Криволінійні інтеграли

Кусово-гладка крива

<u>Означення.</u> Крива $\vec{r}(t) = \varphi(t)\vec{i} + \psi(t)\vec{j} + \gamma(t)\vec{k}$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ називається **неперервною кусково-гладкою**, якщо функції φ, ψ і γ неперервні на відрізку $[a, b]$ і відрізок $[a, b]$ можна розбити на скінченне число часткових відрізків так, що на кожному з них функції φ, ψ і γ мають неперервні похідні, не рівні нулю одночасно.

Орієнтована крива

Якщо визначено не тільки розбиття кривої на часткові відрізки точками, але і порядок цих точок, то крива називається **орієнтованою** кривою.
Орієнтована крива називається **замкненою**, якщо значення радіус-вектора у рівнянні кривої у початковій і кінцевій точках збігаються.

$$\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$$

Інтегральна сума

У кожній точці кривої AB визначено довільну функцію $f(x, y, z)$.

Інтегральна сума

У кожній точці кривої AB визначено довільну функцію $f(x, y, z)$.
Елементарні доданки:

$$f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Інтегральна сума

У кожній точці кривої AB визначено довільну функцію $f(x, y, z)$.
Елементарні доданки:

$$f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Інтегральна сума функції $f(x, y, z)$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta s_i$$

Означення. Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття кривої на часткові відрізки існує границя інтегральних сум, то ця границя називається **криволінійним інтегралом від функції** $f(x, y, z)$ **за довжиною дуги** AB або **криволінійним інтегралом першого роду**.

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Значення криволінійного інтеграла за довжиною дуги не залежить від напрямку кривої AB.

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Сталий множник можна виносити за знак криволінійного інтеграла.

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Криволінійний інтеграл від суми функцій дорівнює сумі криволінійних інтегралів від цих функцій.

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Якщо крива AB розбита на дуги AC і CB, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int\limits_{AC} f(x,y,z)\mathrm{d}s + \int\limits_{CB} f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Якщо у точках кривої AB

$$f_1(x, y, z) \leqslant f_2(x, y, z)$$

то

$$\int\limits_{AB} f_1(x, y, z)\mathrm{d}s \leqslant \int\limits_{AB} f_2(x, y, z)\mathrm{d}s$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Справедлива нерівність:

$$\left| \int\limits_{AB} f(x,y,z)\mathrm{d}s \right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(x,y,z)|\, \mathrm{d}s$$

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Якщо $f(x, y, z) = 1$, то

$$\int\limits_{AB} \mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i = S;$$

S – довжина дуги кривої, λ – найбільша із всіх часткових дуг, на які розбивається дуга AB.

Властивості криволінійного інтеграла першого роду

Теорема про середнє.
Якщо функція $f(x, y, z)$ *неперервна на кривій* AB*, то на цій кривій існує точка* $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ *така, що*

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\mathrm{d}s = f(x_1, y_1, z_1) \cdot S$$

Зв'язок зі звичайним визначеним інтегралом

AB: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, z – неперервно диференційовані функції параметра t, причому точці A відповідає $t = \alpha$, а точці B відповідає $t = \beta$. $f(x, y, z)$ – неперервна на всій кривій AB.

Зв'язок зі звичайним визначеним інтегралом

AB: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, z – неперервно диференційовані функції параметра t, причому точці A відповідає $t = \alpha$, а точці B відповідає $t = \beta$. $f(x, y, z)$ – неперервна на всій кривій AB.
$M(x, y, z)$, довжина дуги AM:

$$s = s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Зв'язок зі звичайним визначеним інтегралом

AB: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, де функції x, y, z – неперервно диференційовані функції параметра t, причому точці A відповідає $t = \alpha$, а точці B відповідає $t = \beta$. $f(x, y, z)$ – неперервна на всій кривій AB.
$M(x, y, z)$, довжина дуги AM:

$$s = s(t) = \int\limits_{\alpha}^{t} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Довжина всієї кривої AB:

$$S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Обчислення

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x=\cos t$; $y=\sin t$; $z=t$; $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = t$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

$$\int\limits_{AB} (x^2{+}y^2{+}z^2)\mathrm{d}s$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x=\cos t;\ y=\sin t;\ z=t;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int\limits_{0}^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x=\cos t;\ y=\sin t;\ z=t;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$

$$\int\limits_{AB}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t+t^2)\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+t^2)\mathrm{d}t=$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_{AB} (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}s$ за одним витком ґвинтової лінії $x = \cos t;\ y = \sin t;\ z = t;\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

$$\int\limits_{AB} (x^2{+}y^2{+}z^2)\mathrm{d}s = \int\limits_0^{2\pi} (\cos^2 t{+}\sin^2 t{+}t^2)\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}(1{+}t^2)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi\left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right).$$

Випадок плоскої кривої

$y = \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$:

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\mathrm{d}s = \int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'^2(x)}\mathrm{d}x$$

Криволінійні інтеграли другого роду

Нехай AB – неперервна крива у просторі XYZ (або на площині XY), а точка $P(x, y, z)$ – довільна функція, визначена на цій кривій. Розіб'ємо криву точками $M(x_i, y_i, z_i)$ на скінченне число часткових дуг і розглянемо суму добутків значень функції в кожній точці на довжину відповідної часткової дуги.

$$\sum_{i=1}^{n} P(\alpha, \beta, \gamma)\Delta x_i; M(\alpha, \beta, \gamma) \in \Delta x_i$$

<u>**Означення.**</u> Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття кривої AB інтегральні суми мають скінченну границю, то ця границя називається **криволінійним інтегралом за змінною x від функції $P(x, y, z)$ за кривою AB у напрямку від A до B.**

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\alpha, \beta, \gamma)\Delta x_i$$

Інтеграли за іншими змінними

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

Інтеграли за іншими змінними

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\alpha,\beta,\gamma)\Delta y_i$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\alpha,\beta,\gamma)\Delta z_i$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Криволінійний інтеграл при зміні напрямку кривої міняє знак.

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x = -\int\limits_{BA} P(x, y, z)\mathrm{d}x$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{AB} kP(x,y,z)\mathrm{d}x = k\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x;$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{AB} \left(P_1(x,y,z) + P_2(x,y,z)\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{AB} P_1(x,y,z)\mathrm{d}x + \int\limits_{AB} P_2(x,y,z)\mathrm{d}x$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x = \int\limits_{AC} P(x, y, z)\mathrm{d}x + \int\limits_{CB} P(x, y, z)\mathrm{d}x$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Криволінійний інтеграл за замкненою кривою L (циркуляція) не залежить від вибору початкової точки, а залежить тільки від напрямку обходу кривої.

$$\oint_L P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Криволінійний інтеграл за замкненою кривою L (циркуляція) не залежить від вибору початкової точки, а залежить тільки від напрямку обходу кривої.

$$\oint_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

Напрямок обходу контуру L задається додатково. Якщо L – замкнена крива без точок самоперетину, то напрямок обходу контуру проти годинникової стрілки називається додатним.

Властивості криволінійного інтеграла другого роду

Якщо AB – крива, що лежить у площині, перпендикулярній осі Ox, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)\mathrm{d}x = 0.$$

Аналогічні співвідношення справедливі при інтегруванні за змінними y і z.

Достатні умови існування

Якщо крива AB *– кусково-гладка, а функції* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ *і* $R(x,y,z)$ *– неперервні на кривій* AB, *то криволінійні інтеграли*

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x; \quad \int\limits_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y; \quad \int\limits_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z;$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

існують.

Фізична інтерпретація

Якщо функції $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ і $R(x,y,z)$ є компонентами вектора сили, то інтеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

виражає собою роботу сили на сегменті AB кривої L.

Обчислення

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

Обчислення

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t),y(t),z(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{AB} R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} R(x(t),y(t),z(t))z'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right]\mathrm{d}t$$

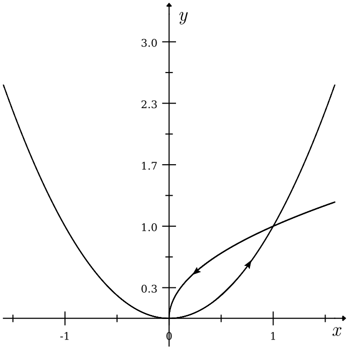
Випадок плоскої кривої

AB – плоска крива, задана рівнянням $y = f(x)$:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P\left(x, f(x)\right) + Q(x, f(x))f'(x)\right] \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y$. L – контур, обмежений параболами $y^2 = x$; $\quad x^2 = y$. Напрямок обходу контуру додатний.



Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \int\limits_{L_1} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_1} x^3 \mathrm{d}y + \int\limits_{L_2} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_2} x^3 \mathrm{d}y =$$

Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \int\limits_{L_1} x^2 y\mathrm{d}x + \int\limits_{L_1} x^3\mathrm{d}y + \int\limits_{L_2} x^2 y\mathrm{d}x + \int\limits_{L_2} x^3\mathrm{d}y =$$

$$\int\limits_0^1 x^4\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \int\limits_{L_1} x^2 y\mathrm{d}x + \int\limits_{L_1} x^3\mathrm{d}y + \int\limits_{L_2} x^2 y\mathrm{d}x + \int\limits_{L_2} x^3\mathrm{d}y =$$

$$\int\limits_0^1 x^4\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 x^2\sqrt{x}\mathrm{d}x + \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

$$= \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^5}{5}\right|_0^1 + \left.\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_1^0 + \left.\frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\right|_1^0$$

Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \int\limits_{L_1} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_1} x^3 \mathrm{d}y + \int\limits_{L_2} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_2} x^3 \mathrm{d}y =$$

$$\int\limits_0^1 x^4 \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x \mathrm{d}x + \int\limits_1^0 x^2 \sqrt{x} \mathrm{d}x + \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\bigg|_1^0 + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\bigg|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7}$$

Розв'язання

L – сума двох дуг $L_1 = x^2$ і $L_2 = \sqrt{x}$

$$\oint\limits_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \int\limits_{L_1} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_1} x^3 \mathrm{d}y + \int\limits_{L_2} x^2 y \mathrm{d}x + \int\limits_{L_2} x^3 \mathrm{d}y =$$

$$\int\limits_0^1 x^4 \mathrm{d}x + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2x \mathrm{d}x + \int\limits_1^0 x^2 \sqrt{x} \mathrm{d}x + \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

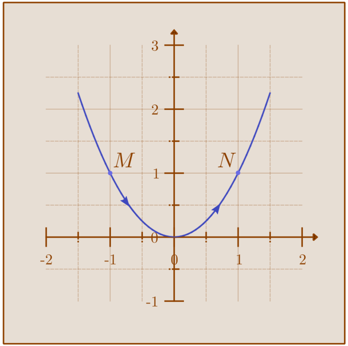
$$= \frac{x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\bigg|_0^1 + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7}\bigg|_1^0 + \frac{x^{\frac{7}{2}}}{7}\bigg|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$

Приклад

Знайти роботу сили $F = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.

Приклад

Знайти роботу сили $F = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.



Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$y = x^2; y' = 2x$$

Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$y = x^2; y' = 2x$$

$$W = \int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x + x^2) + (x - x^2) \cdot 2x\right] \mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$y = x^2; y' = 2x$$

$$W = \int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x + x^2) + (x - x^2) \cdot 2x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[x + 3x^2 - 2x^3\right] \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

$$y = x^2; y' = 2x$$

$$W = \int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x + x^2) + (x - x^2) \cdot 2x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[x + 3x^2 - 2x^3\right] \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

Розв'язання

$$\int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{x_M}^{x_N} \left[P\left(x, y(x)\right) + Q(x, y(x))y'(x)\right] \mathrm{d}x$$

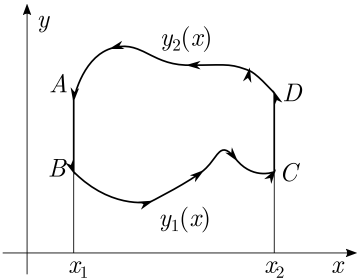
$$y = x^2; y' = 2x$$

$$W = \int\limits_{MN} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int\limits_{-1}^{1} \left[(x + x^2) + (x - x^2)\cdot 2x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \left[x + 3x^2 - 2x^3\right] \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^4}{4}\right]\Bigg|_{-1}^{1} = 2.$$

Формула Ґріна (Green)

L – замкнений контур. Обмежена ним область **однозв'язна**, тобто в ній немає виключених ділянок.



Формула Гріна (виведення)

$$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$\int_{AB} = \int_{CD} = 0$$

Формула Гріна (виведення)

$$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_1(x)\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_2}^{x_1} P\left(x, y_2(x)\right)\mathrm{d}x =$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{AB} + \int\limits_{BC} + \int\limits_{CD} + \int\limits_{DA}$$

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{CD} = 0$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int\limits_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_1(x)\right)\mathrm{d}x + \int\limits_{x_2}^{x_1} P\left(x, y_2(x)\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_1(x)\right)\mathrm{d}x - \int\limits_{x_1}^{x_2} P\left(x, y_2(x)\right)\mathrm{d}x$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right)\right)\mathrm{d}x$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right)\right) \mathrm{d}x$$

$$P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

Формула Ґріна (виведення)

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \left(P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right)\right)\mathrm{d}x$$

$$P\left(x, y_2(x)\right) - P\left(x, y_1(x)\right) = P(x,y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Формула Ґріна

Якщо ділянки AB і CD контуру прийняти за довільні криві, то, провівши аналогічні перетворення, одержимо формулу для контуру довільної форми:

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

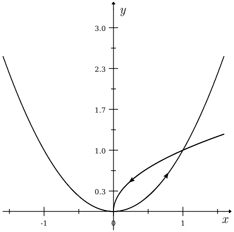
– **формула Ґріна**.

Багатозв'язні області

Формула Ґріна справедлива і у випадку багатозв'язної області, тобто області, усередині якої є виключені ділянки. У цьому випадку права частина формули буде являти собою суму інтегралів за зовнішнім контуром області і інтегралів за контурами всіх виключених ділянок, причому кожний із цих контурів інтегрується у такому напрямку, щоб область Δ увесь час залишалася ліворуч лінії обходу.

Приклад

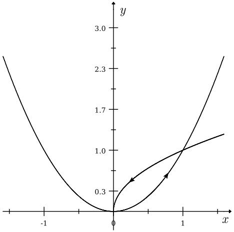
Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.



$$\oint\limits_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y$$

Приклад

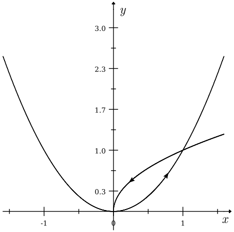
Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.



$$\oint\limits_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} \left(3x^2 - x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Приклад

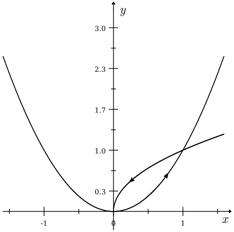
Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.



$$\oint\limits_{L} x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} \left(3x^2 - x^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Delta} 2x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Приклад

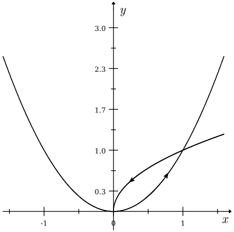
Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.



$$\oint\limits_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

Приклад

Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.

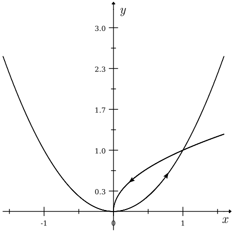


$$\oint\limits_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2 y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 2\left(x^{\frac{5}{2}} - x^4\right)\mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.

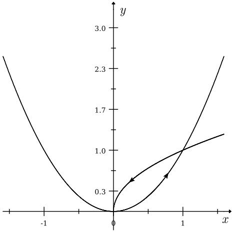


$$\oint\limits_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 2\left(x^{\frac{5}{2}} - x^4\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1$$

Приклад

Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.

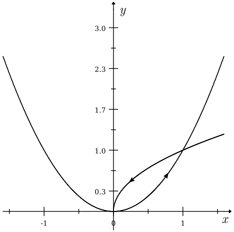


$$\oint\limits_L x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2y\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^1 2\left(x^{\frac{5}{2}} - x^4\right)\mathrm{d}x = 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right)$$

Приклад

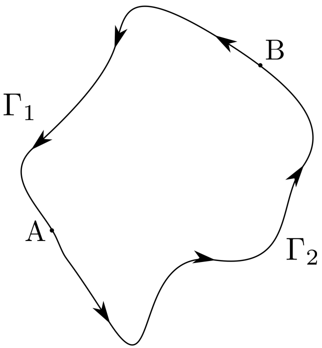
Розв'яжемо приклад, розглянутий вище, скориставшись формулою Ґріна.



$$\oint\limits_L x^2 y \mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \iint\limits_\Delta 2x^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x =$$

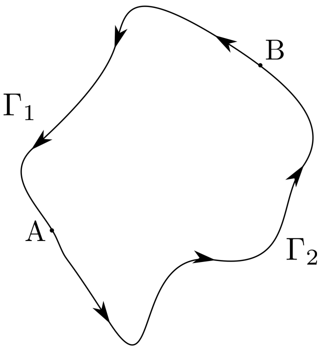
$$= \int\limits_0^1 2\left(x^{\frac{5}{2}} - x^4\right) \mathrm{d}x = 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$

Незалежність інтеграла другого роду від шляху



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Незалежність інтеграла другого роду від шляху

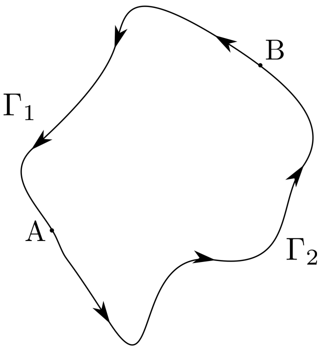


$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тобто виконується умова тотальності.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Незалежність інтеграла другого роду від шляху



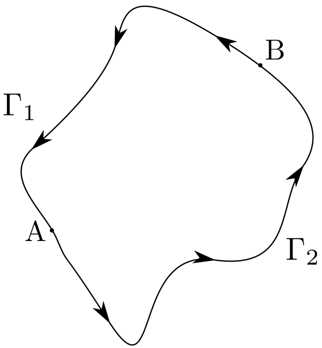
$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тобто виконується умова тотальності.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Незалежність інтеграла другого роду від шляху



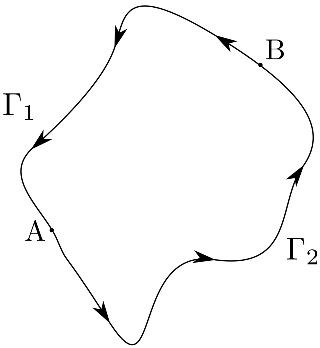
$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тобто виконується умова тотальності.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0$$

Незалежність інтеграла другого роду від шляху



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

Підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, тобто виконується умова тотальності.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\oint_{\Gamma} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_{\Delta} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{\Gamma_1} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_2} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

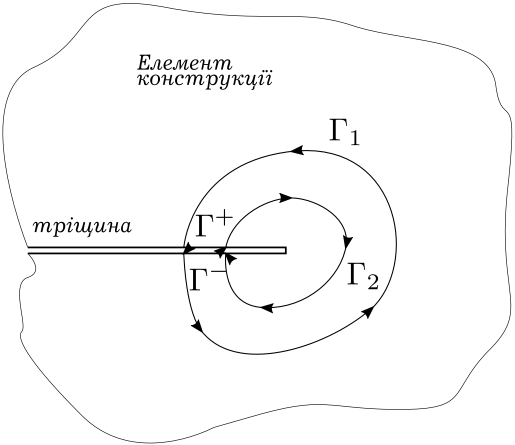
Двовимірний J-інтеграл

$$J := \int_\Gamma \left(W \ \mathrm{d}x_2 - \vec{t} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \ \mathrm{d}s \right) = \int_\Gamma \left(W \ \mathrm{d}x_2 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \ \mathrm{d}s \right)$$

де $W(x_1, x_2)$ – щільність енергії деформації, x_1, x_2 – координати, $\vec{t} = [\sigma]\vec{n}$ – вектор поверхневих напружень, $\vec{n}$ – нормаль до кривої Γ, $[\sigma]$ – тензор напружень Коші, а $\vec{u}$ – вектор переміщень. Щільність енергії деформацій визначається формулою

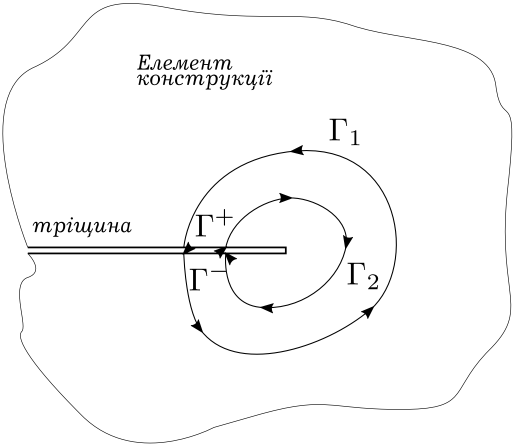
$$W = \int_0^{[\varepsilon]} [\boldsymbol{\sigma}] : \mathrm{d}[\boldsymbol{\varepsilon}]; [\boldsymbol{\varepsilon}] = \frac{1}{2} \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right].$$

J-інтеграл не залежить від шляху – критерій руйнування



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma_2 + \Gamma^-$$

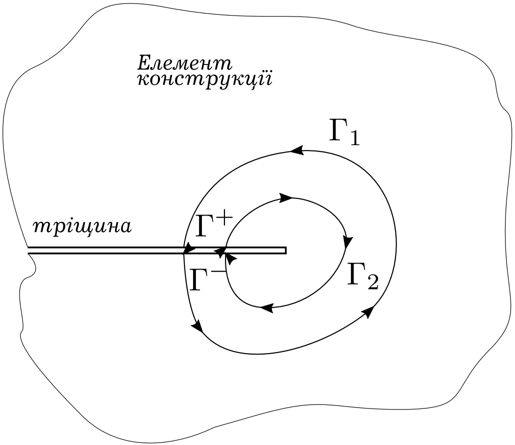
J-інтеграл не залежить від шляху – критерій руйнування



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma_2 + \Gamma^-$$

$$J = J_{(1)} + J^+ - J_{(2)} - J^- = 0$$

J-інтеграл не залежить від шляху – критерій руйнування

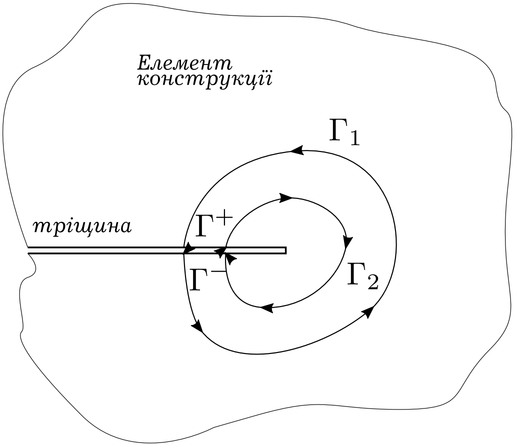


$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma_2 + \Gamma^-$$

$$J = J_{(1)} + J^+ - J_{(2)} - J^- = 0$$

$$J^+ = J^- = 0$$

J-інтеграл не залежить від шляху – критерій руйнування



$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma^+ + \Gamma_2 + \Gamma^-$$

$$J = J_{(1)} + J^+ - J_{(2)} - J^- = 0$$

$$J^+ = J^- = 0$$

$$J_{(1)} = J_{(2)}$$