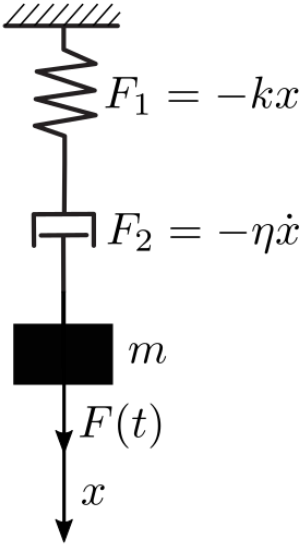
Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Нормальні системи ЗДР

Модель коливань із демпфером



$$m\ddot{x} = F_1 + F_2 + F(t)$$

або

$$m\ddot{x} = -kx - \eta\dot{x} + F(t)$$

Після перетворення:

$$\ddot{x} + \frac{\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(y)$$

$$L(y) = f(x)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння з довільними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$$

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = L(y)$$

$$L(y) = f(x)$$

Теорема. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння* $y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x)$ *у деякій області є сума* ***будь-якого*** *його розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного диференціального рівняння.*

Доведення

Y – деякий розв'язок неоднорідного рівняння.
Тоді
$$L(Y) \equiv f(x).$$

Доведення

Y – деякий розв'язок неоднорідного рівняння.
Тоді
$$L(Y) \equiv f(x).$$

Нехай $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L(y) = 0$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n; \quad C_i = \text{const}.$$

Доведення

Y – деякий розв'язок неоднорідного рівняння.
Тоді
$$L(Y) \equiv f(x).$$

Нехай $y_1, y_2, ..., y_n$ – фундаментальна система розв'язків однорідного рівняння $L(y) = 0$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n; \quad C_i = \text{const}.$$

Оператор L – лінійний, тому сума $Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n$ є загальним розв'язком неоднорідного рівняння:

$$L(Y + C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n) =$$

$$= L(Y) + L(C_1 y_1) + L(C_2 y_2) + ... + L(C_n y_n) = L(Y) = f(x)$$

Метод варіації довільних сталих

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

Метод варіації довільних сталих

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

Варіювання коефіцієнтів:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

Метод варіації довільних сталих

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i$$

Варіювання коефіцієнтів:

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i;$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Приклад

Умова:

Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

Розв'язок неоднорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x;$$

Розв'язання

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

Розв'язання

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = -C_1'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -C_1'(x)\sin x - C_1'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-C_1'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ C_2'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

Розв'язання

Для похідних невідомих функцій:

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_2'(x) = -C_1'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -C_1'(x)\sin x - C_1'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{-C_1'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ C_2'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}$$

$$C_1'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$$

Розв'язання

Отже

$$C_1(x) = \int \left(2\sin^2 x \cos x - x \sin x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x - \int x \sin x \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x \sin x \mathrm{d}x =$$

Розв'язання

Отже

$$C_1(x) = \int \left(2\sin^2 x \cos x - x\sin x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= 2\int \sin^2 x \cos x \mathrm{d}x - \int x\sin x \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x \sin x \mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \sin x \mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = -\cos x \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \int \cos x \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin^3 x + x\cos x - \sin x + C_1^*.$$

Розв'язання

Тепер знаходимо $C_2(x)$.

$$C_2(x) = \int x\cos x\mathrm{d}x - 2\int \cos^2 x\sin x\mathrm{d}x =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & \mathrm{d}v = \cos x\mathrm{d}x; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x; & v = \sin x; \end{array} \right\} =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x + \frac{2}{3}\cos^3 x = \frac{2}{3}\cos^3 x + x\sin x + \cos x + C_2^*.$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1^*\cos x +$$

$$+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2^*\sin x =$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1^*\cos x +$$

$$+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2^*\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1^*\cos x + C_2^*\sin x.$$

Розв'язання

Загальний розв'язок:

$$y = \frac{2}{3}\sin^3 x\cos x + x\cos^2 x - \sin x\cos x + C_1^*\cos x +$$

$$+ \frac{2}{3}\sin x\cos^3 x + x\sin^2 x + \sin x\cos x + C_2^*\sin x =$$

$$= \frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x + \cos^2 x) + x(\sin^2 x + \cos^2 x) + C_1^*\cos x + C_2^*\sin x.$$

Остаточна відповідь: $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x + x + C_1^*\cos x + C_2^*\sin x$;

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x)$$

$$f(x) = e^{\alpha x} \left[P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x\right]$$

$P_1(x)$ і $P_2(x)$ – поліноми степеня m_1 і m_2 відповідно.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

$P_1(x)$ і $P_2(x)$ – поліноми степеня m_1 і m_2 відповідно. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(x)$$

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$$

$P_1(x)$ і $P_2(x)$ – поліноми степеня m_1 і m_2 відповідно. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{ч.н.}} = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$$

де r – кратність кореня $\alpha + i\beta$ характеристичного рівняння для відповідного однорідного рівняння, $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ – поліноми степеня не вище m, де m – більший зі степенів m_1 і m_2.

Приклад

Умова:

Розв'язати рівняння $y'' + y = x - \sin 2x$.

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Розв'язання

Розв'язуємо лінійне однорідне рівняння $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0; \quad k_1 = \mathrm{i}; \quad k_2 = -\mathrm{i}$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x); \quad \alpha = 0; \quad \beta = 1;$$

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin 2x)$$

Розв'язання

Для $f_1(x)$:

$$y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 0, r = 0, Q(x) = Ax + B$$

$$y_1 = Ax + B$$

Розв'язання

Для $f_1(x)$:

$$y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$$

$$\alpha = 0, r = 0, Q(x) = Ax + B$$

$$y_1 = Ax + B$$

$$y_1' = A; y_1'' = 0;$$

$$Ax + B = x; A = 1; B = 0;$$

$$y_1 = x$$

Розв'язання

Для $f_2(x)$:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$$

Розв'язання

Для $f_2(x)$:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right)$$

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0$$

Розв'язання

Для $f_2(x)$:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}\left(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right)$$

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0$$

$$y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x;$$

Розв'язання

Для $f_2(x)$:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right)$$

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0$$

$$y_2 = C \cos 2x + D \sin 2x;$$

$$y_2' = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x$$

$$y_2'' = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x;$$

Розв'язання

Для $f_2(x)$:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x} \left(Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x \right)$$

$$P_1(x) = 0; \quad P_2(x) = -1; \quad \alpha = 0; \quad \beta = 2; \quad r = 0$$

$$y_2 = C \cos 2x + D \sin 2x;$$

$$y_2' = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x$$
$$y_2'' = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x;$$

Підставляємо до рівняння:

$$-4C \cos 2x - 4D \sin 2x + C \cos 2x + D \sin 2x = - \sin 2x$$

$$-3C \cos 2x - 3D \sin 2x = - \sin 2x$$

Розв'язання

$$C = 0; \quad D = \frac{1}{3}$$

Разом:

$$y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x$$

Розв'язання

$$C = 0; \quad D = \frac{1}{3}$$

Разом:

$$y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x$$

Тобто

$$y_{\text{ч.н.}} = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x$$

Розв'язання

$$C = 0; \quad D = \frac{1}{3}$$

Разом:

$$y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x$$

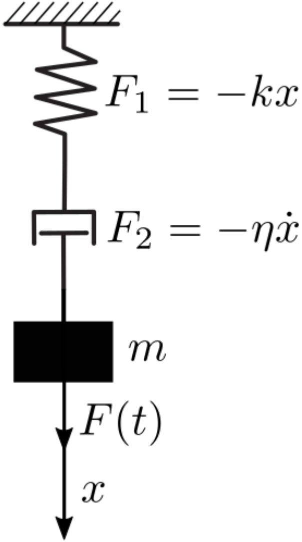
Тобто

$$y_{\text{ч.н.}} = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x;$$

Коливання без демпфера. Резонанс.



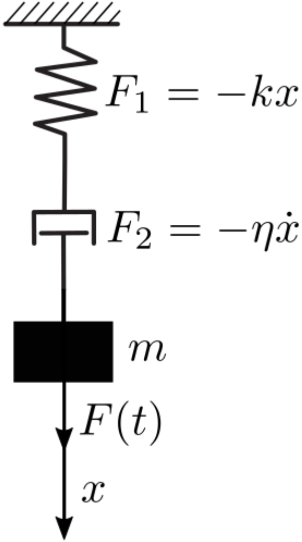
$$\eta = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}$$

Коливання без демпфера. Резонанс.



$$\eta = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m}$$

Характеристичне рівняння:

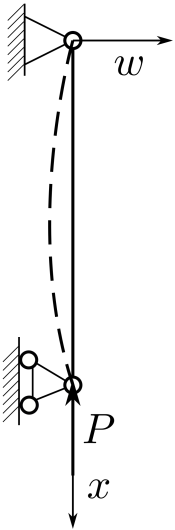
$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\mathrm{i}$$

Резонанс:

$$F(t) = F^* \sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \Rightarrow$$

$$x_{\text{ч.н.}} = t\left(A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + B\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

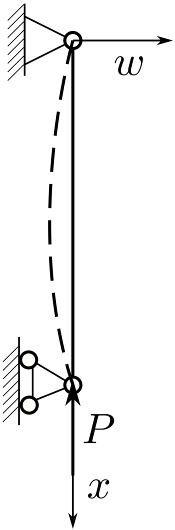
Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



$$EJw'' = M(x) = -Pw(x)$$

$$w'' + k^2 w = 0, \text{ де } k^2 = P/EJ.$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



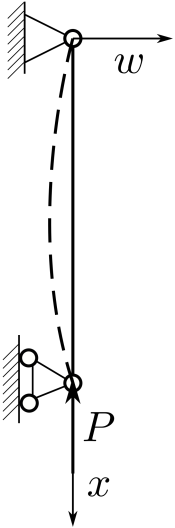
$$EJw'' = M(x) = -Pw(x)$$

$w'' + k^2 w = 0$, де $k^2 = P/EJ$.
Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k\mathrm{i}$$

$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



$$EJw'' = M(x) = -Pw(x)$$

$w'' + k^2 w = 0$, де $k^2 = P/EJ$.
Характеристичне рівняння:

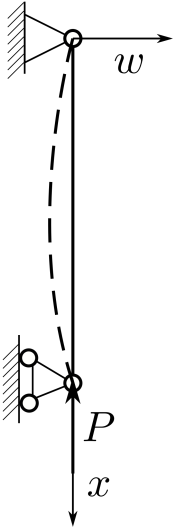
$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k\mathrm{i}$$

$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Умова Штурма-Ліувілля (Sturm-Liouville):

$$w(0) = w(\ell) = 0$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



$$EJw'' = M(x) = -Pw(x)$$

$w'' + k^2 w = 0$, де $k^2 = P/EJ$.

Характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm k\mathrm{i}$$

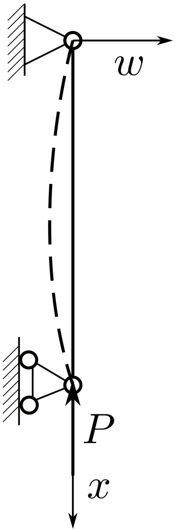
$$w(x) = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx$$

Умова Штурма-Ліувілля (Sturm-Liouville):

$$w(0) = w(\ell) = 0$$

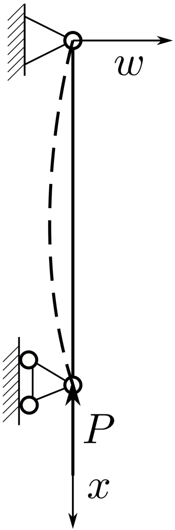
$$w(0) = 0 = C_1 \Rightarrow w(\ell) = C_2 \sin k\ell = 0$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = \sqrt{\frac{P}{EJ}}\ell = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші

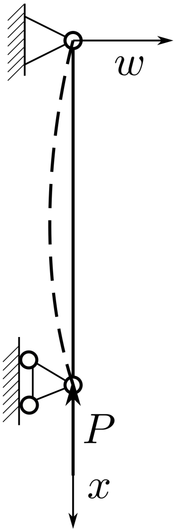


$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = \sqrt{\frac{P}{EJ}}\ell = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Найменша критична сила:

$$n = 1$$

Рівняння вищих порядків — не лише задача Коші



$$\sin k\ell = 0 \Rightarrow k\ell = \sqrt{\frac{P}{EJ}}\ell = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

Найменша критична сила:

$$n = 1$$

$$P_{cr} = \frac{EJ\pi^2}{\ell^2}$$

Загалом (залежно від умов закріплення):

$$P_{cr} = \frac{EJ\pi^2}{\mu\ell^2}$$

μ – коефіцієнт приведеної довжини балки.

Нормальні системи звичайних диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

x – незалежна змінна; y_1, y_2,. . . , y_n – шукані функції.

Система диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$$

x – незалежна змінна; y_1, y_2, ..., y_n – шукані функції.
Нормальна система диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема Коші для нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь

Теорема. (Теорема Коші). *Якщо у деякій області* $(n+1)$*-вимірного простору функції* $f_1(x, y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$, ... $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ *неперервні і мають неперервні частинні похідні за* y_1, y_2, ... , y_n, *то для будь-якої точки* (x_0, y_{10}, ... , y_{n0}) *цієї області існує єдиний розв'язок*

$$y_1 = \varphi_1(x), \quad y_2 = \varphi_2(x), \quad \dots \quad y_n = \varphi_n(x)$$

системи диференціальних рівнянь типу (1), *визначений у деякому околі точки* x_0 *такий, що задовольняє відповідній до точки початковій умові.*

Означення. **Загальним розв'язком** системи диференціальних рівнянь типу (1) буде сукупність функцій $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $\ldots y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, які при підстановці в систему (1) обертають її у тотожність.

Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Для простоти — три змінні.
Лінійна однорідна система:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \tag{2}$$

Нормальні системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Для простоти — три змінні.
Лінійна однорідна система:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \tag{2}$$

Властивості розв'язків (2):
1) Якщо y, z, u – розв'язки системи, то Cy, Cz, Cu, де $C = \mathrm{const}$ – теж є розв'язками цієї системи.
2) Якщо y_1, z_1, u_1 і y_2, z_2, u_2 – розв'язки системи, то $y_1 + y_2$, $z_1 + z_2$, $u_1 + u_2$ – теж є розв'язками системи.

Відшукання розв'язків

Підстановка Ойлера: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = \mathrm{const}$

Відшукання розв'язків

Підстановка Ойлера: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = \text{const}$
З (2) після скорочення на e^{kx} маємо однорідну СЛАР:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Відшукання розв'язків

Умова нетривіальності розв'язку:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

Відшукання розв'язків

Умова нетривіальності розв'язку:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0$$

Це рівняння називається **характеристичним рівнянням** і має три корені k_1, k_2, k_3. Кожному із цих коренів відповідає ненульовий розв'язок системи (2):

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 e^{k_1 x}, & z_1 &= \beta_1 e^{k_1 x}, & u_1 &= \gamma_1 e^{k_1 x}, \\ y_2 &= \alpha_2 e^{k_2 x}, & z_2 &= \beta_2 e^{k_2 x}, & u_2 &= \gamma_2 e^{k_2 x}, \\ y_3 &= \alpha_3 e^{k_3 x}, & z_3 &= \beta_3 e^{k_3 x}, & u_3 &= \gamma_3 e^{k_3 x}. \end{aligned}$$

Розв'язок системи

Лінійна комбінація цих розв'язків із довільними коефіцієнтами буде розв'язком системи (2):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$

$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$

$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Приклад

Умова:

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Розв'язання

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(5-k)(2-k)-4=0; \qquad 10-5k-2k+k^2-4=0;$$

$$k^2-7k+6=0; \qquad k_1=1; \qquad k_2=6;$$

Розв'язання

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Підставляючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_1 = -2$.

Розв'язання

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22}-k)\beta = 0 \end{cases}$$

Для k_1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Підставляючи $\alpha_1 = 1$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_1 = -2$.

Для k_2: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Покладаючи $\alpha_2 = 2$ (приймається будь-яке значення), одержуємо: $\beta_2 = 1$.

Розв’язок

Загальний розв’язок системи: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

Інший спосіб. Зведення до ЗДР вищого порядку

Продиференціюємо перше рівняння: $x'' = 5x' + 2y'$;
Підставимо у цей вираз похідну $y' = 2x + 2y$ з другого рівняння.

$$x'' = 5x' + 4x + 4y;$$

Підставимо сюди y, виражене з першого рівняння:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x$$

$$x'' - 7x' + 6x = 0$$

Приклад

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

Приклад

$$k_1 = 6; \qquad k_2 = 1$$

$$x = Ae^t + Be^{6t}; \qquad x' = Ae^t + 6Be^{6t};$$

Позначивши $A = C_1; \dfrac{1}{2}B = C_2$, одержуємо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = C_1e^t + 2C_2e^{6t} \\ y = -2C_1e^t + C_2e^{6t} \end{cases}$$