Диференціальні рівняння вищих порядків. Загальні означення, прості випадки

Диференціальні рівняння вищих порядків

<u>Означення.</u> Диференціальним рівнянням порядку n називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Диференціальні рівняння вищих порядків

<u>**Означення.**</u> **Диференціальним рівнянням порядку** n називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

У деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Диференціальні рівняння вищих порядків

<u>**Означення.**</u> **Диференціальним рівнянням порядку** n називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

У деяких випадках це рівняння можна розв'язати відносно $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}).$$

Так само, як і рівняння першого порядку, рівняння вищих порядків мають нескінченну кількість розв'язків.

Початкові умови

<u>**Означення.**</u> Розв'язок $y = \varphi(x)$ задовольняє початковим умовам $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$, якщо $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$, $\ldots$, $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Задача Коші

<u>Означення.</u> Розв'язок рівняння $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$, що задовольняє початковим умовам x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$, називається **розв'язком задачі Коші.**

Теорема Коші

Теорема Коші. (Теорема про необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі Коші).
Якщо функція $(n+1)$*-ої змінної вигляду* $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ *у деякій області* D $(n+1)$*-мірного простору неперервна і має неперервні частинні похідні за* $y, y', ..., y^{(n-1)}$*, то яка б не була точка* $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$ *у цій області, існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння* $y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$*, визначений у деякому інтервалі, що містить точку* x_0*, та задовольняє початковим умовам* $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$.

Рівняння, що допускають зниження порядку

Зниження порядку диференціального рівняння – основний метод розв'язання рівнянь вищих порядків. Цей метод дає можливість порівняно легко знаходити розв'язок, однак, він застосовний далеко не до всіх рівнянь. Розглянемо випадки, коли можливе зниження порядку.

Рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$

Якщо $f(x)$ – функція неперервна на деякому проміжку $a < x < b$, то розв'язок може бути знайдено послідовним інтегруванням.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\mathrm{d}x + C_1;$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \right) \mathrm{d}x + C_2 = \int \mathrm{d}x \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 x + C_2;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}x .... \int f(x)\mathrm{d}x + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n;$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'_0 = -1$; $y''_0 = 0$.

Розв'язання

$$y'' = \int e^{2x} \mathrm{d}x + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'_0 = -1$; $y''_0 = 0$.

Розв'язання

$$y'' = \int e^{2x} \mathrm{d}x + C_1 = \frac{1}{2} e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C_1 \right) \mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y_0' = -1$; $y_0'' = 0$.

Розв'язання

$$y'' = \int e^{2x}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'_0 = -1$; $y''_0 = 0$.

Розв'язання

$$y'' = \int e^{2x}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right)\mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' = e^{2x}$ з початковими умовами $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $y'_0 = -1$; $y''_0 = 0$.

Розв'язання

$$y'' = \int e^{2x}\mathrm{d}x + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1;$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1 x + C_2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

Розв'язання

Підставимо початкові умови:

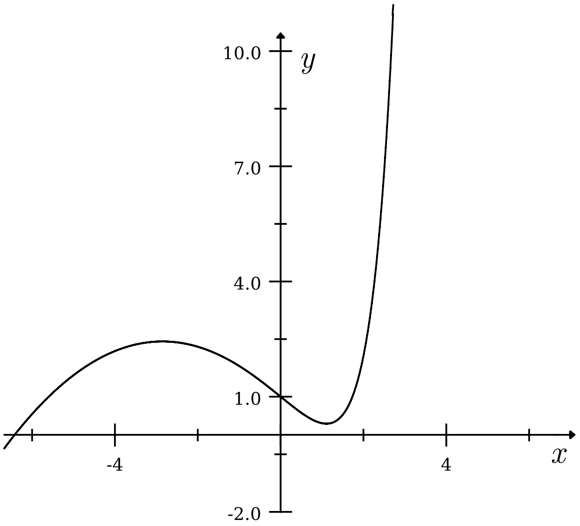
$$1 = \frac{1}{8} + C_3; \quad -1 = \frac{1}{4} + C_2; \quad 0 = \frac{1}{2} + C_1;$$

$$C_1 = -\frac{1}{2}; \quad C_2 = -\frac{5}{4}; \quad C_3 = \frac{7}{8};$$

Одержуємо частинний розв'язок (розв'язок задачі Коші):

$$y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$$

Інтегральна крива розв'язку



Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z$$

Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z$$

$$y^{(k+1)} = z'$$

Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z$$

$$y^{(k+1)} = z'$$

$$...y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

Рівняння, що не містять явно шуканої функції і її похідних до порядку $k-1$ включно

Це рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$$

У рівняннях такого типу можливе зниження порядку на k одиниць. Для цього роблять заміну змінної:

$$y^{(k)} = z$$

$$y^{(k+1)} = z'$$

$$...y^{(n)} = z^{(n-k)}$$

Тоді одержуємо:

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$$

Зворотна підстановка

Тепер припустимо, що отримане диференціальне рівняння проінтегровано і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Зворотна підстановка

Тепер припустимо, що отримане диференціальне рівняння проінтегровано і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Роблячи зворотну підстановку, маємо:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Зворотна підстановка

Тепер припустимо, що отримане диференціальне рівняння проінтегровано і сукупність його розв'язків виражається співвідношенням:

$$z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k}).$$

Роблячи зворотну підстановку, маємо:

$$y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$$

Інтегруючи отримане співвідношення послідовно k раз, одержуємо остаточну відповідь:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n).$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y''$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y'' \Rightarrow z' = y'''$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y'' \Rightarrow z' = y'''$$

$$z' = \frac{z}{x}$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y'' \Rightarrow z' = y'''$$

$$z' = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x}$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y'' \Rightarrow z' = y'''$$

$$z' = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{y''}{x}$.

Розв'язання Застосовуємо підстановку

$$z = y'' \Rightarrow z' = y'''$$

$$z' = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{\mathrm{d}x}{x};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x \mathrm{d}x = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x \mathrm{d}x = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right) \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x \mathrm{d}x = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right) \mathrm{d}x = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3$$

Розв'язання

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$$

$$z = C_1 x$$

Зробивши зворотну заміну, одержуємо:

$$y'' = C_1 x$$

$$y' = \int C_1 x \mathrm{d}x = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$$

$$y = \int \left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right) \mathrm{d}x = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3$$

Загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння:

$$y = Cx^3 + C_2 x + C_3$$

Рівняння, що не містять явно незалежної змінної (автономні)

Це рівняння типу

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Порядок таких рівнянь може бути знижений на одиницю за допомогою заміни

$$y' = p$$

Рівняння, що не містять явно незалежної змінної (автономні)

Це рівняння типу

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

Порядок таких рівнянь може бути знижений на одиницю за допомогою заміни

$$y' = p$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p;$$

$$y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}y}p = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p\right)}{\mathrm{d}y}p = \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}y^2}p^2 + \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\right)^2 p;\text{ тощо.}$$

Розв'язання

Підставляючи ці значення у вихідне диференціальне рівняння, одержуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0$$

Розв'язання

Підставляючи ці значення у вихідне диференціальне рівняння, одержуємо:

$$F_1\left(y, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}, ..., \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}y^{n-1}}\right) = 0$$

Якщо це рівняння проінтегрувати, і $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ – сукупність його розв'язків, то для розв'язання даного диференціального рівняння залишається розв'язати рівняння першого порядку:

$$\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Розв'язання

Заміна змінної:

$$p = y'$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Розв'язання

Заміна змінної:

$$p = y'$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.

Розв'язання

Заміна змінної:

$$p = y'$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 4yp = 0$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок рівняння $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0$.
Розв'язання
Заміна змінної:

$$p = y'$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 - 4yp = 0$$

$$p\left(y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y\right) = 0$$

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0$$

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 4 + \frac{p}{y}$$

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 4 + \frac{p}{y}$$

Для розв'язання отриманого диференціального рівняння зробимо заміну змінної:

$$u = \frac{p}{y}$$

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 4 + \frac{p}{y}$$

Для розв'язання отриманого диференціального рівняння зробимо заміну змінної:

$$u = \frac{p}{y}$$

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y = 4 + u$$

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p - 4y = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 4 + \frac{p}{y}$$

Для розв'язання отриманого диференціального рівняння зробимо заміну змінної:

$$u = \frac{p}{y}$$

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}y = 4 + u$$

$$\mathrm{d}u = 4\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4 \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y|$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y| \Rightarrow p = 4y\ln|C_1 y|$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y| \Rightarrow p = 4y\ln|C_1 y|$$

З врахуванням того, що $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y\ln|C_1 y|$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y| \;\Rightarrow p = 4y\ln|C_1 y|$$

З врахуванням того, що $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y\ln|C_1 y|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y\ln|C_1 y|} = \int \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y| \Rightarrow p = 4y\ln|C_1 y|$$

З врахуванням того, що $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y\ln|C_1 y|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y\ln|C_1 y|} = \int \mathrm{d}x$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln|C_1 y|\right)}{\ln|C_1 y|}$$

Розв'язання

$$\int \mathrm{d}u = 4\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow u = 4\ln|y| + 4\ln C_1$$

$$u = 4\ln|C_1 y| \;\Rightarrow p = 4y\ln|C_1 y|$$

З врахуванням того, що $p = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, одержуємо:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4y\ln|C_1 y|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y\ln|C_1 y|} = \int \mathrm{d}x$$

$$x = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(\ln|C_1 y|\right)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln|\ln|C_1 y|| + C_2$$

Розв'язання

Загальний інтеграл має вигляд:

$$\ln|\ln|C_1 y|| = 4x + C$$

Розв'язання (вироджений випадок)

$$p = 0$$

Розв'язання (вироджений випадок)

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0$$

Розв'язання (вироджений випадок)

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

Розв'язання (вироджений випадок)

$$p = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$$

Таким чином, одержали два загальних розв'язки.

<u>Означення.</u> Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається будь-яке рівняння першого степеня щодо функції y і її похідних $y', y'', ..., y^{(n)}$ вигляду:

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = f(x);$$

де p_0, p_1, $\ldots$, p_n – функції від x або сталі величини, причому $p_0 \neq 0$.

Ліва частина рівняння

Ліву частину цього рівняння позначимо $L(y)$.

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y' + p_ny = L(y);$$

Однорідні і неоднорідні рівняння

<u>Означення.</u> Якщо $f(x) = 0$, то рівняння $L(y) = 0$ називається **лінійним однорідним** рівнянням, якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається **лінійним неоднорідним** рівнянням, якщо всі коефіцієнти $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – сталі числа, то рівняння $L(y) = f(x)$ називається **лінійним диференціальним рівнянням вищого порядку зі сталими коефіцієнтами**.

Лінійні однорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

Розглянемо рівняння типу

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + ... + p_{n-1} y' + p_n y = 0$$

Лінійний диференціальний оператор

Означення. Вираз

$$p_0y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + p_2y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}y' + p_ny = L(y)$$

називається **лінійним диференціальним оператором**.

Властивості лінійного диференціального оператора

1. $$L(Cy) = CL(y)$$

2. $$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

1. Якщо функція y_1 є розв'язком рівняння, то функція Cy_1, де C – стале число, також є його розв'язком.

Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків

1. Якщо функція y_1 є розв'язком рівняння, то функція Cy_1, де C – стале число, також є його розв'язком.
2. Якщо функції y_1 і y_2 є розв'язками рівняння, то $y_1 + y_2$ також є його розв'язком.

Структура загального розв'язку. Фундаментальна система розв'язків

<ins>**Означення.**</ins> **Фундаментальною системою розв'язків** лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку на інтервалі (a, b) називається всяка система n лінійно незалежних на цьому інтервалі розв'язків рівняння.

Визначник Вронського

Означення. Якщо з функцій y_i скласти визначник n-го порядку

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

те цей визначник називається **визначником Вронського**[1].

[1]Юзеф Вронський (Józef Maria Hoene-Wroński) (1776–1853) – польський математик і філософ-містик.

Застосування визначника Вронського для перевірки лінійної незалежності

Теорема. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *лінійно залежні, то складений для них визначник Вронського дорівнює нулю.*

Застосування визначника Вронського для перевірки лінійної незалежності

Теорема. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *лінійно залежні, то складений для них визначник Вронського дорівнює нулю.*

Теорема. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *лінійно незалежні, то складений для них визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці розглянутого інтервалу.*

Застосування визначника Вронського для перевірки лінійної незалежності

Теорема. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *лінійно залежні, то складений для них визначник Вронського дорівнює нулю.*
Теорема. *Якщо функції* $y_1, y_2, ..., y_n$ *лінійно незалежні, то складений для них визначник Вронського не дорівнює нулю в жодній точці розглянутого інтервалу.*
Теорема. *Для того, щоб система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння* $y_1, y_2, ..., y_n$ *була фундаментальною необхідно і достатньо, щоб складений для них визначник Вронського не дорівнював нулю.*

Зв'язок фундаментальних розв'язків із загальним розв'язком

Теорема. *Якщо* $y_1, y_2, ..., y_n$ *– фундаментальна система розв'язків на інтервалі* (a, b), *то загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння є лінійною комбінацією цих розв'язків.*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n,$$

де C_i *– сталі коефіцієнти.*

Загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку

Навіть для рівняння другого порядку, якщо коефіцієнти p залежать від x, задача з відшукання фундаментальних розв'язків не може бути вирішена в загальному виді.

Визначення другого розв'язку за відомим першим

Теорема. *Якщо задано рівняння типу* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *і відомий один ненульовий розв'язок* $y = y_1$, *то загальний розв'язок може бути знайдений за формулою*:

$$y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_1 y_1.$$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Підстановка Ойлера

Розв'язок диференціального рівняння типу $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ або, коротше, $L(y) = 0$ будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$, де $k = \text{const}$.
Оскільки $y' = ke^{kx}$

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Підстановка Ойлера

Розв'язок диференціального рівняння типу $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$ або, коротше, $L(y) = 0$ будемо шукати у вигляді $y = e^{kx}$, де $k = \mathrm{const}$.
Оскільки $y' = ke^{kx} \Rightarrow y'' = k^2 e^{kx}; \quad ... \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$,

$$L(e^{kx}) = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n).$$

Характеристичний многочлен

При цьому многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ називається **характеристичним многочленом диференціального рівняння**.

Характеристичний многочлен

При цьому многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ називається **характеристичним многочленом диференціального рівняння**.
Для того, щоб функція $y = e^{kx}$ була розв'язком вихідного диференціального рівняння, необхідно і достатньо, щоб

$$L(e^{kx}) = 0$$

Характеристичний многочлен

При цьому многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ називається **характеристичним многочленом диференціального рівняння**.
Для того, щоб функція $y = e^{kx}$ була розв'язком вихідного диференціального рівняння, необхідно і достатньо, щоб

$$L(e^{kx}) = 0$$

Тобто

$$e^{kx} F(k) = 0$$

Характеристичне рівняння

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, $F(k) = 0$ – це рівняння називається **характеристичним рівнянням**.

Характеристичне рівняння

Оскільки $e^{kx} \neq 0$, $F(k) = 0$ – це рівняння називається **характеристичним рівнянням**.
Як і будь-яке алгебраїчне рівняння степеня n, характеристичне рівняння $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ має n корінь. Кожному кореню характеристичного рівняння k_i відповідає розв'язок диференціального рівняння.

Корені характеристичного рівняння

Залежно від коефіцієнтів k характеристичне рівняння може мати або n різних дійсних коренів, або серед дійсних коренів можуть бути кратні корені, можуть бути комплексно-спряжені корені, як різні, так і кратні.

Схема розв'язування

1. Встановлюємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені.
2. Знаходимо частинні розв'язки диференціального рівняння, причому:
   2.1 кожному дійсному кореню відповідає розв'язок e^{kx};
   2.2 кожному дійсному кореню кратності m ставиться у відповідність m розв'язків:
   $$e^{kx}; \quad xe^{kx}; \quad \dots \quad x^{m-1}e^{kx}.$$
   2.3 кожній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність два розв'язки:
   $$e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ та } e^{\alpha x}\sin\beta x$$
   2.4 кожній парі m-кратних комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння ставиться у відповідність $2m$ розв'язків:
   $$\begin{array}{llll} e^{\alpha x}\cos\beta x, & xe^{\alpha x}\cos\beta x, & \dots & x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, & xe^{\alpha x}\sin\beta x, & \dots x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x. & \end{array}$$
3. Встановлюємо лінійну комбінацію знайдених розв'язків.

Структура загального розв'язку

Ця лінійна комбінація і буде загальним розв'язком вихідного лінійного однорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow k^2+k+1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow k^2+k+1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - 1 = 0$;

$$(k-1)(k^2+k+1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1 \Rightarrow k^2+k+1 = 0;$$

$$D = 1 - 4 = -3 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow k_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_2 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_3 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

Приклад

Розв'язати рівняння $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$.
Розв'язання Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку. Для знаходження загального розв'язку необхідно відшукати якийсь частинний розв'язок.
Таким частинним розв'язком буде функція $y_1 = x$.

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0$.
Розв'язання Це лінійне однорідне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами другого порядку. Для знаходження загального розв'язку необхідно відшукати якийсь частинний розв'язок.
Таким частинним розв'язком буде функція $y_1=x$.

$$y_1'=1;\quad y_1''=0\Rightarrow 0-2x+2x=0;$$

Вихідне диференціальне рівняння можна перетворити:

$$y''-\frac{2x}{1-x^2}y'+\frac{2y}{1-x^2}=0.$$

Розв'язання

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

Розв'язання

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)} + C_2 x$$

Розв'язання

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \dfrac{2x}{1-x^2} \mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)} + C_2 x \Rightarrow y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right] \mathrm{d}x;$$

Розв'язання

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)} + C_2 x \Rightarrow y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right] \mathrm{d}x;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Розв'язання

Загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}\mathrm{d}x} \mathrm{d}x + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} \mathrm{d}x + C_2 x;$$

$$y = C_1 x \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)} + C_2 x \Rightarrow y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}\right] \mathrm{d}x;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right];$$

Остаточно: $y = C_2 x + C_3 x \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C_4;$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^{IV} - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^4 - 1 = 0$.

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^{IV} - y = 0$.
Складемо характеристичне рівняння: $k^4 - 1 = 0$.

$$(k^2 - 1)(k^2 + 1) = 0 \Rightarrow k_1 = 1; \quad k_2 = -1; \quad k_3 = i; \quad k_4 = -i.$$

Загальний розв'язок:$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0$

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = 2$.
Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 5 = 0$

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = -16$

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = -16 \Rightarrow k_1 = -1 + 2i$;

$$k_2 = -1 - 2i.$$

Загальний розв'язок: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - 7y'' + 6y' = 0.$
Характеристичне рівняння: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0$

Приклад

Розв'язати рівняння $y''' - 7y'' + 6y' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 7k + 6) = 0$;

$$k_1 = 0; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 6;$$

Загальний розв'язок: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}$;

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - k - 2 = 0$

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' - y' - 2y = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow k_1 = -1; \quad k_2 = 2;$
Загальний розв'язок: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^5 - 9k^3 = 0$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^5 - 9k^3 = 0 \Rightarrow k^3(k^2 - 9) = 0$;

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^5 - 9k^3 = 0 \Rightarrow k^3(k^2 - 9) = 0$;

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \Rightarrow k_4 = 3$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y^V - 9y''' = 0$.
Характеристичне рівняння: $k^5 - 9k^3 = 0 \Rightarrow k^3(k^2 - 9) = 0$;

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0 \Rightarrow k_4 = 3 \Rightarrow k_5 = -3;$$

Загальний розв'язок: $y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{3x} + C_5e^{-3x}$;

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.

Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.

Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.

Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y'$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.

Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.

Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.

Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1$$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p$$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$

$$y \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1$$

$$y \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $yy'' - y'^2 = 0$.
Це рівняння не є лінійним, отже, наведений вище метод розв'язання до нього не застосовний.
Понизимо порядок рівняння за допомогою підстановки $y' = p$.
Тоді $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} p$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p - p^2 = 0; \quad p_1 = 0; \quad y_1 = C_1$$

$$y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} \Rightarrow \ln|p| = \ln|y| + \ln C$$

Розв'язання

$$p = Cy$$

Розв'язання

$$p = Cy \Rightarrow y' = Cy$$

Розв'язання

$$p = Cy \Rightarrow y' = Cy \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$p = Cy \Rightarrow y' = Cy \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \int \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$p = Cy \Rightarrow y' = Cy \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{C} \ln |Cy| = x + \ln C_2$$

Розв'язання

$$p = Cy \Rightarrow y' = Cy \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{Cy} = \int \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{C}\ln|Cy| = x + \ln C_2 \Rightarrow Cy = e^{Cx}e^{C\ln C_2} = C_3 e^{Cx}$$

Остаточно одержуємо: $y = C_1 e^{Cx}$.
Цей вираз буде загальним розв'язком вихідного диференціального рівняння.
Отриманий вище розв'язок $y_1 = C_1$ виходить із загального розв'язку при $C = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.
Розв'язання
Робимо заміну змінної:

$$y' = p$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow y_1 = C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow y_1 = C$$

$$3y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}y' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow y_1 = C$$

$$3y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{3y}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $3yy'' + y'^2 = 0$.

Розв'язання

Робимо заміну змінної:

$$y' = p \Rightarrow y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} y' = p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$$

$$3yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 0 \Rightarrow p_1 = 0 \Rightarrow y_1 = C$$

$$3y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -p \Rightarrow \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{3y} \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

Розв'язання

$$\ln |p| = -\frac{1}{3}\ln |y| + \ln C$$

Розв'язання

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C \Rightarrow p^3 = \frac{C}{y}$$

Розв'язання

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C \Rightarrow p^3 = \frac{C}{y} \Rightarrow y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}$$

Розв'язання

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C \Rightarrow p^3 = \frac{C}{y} \Rightarrow y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}$$

$$y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C \Rightarrow p^3 = \frac{C}{y} \Rightarrow y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}$$

$$y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x \Rightarrow \int y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\int\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\ln|p| = -\frac{1}{3}\ln|y| + \ln C \Rightarrow p^3 = \frac{C}{y} \Rightarrow y' = C_1 y^{-\frac{1}{3}}$$

$$y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\mathrm{d}x \Rightarrow \int y^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}y = C_1\int \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{3}{4}y^{\frac{4}{3}} = C_1 x + C_2;$$

$$y^{\frac{4}{3}} = C_3 x + C_4;$$

Загальний розв'язок: $y = (C_3 x + C_4)^{\frac{3}{4}}$.