Первісна функція, невизначений інтеграл, прості способи інтегрування

Первісна функція

Означення: Функція $F(x)$ називається **первісною функцією** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Первісна функція

<u>**Означення:**</u> Функція $F(x)$ називається **первісною функцією** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Слід відзначити, що первісних для однієї і тієї ж функції може бути нескінченно багато. Вони будуть відрізнятися одна від одної на будь-яке стале число.

Первісна функція

Означення: Функція $F(x)$ називається **первісною функцією** функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо в будь-якій точці цього відрізка виконується рівність:

$$F'(x) = f(x).$$

Слід відзначити, що первісних для однієї і тієї ж функції може бути нескінченно багато. Вони будуть відрізнятися одна від одної на будь-яке стале число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Невизначений інтеграл

<u>Означення:</u> Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням:

$$F(x) + C.$$

Невизначений інтеграл

<u>**Означення:**</u> **Невизначеним інтегралом** функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням:

$$F(x) + C.$$

Записують:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Невизначений інтеграл

<u>Означення:</u> Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається сукупність первісних функцій, які визначені співвідношенням:

$$F(x) + C.$$

Записують:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Умовою існування невизначеного інтеграла на деякому відрізку є неперервність функції на цьому відрізку.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x;$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x;$
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C;$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$;
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x)+C$;
4. $\int (u+v-w)\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x - \int w\mathrm{d}x$; де u, v, w – деякі функції від x;

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + C)' = f(x)$;
2. $\mathrm{d}\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right) = f(x)\mathrm{d}x$;
3. $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C$;
4. $\int (u + v - w)\,\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x - \int w\mathrm{d}x$; де u, v, w – деякі функції від x;
5. $\int C \cdot f(x)\mathrm{d}x = C \cdot \int f(x)\mathrm{d}x$.

Приклад

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)\,\mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x - 2\int \sin x \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)\, \mathrm{d}x = \int x^2 \mathrm{d}x - 2\int \sin x \mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C$$

Таблиця елементарних інтегралів

Інтеграл		Значення	Інтеграл		Значення
1	$\int \operatorname{tg} x \mathrm{d}x$	$-\ln \mid \cos x \mid +C$	9	$\int e^x \mathrm{d}x$	$e^x + C$
2	$\int \operatorname{ctg} x \mathrm{d}x$	$\ln \mid \sin x \mid +C$	10	$\int \cos x \mathrm{d}x$	$\sin x + C$
3	$\int a^x \mathrm{d}x$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	11	$\int \sin x \mathrm{d}x$	$-\cos x + C$
4	$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$	$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$	$\operatorname{tg} x + C$
5	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2}$	$\frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} \mathrm{d}x$	$-\operatorname{ctg} x + C$
6	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln \left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$	14	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a} + C$
7	$\int x^\alpha \mathrm{d}x$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x$	$\ln \left\lvert \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right\rvert + C$
8	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$	$\ln \lvert x \rvert + C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} \mathrm{d}x$	$\ln \left\lvert \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right\rvert + C$

Безпосереднє інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування заснований на припущенні про можливе значення первісної функції з подальшою перевіркою цього значення диференціюванням. Взагалі, зазначимо, що диференціювання є потужним інструментом перевірки результатів інтегрування.

Приклад

Знайти значення інтеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Приклад

Знайти значення інтеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Розв'язання

На основі відомої формули диференціювання $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можна зробити висновок, що шуканий інтеграл дорівнює $\ln x + C$, де C – деяке стале число.

Приклад

Знайти значення інтеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Розв'язання

На основі відомої формули диференціювання $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можна зробити висновок, що шуканий інтеграл дорівнює $\ln x + C$, де C – деяке стале число.

Однак, з іншого боку $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Приклад

Знайти значення інтеграла $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Розв'язання

На основі відомої формули диференціювання $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можна зробити висновок, що шуканий інтеграл дорівнює $\ln x + C$, де C – деяке стале число.

Однак, з іншого боку $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$.

Таким чином, остаточно можна зробити висновок:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання

Перетворюємо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання

Перетворюємо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-6x+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання

Перетворюємо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-6x+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{x^2+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x - 6\int \frac{x}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання

Перетворюємо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-6x+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{x^2+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x - 6\int \frac{x}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - 6\int \frac{1}{x^2+9}\mathrm{d}x$$

Безпосереднє інтегрування з перетворенням підінтегрального виразу. Приклад

Знайти інтеграл

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x.$$

Розв'язання

Перетворюємо підінтегральний вираз:

$$\int \frac{(x-3)^2}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-6x+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{x^2+9}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x - 6\int \frac{x}{x(x^2+9)}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - 6\int \frac{1}{x^2+9}\mathrm{d}x =$$

$$= \ln|x| - 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3} + C.$$

Висновок

Метод безпосереднього інтегрування застосовний тільки для деяких досить обмежених класів функцій. Функцій, для яких можна з ходу знайти первісну, дуже мало. Тому в більшості випадків застосовуються способи, описані нижче.

Спосіб підстановки (заміни змінної)

<u>**Теорема:**</u> Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Спосіб підстановки (заміни змінної)

Теорема: Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доведення

Продиференціюємо пропоновану рівність:

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x$$

Спосіб підстановки (заміни змінної)

Теорема: Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доведення

Продиференціюємо пропоновану рівність:

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)$$

Спосіб підстановки (заміни змінної)

Теорема: Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доведення

Продиференціюємо пропоновану рівність:

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)$$

За розглянутою вище властивістю 2 невизначених інтегралів:

$$f(x)\mathrm{d}x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

що з урахуванням введених позначень і є вихідним припущенням.

Спосіб підстановки (заміни змінної)

Теорема: Якщо потрібно знайти інтеграл $\int f(x)\mathrm{d}x$, але складно відшукати первісну, то за допомогою заміни $x = \varphi(t)$ і $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$ виходить:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Доведення

Продиференціюємо пропоновану рівність:

$$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right)$$

За розглянутою вище властивістю 2 невизначених інтегралів:

$$f(x)\mathrm{d}x = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t,$$

що з урахуванням введених позначень і є вихідним припущенням.
Теорему доведено.

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 6x-5; & \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 6x-5; \quad \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}\,\mathrm{d}u$$

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 6x-5; & \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+23}$$

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 6x-5; & \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+23} =$$

$$= \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{23}} + C$$

Приклад

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}\mathrm{d}x = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 6x-5; & \mathrm{d}u = 6\mathrm{d}x; \\ x = \dfrac{u+5}{6}; & \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int \frac{14u+70-24}{u^2+23}\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{7}{3}\int \frac{u\mathrm{d}u}{u^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+23} =$$

$$= \frac{7}{6}\ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln\left|36x^2-60x+48\right| + \frac{\sqrt{23}}{3}\operatorname{arctg}\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \mathrm{d}x$.

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \mathrm{d}x$.
Розв'язання
Зробимо заміну $t = \sin x$:

$$\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}t.$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \mathrm{d}x$.

Розв’язання

Зробимо заміну $t = \sin x$:

$$\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{t} \mathrm{d}t = \int t^{1/2} \mathrm{d}t$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \mathrm{d}x$.

Розв'язання

Зробимо заміну $t = \sin x$:

$$\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{t} \mathrm{d}t = \int t^{1/2} \mathrm{d}t = \frac{2}{3} t^{3/2} + C$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \mathrm{d}x$.

Розв'язання

Зробимо заміну $t = \sin x$:

$$\mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}t.$$

$$\int \sqrt{t} \mathrm{d}t = \int t^{1/2} \mathrm{d}t = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Заміна $t = x^2 + 1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x}$.

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Заміна $t = x^2 + 1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x}$.

Одержуємо:

$$\int t^{3/2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}\mathrm{d}t$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Заміна $t = x^2 + 1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x}$.

Одержуємо:

$$\int t^{3/2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Заміна $t = x^2+1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x}$.

Одержуємо:

$$\int t^{3/2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C$$

Приклад

Знайти невизначений інтеграл $\int x(x^2+1)^{3/2}\mathrm{d}x$.

Розв'язання

Заміна $t = x^2+1; \quad \mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2x}$.

Одержуємо:

$$\int t^{3/2}\frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Інтегрування частинами

Спосіб заснований на відомій формулі похідної добутку:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

де u і v – деякі функції від x.

Інтегрування частинами

Спосіб заснований на відомій формулі похідної добутку:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

де u і v – деякі функції від x.
У диференціальній формі: $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$.

Інтегрування частинами

Спосіб заснований на відомій формулі похідної добутку:

$$(uv)' = u'v + uv',$$

де u і v – деякі функції від x.
У диференціальній формі: $\mathrm{d}(uv) = u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$.
Проінтегрувавши, одержуємо: $\int \mathrm{d}(uv) = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u$, а відповідно до наведених вище властивостей невизначеного інтеграла:

$$uv = \int u\mathrm{d}v + \int v\mathrm{d}u \text{ або } \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \mathrm{d}x \right]$$

Приклад

$$\int x^2 \sin x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x \mathrm{d}x \right] =$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x; \quad v = \sin x \end{array} \right|$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \; \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} \mathrm{d}x$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \ \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right|$$

Приклад

$$I = \int e^{2x}\cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \ \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x\right]$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \ \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x \right] =$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{2x} \sin x - 2 \left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} \mathrm{d}x \right] =$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} \mathrm{d}x = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4I$$

Приклад

$$I = \int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \cos x \ \mathrm{d}x; & v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & \mathrm{d}u = 2e^{2x}\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; & v = -\cos x; \end{array} \right| =$$

$$= e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}\mathrm{d}x\right] =$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x}\mathrm{d}x = e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4I$$

$$5I = 5\int e^{2x} \cos x \mathrm{d}x = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

Приклад

$$\boxed{\int e^{2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + s)^n}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, що входить у цю рівність, будемо брати частинами.

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}\mathrm{d}u = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s}\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}.$$

Другий інтеграл, що входить у цю рівність, будемо брати частинами.

Позначимо: $\left| \begin{array}{l} \mathrm{d}v_1 = \dfrac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad \mathrm{d}u_1 = \mathrm{d}u; \\ v_1 = \int \dfrac{u\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\dfrac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array} \right|$

Розв'язання

$$\int \frac{u^2\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Розв'язання

$$\int \frac{u^2 \mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для вихідного інтеграла одержуємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n}$$

Розв'язання

$$\int \frac{u^2 \mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для вихідного інтеграла одержуємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}}$$

Розв'язання

$$\int \frac{u^2 \mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для вихідного інтеграла одержуємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)}\int \frac{\mathrm{d}u}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Отримана формула називається **рекурентною**. Якщо застосувати її $n-1$ раз, то вийде табличний інтеграл $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+s}$.