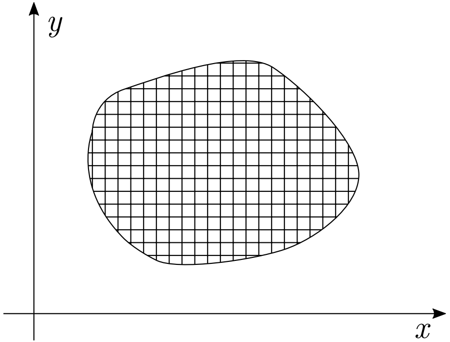
Кратні інтеграли

Внутрішня частина замкненої кривої з рівнянням $F(x, y) = 0$.



Сукупність всіх точок, що лежать усередині кривої і на самій кривій назвемо – Δ.

Подвійні інтеграли

n часткових областей
S – сума площ $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.

Подвійні інтеграли

n часткових областей
S – сума площ $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.
$P(x_i, y_i)$ – довільна точка у прямокутнику

Подвійні інтеграли

n часткових областей
S – сума площ $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.
$P(x_i, y_i)$ – довільна точка у прямокутнику
Інтегральна сума:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

де f – функція неперервна і однозначна для всіх точок області Δ.

Подвійні інтеграли

n часткових областей
S – сума площ $S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.
$P(x_i, y_i)$ – довільна точка у прямокутнику
Інтегральна сума:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i;$$

де f – функція неперервна і однозначна для всіх точок області Δ.

$$n \to \infty, S_i \to 0,$$

Подвійні інтеграли

Означення: Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття області Δ інтегральні суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ мають скінченну границю, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ за областю Δ.

Подвійні інтеграли

<u>Означення:</u> Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття області Δ інтегральні суми $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ мають скінченну границю, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ за областю Δ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_i = \iint\limits_{\Delta} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Подвійні інтеграли

Означення: Якщо при прямуванні до нуля кроку розбиття області Δ інтегральні суми $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot S_i$ мають скінченну границю, то ця границя називається **подвійним інтегралом** від функції $f(x, y)$ за областю Δ.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_i = \iint\limits_{\Delta} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \Delta x_i$$

Подвійні інтеграли

Якщо усі S_i однакові,

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{\Delta}\sum f(x,y)\Delta y \Delta x$$

Умови існування подвійного інтеграла

<u>Теорема</u> *Якщо функція* $f(x, y)$ *неперервна в замкненій області* Δ, *то подвійний інтеграл* $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}\Delta$ *існує.*

Умови існування подвійного інтеграла

<u>Теорема</u> *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області Δ, то подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}\Delta$ існує.*

<u>Теорема</u> *Якщо функція $f(x,y)$ обмежена в замкненій області Δ і неперервна в ній усюди, крім скінченного числа кусково-гладких ліній, то подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)d\Delta$ існує.*

Властивості подвійного інтеграла

$$1)\ \iint\limits_{\Delta} [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Властивості подвійного інтеграла

$$1)\ \iint\limits_{\Delta} [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$2)\ \iint\limits_{\Delta} kf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = k\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Властивості подвійного інтеграла

$$1)\ \iint\limits_{\Delta}\left[f_1(x,y)+f_2(x,y)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Delta}f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Delta}f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$2)\ \iint\limits_{\Delta}kf(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=k\iint\limits_{\Delta}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

3) Якщо $\Delta=\Delta_1+\Delta_2$, то

$$\iint\limits_{\Delta}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x=\iint\limits_{\Delta_1}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\iint\limits_{\Delta_2}f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Властивості подвійного інтеграла

4) **Теорема про середнє.** Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ дорівнює добутку значення цієї функції у деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = f(x_0, y_0) \cdot S$$

Властивості подвійного інтеграла

4) **Теорема про середнє.** Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ дорівнює добутку значення цієї функції у деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Якщо $f\,(x, y)\geqslant 0$ в області Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant 0$.

Властивості подвійного інтеграла

4) **Теорема про середнє.** Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ дорівнює добутку значення цієї функції у деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Якщо $f\,(x, y) \geqslant 0$ в області Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant 0$.

6) Якщо $f_1\,(x, y) \leqslant f_2\,(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \iint\limits_{\Delta} f_2(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Властивості подвійного інтеграла

4) **Теорема про середнє.** Подвійний інтеграл від функції $f(x, y)$ дорівнює добутку значення цієї функції у деякій точці області інтегрування на площу області інтегрування.

$$\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = f(x_0, y_0) \cdot S$$

5) Якщо $f\,(x, y) \geqslant 0$ в області Δ, то $\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \geqslant 0$.

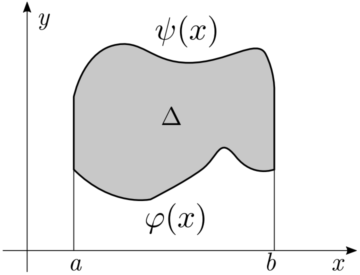
6) Якщо $f_1\,(x, y) \leqslant f_2\,(x, y)$, то $\iint\limits_{\Delta} f_1(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \iint\limits_{\Delta} f_2(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

$$7) \left|\iint\limits_{\Delta} f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| \leqslant \iint\limits_{\Delta} |f(x, y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Обчислення подвійного інтеграла

Теорема *Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій області Δ, обмеженої лініями $x=a$, $x=b$, $(a<b)$, $y=\varphi(x)$, $y=\psi(x)$, де φ і ψ – неперервні функції і $\varphi \leqslant \psi$, тоді*

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

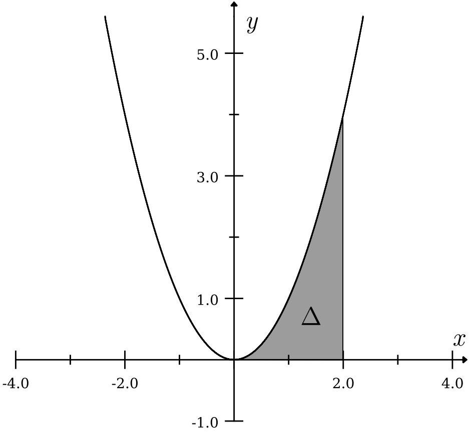


Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями: $y=0$, $y=x^2$, $x=2$.

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями: $y=0$, $y=x^2$, $x=2$.



Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{0}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{0}^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2}\right)\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 =$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}x \int\limits_0^{x^2} (x-y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \left(xy - \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^3 - \frac{x^4}{2} \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4 - 3,2 = 0,8$$

Теорема *Якщо функція* $f(x,y)$ *неперервна в замкненій області* Δ, *обмеженій лініями* $y=c$, $y=d$ $(c<d)$, $x=\Phi(y)$, $x=\Psi(y)$ $(\Phi(y)\leqslant\Psi(y))$, *то*

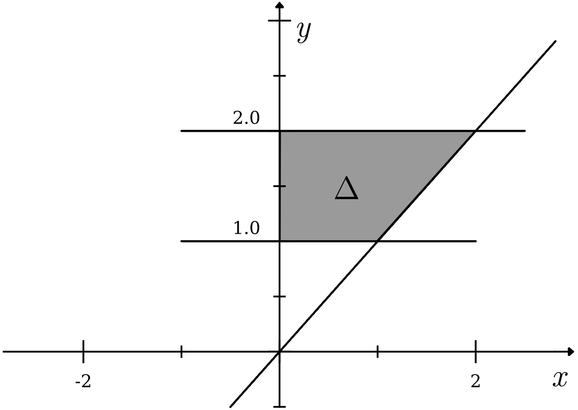
$$\iint\limits_{\Delta} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{c}^{d}\mathrm{d}y\int\limits_{\Phi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область Δ обмежена лініями $y=x$, $x=0$, $y=1$, $y=2$.



Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Розв’язання

$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}y\int\limits_{0}^{y}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x$$

Розв’язання

$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_1^2\mathrm{d}y\int\limits_0^y\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Bigg|_0^y\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^y \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{4}{3}y^3\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^y \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x\right)\Bigg|_0^y \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{4}{3} y^3 \mathrm{d}y = \frac{4}{12}\, y^4\Big|_1^2$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^y \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x\right)\Big|_0^y \mathrm{d}y$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{4}{3}y^3\mathrm{d}y = \frac{4}{12}\, y^4\Big|_1^2 = \frac{64}{12} - \frac{4}{12} = 5$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\mathrm{d}y\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\mathrm{d}y\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^3-yx^2+yx\right)\Big|_0^{y^2}\mathrm{d}y=$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\mathrm{d}y\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^3-yx^2+yx\right)\Big|_0^{y^2}\mathrm{d}y=$$

$$=\int\limits_0^2(y^6-y^5+y^3)\mathrm{d}y$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2 - 2xy + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^{y^2}(3x^2 - 2xy + y)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(x^3 - yx^2 + yx\right)\Big|_0^{y^2} \mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^2 (y^6 - y^5 + y^3)\mathrm{d}y = \left(\frac{y^7}{7} - \frac{y^6}{6} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^2$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, якщо область інтегрування Δ обмежена лініями $x=0$, $x=y^2$, $y=2$.

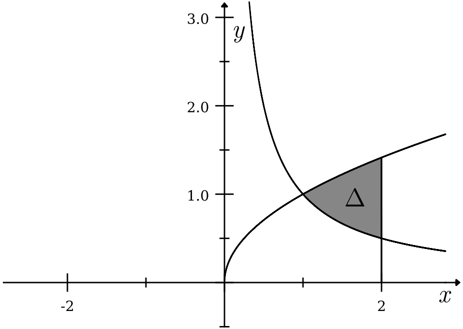
Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_0^2\mathrm{d}y\int\limits_0^{y^2}(3x^2-2xy+y)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^3-yx^2+yx\right)\Big|_0^{y^2}\mathrm{d}y=$$

$$=\int\limits_0^2(y^6-y^5+y^3)\mathrm{d}y=\left(\frac{y^7}{7}-\frac{y^6}{6}+\frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{244}{21}$$

Приклад

Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{\Delta} y \ln x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$, якщо область інтегрування обмежена лініями $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$.



Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y \ln x \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x \mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2} \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right] \mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\frac{y^2}{2}\ln x\bigg|_{1/x}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2}\left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right|$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x \mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2}\left[\frac{x\ln x}{2}-\frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u=\ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\mathrm{d}x\int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_{1}^{2}\frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{2}\left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\int\limits_{1}^{2} x\ln x\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2\left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array}\right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\int\limits_1^2 x\ln x\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2$$

Розв'язання

$$\iint\limits_{\Delta} y\ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{1/x}^{\sqrt{x}} y\ln x\mathrm{d}y = \int\limits_1^2 \frac{y^2}{2}\ln x\Big|_{1/x}^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \left[\frac{x\ln x}{2} - \frac{\ln x}{2x^2}\right]\mathrm{d}x$$

$$\int x\ln x\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & \mathrm{d}v = x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4};$$

$$\int\limits_1^2 x\ln x\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right|$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2}$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x}$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right|$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t}t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t}$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^2$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t}t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right)\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\iint\limits_{\Delta} y \ln x \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t; & x = e^t; \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\mathrm{d}x; & \end{array} \right| = \int \frac{tx\mathrm{d}t}{x^2} = \int \frac{t\mathrm{d}t}{x} = \int e^{-t} t\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = t; & \mathrm{d}u = \mathrm{d}t; \\ \mathrm{d}v = e^{-t}\mathrm{d}t; & v = -e^{-t}; \end{array} \right| = -te^{-t} + \int e^{-t}\mathrm{d}t = -te^{-t} - e^{-t} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x};$$

$$\int\limits_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2};$$

$$\iint\limits_{\Delta} y \ln x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(2\ln 2 - \frac{3}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5\ln 2}{2} - \frac{5}{4}\right) = \frac{5\ln 2}{4} - \frac{5}{8}.$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

де змінна x змінюється у межах від a до b, а змінна y – від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

де змінна x змінюється у межах від a до b, а змінна y – від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

$$x = f(u,v); y = \varphi(u,v).$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

де змінна x змінюється у межах від a до b, а змінна y – від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

$$x = f(u,v); y = \varphi(u,v).$$

Тоді

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}y = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

де змінна x змінюється у межах від a до b, а змінна y – від $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$.

$$x = f(u,v); y = \varphi(u,v).$$

Тоді

$$\mathrm{d}x = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$
$$\mathrm{d}y = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$$

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} F(x,y)\mathrm{d}y$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

У внутрішньому інтегралі x – стала $\Rightarrow \mathrm{d}x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = 0$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

У внутрішньому інтегралі x – стала $\Rightarrow \mathrm{d}x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = 0$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u} \cdot \mathrm{d}v$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

У внутрішньому інтегралі x – стала $\Rightarrow \mathrm{d}x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = 0$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u} \cdot \mathrm{d}v$$

Тоді:

$$\mathrm{d}y = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

У внутрішньому інтегралі x – стала $\Rightarrow$ $\mathrm{d}x = 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v = 0$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u} \cdot \mathrm{d}v$$

Тоді:

$$\mathrm{d}y = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial f/\partial v}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\mathrm{d}v = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial u} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial v}}{\dfrac{\partial f}{\partial u}} \cdot \mathrm{d}v$$

Визначник Якобі (Jacobian)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}=\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\end{vmatrix}=|i|$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot\frac{|i|}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{a}^{b}\mathrm{d}x \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot\frac{|i|}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v$$

Всередині $\mathrm{d}x = \dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u$ $(v = const,\ \mathrm{d}v = 0)$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot\frac{|i|}{\partial f/\partial u}\mathrm{d}v$$

Всередині $\mathrm{d}x = \dfrac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u$ $(v = const,\ \mathrm{d}v = 0)$

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}v \int\limits_{\Theta_1(v)}^{\Theta_2(v)} F\left(f(u,v),\varphi(u,v)\right)\cdot|i|\cdot\mathrm{d}u$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

Скористаємося формулою заміни змінних:

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Delta} F(f(u,v),\varphi(u,v))\,|i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$$

Подвійний інтеграл у полярних координатах

$$\iint\limits_{\Delta} F(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{\tau} F\left(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \iint\limits_{\tau} f(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

τ – нова область значень.

Потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum_V\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

V – область, обмежена поверхнею $\varphi(x,y,z)=0$.

Потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum_V\sum f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z$$

V – область, обмежена поверхнею $\varphi(x,y,z)=0$.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0 \\ \Delta z \to 0}} \sum\sum_V\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z$$

V – область, обмежена поверхнею $\varphi(x,y,z) = 0$.

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

x_1 і x_2 – сталі величини, y_1 і y_2 – можуть бути деякими функціями від x або сталими величинами, z_1 і z_2 – можуть бути функціями від x та y або сталими величинами.

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2y \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2yx^2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2y \left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2yx^2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{x^2} \right) \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2y\left(\frac{z^2}{2}\bigg|_0^{xy}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2yx^2y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4y^3\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 x^4\left(\frac{y^4}{4}\bigg|_0^{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x^4x^8}{4}\mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^4 x^8}{4} \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^{12} \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^4 x^8}{4} \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^{12} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{13} x^{13} \bigg|_0^1$$

Приклад

Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x$.

<u>*Розв'язання:*</u>

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} \int\limits_0^{xy} x^2 yz \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y \left(\frac{z^2}{2} \bigg|_0^{xy} \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^2 y x^2 y^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x =$$

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^2} x^4 y^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 x^4 \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{x^2} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{x^4 x^8}{4} \mathrm{d}x = \frac{1}{8} \int\limits_0^1 x^{12} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{13} x^{13} \bigg|_0^1 = \frac{1}{104}.$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

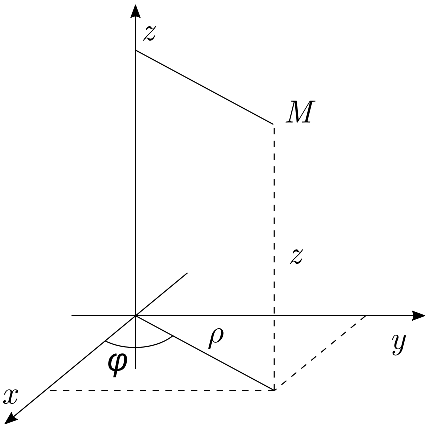
$$\iiint\limits_V F\left(x, y, z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\tau F\left(f(u, v, w), \varphi(u, v, w), \psi(u, v, w)\right) \cdot |i| \cdot \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

Заміна змінних у потрійному інтегралі

$$\iiint\limits_V F\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\tau F\left(f(u,v,w),\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w)\right)\cdot|i|\cdot\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Циліндрична система координат



Циліндрична система координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \quad z = z;$$

Якобіан (циліндрична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Якобіан (циліндрична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi$$

Якобіан (циліндрична система координат)

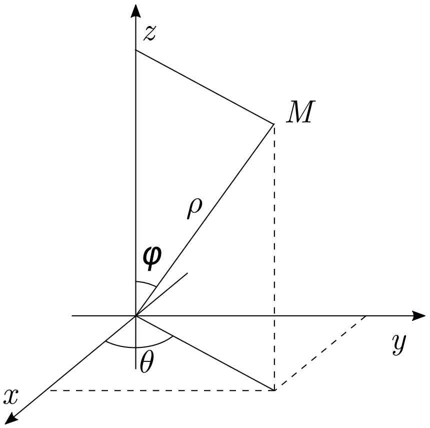
$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

Якобіан (циліндрична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$\iiint\limits_V F(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\tau F(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$$

Сферична система координат



Сферична система координат

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Якобіан (сферична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

Якобіан (сферична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right) + \rho\sin\varphi\times$$

$$\times\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) =$$

Якобіан (сферична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right) + \rho\sin\varphi\times$$

$$\times\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) =$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^3\varphi$$

Якобіан (сферична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right) + \rho\sin\varphi\times$$

$$\times\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) =$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^3\varphi = \rho^2\sin\varphi$$

Якобіан (сферична система координат)

$$|i| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \rho} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos\varphi\left(\rho^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\right) + \rho\sin\varphi\times$$

$$\times\left(\rho\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho\sin^2\varphi\sin^2\theta\right) =$$

$$= \rho^2\cos^2\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^3\varphi = \rho^2\sin\varphi$$

$$\iiint\limits_V F(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_\tau f(\rho, \varphi, \theta)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

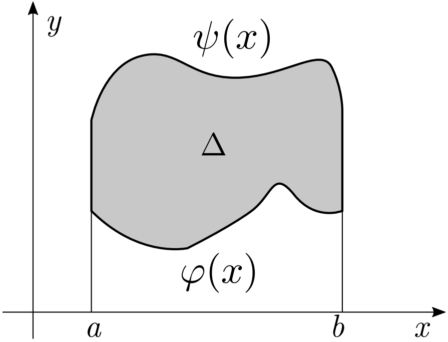
Геометричні і фізичні застосування кратних інтегралів

$$A = \iint\limits_{\Delta} a \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$A = \iint\limits_{\Delta} a \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

$$A = \iiint\limits_{\Delta} a \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

Обчислення площ у декартових координатах



Площа фігури Δ, показаної на рисунку, може бути обчислена за допомогою подвійного інтеграла за формулою:

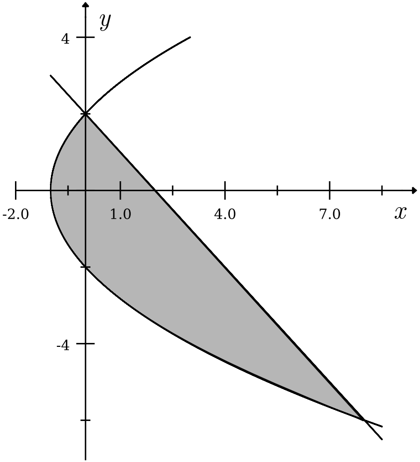
$$S = \int\limits_a^b \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.

Приклад

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$; $x + y - 2 = 0$.



Розв'язання

$$S = \int\limits_{-6}^{2} \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$S = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2 - 4}{4}\right) \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$S = \int\limits_{-6}^{2} \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4}\right) \mathrm{d}y =$$

Розв'язання

$$S = \int\limits_{-6}^{2} \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4}\right) \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{4} \int\limits_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12\right) \mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$S = \int\limits_{-6}^{2} \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4}\right) \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Bigg|_{-6}^{2} =$$

Розв'язання

$$S = \int\limits_{-6}^{2} \int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(2 - y - \frac{y^2-4}{4}\right) \mathrm{d}y = \int\limits_{-6}^{2} \left(\frac{8 - 4y - y^2 + 4}{4}\right) \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{4} \int\limits_{-6}^{2} \left(-y^2 - 4y + 12\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{4} \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{4y^2}{2} + 12y\right)\Bigg|_{-6}^{2} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(-\frac{8}{3} - 8 + 24 - \left(\frac{36 \cdot 6}{3} - \frac{4 \cdot 36}{2} - 12 \cdot 6\right)\right)$$

Розв'язання

$$S=\int\limits_{-6}^{2}\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)\mathrm{d}y=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Bigg|_{-6}^{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)$$

Розв'язання

$$S=\int\limits_{-6}^{2}\int\limits_{\frac{y^2-4}{4}}^{2-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{-6}^{2}\left(2-y-\frac{y^2-4}{4}\right)\mathrm{d}y=\int\limits_{-6}^{2}\left(\frac{8-4y-y^2+4}{4}\right)\mathrm{d}y=$$

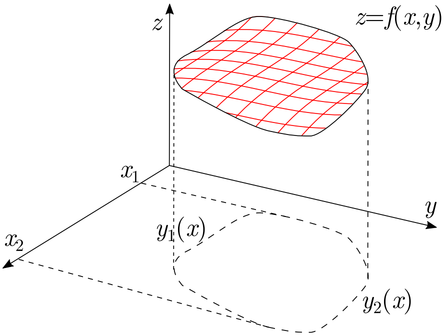
$$\frac{1}{4}\int\limits_{-6}^{2}\left(-y^2-4y+12\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}\left(-\frac{y^3}{3}-\frac{4y^2}{2}+12y\right)\Bigg|_{-6}^{2}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}-8+24-\left(\frac{36\cdot 6}{3}-\frac{4\cdot 36}{2}-12\cdot 6\right)\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)=21\frac{1}{3}$$

Обчислення площ у полярних координатах

$$S = \iint\limits_{\tau} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int\limits_{\theta_1}^{\theta_2} \int\limits_{f(\theta)}^{\varphi(\theta)} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

Циліндроїд



Обчислення об'ємів тіл

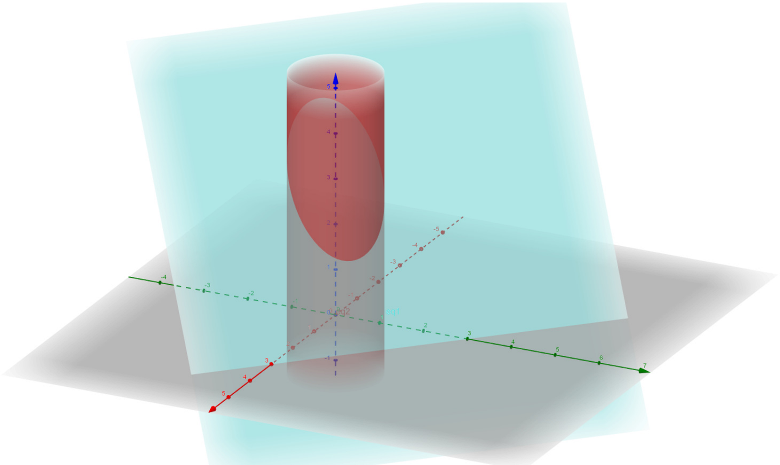
$$V = \lim_{\Delta x \to 0} \sum \sum_{\Delta} f(x, y) \Delta y \Delta x = \iint_{\Delta} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Приклад

Обчислити об'єм, обмежений поверхнями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ і площиною xOy.

Приклад

Обчислити об'єм, обмежений поверхнями: $x^2 + y^2 = 1$; $x + y + z = 3$ і площиною xOy.



Розв'язання

Межі інтегрування: за віссю Ox: $y_1 = -\sqrt{1 - x^2}; \quad y_2 = \sqrt{1 - x^2};$

Розв'язання

Межі інтегрування: за віссю Ox: $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$; $\quad y_2 = \sqrt{1-x^2}$; за віссю Oy: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

Розв'язання

Межі інтегрування: за віссю Ox: $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$; $\quad y_2 = \sqrt{1-x^2}$; за віссю Oy: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

$$V = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = 3\pi;$$

Обчислення площі кривої поверхні

Поверхня $f(x, y, z) = 0$

$$S = \iint\limits_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \mathrm{d}y \mathrm{d}x$$

Обчислення площі кривої поверхні

Поверхня $f(x, y, z) = 0$

$$S = \iint\limits_{\Delta} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Поверхня $z = \varphi(x, y)$

$$S = \iint\limits_{\Delta} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

Обчислення моментів інерції площ плоских фігур

Нехай площа плоскої фігури (область Δ) обмежена лінією, рівняння якої $f(x, y) = 0$. Тоді моменти інерції цієї фігури знаходяться за формулами:
– відносно осі Ox: $I_x = \iint\limits_{\Delta} y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$
– відносно осі Oy: $I_y = \iint\limits_{\Delta} x^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$
– відносно початку координат: $I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_{\Delta} \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ – цей момент інерції називають ще **полярним моментом інерції**

Обчислення центрів ваги площ плоских фігур

$$x_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wx\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint\limits_{\Delta} w\mathrm{d}y\mathrm{d}x}; \quad y_C = \frac{\iint\limits_{\Delta} wy\mathrm{d}y\mathrm{d}x}{\iint\limits_{\Delta} w\mathrm{d}y\mathrm{d}x};$$

тут w – поверхнева щільність ($\mathrm{d}m = w\mathrm{d}y\mathrm{d}x$ – маса елемента площі).

Обчислення об'ємів тіл за допомогою потрійного інтеграла

Поверхня $f(x, y, z) = 0$

$$V = \int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2}\int\limits_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

при цьому z_1 і z_2 – функції від x і в або постійні, y_1 і y_2 – функції від x або сталі, x_1 і x_2 – сталі.

Координати центра ваги тіла

$$x_C = \frac{\iiint\limits_V wx\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; \quad y_C = \frac{\iiint\limits_V wy\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v}; \quad z_C = \frac{\iiint\limits_V wz\mathrm{d}v}{\iiint\limits_V w\mathrm{d}v};$$

Моменти інерції тіла щодо осей координат

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) w \mathrm{d}v; \quad I_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) w \mathrm{d}v; \quad I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) w \mathrm{d}v;$$

Моменти інерції тіла щодо координатних площин

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2 w \mathrm{d}v; \quad I_{xz} = \iiint\limits_V y^2 w \mathrm{d}v; \quad I_{yz} = \iiint\limits_V x^2 w \mathrm{d}v;$$

Момент інерції тіла відносно початку координат

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) w \mathrm{d}v;$$

w – щільність тіла у точці $(x,\ y,\ z)$, $\mathrm{d}v$ – елемент об'єму

1. у декартових координатах: $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;
2. у циліндричних координатах: $\mathrm{d}v = \rho\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$;
3. у сферичних координатах: $\mathrm{d}v = \rho^2 \sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$.

Обчислення маси неоднорідного тіла

$$M = \iiint\limits_V w \mathrm{d}v;$$

Тепер щільність w – величина змінна.