Диференціальні рівняння першого порядку

Приклад рівняння, що містить функцію і її похідну

Рівноприскорений рух матеріальної точки.

Приклад рівняння, що містить функцію і її похідну

Рівноприскорений рух матеріальної точки.
Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається за формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Приклад рівняння, що містить функцію і її похідну

Рівноприскорений рух матеріальної точки.
Відомо, що переміщення матеріальної точки при рівноприскореному русі є функцією часу і виражається за формулою:

$$S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$$

У свою чергу прискорення a є похідною за часом t від швидкості V, що також є похідною за часом t від переміщення S. Тобто

$$V = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}; \quad a = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2};$$

Тоді одержуємо: $S = f(t) = V_0 t + \dfrac{f''(t) \cdot t^2}{2}$ – рівняння зв'язує функцію $f(t)$ з незалежною змінною t і похідною другого порядку функції $f(t)$.

Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

$$\dot{x} = kx$$

Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

$$\dot{x} = kx$$

Через конкуренцію $k = a - bx$.

Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

$$\dot{x} = kx$$

Через конкуренцію $k = a - bx$.
Коефіцієнти a і b може бути зведено до одиниць вибором масштабів t і x.

$$\dot{x} = (1 - x)x$$

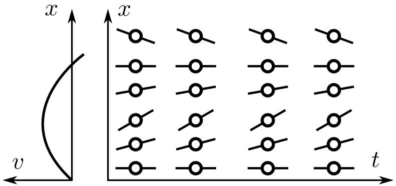
Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

$$\dot{x} = kx$$

Через конкуренцію $k = a - bx$.
Коефіцієнти a і b може бути зведено до одиниць вибором масштабів t і x.

$$\dot{x} = (1 - x)x$$



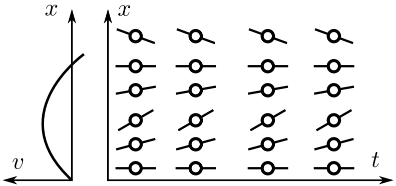
Ще один приклад: рівняння розмноження із врахуванням конкуренції

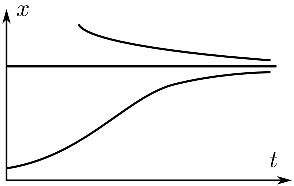
Швидкість зростання кількості особин у популяції пропорційна до самої кількості особин.

$$\dot{x} = kx$$

Через конкуренцію $k = a - bx$.
Коефіцієнти a і b може бути зведено до одиниць вибором масштабів t і x.

$$\dot{x} = (1 - x)x$$





Приклад: хижак-жертва

y – кількість хижаків, x – кількість жертв.

Приклад: хижак-жертва

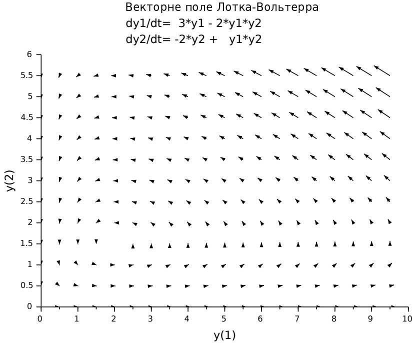
y – кількість хижаків, x – кількість жертв.

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases} \text{ – рівняння Лотка-Вольтерри}$$

Приклад: хижак-жертва

y – кількість хижаків, x – кількість жертв.

$$\begin{cases} \dot{x} = kx - axy \\ \dot{y} = -ly + bxy \end{cases} \text{ – рівняння Лотка-Вольтерри}$$



Означення. **Диференціальним рівнянням** називається рівняння, що зв'язує незалежні змінні, їхні функції і похідні (або диференціали) цієї функції.

Означення. **Диференціальним рівнянням** називається рівняння, що зв'язує незалежні змінні, їхні функції і похідні (або диференціали) цієї функції.

Означення. Якщо диференціальне рівняння має одну незалежну змінну, то воно називається **звичайним диференціальним рівнянням**, якщо ж незалежних змінних дві або більше, то таке диференціальне рівняння називається **диференціальним рівнянням у частинних похідних.**

Порядок диференціального рівняння

Означення. Найвищий порядок похідних, що входять у рівняння, називається **порядком диференціального рівняння.**

Приклади

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y') = 0$.

Приклади

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y') = 0$.
$x\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = y$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y', y'') = 0$

Приклади

$x^3y' + 8y - x + 5 = 0$ – звичайне диференціальне рівняння 1-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y') = 0$.

$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = y$ – звичайне диференціальне рівняння 2-го порядку. У загальному вигляді записується $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ – диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку.

Загальний розв'язок ЗДР

<u>**Означення.**</u> **Загальним розв'язком** диференціального рівняння називається така диференційована функція $y = \varphi(x, C)$, що при підстановці у вихідне рівняння замість невідомої функції обертає рівняння у тотожність.

Властивості загального розв'язку

1) Оскільки стала C – довільна величина, то, загалом кажучи, диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків.

Властивості загального розв'язку

1) Оскільки стала C – довільна величина, то, загалом кажучи, диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків.
2) При будь-яких початкових умовах $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ існує таке значення $C = C_0$, при якому розв'язком диференціального рівняння є функція $y = \varphi(x, C_0)$.

Частинні розв'язки ЗДР

<u>Означення.</u> Розв'язок вигляду $y = \varphi(x, C_0)$ називається **частинним розв'язком** диференціального рівняння.

Задача Коші (Cauchy)

Означення. **Задачею Коші** називається задача зі знаходження будь-якого частинного розв'язку диференціального рівняння типу $y = \varphi(x, C_0)$, що задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Теорема Коші (теорема про існування і єдиність розв'язку диференціального рівняння 1-го порядку)

Якщо функція $f(x, y)$ *неперервна у деякій області* D *у площині* xOy *і має у цій області неперервну частинну похідну* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, *то яка б не була точка* (x_0, y_0) *в області* D, *існує єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$ *рівняння* $y' = f(x, y)$, *визначений у деякому інтервалі, що містить точку* x_0, *що приймає при* $x = x_0$ *значення* $\varphi(x_0) = y_0$, *тобто існує єдиний розв'язок задачі Коші.*

Інтеграл ЗДР

Означення. **Інтегралом** диференціального рівняння називається будь-яке рівняння, що не містить похідних, для якого дане диференціальне рівняння є наслідком.

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = 0$.

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = 0$.
Розв'язання
Загальний розв'язок диференціального рівняння шукається за допомогою інтегрування лівої і правої частин рівняння, що попередньо перетворені у такий спосіб:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = 0$.

Розв'язання

Загальний розв'язок диференціального рівняння шукається за допомогою інтегрування лівої і правої частин рівняння, що попередньо перетворені у такий спосіб:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

$$x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}x$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = 0$.
Розв'язання
Загальний розв'язок диференціального рівняння шукається за допомогою інтегрування лівої і правої частин рівняння, що попередньо перетворені у такий спосіб:

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = 0$$

$$x\mathrm{d}y = -y\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_0$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_0$$

$$\ln|xy| = C_0$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_0$$

$$\ln|xy| = C_0$$

$$xy = \pm e^{C_0} = C$$

Розв'язання

Тепер інтегруємо:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_0$$

$$\ln|xy| = C_0$$

$$xy = \pm e^{C_0} = C$$

$y = \dfrac{C}{x}$ – це загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння.

Розв'язання з початковими умовами

Припустимо, задані деякі початкові умови: $x_0 = 1$; $y_0 = 2$, тоді маємо

$$2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$$

При підставлянні отриманого значення сталої в загальний розв'язок одержуємо частинний розв'язок при заданих початкових умовах (розв'язок задачі Коші).

$$y = \frac{2}{x}$$

Поле напрямів

Означення. Якщо у кожній точці деякої області на площині вибрано пряму, що проходить крізь цю точку, кажуть, що в області задано **поле напрямів**.

Інтегральна крива

Означення. **Інтегральною кривою** називається графік $y = \varphi(x)$ розв'язку диференціального рівняння на площині xOy.

Інтегральна крива

<u>Означення.</u> Інтегральною кривою називається графік $y = \varphi(x)$ розв'язку диференціального рівняння на площині xOy.
Лінія, яка у кожній своїй точці дотикається до визначеного у цій точці напрямку поля, є інтегральною кривою поля напрямів.

Інтегральна крива

Означення. **Інтегральною кривою** називається графік $y = \varphi(x)$ розв'язку диференціального рівняння на площині xOy.
Лінія, яка у кожній своїй точці дотикається до визначеного у цій точці напрямку поля, є інтегральною кривою поля напрямів.
Отже, оскільки напрямок дотичних визначається похідною, поле напрямів у випадку рівняння першого порядку задається значеннями похідної, залежність якої від координат точки визначається самим рівнянням.

Особливий розв'язок

Означення. **Особливим розв'язком** диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші (див. Теорема Коші) не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.

Особливий розв'язок

<u>**Означення.**</u> **Особливим розв'язком** диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші (див. Теорема Коші) не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.
Особливі розв'язки не залежать від сталої C.

Особливий розв'язок

<u>Означення.</u> Особливим розв'язком диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші (див. Теорема Коші) не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.
Особливі розв'язки не залежать від сталої C.
Особливі розв'язки не можна одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої C. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, що у кожній своїй точці дотична до принаймні однієї інтегральної кривої.

Особливий розв'язок

<u>**Означення.**</u> **Особливим розв'язком** диференціального рівняння називається такий розв'язок, у всіх точках якого умова єдиності Коші (див. Теорема Коші) не виконується, тобто в околі деякої точки (x, y) існує не менше двох інтегральних кривих.
Особливі розв'язки не залежать від сталої C.
Особливі розв'язки не можна одержати із загального розв'язку ні при яких значеннях сталої C. Якщо побудувати сімейство інтегральних кривих диференціального рівняння, то особливий розв'язок буде зображуватися лінією, що у кожній своїй точці дотична до принаймні однієї інтегральної кривої.
Не кожне диференціальне рівняння має особливі розв'язки.

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' + y = 0.$$

Знайти особливий розв'язок, якщо він існує.

Розв’язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -x + C$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -x + C$$

$$|y| = e^{-x} \cdot e^{C}$$

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -x + C$$

$$|y| = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$y = C_1 \cdot e^{-x}$$

Розв'язання

Дане диференціальне рівняння має також особливий розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок неможливо одержати із загального, однак при підставлянні у вихідне рівняння одержуємо тотожність.

Розв'язання

Дане диференціальне рівняння має також особливий розв'язок $y = 0$. Цей розв'язок неможливо одержати із загального, однак при підставлянні у вихідне рівняння одержуємо тотожність.
Думка, що розв'язок $y = 0$ можна одержати із загального розв'язку при $C = 0$, помилкова, адже $C_1 = e^C \neq 0$.

Означення. **Диференціальним рівнянням першого порядку** називається співвідношення, що зв'язує функцію, її першу похідну і незалежне змінну, тобто співвідношення вигляду:

$$F(x, y, y') = 0$$

Розв'язне відносно похідної диференціальне рівняння першого порядку

Якщо таке співвідношення перетворити до типу $y' = f(x, y)$ то це диференціальне рівняння першого порядку буде називатися рівнянням, **розв'язним відносно похідної.**

Диференціальна форма рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y); \quad \mathrm{d}y = f(x, y)\mathrm{d}x; \quad f(x, y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0;$$

Диференціальна форма рівняння

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y); \quad \mathrm{d}y = f(x,y)\mathrm{d}x; \quad f(x,y)\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0;$$

$$f(x,y) = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y) \neq 0$$

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

– це так звана **диференціальна форма** рівняння першого порядку.

Рівняння типу $y' = f(x)$

$f(x)$ – визначена і неперервна на деякому інтервалі $a < x < b$.

Рівняння типу $y' = f(x)$

$f(x)$ – визначена і неперервна на деякому інтервалі $a < x < b$.
У такому випадку всі розв'язки даного диференціального рівняння знаходяться як $y = \int f(x)\mathrm{d}x + C$. Якщо задані початкові умови x_0 і y_0, то можна визначити сталу C.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = \alpha(x)\beta(y).$$

Інші форми запису:

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad \mathrm{d}y - \alpha(x)\beta(y)\mathrm{d}x = 0; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\beta(y)} - \alpha(x)\mathrm{d}x = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Розв'язання

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$$

Розв'язання

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$$

$$X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0$$

Розв'язання

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$$

$$X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y = C$$

Розв'язання

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$$

$$X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y = C$$

Після знаходження відповідних інтегралів виходить загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.

Розв'язання

$$\alpha(x) = -X(x); \quad \frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$$

$$X(x)\mathrm{d}x + Y(y)\mathrm{d}y = 0$$

$$\int X(x)\mathrm{d}x + \int Y(y)\mathrm{d}y = C$$

Після знаходження відповідних інтегралів виходить загальний розв'язок диференціального рівняння з відокремлюваними змінними.
Якщо задані початкові умови, то при їхній підстановці в загальний розв'язок знаходиться стала величина C, а, відповідно, і частинний розв'язок.

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$yy' = \frac{-2x}{\cos y}$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$yy' = \frac{-2x}{\cos y}$$

Розв'язання

$$y \cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$yy' = \frac{-2x}{\cos y}$$

Розв'язання

$$y \cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$$

$$y \cos y \mathrm{d}y = -2x \mathrm{d}x$$

Приклад

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$yy' = \frac{-2x}{\cos y}$$

Розв'язання

$$y\cos y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x$$

$$y\cos y\mathrm{d}y = -2x\mathrm{d}x$$

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = -2\int x\mathrm{d}x$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y \cos y \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y \mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array} \right|$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y \mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array} \right| = y\sin y - \int \sin y \mathrm{d}y$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array} \right| = y\sin y - \int \sin y\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array} \right| = y\sin y - \int \sin y\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y\,\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{ll} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y\,\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{array}\right| = y\sin y - \int \sin y\,\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині, береться частинами:

$$\int y\cos y\mathrm{d}y = \left| \begin{matrix} u = y; & \mathrm{d}v = \cos y\mathrm{d}y; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = \sin y \end{matrix} \right| = y\sin y - \int \sin y\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y$$

$$y\sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

Це є загальний інтеграл вихідного диференціального рівняння, оскільки шукана функція і не виражена через незалежну змінну. У цьому і полягає **відмінність** загального (частинного) **інтеграла** від загального (частинного) **розв'язку.**

Перевірка

$$y' \sin y + yy' \cos y - y' \sin y + 2x = 0$$

$yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$ – вірно.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

$$x + C = \int \ln y \mathrm{d}(\ln y)$$

Приклад

Знайти розв'язок диференціального рівняння $\dfrac{y}{y'} = \ln y$ за умови $y(2) = 1$.

Розв'язання

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \ln y$$

$$\mathrm{d}x = \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

$$\int \mathrm{d}x = \int \frac{\ln y \mathrm{d}y}{y}$$

$$x + C = \int \ln y \mathrm{d}(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

Розв'язання

При $y(2) = 1$ одержуємо $2 + C = \dfrac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2$

Розв'язання

При $y(2) = 1$ одержуємо $2 + C = \dfrac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2$

$$2(x-2) = \ln^2 y$$

Розв'язання

При $y(2) = 1$ одержуємо $2 + C = \dfrac{\ln^2 1}{2}; \quad \Rightarrow \quad 2 + C = 0; \quad \Rightarrow \quad C = -2$

$$2(x-2) = \ln^2 y$$

$$y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$$

Перевірка

$$y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$$

Перевірка

$$y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}}(\pm\sqrt{2x-4)}}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ – загальний інтеграл

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$27y = (x + C)^3$ – загальний інтеграл

$y = \dfrac{1}{27}(x + C)^3$ – загальний розв'язок

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2+1)$.
Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = x\mathrm{d}x; \quad \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int x\mathrm{d}x;$$

$$\operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right);$$

Приклад

Розв'язати рівняння $\dfrac{yy'}{x} + e^y = 0$ за умови $y(1) = 0$.

$$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xe^y = 0$$

$$y\mathrm{d}y + xe^y\mathrm{d}x = 0; \quad \frac{y}{e^y}\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x;$$

$$\int \frac{y}{e^y}\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x;$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині будемо брати частинами.

$$\int y e^{-y} \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{ll} u = y; & e^{-y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}v; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = -e^{-y}; \end{array} \right|$$

Розв'язання

Інтеграл, що стоїть в лівій частині будемо брати частинами.

$$\int ye^{-y}\mathrm{d}y = \begin{vmatrix} u = y; & e^{-y}\mathrm{d}y = \mathrm{d}v; \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}y; & v = -e^{-y}; \end{vmatrix} =$$

$$= -e^{-y}y - \int -e^{-y}\mathrm{d}y = -e^{-y}y - e^{-y} = -e^{-y}(y+1);$$

$$e^{-y}(y+1) = \frac{x^2}{2} + C_0;$$

$$2e^{-y}(y+1) = x^2 + C$$

Якщо $y(1) = 0$, то $2e^0(0+1) = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + C; \quad \Rightarrow \quad C = 1;$
Отже, частинний інтеграл: $2e^{-y}(y+1) = x^2 + 1$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$.

$$y' + \sin(x+y) - \sin(x-y) = 0$$

$$y' - 2\sin\frac{x-y-x-y}{2}\cos\frac{x-y+x+y}{2} = 0$$
$$y' - 2\sin(-y)\cos x = 0$$
$$y' + 2\sin y\cos x = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = -2\cos x\mathrm{d}x; \quad \int\frac{\mathrm{d}y}{\sin y} = -2\int\cos x\mathrm{d}x;$$

Одержуємо загальний інтеграл:

$$\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}\right| = -2\sin x + C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0$.

Приклад

Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$.

Розв'язання

$$2xe^{-x^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \dfrac{y'}{y} = 0.$

Розв'язання

$$2xe^{-x^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0.$

Розв'язання

$$2xe^{-x^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2xe^{-x^2} + \frac{y'}{y} = 0$.

Розв'язання

$$2xe^{-x^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}y}{y} = 0$$

$$\int 2xe^{-x^2}\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = C$$

$$-e^{-x^2} + \ln|y| = C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\left(y^2 + 1\right)$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\left(y^2 + 1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = x\mathrm{d}x$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2+1)$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\left(y^2+1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = x\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int x\mathrm{d}x; \operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C$$

Приклад

Розв'язати рівняння $y' = x(y^2 + 1)$.

Розв'язання

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\left(y^2 + 1\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = x\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + 1} = \int x\mathrm{d}x; \operatorname{arctg} y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Розв'язання

Припустімо, задані деякі початкові умови x_0 і y_0.

Розв'язання

Припустімо, задані деякі початкові умови x_0 і y_0.
Тоді:

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Розв'язання

Припустімо, задані деякі початкові умови x_0 і y_0.
Тоді:

$$\operatorname{arctg} y_0 = \frac{x_0^2}{2} + C_0; \quad \Rightarrow \quad C_0 = \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2};$$

Одержуємо частинний розв'язок $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} y_0 - \frac{x_0^2}{2}\right).$