Довільні числові ряди. Знакочергові ряди. Функціональні ряди

Означення

Знакочерговий ряд (*alternating series*) можна записати у вигляді:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$$

де $u_n > 0, \quad n = 1, 2, 3, ...$

Ознака Ляйбніца (The alternating series test)

Якщо в знакочерговому ряді $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + ... + (-1)^{n+1} u_n + ...$ *абсолютні величини* u_i *спадають* $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ *і загальний член прямує до нуля* $u_n \to 0$, *то ряд збігається.*

Доведення

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

Доведення

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

Доведення

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

$\{S_{2n} | n \in \mathbb{N}\}$ – монотонно зростає і обмежена $\Rightarrow$ $\{S_{2n} | n \in \mathbb{N}\}$ – збіжна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$.

Доведення

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) > 0$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - ... - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1$$

$\{S_{2n} | n \in \mathbb{N}\}$ – монотонно зростає і обмежена $\Rightarrow \{S_{2n} | n \in \mathbb{N}\}$ – збіжна $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \in \mathbb{R}$.

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

За необхідною умовою збіжності $u_n \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow$ $u_{2n+1} \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Ряд Ляйбніца (Leibniz)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Ряд Ляйбніца (Leibniz)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

Ряд Ляйбніца (Leibniz)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

Ряд Ляйбніца (Leibniz)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

$f(x)=\frac{1}{1+x}$. Розбиття $x_k=\frac{k}{n}$, $x_0=0$, $x_n=1$, $\Delta x_k=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2.$$

Приклад

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n!)^3}, \varepsilon = 0,0001.$$

Приклад

Умова:

Знайти наближено суму ряду з точністю ε.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n!)^3}, \varepsilon = 0,0001.$$

Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

Приклад

Умова:
Знайти наближено суму ряду з точністю ε.
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n!)^3}, \varepsilon = 0,0001.$
Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Приклад

Умова:
Знайти наближено суму ряду з точністю ε.
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n!)^3}, \varepsilon = 0,0001.$
Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Тому достатньо порахувати суму членів ряду, які за модулем є більшими за ε, щоб дізнатися значення суми з потрібною точністю.

Приклад

Умова:
Знайти наближено суму ряду з точністю ε.
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n!)^3}, \varepsilon = 0,0001.$
Розв'язання: Ряд є збіжним знакочерговим.

$$|S - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{(k+1)}u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$$

Тому достатньо порахувати суму членів ряду, які за модулем є більшими за ε, щоб дізнатися значення суми з потрібною точністю.

$$u_1 = \frac{2^1}{(1!)^3} = 2; u_2 = \frac{2^2}{(2!)^3} = \frac{1}{2}; u_3 = \frac{2^3}{(3!)^3} = \frac{1}{27} \approx 0,037;$$

$$u_4 = \frac{2^4}{(4!)^3} = \frac{1}{864} \approx 0,00116; u_5 = \frac{2^5}{(5!)^3} = \frac{1}{54000} \approx 0,00002;$$

$$S \approx -2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \frac{1}{864} \approx -1,5359$$

Абсолютна і умовна збіжність рядів

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

Абсолютна і умовна збіжність рядів

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Абсолютна і умовна збіжність рядів

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

$$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ... = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \tag{2}$$

Теорема. *Зі збіжності ряду* (2) *випливає збіжність ряду* (1).

Доведення

(2) збігається $\Rightarrow$ за критерієм Коші –
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

Доведення

(2) збігається $\Rightarrow$ за критерієм Коші –
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

З нерівності трикутника:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$$

Доведення

(2) збігається $\Rightarrow$ за критерієм Коші –
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

З нерівності трикутника:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + ... + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + ... + u_{n+p}| < \varepsilon$$

Тобто за критерієм Коші зі збіжності ряду (2) виливає збіжність ряду (1).

<u>**Означення.**</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Абсолютна і умовна збіжність рядів

<u>Означення.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Очевидно, що для знакосталих рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності збігаються.

Абсолютна і умовна збіжність рядів

<u>Означення.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$.

Очевидно, що для знакосталих рядів поняття збіжності і абсолютної збіжності збігаються.

<u>Означення.</u> Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається **умовно збіжним**, якщо він збігається, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ розбіжний.

Приклад

Умова: Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}.$

Приклад

Умова: Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Розв'язання:
Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$ – розбіжний узагальнений гармонійний

Приклад

Умова: Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Розв'язання:
Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$ – розбіжний узагальнений гармонійний

Сам ряд збіжний за ознакою Ляйбніца.

Приклад

Умова: Дослідити ряд на абсолютну та умовну збіжність.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
Розв'язання:
Спочатку ряд із модулів:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$ – розбіжний узагальнений гармонійний

Сам ряд збіжний за ознакою Ляйбніца.
Висновок: Ряд умовно збіжний.

Ознаки д'Аламбера і Коші для знакозмінних рядів

Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд.

Ознаки д'Аламбера і Коші для знакозмінних рядів

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд.

<u>**Ознака д'Аламбера.**</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ буде абсолютно збіжним, а при $\rho > 1$ ряд буде розбіжним. При $\rho = 1$ ознака не дає відповіді про збіжність ряду.

Ознаки д'Аламбера і Коші для знакозмінних рядів

Нехай $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ – знакозмінний ряд.

<u>Ознака д'Аламбера.</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ буде абсолютно збіжним, а при $\rho > 1$ ряд буде розбіжним. При $\rho = 1$ ознака не дає відповіді про збіжність ряду.

<u>Ознака Коші.</u> Якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ буде абсолютно збіжним, а при $\rho > 1$ ряд буде розбіжним. При $\rho = 1$ ознака не дає відповіді про збіжність ряду.

Властивості абсолютно збіжних рядів

Теорема. *Для абсолютної збіжності ряду* $\sum u_n$ *необхідно і достатньо, щоб його можна було представити у вигляді різниці двох збіжних рядів з невід'ємними членами.*

Властивості абсолютно збіжних рядів

Теорема. *Для абсолютної збіжності ряду* $\sum u_n$ *необхідно і достатньо, щоб його можна було представити у вигляді різниці двох збіжних рядів з невід'ємними членами.*

Наслідок. Умовно збіжний ряд є різницею двох розбіжних рядів з невід'ємними членами, що прямують до нуля.

Властивості абсолютно збіжних рядів

У збіжному ряді будь-яке групування членів ряду, що не змінює їхнього порядку, зберігає збіжність і величину ряду.

Властивості абсолютно збіжних рядів

Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збігається і має ту ж суму.

Властивості абсолютно збіжних рядів

Якщо ряд збігається абсолютно, то ряд, отриманий з нього будь-якою перестановкою членів, також абсолютно збігається і має ту ж суму.
Перестановкою членів умовно збіжного ряду можна одержати умовно збіжний ряд, що має кожну наперед задану суму, і навіть розбіжний ряд (Теорема Рімана (Riemann)).

Приклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Приклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Переставляємо члени:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Приклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Переставляємо члени:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} =$$

Приклад

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Переставляємо члени:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$S_{3n} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n} \to$$

$$\to \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2, \qquad n \to \infty.$$

Властивості абсолютно збіжних рядів

<u>**Теорема.**</u> *При будь-якому групуванні членів абсолютно збіжного ряду (при цьому число груп може бути як скінченним, так і нескінченним і число членів у групі може бути як скінченним, так і нескінченним) виходить збіжний ряд, сума якого дорівнює сумі вихідного ряду.*

Властивості абсолютно збіжних рядів

Якщо ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ й $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ збіжні абсолютно і їх суми рівні відповідно S і σ, то ряд, складений із всіх добутків типу $u_i v_k$, $i, k = 1, 2, ...$ взятих у якому завгодно порядку, також збігається абсолютно і його сума дорівнює $S \cdot \sigma$ – добутку сум рядів, що перемножують.

Функціональні послідовності

$$\{f_n(x)|n \in \mathbb{N}\}$$

Функціональні послідовності

$$\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$$

<u>**Означення.**</u> Послідовність $\{f_n(x)\}$ **збігається** до функції $f(x)$ у точці $x \in [a, b]$, якщо
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a; b] \exists N = N(\varepsilon, x), \forall n > N$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Функціональні послідовності

$$\{f_n(x)|n \in \mathbb{N}\}$$

<u>**Означення.**</u> Послідовність $\{f_n(x)\}$ **збігається** до функції $f(x)$ у точці $x \in [a, b]$, якщо
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a; b] \exists N = N(\varepsilon, x), \forall n > N$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

Рівномірна збіжність

<u>Означення.</u> Послідовність $\{f_n(x)\}$ **рівномірно збігається** до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a; b] \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in [a, b]$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

Рівномірна збіжність

<u>Означення.</u> Послідовність $\{f_n(x)\}$ **рівномірно збігається** до функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо
$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [a; b] \exists N = N(\varepsilon), \forall n > N, \forall x \in [a, b]$:

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x), n \to \infty, x \in [a; b]$$

Приклад

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, ..., \frac{\sin nx}{n}, ...$$

Приклад

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, ..., \frac{\sin nx}{n}, ...$$

Збігається на всій числовій осі до функції $f(x) = 0$:

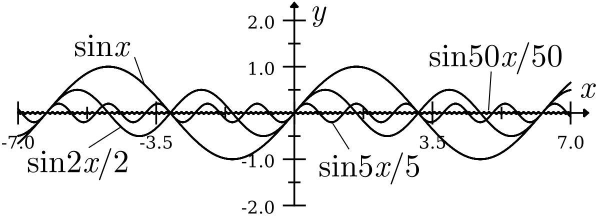
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Приклад

$$\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, ..., \frac{\sin nx}{n}, ...$$

Збігається на всій числовій осі до функції $f(x) = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$



Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – функціональний ряд}$$

Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – функціональний ряд}$$

<u>**Означення.**</u> $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, ...$ – **часткові** (**частинні**) **суми** функціонального ряду.

Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – функціональний ряд}$$

<u>Означення.</u> $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, ...$ – **часткові** (**частинні**) **суми** функціонального ряду.

<u>Означення.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – **збіжний** у точці $(x = x_0)$, якщо у цій точці збігається послідовність його частинних сум.

Границя послідовності $\{S_n(x_0)\}$ – **сума** ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ у точці x_0.

Функціональні ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ – функціональний ряд}$$

<u>Означення.</u> $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ – **часткові** (**частинні**) **суми** функціонального ряду.

<u>Означення.</u> $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – **збіжний** у точці $(x = x_0)$, якщо у цій точці збігається послідовність його частинних сум.

Границя послідовності $\{S_n(x_0)\}$ – **сума** ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ у точці x_0.

<u>Означення.</u> Сукупність всіх x, для яких збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ – **область збіжності** ряду.

Означення. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **рівномірно збіжний** на відрізку $[a, b]$, якщо $S_n \rightrightarrows S(x)$, $n \to \infty$, $x \in [a; b]$.

Критерій Коші рівномірної збіжності ряду

Для рівномірної збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *необхідно і достатньо, щоб для будь-якого числа* $\varepsilon > 0$ *існував такий номер* $N(\varepsilon)$, *що при* $n > N$ *і будь-якому цілому* $p > 0$ *нерівність*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + ... + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

виконувалася б для всіх x *на відрізку* $[a, b]$.

Ознака рівномірної збіжності Веєрштраса (Weierstraß)

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається рівномірно і при тому абсолютно на відрізку $[a, b]$, якщо

$$|u_n(x)| \leqslant M_n,$$

де

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \text{ — збіжний ряд}$$

Приклад

Умова:

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^3}$.

Приклад

Умова:

Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.

Розв'язання

На відрізку $[-1, 1]$ виконується нерівність

$$\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

Приклад

Умова:
Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$.
Розв'язання
На відрізку $[-1,1]$ виконується нерівність

$$\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – збіжний узагальнений гармонійний ряд.

Приклад

Умова:
Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$.
Розв'язання
На відрізку $[-1, 1]$ виконується нерівність

$$\left|\frac{x^n}{n^3}\right| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ – збіжний узагальнений гармонійний ряд.}$$

За ознакою Веєрштраса на цьому відрізку досліджуваний ряд збігається, а на інтервалах $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ розбіжний.

Теорема про неперервність суми ряду

Якщо члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *– неперервні на відрізку* $[a,b]$ *функції і ряд збігається рівномірно, то і його сума* $S(x)$ *є неперервна функція на відрізку* $[a,b]$.

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0), x_0\in[a;b]$$

Теорема про почленне інтегрування ряду

Рівномірно збіжний на відрізку $[a, b]$ *ряд з неперервними членами можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто ряд, складений з інтегралів від його членів за відрізком* $[a, b]$*, збігається до інтеграла від суми ряду за цим відрізком.*

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) \mathrm{d}x; \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

Теорема про почленне диференціювання ряду

Якщо члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *збіжного на відрізку* $[a, b]$ *являють собою неперервні функції, що мають неперервні похідні, і ряд, складений із цих похідних* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *збігається на цьому відрізку рівномірно, то і даний ряд збігається рівномірно і його можна диференціювати почленно.*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}$$