Зведення інтегралів різних типів до інтегралів від раціональної функції (продовження). Інтеграли, які не може бути виражено в елементарних функціях

Інтегрування біноміальних диференціалів

Означення: **Біноміальним диференціалом** називається вираз $x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x$, де m, n і p – раціональні числа.

Інтегрування біноміальних диференціалів

Означення: **Біноміальним диференціалом** називається вираз $x^m (a + bx^n)^p \, \mathrm{d}x$, де m, n і p – раціональні числа.
Може бути виражений через елементарні функції тільки у наступних трьох випадках:

1. Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, де λ – спільний знаменник m і n.

Інтегрування біноміальних диференціалів

<u>Означення:</u> Біноміальним диференціалом називається вираз $x^m (a + bx^n)^p \,\mathrm{d}x$, де m, n і p – раціональні числа.
Може бути виражений через елементарні функції тільки у наступних трьох випадках:

1. Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, де λ – спільний знаменник m і n.
2. Якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$, де s – знаменник числа p.

Інтегрування біноміальних диференціалів

<u>Означення:</u> Біноміальним диференціалом називається вираз $x^m (a+bx^n)^p \, \mathrm{d}x$, де m, n і p – раціональні числа.
Може бути виражений через елементарні функції тільки у наступних трьох випадках:

1. Якщо p – ціле число, то інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, де λ – спільний знаменник m і n.
2. Якщо $\dfrac{m+1}{n}$ – ціле число, то інтеграл раціоналізується підстановкою $t = \sqrt[s]{a+bx^n}$, де s – знаменник числа p.
3. Якщо $\dfrac{m+1}{n} + p$ – ціле число, то використовується підстановка $t = \sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, де s – знаменник числа p

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)^{\frac{1}{3}} \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array}\right|$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array} \right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array} \right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow t^3=1+x^{\frac{1}{4}}$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array} \right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow t^3 = 1+x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^4$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array}\right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow t^3=1+x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^4 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=\left(t^3-1\right)^{-2}$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow t^3 = 1+x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^4 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}} = \left(t^3-1\right)^{-2}$$

$$\mathrm{d}x = 4\left(t^3-1\right)^3 \cdot 3t^2\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} m=-\frac{1}{2}; n=\frac{1}{4}; p=\frac{1}{3}; a=1; b=1 \\ \frac{m+1}{n}=\frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}}=2\in\mathbb{Z} \end{array} \right|$$

$$t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}} \Rightarrow t^3 = 1+x^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^4 \Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=\left(t^3-1\right)^{-2}$$

$$\mathrm{d}x = 4\left(t^3-1\right)^3\cdot 3t^2\mathrm{d}t = 12t^2\left(t^3-1\right)^3\mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(t^3-1\right)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3\mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(t^3-1\right)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 \left(t^3-1\right)^3 \mathrm{d}t = \int 12t^3 \left(t^3-1\right) \mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(t^3-1\right)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3\mathrm{d}t = \int 12t^3\left(t^3-1\right)\mathrm{d}t =$$

Розв'язання

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(t^3-1\right)^{-2}\cdot t\cdot 12t^2\left(t^3-1\right)^3\mathrm{d}t = \int 12t^3\left(t^3-1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C$$

Розв'язання

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int \left(t^3-1\right)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 \left(t^3-1\right)^3 \mathrm{d}t = \int 12t^3 \left(t^3-1\right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{12}{7}t^7 - 3t^4 + C = \frac{12}{7}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}} - 3\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} + C$$

Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$

Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$

Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від типу виразу, що стоїть під знаком радикала, переважно застосовувати той або інший спосіб.

Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x$

Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від типу виразу, що стоїть під знаком радикала, переважно застосовувати той або інший спосіб.

Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути зведений до вигляду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Інтеграли типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) \mathrm{d}x$

Існує кілька способів інтегрування такого роду функцій. Залежно від типу виразу, що стоїть під знаком радикала, переважно застосовувати той або інший спосіб.
Як відомо, квадратний тричлен шляхом виділення повного квадрата може бути зведений до вигляду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким чином, інтеграл приводиться до одного з трьох типів:

1. $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du;$
2. $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du;$
3. $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$

1 спосіб. Тригонометрична підстановка

Теорема: Інтеграл типу $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ підстановкою $u = m\sin t$ або $u = m\cos t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos t\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t; \\ \mathrm{d}x = a\cos t\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}a\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int a^2\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

1 спосіб. Тригонометрична підстановка

<u>**Теорема:**</u> Інтеграл типу $\int R(u, \sqrt{m^2+u^2})\mathrm{d}u$ підстановкою $u = m\operatorname{tg} t$ або $u = m\operatorname{ctg} t$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ і $\cos t$.

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t; \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \;\; a^4\,\mathrm{tg}^4\,t \cdot a}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t; \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \;\; a^4\,\mathrm{tg}^4\,t\cdot a} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 t\mathrm{d}t}{a^4\sin^4 t}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t; \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \;\; a^4\,\mathrm{tg}^4\, t\cdot a} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 t\mathrm{d}t}{a^4 \sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\,\mathrm{tg}\,t; \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \;\; a^4\,\mathrm{tg}^4\, t\cdot a} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 t\mathrm{d}t}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{a^2+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\operatorname{tg} t; \mathrm{d}x = \dfrac{a}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{a^2+x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \;\; a^4\operatorname{tg}^4 t \cdot a} =$$

$$= \int \frac{\cos^3 t\mathrm{d}t}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1-\sin^2 t)\mathrm{d}\sin t}{\sin^4 t} = -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C =$$

$$= \left| \sin t = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right| = -\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x} + C$$

1 спосіб. Тригонометрична підстановка

<u>**Теорема:**</u> Інтеграл типу $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})\mathrm{d}u$ підстановкою $u = \dfrac{1}{\sin t}$ або $u = \dfrac{1}{\cos t}$ зводиться до інтеграла від раціональної функції відносно $\sin t$ або $\cos t$.

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t};\, \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t \cos t \mathrm{d}t}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 \operatorname{tg}^5 t}$$

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5\operatorname{tg}^5 t} =$$

$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^4 t\mathrm{d}t$$

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 \operatorname{tg}^5 t} =$$

$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^4 t\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t$$

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\,t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5\,\mathrm{tg}^5\,t} =$$

$$= \frac{1}{32}\int \mathrm{ctg}^4\,t\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int \mathrm{ctg}^2\,t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{32}\int \mathrm{ctg}^2\,t\mathrm{d}(\mathrm{ctg}\,t) - \frac{1}{32}\int \mathrm{ctg}^2\,t\mathrm{d}t$$

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 \operatorname{tg}^5 t} =$$

$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^4 t\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{32}\int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{32}\operatorname{ctg} t + \frac{t}{32} + C = \left|\operatorname{ctg} t = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right|$$

Приклад:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2-4)^{5/2}} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{\cos t}; \mathrm{d}x = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}t; \\ \sqrt{x^2-4} = 2\operatorname{tg} t; \end{array} \right| = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5\operatorname{tg}^5 t} =$$

$$= \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^4 t\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}(\operatorname{ctg} t) - \frac{1}{32}\int \operatorname{ctg}^2 t\mathrm{d}t = -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t - \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{96}\operatorname{ctg}^3 t + \frac{1}{32}\operatorname{ctg} t + \frac{t}{32} + C = \left|\operatorname{ctg} t = \frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right| =$$

$$= -\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C$$

2 спосіб. Підстановки Ейлера

1. Якщо $a > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

2 спосіб. Підстановки Ейлера

1. Якщо $a > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

2. Якщо $a < 0$ і $c > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

2 спосіб. Підстановки Ейлера

1. Якщо $a > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою
$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}.$$

2. Якщо $a < 0$ і $c > 0$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.
3. Якщо $a < 0$, а підкореневий вираз розкладається на дійсні множники $a(x - x_1)(x - x_2)$, то інтеграл типу $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\mathrm{d}x$ раціоналізується підстановкою $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$.

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2-2tx+x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t-x; x^2+x+1 = t^2-2tx+x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2-2tx+x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$t^2+t+1 = A\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + Bt\left(t+\frac{1}{2}\right) + Ct$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (t^2)1 = A + B \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$t^2+t+1 = A\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + Bt\left(t+\frac{1}{2}\right) + Ct$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (t^2) 1 = A + B \\ (t=0) 1 = \frac{1}{4}A \\ \end{array} \right.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2+x+1} = t - x; x^2+x+1 = t^2 - 2tx + x^2 \\ x = \frac{t^2-1}{1+2t}; \mathrm{d}x = \frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2t^2+2t+2}{t(1+2t)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2}\mathrm{d}t$$

$$\frac{t^2+t+1}{t(t+\frac{1}{2})^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+\frac{1}{2}} + \frac{C}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$t^2+t+1 = A\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + Bt\left(t+\frac{1}{2}\right) + Ct$$

$$\begin{cases} (t^2)1 = A + B \\ (t=0)1 = \frac{1}{4}A \\ \left(t=-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = -\frac{C}{2} \end{cases}$$

Розв'язання

$$A = 4; B = -3; C = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{t + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$A = 4; B = -3; C = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{t + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln \left| t + \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)} + C$$

Розв'язання

$$A = 4; B = -3; C = -\frac{3}{2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{4}{t} - \frac{3}{t + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= 2 \ln |t| - \frac{3}{2} \ln \left| t + \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{2\left(t + \frac{1}{2}\right)} + C =$$

$$= 2 \ln |x + \sqrt{x^2 + x + 1}| - \frac{3}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \right| + \frac{3}{2\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2}\right)} + C$$

3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Розгляньмо інтеграли наступних трьох типів:

$$I.\ \int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$II.\ \int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x;$$

$$III.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

де $P(x)$ – многочлен, n – натуральне число.

3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Розгляньмо інтеграли наступних трьох типів:

$$I.\ \int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$II.\ \int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x;$$

$$III.\ \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

де $P(x)$ – многочлен, n – натуральне число.
Причому інтеграли II і III типів можуть бути легко зведені до типу інтеграла I типу.

3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Розгляньмо інтеграли наступних трьох типів:

$$I. \int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$$II. \int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x;$$

$$III. \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

де $P(x)$ – многочлен, n – натуральне число.
Причому інтеграли II і III типів можуть бути легко зведені до типу інтеграла I типу.

$$\int \frac{P(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

$Q(x)$ – деякий многочлен, степінь якого нижче степеня многочлена $P(x)$, а λ – деяка стала величина.

3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $Q(x)$, степінь якого нижче степеня многочлена $P(x)$, диференціюють обидві частини отриманого виразу, потім множать на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ й, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, визначають λ і коефіцієнти многочлена $Q(x)$.

3 спосіб. Метод невизначених коефіцієнтів

Для знаходження невизначених коефіцієнтів многочлена $Q(x)$, степінь якого нижче степеня многочлена $P(x)$, диференціюють обидві частини отриманого виразу, потім множать на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ й, порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, визначають λ і коефіцієнти многочлена $Q(x)$.
Даний метод вигідно застосовувати, якщо степінь многочлена $P(x)$ більше одиниці. У інших випадках можна успішно використати методи інтегрування раціональних дробів, розглянуті вище, оскільки лінійна функція є похідною підкореневого виразу.

Приклад

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Приклад

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Тепер продиференціюємо отриманий вираз, помножимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

Приклад

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Тепер продиференціюємо отриманий вираз, помножимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x - 1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

Приклад

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}\mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Тепер продиференціюємо отриманий вираз, помножимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x - 1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda =$$
$$= 3x^3 - 7x^2 + 1$$

Приклад

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}.$$

Тепер продиференціюємо отриманий вираз, помножимо на $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ і згрупуємо коефіцієнти при однакових степенях x.

$$\frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = (2Ax + B)\sqrt{x^2 - 2x + 5} + \frac{Ax^2 + Bx + C}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}(x - 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}}$$

$$(2Ax + B)(x^2 - 2x + 5) + (Ax^2 + Bx + C)(x - 1) + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$2Ax^3 - 4Ax^2 + 10Ax + Bx^2 - 2Bx + 5B + Ax^3 + Bx^2 + Cx - Ax^2 - Bx - C + \lambda =$$
$$= 3x^3 - 7x^2 + 1$$

$$3Ax^3 - (5A - 2B)x^2 + (10A - 3B + C)x + 5B - C + \lambda = 3x^3 - 7x^2 + 1$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A - 2B = 7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A - 2B = 7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -13 \\ \lambda = -7 \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A - 2B = 7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -13 \\ \lambda = -7 \end{cases}$$

Разом

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} A = 1 \\ 5A - 2B = 7 \\ 10A - 3B + C = 0 \\ 5B - C + \lambda = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -13 \\ \lambda = -7 \end{cases}$$

Разом

$$\int \frac{3x^3 - 7x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} \mathrm{d}x = (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} =$$

$$= (x^2 - x - 13)\sqrt{x^2 - 2x + 5} - 7 \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + C.$$

Приклади інтегралів, що не виражаються через елементарні функції

Інтеграл типу $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) \mathrm{d}x$, де $P(x)$ – многочлен степеня вище другого.
Ці інтеграли називаються **еліптичними**
Якщо степінь многочлена $P(x)$ вище четвертого, то інтеграл називається **гіпереліптичним**
Якщо все-таки інтеграл такого типу виражається через елементарні функції, то він називається **псевдоеліптичним**

Приклади інтегралів, що не виражаються через елементарні функції

Не можуть бути виражені через елементарні функції наступні інтеграли:

1. $\int e^{-x^2}\mathrm{d}x$ – інтеграл Пуассона[1]
2. $\int \sin x^2 \mathrm{d}x$; $\int \cos x^2 \mathrm{d}x$ – інтеграли Френеля [2]
3. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ – інтегральний логарифм
4. $\int \dfrac{e^x}{x}\mathrm{d}x$ – приводиться до інтегрального логарифма
5. $\int \dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний синус
6. $\int \dfrac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ – інтегральний косинус

[1] Сімеон Дені Пуассон (Siméon Denis Poisson) (1781–1840) – французький математик.

[2] Огюстен-Жан Френель (Augustin-Jean Fresnel) (1788–1827) – французький вчений.