Зведення інтегралів різних типів до інтегралів від раціональної функції

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x \mathrm{d}x$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x \mathrm{d}x$$

Функція $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ може містити $\cos x$ тільки у парних степенях, а отже, може бути перетворена в раціональну функцію відносно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(\sin x) \cos x \mathrm{d}x$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\cos x$

Незважаючи на можливість обчислення такого інтеграла за допомогою універсальної тригонометричної підстановки, раціональніше застосувати підстановку $t = \sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x} \cos x \mathrm{d}x$$

Функція $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\cos x}$ може містити $\cos x$ тільки у парних степенях, а отже, може бути перетворена в раціональну функцію відносно $\sin x$.

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(\sin x) \cos x \mathrm{d}x = \int r(t)\mathrm{d}t.$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^3}{t^4} \mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^3}{t^4} \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} \mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^3}{t^4} \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} - 3 \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 3 \int \mathrm{d}t - \int t^2 \mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^3}{t^4} \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} - 3 \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 3 \int \mathrm{d}t - \int t^2 \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3$$

Приклад

$$\int \frac{\cos^7 x \mathrm{d}x}{\sin^4 x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \mathrm{d}t = \cos x \mathrm{d}x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{array} \right| = \int \frac{\left(1 - t^2\right)^3}{t^4} \mathrm{d}t =$$

$$= \int \frac{1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6}{t^4} \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^4} - 3 \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 3 \int \mathrm{d}t - \int t^2 \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} + \frac{3}{t} + 3t - \frac{1}{3} t^3 = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{3}{\sin x} + 3\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\sin x$

За аналогією з розглянутим вище випадком робиться підстановка $t = \cos x$.

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R є непарною відносно $\sin x$

За аналогією з розглянутим вище випадком робиться підстановка $t = \cos x$. Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(\cos x)\sin x\mathrm{d}x = -\int r(t)\mathrm{d}t.$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2} \right] \mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array}\right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]\mathrm{d}t = \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]\mathrm{d}t = \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int t\mathrm{d}t + \int 2\mathrm{d}t - 4\int \frac{t\mathrm{d}t}{t+2} - 5\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2}$$

Приклад

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ \mathrm{d}t = -\sin x \mathrm{d}x \end{array} \right| = -\int \frac{1-t^2}{2+t}\mathrm{d}t = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}\mathrm{d}t =$$

$$= \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]\mathrm{d}t = \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int t\mathrm{d}t + \int 2\mathrm{d}t - 4\int \frac{t\mathrm{d}t}{t+2} - 5\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}\mathrm{d}t =$$

Розв'язання

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right| = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} - 4\int \mathrm{d}t$$

Розв'язання

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right| = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} - 4\int \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t$$

Розв'язання

$$= \left| \begin{array}{l} \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \dfrac{t}{t+2} = \dfrac{-2}{t+2} + 1 \end{array} \right| = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{\mathrm{d}t}{t+2} - 4\int \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C$$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$

Для перетворення функції R у раціональну використається підстановка $t = \operatorname{tg} x$

Інтеграл типу $\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x$, якщо функція R парна відносно $\sin x$ і $\cos x$

Для перетворення функції R у раціональну використається підстановка $t = \operatorname{tg} x$
Тоді

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathrm{d}x = \int r(t)\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{d}t \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 6t - 16}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{d}t \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+3)^2 - 25}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 16}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\operatorname{tg} x + 3 - 5}{\operatorname{tg} x + 3 + 5}\right| + C$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\mathrm{tg}^2\, x + 6\,\mathrm{tg}\, x - 16}\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\mathrm{tg}\, x) = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\, x + 3 - 5}{\mathrm{tg}\, x + 3 + 5}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\, x - 2}{\mathrm{tg}\, x + 8}\right| + C$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

Залежно від типу добутку застосовується одна із трьох формул:

$$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right] \mathrm{d}x$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

Залежно від типу добутку застосовується одна із трьох формул:

$$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + C$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

Залежно від типу добутку застосовується одна із трьох формул:

$$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C$$

$$\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \mathrm{d}x$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

Залежно від типу добутку застосовується одна із трьох формул:

$$\int \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right] + C$$

$$\int \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right] + C$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

$$\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[- \cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \mathrm{d}x$$

Інтеграл добутку синусів і косинусів різних аргументів

$$\int \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n} \right] + C$$

Приклад

$$\int \sin 7x \sin 2x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 7x \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \cos 5x \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos 9x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 7x \sin 2x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 5x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 9x \mathrm{d}x = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$$

Приклад

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \mathrm{d}x = \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \mathrm{d}x = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \mathrm{d}x = \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin 21x \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int \sin x \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \sin 13x \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \sin 7x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x \mathrm{d}x = \int \sin 10x [\cos 7x \cos 4x] \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 11x \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \sin 10x \cos 3x \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \int \sin 21x \mathrm{d}x - \frac{1}{4} \int \sin x \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \sin 13x \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \sin 7x \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{84} \cos 21x - \frac{1}{4} \cos x - \frac{1}{52} \cos 13x - \frac{1}{28} \cos 7x + C$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\mathrm{d}x}{\sin^2 2x}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\mathrm{d}x}{\sin^2 2x} = \left| \frac{\mathrm{d}\operatorname{ctg} 2x}{\mathrm{d}x} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\mathrm{d}x}{\sin^2 2x} = \left| \frac{\mathrm{d}\operatorname{ctg} 2x}{\mathrm{d}x} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right| = -2\operatorname{ctg} 2x + C$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4} \int \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right) \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 4x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int \mathrm{d}x + \int \cos 4x \mathrm{d}x\right]$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - \cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int \mathrm{d}x + \int \cos 4x \mathrm{d}x\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C$$

Приклад

$$\int \sin^4 x \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{1}{8}\left[\int \mathrm{d}x + \int \cos 4x \mathrm{d}x\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій

Далеко не кожна ірраціональна функція може мати інтеграл, виражений елементарними функціями. Для знаходження інтеграла від ірраціональної функції слід застосувати підстановку, що дозволить перетворити функцію в раціональну, інтеграл від якої може бути знайдений, як відомо, завжди.

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n;$$

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n};$$

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \qquad \mathrm{d}x = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t;$$

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \qquad \mathrm{d}x = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int R_1\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right) \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t$$

Інтеграл типу $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x$, де n_i, m_i – натуральні числа

За допомогою підстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$, де n є найменшим спільним кратним чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ функція раціоналізується.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{dt^n - b}{a - ct^n}; \qquad \mathrm{d}x = \left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t;$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_s}{n_s}}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int R_1\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{dt^n - b}{a - ct^n}\right)' \mathrm{d}t = \int r(t)\mathrm{d}t.$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right|$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1}$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1} = -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1} = -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -2\int t\mathrm{d}t - 2\int \frac{t}{t-1}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1} = -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -2\int t\mathrm{d}t - 2\int \frac{t}{t-1}\mathrm{d}t = -t^2 - 2\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1} = -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -2\int t\mathrm{d}t - 2\int \frac{t}{t-1}\mathrm{d}t = -t^2 - 2\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C$$

Приклад

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left| \sqrt[4]{1-2x} = t; \mathrm{d}t = \frac{-2\mathrm{d}x}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-\mathrm{d}x}{2t^3} \right| =$$

$$= \int \frac{-2t^3\mathrm{d}t}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2\mathrm{d}t}{t-1} = -2\int \left(t + \frac{t}{t-1}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= -2\int t\mathrm{d}t - 2\int \frac{t}{t-1}\mathrm{d}t = -t^2 - 2\int \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array}\right|$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \sqrt[12]{x-1}=t; & x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)}$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} \sqrt[12]{x-1}=t; & x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; & \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right)$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\left(\int \left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\right)$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\left(\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\int t\mathrm{d}t - 12\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} + 12\int \mathrm{d}t - 12\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x-1 = t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\left(\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\int t\mathrm{d}t - 12\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} + 12\int\mathrm{d}t - 12\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12\,\mathrm{arctg}\,t + C$$

Приклад

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ \mathrm{d}x = 12t^{11}\mathrm{d}t; \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(t^4+t^3)12t^{11}\mathrm{d}t}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}\mathrm{d}t + \int \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\left(\int \left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t + \int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 12\int t\mathrm{d}t - 12\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2+1} + 12\int \mathrm{d}t - 12\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} =$$

$$= 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12\,\mathrm{arctg}\,t + C =$$

$$= 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1}+1) - 12\,\mathrm{arctg}\,\sqrt[12]{x-1} + C$$