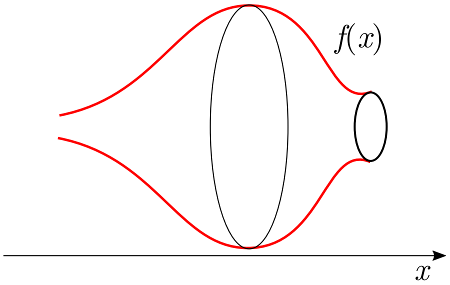
$$\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$$

Звідси одержуємо функцію площ перетинів: $Q(x) = \dfrac{S}{H^2}x^2$.
Знаходимо об'єм піраміди:

$$V = \int\limits_0^H \frac{S}{H^2}x^2\mathrm{d}x = \left.\frac{Sx^3}{3H^2}\right|_0^H = \frac{1}{3}SH$$

Об'єм тіл обертання

Розглянемо криву, задану рівнянням $y = f(x)$. Припустимо, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$. Якщо відповідну їй криволінійну трапецію з основами a і b обертати навколо осі Ox, то одержимо так зване **тіло обертання**.

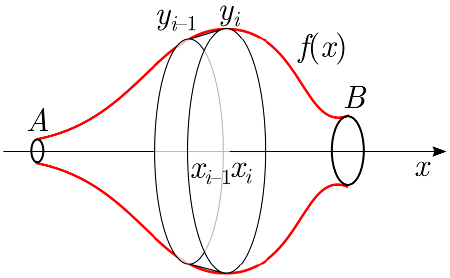


Об'єм тіл обертання

Оскільки кожний перетин тіла площиною $x = const$ являє собою коло радіуса $R = |f(x)|$, то об'єм тіла обертання може бути легко знайдений за отриманою вище формулою:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x}$$

Площа поверхні тіла обертання



<u>**Означення:**</u> **Площею поверхні обертання** кривої AB навколо даної осі називають границю, до якої прямують площі поверхонь обертання ламаних, вписаних у криву AB, при прямуванні до нуля найбільших з довжин ланок цих ламаних.

Площа поверхні тіла обертання

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$ ... Координати вершин отриманої ламаної мають координати x_i і y_i.

Площа поверхні тіла обертання

Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ ... Координати вершин отриманої ламаної мають координати x_i і y_i. При обертанні ламаної навколо осі одержимо поверхню, що складається з бічних поверхонь усічених конусів, площа яких дорівнює ΔP_i. Ця площа може бути знайдена за формулою:

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta S_i$$

Тут ΔS_i – довжина кожної хорди.

Площа поверхні тіла обертання

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$

Площа поверхні тіла обертання

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Застосовуємо теорему Лагранжа до відношення $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Площа поверхні тіла обертання

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Застосовуємо теорему Лагранжа до відношення $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Одержуємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \quad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$$

Площа поверхні тіла обертання

$$\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Застосовуємо теорему Лагранжа до відношення $\dfrac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Одержуємо:

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \quad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$$

Тоді $\Delta S_i = \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$

$$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площа поверхні тіла обертання

Площа поверхні, описаної ламаної дорівнює:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Ця сума не є інтегральною, але можна показати, що

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)} \Delta x_i$$

Площа поверхні тіла обертання

Площа поверхні, описаної ламаної дорівнює:

$$P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Ця сума не є інтегральною, але можна показати, що

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) \sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\varepsilon_i)\sqrt{1 + f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

Тоді

$$\boxed{P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\mathrm{d}x}$$