Визначений інтеграл

Означення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.

Означення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.
Позначимо m і M найменше і найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$.

Означення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.
Позначимо m і M найменше і найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$.
Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на частини (необов'язково однакові) n точками.

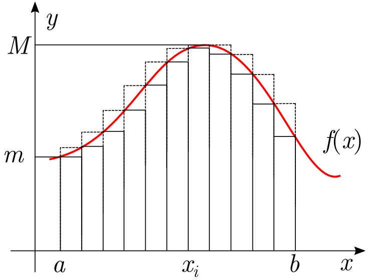
$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

Означення визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана неперервна функція $f(x)$.
Позначимо m і M найменше і найбільше значення функції на відрізку $[a, b]$.
Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на частини (необов'язково однакові) n точками.

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

Тоді $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $\ldots$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$.



Нижня і верхня інтегральна сума

На кожному з отриманих відрізків знайдемо найменше і найбільше значення функції.

Нижня і верхня інтегральна сума

На кожному з отриманих відрізків знайдемо найменше і найбільше значення функції.
$[x_0, x_1] \to m_1,\ M_1;\ [x_1, x_2] \to m_2,\ M_2;\ \ldots [x_{n-1}, x_n] \to m_n,\ M_n$...

Нижня і верхня інтегральна сума

На кожному з отриманих відрізків знайдемо найменше і найбільше значення функції.
$[x_0, x_1] \to m_1,\ M_1;\ [x_1, x_2] \to m_2,\ M_2;\ \ldots [x_{n-1}, x_n] \to m_n,\ M_n...$
Складемо суми:

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Нижня і верхня інтегральна сума

На кожному з отриманих відрізків знайдемо найменше і найбільше значення функції.
$[x_0, x_1] \to m_1,\ M_1;\ [x_1, x_2] \to m_2,\ M_2;\ \ldots [x_{n-1}, x_n] \to m_n,\ M_n$...
Складемо суми:

$$\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

Сума $\underline{S}_n$ називається **нижньою інтегральною сумою**, а сума $\overline{S}_n$ – **верхньою інтегральною сумою**.

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \dots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Знайдемо значення функції у цих точках і складемо вираз, що називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Знайдемо значення функції у цих точках і складемо вираз, що називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Тоді можна записати: $m_i \Delta x_i \leqslant f\,(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i$

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Знайдемо значення функції у цих точках і складемо вираз, що називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Тоді можна записати: $m_i \Delta x_i \leqslant f\,(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i$ Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Інтегральна сума

Оскільки $m_i \leqslant M_i$, $\underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n$, а $m\,(b-a) \leqslant \underline{S}_n \leqslant \bar{S}_n \leqslant M\,(b-a)$.
Усередині кожного відрізка виберемо деяку точку ε_i.

$$x_0 < \varepsilon_1 < x_1, x_1 < \varepsilon_2 < x_2, \ldots, x_{n-1} < \varepsilon_n < x_n.$$

Знайдемо значення функції у цих точках і складемо вираз, що називається **інтегральною сумою** для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i.$$

Тоді можна записати: $m_i \Delta x_i \leqslant f\,(\varepsilon_i)\,\Delta x_i \leqslant M_i \Delta x_i$ Отже,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

або

$$\underline{S_n} \leqslant S_n \leqslant \overline{S_n}$$

Геометричне представлення

Геометрично це представляється у такий спосіб: графік функції $f(x)$ обмежений зверху описаною ламаною лінією, а знизу – вписаною ламаною.

Перехід до границі

Позначимо $\max \Delta x_i$ – найбільший відрізок розбиття – найменший. Якщо $\max \Delta x_i \to 0$, то число відрізків розбиття відрізка $[a, b]$ прямує до нескінченності.

Перехід до границі

Позначимо $\max\Delta x_i$ – найбільший відрізок розбиття – найменший. Якщо $\max\Delta x_i \to 0$, то число відрізків розбиття відрізка $[a, b]$ прямує до нескінченності.
Якщо $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S$.

Визначений інтеграл

Означення: Якщо при будь-яких розбиттях відрізка $[a, b]$ таких, що max $\Delta x_i \to 0$ і довільному виборі точок ε_i інтегральна сума $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ прямує до границі S, що називається визначеним інтегралом від $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Позначення визначеного інтеграла

Позначення:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

a – нижня границя, b – верхня границя, x – змінна інтегрування, $[a, b]$ – відрізок інтегрування.

Інтегрована функція

Означення: Якщо для функції $f(x)$ існує границя

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

то функція називається **інтегрованою** на відрізку $[a;b]$.

Інтегрована функція

<u>Означення:</u> Якщо для функції $f(x)$ існує границя

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

то функція називається **інтегрованою** на відрізку $[a;b]$.
Крім того,

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Достатня умова інтегрованості

Теорема: Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x;$
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
4. Якщо $f\left(x\right) \leqslant \varphi\left(x\right)$ на відрізку $[a,b]$ $a<b$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
4. Якщо $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на відрізку $[a,b]$ $a<b$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$
5. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Властивості визначеного інтеграла

1. $\int_a^b Af(x)\mathrm{d}x = A\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b f_2(x)\mathrm{d}x$
3. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
4. Якщо $f(x) \leqslant \varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$ $a < b$, то $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$
5. Якщо m і M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

6. **<u>Теорема про середнє</u>** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то на цьому відрізку існує точка ε така, що

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\varepsilon)$$

Доведення теореми про середнє

У відповідності із властивістю 5:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leqslant M$$

Доведення теореми про середнє

У відповідності із властивістю 5:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку всі значення від m до M.

Доведення теореми про середнє

У відповідності із властивістю 5:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку всі значення від m до M.
Інакше кажучи, існує таке число $\varepsilon \in [a, b]$, що якщо $\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mu$ і $\mu = f(\varepsilon)$, а $a \leqslant \varepsilon \leqslant b$, тоді $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\varepsilon)$.

Доведення теореми про середнє

У відповідності із властивістю 5:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x \leqslant M$$

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відрізку всі значення від m до M.
Інакше кажучи, існує таке число $\varepsilon \in [a, b]$, що якщо $\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \mu$ і $\mu = f(\varepsilon)$, а $a \leqslant \varepsilon \leqslant b$, тоді $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = (b-a) f(\varepsilon)$.
Теорему доведено.

Властивості визначеного інтеграла

7. Для довільних чисел a, b, c справедлива рівність:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

   Зрозуміло, ця рівність виконується, якщо існує кожний із інтегралів, що входять у неї.

8. $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Узагальнена теорема про середнє

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, і функція $\varphi(x)$ знакостала на ньому, то на цьому відрізку існує точка ε, така, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$$

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = \mathrm{const}$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = \mathrm{const}$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.
Нехай

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi\left(x\right).$$

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = \mathrm{const}$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.
Нехай

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi\left(x\right).$$

Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$ за змінною верхньої границі, x. За теоремою про середнє

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = \mathrm{const}$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.
Нехай

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi\left(x\right).$$

Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$ за змінною верхньої границі, x. За теоремою про середнє

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

Аналогічну теорему можна довести для випадку змінної нижньої границі.

Обчислення визначеного інтеграла

Нехай в інтегралі $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ нижня границя $a = \mathrm{const}$, а верхня границя b змінюється. Очевидно, що якщо змінюється верхня границя, то змінюється і значення інтеграла.
Нехай
$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \Phi\left(x\right).$$

Знайдемо похідну функції $\Phi(x)$ за змінною верхньої границі, x. За теоремою про середнє
$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$

Аналогічну теорему можна довести для випадку змінної нижньої границі.
Теорема: Для всякої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, існує на цьому відрізку первісна, а виходить, існує невизначений інтеграл.

Теорема Ньютона-Ляйбніца

Якщо функція $F(x)$ – якась первісна від неперервної функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Теорема Ньютона-Ляйбніца

Якщо функція $F(x)$ – якась первісна від неперервної функції $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Цей вираз відомий як формула Ньютона-Ляйбніца.

Доведення

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.

Доведення

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.
Тоді відповідно до наведеної вище теореми, функція $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ – первісна функція від $f(x)$.

Доведення

Нехай $F(x)$ – первісна функції $f(x)$.
Тоді відповідно до наведеної вище теореми, функція $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ – первісна функція від $f(x)$.
Але оскільки функція може мати нескінченно багато первісних, які будуть відрізнятися одна від одної тільки на якесь стале число C:

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) + C$$

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тоді $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тоді $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.
А при $x = b$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

Доведення

При відповідному виборі C ця рівність справедлива для будь-якого x, тобто при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)\mathrm{d}t = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Тоді $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.
А при $x = b$: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$
Замінивши змінну t на змінну x, одержуємо формулу Ньютона-Ляйбніца:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Теорему доведено.

Інший запис

Іноді застосовують позначення $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$.

Застосування

Формула Ньютона-Ляйбніца являє собою загальний підхід до знаходження визначених інтегралів.

Застосування

Формула Ньютона-Ляйбніца являє собою загальний підхід до знаходження визначених інтегралів.
Що стосується прийомів обчислення визначених інтегралів, то вони практично нічим не відрізняються від всіх тих прийомів і методів, які були розглянуті вище при знаходженні невизначених інтегралів.

Застосування

Формула Ньютона-Ляйбніца являє собою загальний підхід до знаходження визначених інтегралів.
Що стосується прийомів обчислення визначених інтегралів, то вони практично нічим не відрізняються від всіх тих прийомів і методів, які були розглянуті вище при знаходженні невизначених інтегралів.
Точно так само застосовуються методи підстановки (заміни змінної), метод інтегрування частинами, ті ж прийоми знаходження первісних для тригонометричних, ірраціональних і трансцендентних функцій. Особливістю є тільки те, що при застосуванні цих прийомів треба поширювати перетворення не тільки на підінтегральну функцію, але і на границі інтегрування.
Заміняючи змінну інтегрування, слід не забувати змінити відповідно границі інтегрування.

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.
Введемо нову змінну відповідно до формули $x = \varphi(t)$.

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.

Введемо нову змінну відповідно до формули $x = \varphi(t)$.

Тоді якщо

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.
Введемо нову змінну відповідно до формули $x = \varphi(t)$.
Тоді якщо
1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$.

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.
Введемо нову змінну відповідно до формули $x = \varphi(t)$.
Тоді якщо
1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$.
3) $f(\varphi(t))$ визначена на відрізку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Заміна змінних

Нехай заданий інтеграл $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, де $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a, b]$.
Введемо нову змінну відповідно до формули $x = \varphi(t)$.
Тоді якщо
1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$
2) $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$.
3) $f(\varphi(t))$ визначена на відрізку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

Тоді

$$\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta = F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a)$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right|$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x=\sin t; t=\arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta=\pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2}$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}$$

Приклад

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x = \sin t; t = \arcsin x \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}$$

При заміні змінної у визначеному інтегралі слід пам'ятати про те, що вводять функцію, що (у розглянутому прикладі це функція sin) повинна бути неперервна на відрізку інтегрування. У противному випадку формальне застосування формули приводить до абсурду.

Приклад

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = x|_0^\pi = \pi$$

Приклад

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = x|_0^{\pi} = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x$$

Приклад

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = x|_0^\pi = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \cos^2 x}$$

Приклад

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = x|_0^{\pi} = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}$$

Приклад

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = x|_0^\pi = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{\operatorname{tg} x = t\}$$

Приклад

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = x|_0^\pi = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{\operatorname{tg} x = t\} = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 0$$

Приклад

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = x|_0^\pi = \pi$$

Якщо застосувати тригонометричну підстановку,

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tg}^2 x)} = \{\operatorname{tg} x = t\} = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 0$$

Тобто два способи знаходження інтеграла дають різні результати. Це відбулося через те, що не був врахований той факт, що уведена змінна $\operatorname{tg} x$ має на відрізку інтегрування розрив (у точці $x = \pi/2$). Тому у цьому випадку така підстановка незастосовна. При заміні змінної у визначеному інтегралі слід уважно стежити за виконанням перерахованих вище умов.

Інтегрування частинами

Якщо функції $u = \varphi(x)$ та $v = \psi(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, а також неперервні на цьому відрізку їхні похідні, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u \mathrm{d}v = uv|_a^b - \int_a^b v \mathrm{d}u.$$

Наближене обчислення визначеного інтеграла

Як було сказано вище, існує величезна кількість функцій, інтеграл від яких не може бути виражений через елементарні функції.

Наближене обчислення визначеного інтеграла

Як було сказано вище, існує величезна кількість функцій, інтеграл від яких не може бути виражений через елементарні функції.
Для знаходження інтегралів від подібних функцій застосовуються різноманітні наближені методи, суть яких полягає у тому, що підінтегральна функція заміняється «близькою» до неї функцією, інтеграл від якої виражається через елементарні функції.

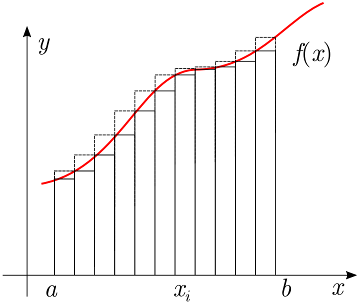
Поліноміальна апроксимація

Якщо відомі значення функції $f(x)$ у деяких точках $x_0, x_1, \ldots, x_m$, то як функція «близьку» до $f(x)$ можна взяти многочлен $P(x)$ степеня не вище m, значення якого у вибраних точках дорівнюють значенням функції $f(x)$ у цих точках.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b P(x)\mathrm{d}x$$

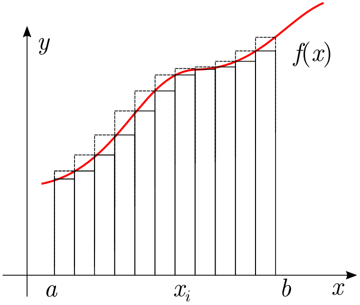
Формула прямокутників

Якщо розбити відрізок інтегрування монотонно функції, що монотонно зростає, на n рівних частин $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



Формула прямокутників

Якщо розбити відрізок інтегрування монотонно функції, що монотонно зростає, на n рівних частин $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.



При цьому:

$$y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n).$$

Формула прямокутників

Складемо суми:

$$y_0 \Delta x + y_1 \Delta x + \cdots + y_{n-1} \Delta x$$

$$y_1 \Delta x + y_2 \Delta x + \cdots + y_n \Delta x$$

Формула прямокутників

Складемо суми:

$$y_0\Delta x + y_1\Delta x + \cdots + y_{n-1}\Delta x$$

$$y_1\Delta x + y_2\Delta x + \cdots + y_n\Delta x$$

Це відповідно нижня і верхня інтегральні суми.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})$$

або

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

Кожна із цих формул може застосовуватися для наближеного обчислення визначеного інтеграла і називається **загальною формулою прямокутників**.

Формула прямокутників

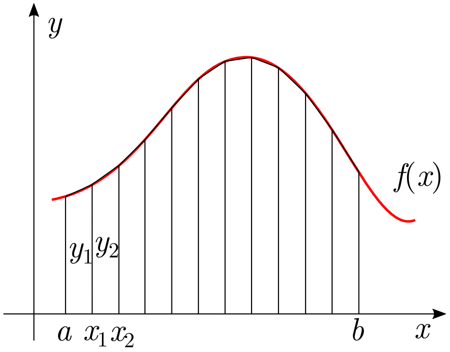
Формула прямокутників лишається незмінною і для монотонно спадних функцій. Її можна використовувати для довільних інтегрованих функцій.

Формула прямокутників

Формула прямокутників лишається незмінною і для монотонно спадних функцій. Її можна використовувати для довільних інтегрованих функцій. Похибка обчислень за цією формулою є $O(\Delta x)$.

Формула трапецій

Геометрично площа криволінійної трапеції заміняється сумою площ вписаних трапецій. Очевидно, що чим більше взяти точок n розбиття інтервалу, тим з більшою точністю буде обчислений інтеграл.



Формула трапецій

Площі вписаних трапецій обчислюються за формулами:

$$\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x; \quad \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x; \quad ... \quad , \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1+y_2}{2}\Delta x + ... + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x$$

Після приведення подібних доданків одержуємо **формулу трапецій**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right)$$

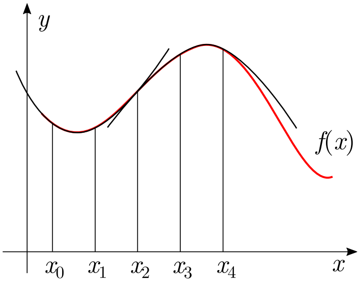
Формула трапецій

Похибка обчислень за цією формулою є $O(\Delta x)$.

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Розділимо відрізок інтегрування $[a, b]$ на парне число відрізків $(2m)$. Площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $f(x)$ замінимо на площу криволінійної трапеції, обмеженою параболою другого степеня з віссю симетрії, паралельною осі Oy, такої, що проходить через точки кривої зі значеннями $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$.

Для кожної пари відрізків побудуємо таку параболу.



Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Рівняння парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Рівняння парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \tag{1}$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Рівняння парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо $2h = x_2 - x_0$.

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Рівняння парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right] \Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Рівняння парабол мають вигляд $Ax^2 + Bx + C$, де коефіцієнти A, B, C можуть бути легко знайдені за трьома точками перетину параболи з вихідною кривою.

$$\begin{aligned} y_0 &= Ax_0^2 + Bx_0 + C \\ y_1 &= Ax_1^2 + Bx_1 + C \\ y_2 &= Ax_2^2 + Bx_2 + C \end{aligned} \tag{1}$$

Позначимо $2h = x_2 - x_0$.

$$S = \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)\mathrm{d}x = \left[A\frac{x^3}{3} + B\frac{x^2}{2} + Cx \right]\Bigg|_{x_0}^{x_2}$$

Якщо прийняти

$$x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h, \text{ то } S = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) \tag{2}$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Тоді рівняння значень функції (1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Тоді рівняння значень функції (1) мають вигляд:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C \\ y_1 &= C \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C \end{aligned}$$

З врахуванням цього: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Тоді рівняння значень функції (1) мають вигляд:

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C$$
$$y_1 = C$$
$$y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

З врахуванням цього: $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$.
Звідси рівняння (2) набуде вигляду:

$$S = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Тоді

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Формула парабол (формула Сімпсона або квадратурна формула)

Тоді

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$
$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

....

Складаючи ці вирази, одержуємо **формулу Сімпсона:**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6m}\left[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1})\right]$$

Чим більше взяти число m, тим більше точне значення інтеграла буде отримано.

Формула Сімпсона

Похибка обчислень за цією формулою є $O(\Delta x^3)$.

Приклад

Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}\mathrm{d}x$ за допомогою формули Сімпсона, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин.

Приклад

Обчислити наближене значення визначеного інтеграла $\int_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x$ за допомогою формули Сімпсона, розбивши відрізок інтегрування на 10 частин.
За формулою Сімпсона одержимо:

$$\int\limits_{-2}^{8}\sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx$$

$$\approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[y(-2)+y(8)+2[y(0)+y(2)+y(4)+y(6)]+4[y(-1)+y(1)+y(3)+y(5)+y(7)]]$$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	2,828	3,873	4	4,123	4,899	6,557	8,944	11,874	15,232	18,947	22,978

Приклад

$$\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3 + 16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6 \cdot 5}[2,828 + 22,978 + 2[4 + 4,899 + 8,944 + 15,232] + 4[3,873 + 4,123 + 6,557 +$$

$$+11,874 + 18,947]] = 91,151$$

Приклад

$$\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2,828+22,978+2[4+4,899+8,944+15,232]+4[3,873+4,123+6,557+$$

$$+11,874+18,947]] = 91,151$$

Точніше значення цього інтеграла – $91,173$.

Приклад

$$\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2,828+22,978+2[4+4,899+8,944+15,232]+4[3,873+4,123+6,557+$$

$$+11,874+18,947]] = 91,151$$

Точніше значення цього інтеграла – $91,173$.
Для порівняння застосуємо до цієї ж задачі формулу трапецій.

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right)$$

Приклад

$$\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2,828+22,978+2[4+4,899+8,944+15,232]+4[3,873+4,123+6,557+$$

$$+11,874+18,947]] = 91,151$$

Точніше значення цього інтеграла – $91,173$.
Для порівняння застосуємо до цієї ж задачі формулу трапецій.

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{8+2}{10}\left(\frac{2,828+22,978}{2}+3,873+4+4,123+\right.$$

$$\left.+4,899+6,557+8,944+11,874+15,232+18,947\right) = 91,352$$

Приклад

$$\int\limits_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{8+2}{6\cdot 5}[2,828+22,978+2[4+4,899+8,944+15,232]+4[3,873+4,123+6,557+$$

$$+11,874+18,947]] = 91,151$$

Точніше значення цього інтеграла – $91,173$.
Для порівняння застосуємо до цієї ж задачі формулу трапецій.

$$\int_{-2}^{8} \sqrt{x^3+16}\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+...+y_{n-1}\right) =$$

$$= \frac{8+2}{10}\left(\frac{2,828+22,978}{2}+3,873+4+4,123+\right.$$

$$\left.+4,899+6,557+8,944+11,874+15,232+18,947\right) = 91,352$$

Формула трапецій дала менш точний результат у порівнянні з формулою Сімпсона.