Елементи теорії поля

Означення

Якщо кожній точці простору M ставиться у відповідність деяка скалярна величина U, то у такий спосіб задається **скалярне поле** $U(M)$.

Означення

Якщо кожній точці простору M ставиться у відповідність деяка скалярна величина U, то у такий спосіб задається **скалярне поле** $U(M)$.

Якщо кожній точці простору M ставиться у відповідність вектор $\vec{F}$, то задається **векторне поле** $\vec{F}(M)$.

Поверхневий інтеграл другого роду (компактна форма)

Нехай у просторі M задана поверхня Δ. Будемо вважати, що в кожній точці P визначається додатний напрямок нормалі одиничним вектором $\vec{n}(P)$.

Поверхневий інтеграл другого роду (компактна форма)

Нехай у просторі M задана поверхня Δ. Будемо вважати, що в кожній точці P визначається додатний напрямок нормалі одиничним вектором $\vec{n}(P)$.
У просторі M задамо векторне поле, поставивши у відповідність кожній точці простору вектор, визначений координатами:

$$\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

Поверхневий інтеграл другого роду (компактна форма)

Нехай у просторі M задана поверхня Δ. Будемо вважати, що в кожній точці P визначається додатний напрямок нормалі одиничним вектором $\vec{n}(P)$.
У просторі M задамо векторне поле, поставивши у відповідність кожній точці простору вектор, визначений координатами:

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

Якщо розбити якимось чином поверхню на часткові ділянки Δ_i і скласти суму $\sum_i (\vec{F}(P_i)\vec{n}(P_i))\Delta_i$, де $\vec{F} \cdot \vec{n}$ – скалярний добуток, то границя цієї суми при прямуванні до нуля площ часткових ділянок розбиття (якщо ця границя існує) буде **поверхневим інтегралом**.

$$\iint\limits_{\Delta} \vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\Delta$$

Означення

Поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\Delta} \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}\Delta$ називається **потоком векторного поля $\vec{F}$ через поверхню Δ.**
Якщо поверхня розбита на скінченне число часткових поверхонь, то потік векторного поля через всю поверхню буде дорівнює сумі потоків через часткові поверхні.
Якщо перетворити скалярний добуток у координатну форму, то одержуємо співвідношення:

$$\iint\limits_{\Delta} \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]\mathrm{d}\Delta = \iint\limits_{\Delta} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Потенційна функція

Якщо на області Δ існує функція $f(x, y, z)$, що має неперервні частинні похідні, для яких виконуються властивості:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R;$$

то таку функцію називають **потенційною функцією** або **потенціалом** вектора $\vec{F}$.

Градієнт

Тоді вектор $\vec{F}$ є **градієнтом** функції f.

$$\vec{F} = \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Потенціал

Потенціал може бути знайдений за формулою:

$$f(x,y,z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

У цій формулі x_0, y_0, z_0 – координати деякої початкової точки. У якості такої точки зручно брати початок координат.

Теорема

Для того, щоб поле вектора $\vec{F}$, заданого у деякій області, мало потенціал, необхідно і достатньо, щоб виконувалося одна із двох умов:
1) Інтеграл від вектора $\vec{F}$ за будь-яким замкненим кусково-гладким контуром, що належить області, дорівнює нулю.
2) Інтеграл за будь-яким кусково-гладким шляхом, що з'єднує дві будь-які точки поля, не залежить від шляху інтегрування.

Похідна за напрямком

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\left(\operatorname{grad} f; \vec{l}\right)}{|\vec{l}|}.$$

Приклад

Знайти $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_M$ ($\vec{n}$ – нормаль до поверхні S у точці M) за умови, що $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + xz$; $S : x^2 + y^2 - 2z = 10$; $M\,(3; 5; 12)$.

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad} u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}\, u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}\, u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} + xz\right]}{\partial x}; \frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} + xz\right]}{\partial y}; \frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} + xz\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}\,u;\vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}\,u\big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x};\frac{\partial u}{\partial y};\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+xz\right]}{\partial x};\frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+xz\right]}{\partial y};\frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}+xz\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(z-\frac{y}{x^2+y^2};\frac{x}{x^2+y^2};x\right)\Bigg|_M$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad}\, u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad}\, u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial x}; \frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial y}; \frac{\partial\left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(z - \frac{y}{x^2 + y^2}; \frac{x}{x^2 + y^2}; x\right)\Bigg|_M = \left(12 - \frac{5}{3^2 + 5^2}; \frac{3}{3^2 + 5^2}; 3\right)$$

Розв'язання

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{(\mathrm{grad} u; \vec{n})}{|\vec{n}|}.$$

$$\mathrm{grad} u|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(\frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial x}; \frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial y}; \frac{\partial \left[\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + xz\right]}{\partial z}\right)\Bigg|_M =$$

$$= \left(z - \frac{y}{x^2+y^2}; \frac{x}{x^2+y^2}; x\right)\Bigg|_M = \left(12 - \frac{5}{3^2+5^2}; \frac{3}{3^2+5^2}; 3\right) = \left(\frac{403}{34}; \frac{3}{34}; 3\right)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial y}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial z} \right)$$

Розв'язання

Якщо $S:\{(x;y;z)|F(x,y,z)=0\}$,

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x};\frac{\partial F}{\partial y};\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial(x^2+y^2-2z-10)}{\partial x};\frac{\partial(x^2+y^2-2z-10)}{\partial y};\frac{\partial(x^2+y^2-2z-10)}{\partial z}\right)=(2x;2y;-2)$$

У точці M:

$$\vec{n}=(2\cdot 3;2\cdot 5;-2)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial y}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial z}\right) = (2x; 2y; -2)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5; -2) = (6; 10; -2)$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z)|F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial y}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial z}\right) = (2x; 2y; -2)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5; -2) = (6; 10; -2)$$

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\left(\frac{403}{34}; \frac{3}{34}; 3\right) \cdot (6; 10; -2)}{\sqrt{6^2 + 10^2 + (-2)^2}}$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial x}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial y}; \frac{\partial(x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial z} \right) = (2x; 2y; -2)$$

У точці M:

$$\vec{n} = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5; -2) = (6; 10; -2)$$

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\left(\frac{403}{34}; \frac{3}{34}; 3 \right) \cdot (6; 10; -2)}{\sqrt{6^2 + 10^2 + (-2)^2}} = \frac{66}{\sqrt{140}}$$

Розв'язання

Якщо $S : \{(x; y; z) | F(x, y, z) = 0\}$,

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}; \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial (x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial x}; \frac{\partial (x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial y}; \frac{\partial (x^2 + y^2 - 2z - 10)}{\partial z} \right) = (2x; 2y; -2)$$

У точці M:

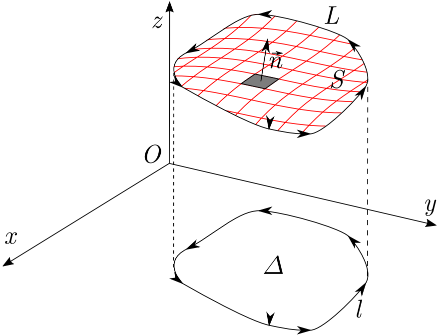
$$\vec{n} = (2 \cdot 3; 2 \cdot 5; -2) = (6; 10; -2)$$

Отже

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \frac{\left(\frac{403}{34}; \frac{3}{34}; 3 \right) \cdot (6; 10; -2)}{\sqrt{6^2 + 10^2 + (-2)^2}} = \frac{66}{\sqrt{140}} = \frac{33}{\sqrt{35}}.$$

Формула Стокса (Stokes)

Нехай у просторі задана деяка поверхня S. L – неперервний кусково-гладкий контур поверхні S.



Припустимо, що функції P, Q і R неперервні на поверхні S разом зі своїми частинними похідними першого порядку. Застосуємо формулу, що виражає криволінійний інтеграл через визначений.

Формула Стокса (Stokes)

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

Формула Стокса (Stokes)

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t =$$

Формула Стокса (Stokes)

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)\right]\mathrm{d}t =$$

Формула Стокса (Stokes)

$$\oint\limits_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left[Px'(t) + Qy'(t) + R\left(\frac{\partial z}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial z}{\partial y}y'(t)\right)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta \left\{\left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]x'(t) + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]y'(t)\right\}\mathrm{d}t = \oint\limits_L \left[P + R\frac{\partial z}{\partial x}\right]\mathrm{d}x + \left[Q + R\frac{\partial z}{\partial y}\right]\mathrm{d}y$$

Формула Стокса

З формули Ґріна:

$$\oint\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

ця формула і називається **формулою Стокса.**

Вихор (ротор), curl

Вектор $\vec{B}$, компоненти якого рівні відповідно

$$B_x = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad B_y = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad B_z = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y};$$

називається **вихором** або **ротором** вектора $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і позначається:

$$\mathrm{rot}\vec{F}$$

Оператор Гамільтона (Hamilton)

Символічний вектор $\vec{\nabla} = \left\{ \dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z} \right\} = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$ називається **оператором Гамільтона**.

Символ ∇ – «набла», штучний.

Компактна форма запису вихору

$$\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Циркуляція

Означення. Криволінійний інтеграл, що виражає собою роботу векторного поля уздовж деякої кривої L називається **лінійним інтегралом** від вектора $\vec{F}$ за орієнтованою кривою L.

$$\int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

Циркуляція

Означення. Криволінійний інтеграл, що виражає собою роботу векторного поля уздовж деякої кривої L називається **лінійним інтегралом** від вектора $\vec{F}$ за орієнтованою кривою L.

$$\int\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$$

Якщо крива L являє собою замкнений контур, то лінійний інтеграл за таким контуром називається **циркуляцією** векторного поля $\vec{F}$ уздовж контуру L.

$$\mathcal{C} = \oint\limits_L \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = \oint\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

Теорема Стокса (переформулювання)

Циркуляція вектора уздовж контуру деякої поверхні дорівнює потоку вихору (ротора) через цю поверхню.

$$\oint\limits_{\lambda} \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{\Delta} \mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} \mathrm{d}\Delta$$

Умова незалежності криволінійного інтеграла від шляху

$$\mathrm{rot}\vec{F} = 0$$

Дивергенція

<u>Означення.</u> Вираз $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ називається **дивергенцією вектора** (**дивергенцією векторної функції**) $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ і позначається

$$\mathrm{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Формула Гауса-Остроградського (компактна форма)

$$\oiint\limits_{S} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint\limits_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Формула Гауса-Остроградського (компактна форма)

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \oiint\limits_S \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}S$$

Формула Гауса-Остроградського (компактна форма)

$$\oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{F}\mathrm{d}v = \oiint\limits_S \vec{F}\vec{n}\mathrm{d}S$$

Тобто *інтеграл від дивергенції векторного поля* $\vec{F}$ *за об'ємом дорівнює потоку вектора через поверхню, обмежену цим об'ємом.*

Соленоїдальне поле

Векторне поле $\vec{F}$ називається **соленоїдальним** (**трубчастим**), якщо $\mathrm{div}\vec{F} = 0$.

Запис диференціальних операторів через оператор Гамільтона

$$\mathrm{grad} f = \vec{\nabla} f; \quad \mathrm{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \vec{F}; \quad \mathrm{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F};$$

Оператор Лапласа (Laplace)

Вираз

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

називається **оператором Лапласа.**

Гармонічні функції

$$\Delta f = 0$$

називається **рівнянням Лапласа.**

Гармонічні функції

$$\Delta f = 0$$

називається **рівнянням Лапласа.**
Його розв'язки – **гармонічні функції**.

Взаємозв'язок операторів

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f; \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \Delta f$$

Приклад

Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r}$, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$

Приклад

Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{r}$, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}.$

Розв'язання

Знайдемо скалярний добуток: $\vec{r} \cdot \vec{a} = x + y + z;$

Приклад

Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r}$, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання

Знайдемо скалярний добуток: $\vec{r}\cdot\vec{a} = x + y + z$;

$$(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r} = \{P, Q, R\} = \{x^2 + xy + xz, \quad yx + y^2 + yx, \quad xz + yz + z^2\}$$

Приклад

Знайти $\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r}$, якщо $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання

Знайдемо скалярний добуток: $\vec{r}\cdot\vec{a} = x + y + z$;

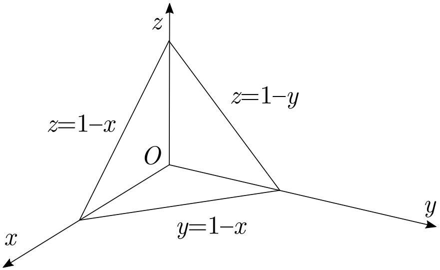
$$(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r} = \{P, Q, R\} = \{x^2 + xy + xz, \quad yx + y^2 + yx, \quad xz + yz + z^2\}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \vec{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) =$$

$$= \vec{i}(z - y) - \vec{j}(z - x) + \vec{k}(y - x)$$

Приклад

Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (y - x)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ крізь сторону трикутника S, вирізаного із площини $x + y + z - 1 = 0$ координатними площинами.



Розв'язання

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \iint\limits_S (y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-y} (y+y+z-1)\mathrm{d}z +$$

$$+\int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^{1-z} (x+1-z-x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} y\mathrm{d}y$$

Розв'язання

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \iint\limits_S (y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-y} (y+y+z-1)\mathrm{d}z +$$

$$+\int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^{1-z} (x+1-z-x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} y\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[2yz + \frac{z^2}{2} - z\right]\Big|_0^{1-y} \mathrm{d}y +$$

$$+\int\limits_0^1 \left[x - zx\right]\Big|_0^{1-z} \mathrm{d}z + \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\iint\limits_S \vec{F}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s = \iint\limits_S (y-x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \mathrm{d}y \int\limits_0^{1-y} (y+y+z-1)\mathrm{d}z +$$

$$+\int\limits_0^1 \mathrm{d}z \int\limits_0^{1-z} (x+1-z-x)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^{1-x} y\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left[2yz+\frac{z^2}{2}-z\right]\Big|_0^{1-y} \mathrm{d}y +$$

$$+\int\limits_0^1 [x-zx]|_0^{1-z}\,\mathrm{d}z + \int\limits_0^1 \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[2y-2y^2+\frac{1}{2}-y+\frac{y^2}{2}-1+y\right]\mathrm{d}y +$$

$$+\int\limits_0^1 \left[1-z-z+z^2\right]\mathrm{d}z + \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{2}-x+\frac{x^2}{2}\right]\mathrm{d}x =$$

Розв'язання

$$= \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}y + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Big|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^1 =$$

Розв'язання

$$= \int_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}y + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2}\right]\Bigg|_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

Розв'язання

$$= \int\limits_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}y + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2}\right]\Bigg|_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6}$$

Розв'язання

$$= \int\limits_0^1 \left[-\frac{3y^2}{2} + 2y - \frac{1}{2}\right] \mathrm{d}y + \left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left[-\frac{y^3}{2} + y^2 - \frac{y}{2}\right]\Bigg|_0^1 + 1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Приклад

Знайти div(grad$u$), якщо $u = e^{x+y+z}$.

Приклад

Знайти $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$, якщо $u = e^{x+y+z}$.

Розв'язання

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

Приклад

Знайти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, якщо $u = e^{x+y+z}$.

<u>*Розв'язання*</u>

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

Приклад

Знайти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$, якщо $u = e^{x+y+z}$.

<u>*Розв'язання*</u>

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z}$$

Приклад

Знайти div(grad$u$), якщо $u = e^{x+y+z}$.

Розв'язання

$$\mathrm{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad} u) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z}$$

Приклад

Знайти $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)$, якщо $u = e^{x+y+z}$.

<u>*Розв'язання*</u>

$$\mathrm{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = e^{x+y+z}\left[\vec{i} + \overleftarrow{j} + \vec{k}\right]$$

$$P = Q = R = e^{x+y+z};$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) = e^{x+y+z} + e^{x+y+z} + e^{x+y+z} = 3e^{x+y+z} = 3u.$$

Приклад

Визначити чи є векторне поле

$$\vec{F} = (5x + 6yz; \quad 5y + 6xz; \quad 5z + 6xy)$$

потенційним і знайти його потенціал.

Приклад

Визначити чи є векторне поле

$$\vec{F} = (5x + 6yz; \quad 5y + 6xz; \quad 5z + 6xy)$$

потенційним і знайти його потенціал.
<u>*Розв'язання*</u>

$$\mathrm{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = 5x + 6yz; \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 5y + 6xz; \quad R = \frac{\partial u}{\partial z} = 5z + 6xy;$$

Розв'язання

Якщо поле потенційне, то

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0$$

Розв'язання

Якщо поле потенційне, то

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

тобто

$$\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z;\\
&2)\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x;\\
&3)\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y;
\end{aligned}$$

Розв'язання

Якщо поле потенційне, то

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = 0$$

тобто

$$\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad 6z = 6z;\\
&2)\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad 6x = 6x;\\
&3)\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad 6y = 6y;
\end{aligned}$$

Таким чином, поле потенційне. Отже,

$$u = \int\limits_0^x 5x\mathrm{d}x + \int\limits_0^y 5y\mathrm{d}y + \int\limits_0^z (5z + 6xy)\mathrm{d}z = \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + \frac{5}{2}z^2 + 6xyz.$$

Функція Ейрі (Airy)

Рівняння плоскої теорії пружності для випадку без масових сил:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0;$$

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

Функція Ейрі (Airy)

Рівняння плоскої теорії пружності для випадку без масових сил:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0;$$

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

Функція Ейрі $U(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_{xx}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sigma_{yy}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\sigma_{xy},$$

Функція Ейрі (Airy)

Рівняння плоскої теорії пружності для випадку без масових сил:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0; \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0;$$

$$\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0.$$

Функція Ейрі $U(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \sigma_{xx}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \sigma_{yy}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\sigma_{xy},$$

$$\Delta^2 U = 0.$$

Рівняння Нав'є-Стокса (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

де $\vec{v}$ – швидкість, t – час, ρ – густина, p – тиск, $\vec{F}$ – головний вектор масових сил, ν – динамічний коефіцієнт в'язкості.

Рівняння Нав'є-Стокса (Navier-Stokes)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{v},$$

де $\vec{v}$ – швидкість, t – час, ρ – густина, p – тиск, $\vec{F}$ – головний вектор масових сил, ν – динамічний коефіцієнт в'язкості.
Рівняння неперервності:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \rho\vec{v} = 0$$