**ГОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»**

С.В. Тышкевич

# *Лекции по теории функций комплексного переменного*

**Саратов, 2010**

# Глава 1. Комплексные числа и их геометрическое представление

## §1.1. Понятие комплексного числа, формы записи комплексного числа

Комплексным числом называется (формальное) выражение вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма), где $x$ и $y$ – действительные числа, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица ($i^2 = -1$). Число $x$ называют действительной частью комплексного числа $z$, число $y$ – мнимой частью комплексного числа $z$ и обозначают соответственно $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Если $y = 0$, то комплексное число $z = x + i \cdot 0$ отождествляется с действительным числом $x$; если $x = 0$, то комплексное число $z = iy$ называют чисто мнимым. Множество всех комплексных чисел обозначается **C**.

Два комплексных числа $z_1$ и $z_2$ равны между собой тогда и только тогда, когда равны между собой их действительные и мнимые части: $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$, $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Для геометрического изображения комплексных чисел на плоскости выбирают прямоугольную декартову систему координат и каждую точку $M(x, y)$ (каждый радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$) рассматривают как образ комплексного числа $z = x + iy$. Это условие устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех точек плоскости и множеством всех комплексных чисел. При этом множество всех действительных чисел изображается осью абсцисс, называемой действительной осью, множество чисто мнимых чисел – осью ординат, которая называется мнимой осью. Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется модулем комплексного числа $z$ и обозначается $|z|$.

Полярный угол, то есть угол $\varphi$, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ (предполагается, что $z \neq 0$) с положительным направлением действительной оси, называется аргументом комплексного числа $z$ и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$. Последний определен с точностью до слагаемого, кратного $2\pi$. Значение $\varphi$ аргумента, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \leq \pi$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$. Очевидно, что:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Отметим следующие соотношения: если $z = x + iy$, то

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если } x > 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi, \text{ если } x < 0, y \geq 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi, \text{ если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sign} y, \text{ если } x = 0, y \neq 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Выражая действительную и мнимую части числа $z \neq 0$ через модуль и аргумент: $\operatorname{Re} z = |z|\cos\varphi$, $\operatorname{Im} z = |z|\sin\varphi$, запишем само число $z$ в виде:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{1.2}$$

называемом тригонометрической формой этого числа.

Обозначая $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, получим так называемую показательную форму комплексного числа:

$$z = |z|\, e^{i\varphi}. \tag{1.3}$$

Число $x - iy$ называется сопряженным числу $z = x + iy$ и обозначается $\bar{z}$. Точки $z$ и $\bar{z}$ симметричны относительно действительной оси, и $|z| = |\bar{z}|$; кроме того, если $z$ не есть действительное отрицательное число, $\arg z = -\arg \bar{z}$, иначе $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$.

**<u>Пример 1.1.</u>** Записать комплексное число $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ в тригонометрической и показательной формах.

***Решение.*** По формулам (1.1) найдем модуль и аргумент числа $z$:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2, \ \arg z = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \ (\text{т.к. } x > 0).$$

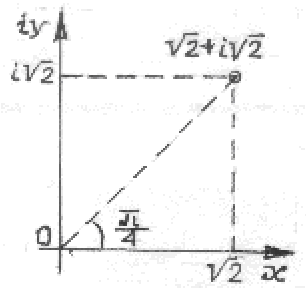



Рис. 1.1

Согласно формуле (1.2), $z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма записи числа.

Запишем число $z$ в показательной форме при помощи формулы (1.3): $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Точка $z$ показана на рис. 1.1.

## §1.2. Операции над комплексными числами

1. Сложение. Суммой комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. Умножение. Произведением комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + {}$ ${}+ x_2 y_1)$.

3. Вычитание. Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 - z_2$, являющееся решением уравнения $z_1 = z + z_2$ и вычисляемое по формуле $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$.

4. Деление. Частным чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ ($z_2 \neq 0$) называется число $\dfrac{z_1}{z_2}$, являющееся решением уравнения $z_1 = z z_2$ и вычисляемое по формуле $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$.

**Пример 1.2.** Найти $\overline{z_2}$, $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 5 + i$, $z_2 = 2 + 3i$

***Решение.***

$\overline{z_2} = 2 - 3i$,

$z_1 + z_2 = 5 + i + 2 + 3i = (5 + 2) + i(1 + 3) = 7 + 4i$,

$z_1 - z_2 = 5 + i - 2 - 3i = (5 - 2) + i(1 - 3) = 3 - 2i$,

$z_1 \cdot z_2 = (5 + i)(2 + 3i) = 10 + 15i + 2i + 3i^2 = 10 + i(15 + 2) - 3 = 7 + 17i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+i}{2+3i} = \frac{(5+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{10 - 15i + 2i - 3i^2}{4 - 9i^2} = \frac{10 + i(-15+2) + 3}{4+9} =$$
$$= \frac{13 - 13i}{13} = 1 - i.$$

Геометрически сложение и вычитание комплексных чисел производится по правилу сложения и вычитания соответствующих векторов. Для геометрического истолкования умножения и деления комплексных чисел запишем $z_1$ и $z_2$ в тригонометрической форме: $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)). \tag{1.4}$$

.

Поэтому умножение $z_1$ на $z_2$ ($z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0$) означает растяжение вектора $z_1$ в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол $\mathrm{Arg}\, z_2$ против часовой стрелки, деление $z_1$ на $z_2$ ($z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0$) – сжатие вектора $z_1$ в $|z_2|$ раз и его поворот около своего начала на угол $\mathrm{Arg}\, z_2$ по часовой стрелке.

Из правила умножения следует, что

$$z^m = |z|^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi),\quad m\in \mathbf{Z}. \tag{1.5}$$

Справедлива формула Муавра:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\quad k=0,1,?\ \ ,n-1. \tag{1.6}$$

<u>**Пример 1.3.**</u> Записав числа $z_1=\dfrac{i}{i-1}$ и $z_2=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме, найти $z_1\cdot z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$.

***Решение.*** Прежде всего, запишем число $z_1$ в алгебраической форме:

$$z_1=\frac{i(-1-i)}{(i-1)(-1-i)}=\frac{-i-i^2}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

Далее, по формулам (1.1) находим модули и аргументы чисел $z_1$ и $z_2$:

$$|z_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\arg z_1=\mathrm{arctg}\frac{-0{,}5}{0{,}5}=\mathrm{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4},$$

$$|z_2|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1,$$
$$\arg z_2=\mathrm{arctg}\frac{-0{,}5\sqrt{3}}{0{,}5}=\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}.$$

Воспользовавшись формулами (1.4), получаем:

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

**Пример 1.4.** Записать число $z=\frac{(1+i)^8}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}$ в алгебраической форме.

***Решение.*** Прежде всего, найдем модули и аргументы чисел $1+i$ и $1-i\sqrt{3}$ по формулам (1.1):

$$|1+i|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\ \arg(1+i)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1}=\operatorname{arctg} 1=\frac{\pi}{4},$$
$$\left|1-i\sqrt{3}\right|=\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=2,\ \arg\left(1-i\sqrt{3}\right)=\operatorname{arctg}\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\frac{\pi}{3}.$$

Воспользовавшись формулами (1.5) и (1.4), получаем:

$$z=\frac{(1+i)^8}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^6}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^8}{\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4}\right)}{2^6\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{6\pi}{3}\right)\right)}=$$

$$=\frac{2^4(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)}{2^6(\cos(-2\pi)+i\sin(-2\pi))}=\frac{1}{2^2}(\cos(2\pi-(-2\pi))+i\sin(2\pi-(-2\pi)))=$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=\frac{1}{4}.$$

**Пример 1.5.** Вычислить $\sqrt[6]{-64}$.

***Решение.*** Найдем модуль и аргумент числа $-64$ по формулам (1.1) и воспользуемся формулой Муавра (1.6):

$$|-64| = \sqrt{(-64)^2 + 0^2} = 64, \ \arg(-64) = \pi \ \text{(т.к. } x < 0, \ y = 0\text{)}.$$

$$\sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{64}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Таким образом,

$$\sqrt[6]{-64} = \begin{cases} 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i \ (k = 0); \\ 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i \ (k = 1); \\ 2\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i \ (k = 2); \\ 2\left(\cos\frac{\pi + 6\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 6\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i \ (k = 3); \\ 2\left(\cos\frac{\pi + 8\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 8\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i \ (k = 4); \\ 2\left(\cos\frac{\pi + 10\pi}{6} + i\sin\frac{\pi + 10\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i \ (k = 5). \end{cases}$$

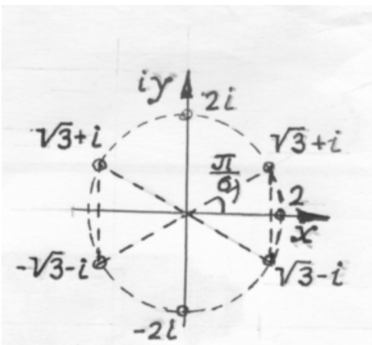



Рис. 1.2

***Замечание.*** Эту задачу можно было решить графически, воспользовавшись тем, что все $n$ значений корня $n$-ой степени из $z$ лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат и являются вершинами правильного $n$-угольника, вписанного в эту окружность (рис. 1.2).

## §1.3. Предел последовательности. Бесконечность. Стереографическая проекция

Последовательность комплексных чисел $\{z_n = x_n + iy_n\}$ называется сходящейся к пределу $c = a + ib$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = c\right)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon) \in N$ такое, что при всех $n > N(\varepsilon)$ $|z_n - c| < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in N$ $\forall n > N(\varepsilon)$ $|z_n - c| < \varepsilon$).

Соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + iy_n) = a + ib$ эквивалентно двум соотношениям: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Поэтому любой вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел эквивалентен вопросу о сходимости двух последовательностей действительных чисел.

$\varepsilon$-окрестностью бесконечно удаленной точки (точки $\infty$) называется внешность круга с центром в начале координат и радиусом $\varepsilon$.

Последовательность $\{z_n\}$ называется сходящейся к $\infty$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty\right)$, если $\forall\varepsilon > 0$ все ее точки, начиная с некоторого номера, принадлежат окрестности $|z| > \varepsilon$ бесконечно удаленной точки. Следовательно, условие $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ эквивалентно условию $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n| = +\infty$.

Чтобы получить геометрическое изображение числа $\infty$, прибегают к представлению комплексных чисел точками сферы.

Опишем из точки $O$ комплексной плоскости $z$, как из центра, сферу радиуса 1. Окружность, по которой сфера пересекается комплексной плоскостью, назовем экватором, прямую, проходящую через $O$ и перпендикулярную плоскости, – осью сферы, а точки $N$ и $S$, в которых ось пересекает сферу, – северным и южным полюсами соответственно. «Широта» считается от экватора в пределах от $-\dfrac{\pi}{2}$ (южный полюс) до $\dfrac{\pi}{2}$ (северный полюс), «долгота» – в плоскости экватора от $-\pi$ (не включая) до $\pi$ (включая); при этом положительным направлением считается направление против часовой стрелки, если смотреть на экватор со стороны северного полюса. Соединяя точку $N$ с различными точками сферы, будем отмечать на каждом луче точку его встречи с плоскостью. Таким образом, все точки сферы, кроме $N$, проецируются на плоскость. Эта проекция называется стереографической. Точку $N$ рассматривают как изображение на сфере бесконечно удаленной точки.

Комплексная плоскость, образованная лишь собственными (конечными) точками, называется конечной комплексной плоскостью. Комплексная плоскость, к которой присоединяется единственная бесконечно удаленная точка, называется расширенной комплексной плоскостью. Наглядно конечную плоскость можно представить сферой, из которой исключена одна точка (точка $N$).

## §1.4. Множества точек на плоскости. Непрерывные кривые

Пусть даны два множества $E_1$ и $E_2$ в расширенной комплексной плоскости.

Расстоянием между $E_1$ и $E_2$ называется величина $\rho(E_1, E_2) = \inf\limits_{z\in E_1, w\in E_2}|z - w|$.

Диаметром множества $E_1$ называется (возможно, бесконечная) величина $\sup\limits_{z\in E_1, w\in E_1} |z-w|$.

Окрестностью точки $z_0$ называется круг $|z-z_0|<r,\ r>0$.

Точка $z$ называется предельной точкой множества $E$ , если в любой ее окрестности бесконечно много точек множества $E$.

Точка $z$ называется внутренней точкой множества $E$, если имеется ее окрестность, состоящая только из точек $E$. Соответственно, $z$ является внешней точкой множества $E$, если имеется окрестность точки $z$, состоящая только из точек, не принадлежащих множеству $E$.

Граничной точкой множества $E$ называется точка, в любой окрестности которой есть точки, принадлежащие множеству $E$ и не принадлежащие этому множеству. Совокупность всех граничных точек множества $E$ называется его границей и обозначается $\partial E$.

Множество, содержащее свою границу, называется замкнутым.

Множество, получающееся присоединением к $E$ его границы, называется замыканием $E$ и обозначается $\overline{E}$.

Множество называется открытым, если все его точки внутренние.

Открытое (замкнутое) множество называется связным, если его нельзя разбить на два открытых (замкнутых) множества, не имеющих общих точек.

Связное открытое множество называется областью (любые две точки множества $E$ можно соединить между собой ломаной, содержащейся в $E$).

Ограниченная область комплексной плоскости называется $n$-связной областью, если ее граница состоит из $n$ связных замкнутых множеств, называемых компонентами границы. Любую ограниченную $n$-связную область можно представлять себе как односвязную (1-связную) область, в которой прорезана $n-1$ дырка.

Пусть $x(t), y(t)$ – непрерывные на отрезке $[a,b]$ функции параметра $t$, $a\le t\le b$.

Уравнение $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ называется параметрическим уравнением кривой.

Направление движения точки $z(t)$, отвечающее возрастанию параметра $t$, будем называть положительным.

Если одна и та же точка плоскости отвечает нескольким точкам кривой, то говорят, что кривая имеет точки самопересечения.

Кривую, не имеющую самопересечений, называют простой (или жордановой) кривой.

Кривую, у которой конец совпадает с началом, называют замкнутой кривой.

Непрерывная кривая $L$, задаваемая уравнением $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $a\le t\le b$, называется спрямляемой, если при любых значениях $t_0,t_1,t_2,...,t_n$, $a=t_0<t_1<t_2<...<t_n=b$, и при любом их числе $n+1$ сумма

$\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|$ остается ограниченной. Верхняя грань этих сумм относительно всевозможных систем значений $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$ называется длиной кривой $L$.

**<u>Теорема</u> (критерий связности открытого множества).**

Для того чтобы открытое множество было связным необходимо и достаточно, чтобы любые две его точки можно было соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

**<u>Теорема Жордана.</u>**

Каждая простая замкнутая кривая разбивает расширенную комплексную плоскость на две области и представляет собой границу каждой из этих областей.

**<u>Пример 1.6.</u>** Изобразить на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному условию: a) $|z+3-i|=2$, b) $\operatorname{Im}(z+i)>1$.

***Решение.***

a) $|z+3-i|=2 \Leftrightarrow |x+iy+3-i|=2 \Leftrightarrow |x+3+i(y-1)|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=2 \Leftrightarrow (x+3)^2+(y-1)^2=4$, то есть искомое множество точек – окружность радиуса 2 с центром в точке (-3, 1).

b) $\operatorname{Im}(z+i)>1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x+iy+i)>1 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(x+i(y+1))>1 \Leftrightarrow y+1>1 \Leftrightarrow y>0$, то есть искомое множество точек – верхняя полуплоскость.

# Глава 2. Аналитические функции и их свойства

## §2.1. Функции комплексного переменного. Предел функции в точке. Непрерывность

Пусть каждой точке $z=x+iy$ области $D$ расширенной комплексной плоскости $\overline{C}$ поставлено в соответствие число $w=u+iv\in W\subset\overline{C}$. Тогда говорят, что задана функция $f$ комплексного переменного (или отображение области $D$ в область $W$). Значения этой функции можно представить в виде

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \tag{2.1}$$

Если каждому значению $z$ соответствует лишь одно значение $w$, то функция называется однозначной, в противном случае – многозначной.

**Пример 2.1.** $w=|z|$, $w=\operatorname{Re} z$, $w=\bar{z}$ – однозначные функции, определенные на всей плоскости; $w=\sqrt[n]{z}$ – многозначная функция ($n$-значная), определенная на всей плоскости; $w=\operatorname{Arg} z$ – многозначная функция (бесконечнозначная), определенная на множестве всех точек, отличных от нуля.

Пусть $w=f(z)$ – однозначная функция, определенная на множестве $D$, и $z_0$ – предельная точка этого множества. Число $A$ называется пределом функции $f(z)$ при $z \to z_0$, если для любой окрестности $U_A$ точки $A$ найдется такая проколотая окрестность $U'_{z_0}$ точки $z_0$ (то есть окрестность, из которой удалена точка $z_0$), что для всех $z \in U'_{z_0}$ значения $f(z) \in U_A$. Другими словами, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что из неравенства $0 < \rho(z, z_0) < \delta$ следует неравенство $\rho(f(z), A) < \varepsilon$. Обозначают $A = \lim\limits_{z \to z_0, z\in D} f(z)$.

Если $A = A_1 + iA_2$, $A \neq \infty$, $z_0 = x_0 + iy_0$, то равенство $A = \lim\limits_{z \to z_0, z\in D} f(z)$ эквивалентно двум соотношениям для действительных функций из (2.1):

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x,y) = A_1, \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x,y) = A_2.$$

Функция $f(z)$, определенная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \overline{C}$, называется непрерывной в точке $z_0$, если существует $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ (при $f(z_0) \neq \infty$ говорят о непрерывности в смысле $C$, при $f(z_0) = \infty$ – о непрерывности в смысле $\overline{C}$).

Условие непрерывности $f(z)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентно двум следующим:

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x,y) = u(x_0, y_0),$$

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x,y) = v(x_0, y_0),$$

т.е. функция комплексного переменного непрерывна в точке $z_0$ тогда и только тогда, когда ее действительная и мнимая части, рассматриваемые как функции действительных переменных $x$ и $y$, непрерывны в той же точке. Поэтому многие свойства непрерывных функций двух действительных переменных непосредственно переносятся на непрерывные функции комплексного переменного.

## §2.2. Дифференцируемость: производная функции по множеству, критерий дифференцируемости, аналитические функции

Пусть $w = f(z)$ – однозначная функция комплексного переменного, определенная на множестве $D$, и $z_0$ – предельная точка этого множества. Производной функции $f(z)$ по множеству $D$ в точке $z_0$ называется предел (если он существует)

$$\lim_{z \to z_0, z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

обозначаемый $f'_D(z_0)$ (или $f'(z_0)$). При этом функция $f(z)$, обладающая производной, называется дифференцируемой по множеству $D$ в точке $z_0$.

Условие дифференцируемости $f(z)$ в точке $z_0$ можно записать в виде

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\Delta f(z) = f(z) - f(z_0)$, $\Delta z = z - z_0$, $\varepsilon(z_0, \Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$ ($z \in D$).

Отсюда непосредственно следует, что функция, дифференцируемая в точке $z_0 \in D$, является непрерывной в этой точке (по этому множеству).

***Замечание.*** Роль множества $D$ в определении понятия дифференцируемости существенна. Например, если $D$ – действительная ось и $f(z) = f(x) = x$, то $f'_D(x)$ существует при любом $x \in D$ и равна 1 (функция дифференцируема всюду на $D$). Если же рассматривать функцию $f(z) = x$ на всей комплексной плоскости (очевидно, она совпадает с исходной функцией, когда $z \in D$), то $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \dfrac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$. Это выражение не имеет предела при $z \to z_0$ ($z_0$ – любая точка плоскости), так как при $x = x_0$, $y \neq y_0$ равно 0, а при $x \neq x_0$, $y = y_0$ равно 1. Таким образом, функция $f(z) = x$ не дифференцируема по плоскости ни в одной точке.

Из определения производной и свойств пределов функций комплексного переменного следует, что основные правила дифференциального исчисления справедливы и в комплексном анализе.

**<u>Теорема</u> (необходимые и достаточные условия дифференцируемости).**

Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, определенная в некоторой области $D$, была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ этой области как функция комплексного переменного, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ были дифференцируемы в той же точке (как функции двух действительных переменных) и чтобы выполнялись условия Коши-Римана (Эйлера-Д'Аламбера):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (2.2)$$

При выполнении условий теоремы производная $f'(z)$ может быть записана в одной из форм: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

***Доказательство.***

*Необходимость.* Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0$ области $D$, тогда

$$\Delta f(z)=f'(z_0)\Delta z+\varepsilon(z_0,\Delta z)\cdot\Delta z,$$

где $\Delta f(z)=f(z)-f(z_0)=\Delta u+i\Delta v$, $\Delta z=z-z_0=\Delta x+i\Delta y$, $f'(z_0)=a+ib$, $\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2$, причем $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ стремятся к 0, когда $\Delta x$ и $\Delta y$ одновременно стремятся к 0.

Поэтому $\Delta u=a\Delta x-b\Delta y+\varepsilon_1\Delta x-\varepsilon_2\Delta y$, $\Delta v=b\Delta x+a\Delta y+\varepsilon_2\Delta x-\varepsilon_1\Delta y$. Отсюда в силу того, что $\lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_1=\lim\limits_{\Delta x,\Delta y\to 0}\varepsilon_2=0$, следует:

1) функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ двух действительных переменных $x$ и $y$ дифференцируемы в точке $(x_0,y_0)$;

2) $\frac{\partial u}{\partial x}=a$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-b$, $\frac{\partial v}{\partial x}=b$, $\frac{\partial v}{\partial y}=a$, то есть $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

*Достаточность.* Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке $(x_0,y_0)$ и выполнены условия Коши-Римана. Тогда

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$
$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\beta_1\Delta x+\beta_2\Delta y,$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ стремятся к нулю при $\Delta x$ и $\Delta y$, стремящихся к нулю.

Обозначая $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a$, $-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=b$, получим

$$\Delta f(z)=\Delta u+i\Delta v=a(\Delta x+i\Delta y)+ib(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\beta_1)\Delta x+(\alpha_2+i\beta_2)\Delta y=$$
$$=(a+ib)\Delta z+\left[(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right]\Delta z=A\Delta z+\varepsilon\Delta z.$$

Так как $|\varepsilon| = \left|(\alpha_1 + i\beta_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta z} + (\alpha_2 + i\beta_2)\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le |\alpha_1 + i\beta_1| \cdot \left|\dfrac{\Delta x}{\Delta z}\right| + |\alpha_2 + i\beta_2| \cdot \left|\dfrac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le$ $\le |\alpha_1 + i\beta_1| + |\alpha_2 + i\beta_2| \le |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\beta_1| + |\beta_2|$, то $\varepsilon$ вместе с $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ стремится к 0 при $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, стремящемся к 0. А значит, функция $f(z)$ дифференцируема, и ее производная $f'(z_0) = A = a + ib = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = ?$ . ■

Функция $f(z)$, дифференцируемая в каждой точке области $D$, называется дифференцируемой в этой области, или аналитической в этой области.

С помощью полярных координат $|z| = r$, $\operatorname{Arg} z = \varphi$ условия Коши-Римана записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{2.3}$$

**Пример 2.2.** Исследовать функции на дифференцируемость и аналитичность: a) $f(z) = e^z$, b) $f(z) = \bar{z}$.

***Решение.***

a) Запишем функцию $f(z) = e^z$ в виде (2.1), воспользовавшись тем, что ее свойства справедливы как для действительных $z$, так и для комплексных $z$:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \Rightarrow u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дифференцируемыми как функции двух действительных переменных при всех $x$ и $y$. Условия Коши – Римана (2.2) также выполняются при всех $x$ и $y$, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Таким образом, функция $f(z) = e^z$ является дифференцируемой и аналитической во всей комплексной плоскости.

b) Запишем функцию $f(z) = \bar{z}$ в виде (2.1):

$$\bar{z} = x - iy \Rightarrow u(x,y) = x, \quad v(x,y) = -y.$$

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дифференцируемыми как функции двух действительных переменных при всех $x$ и $y$. Выясним, в каких точках комплексной плоскости выполняются условия Коши – Римана (2.2):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-1.$$

Таким образом, функция $f(z)=\bar{z}$ не является дифференцируемой ни в одной точке комплексной плоскости.

**<u>Пример 2.3.</u>** Является ли функция $f(z)=z\cdot\bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке комплексной плоскости?

***Решение.*** Так как $z\cdot\bar{z}=|z|^2=x^2+y^2$, то $u(x,y)=x^2+y^2$, $v(x,y)=0$. Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ являются дифференцируемыми как функции двух действительных переменных при всех $x$ и $y$. Далее,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

$$\begin{cases}2x=0,\\2y=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\y=0.\end{cases}$$

Значит, условия Коши – Римана (2.2) выполняются в единственной точке $O(0,0)$. Таким образом, функция $f(z)=z\cdot\bar{z}$ является дифференцируемой в этой точке, но не является аналитической ни в одной точке комплексной плоскости.

## §2.3. Гармонические и сопряженные гармонические функции

Гармонической в области $D\subset R^2$ функцией называется действительная функция $u(x,y)$ двух действительных переменных, имеющая в $D$ непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяющая уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{2.4}$$

**<u>Теорема.</u>**

Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ – аналитическая в области $D$ функция, то $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – гармонические в области $D$.

***Доказательство.*** Так как $f(z)$ – аналитическая в области $D$ функция, то $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Можно доказать также, что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дважды дифференцируемы, а значит, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Поэтому $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Аналогично, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=0$. ■

Если гармонические функции связаны в области уравнениями Коши-Римана, то они называются сопряженными гармоническими функциями.

**<u>Теорема</u> (о восстановлении аналитической функции).**

Для любой гармонической в односвязной области $D$ функции $\varphi(x,y)$ существует аналитическая функция $f(z)$, действительная часть которой совпадает с $\varphi(x,y)$. Эта функция определена с точностью до постоянного чисто мнимого слагаемого.

***Доказательство.*** Пусть $\varphi(x,y)$ – какая-либо функция, гармоническая в данной односвязной области $D$. Найдем функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, аналитическую в области $D$, действительная часть которой совпадает с $\varphi(x,y)$: $u(x,y)=\varphi(x,y)$.

В силу условий Коши-Римана $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=P(x,y)$, $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=Q(x,y)$, где функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны в области $D$, обладают в ней непрерывными частными производными первого порядка. При этом выполняется условие $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, поэтому криволинейный интеграл $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$ не зависит от вида пути, соединяющего точки $(x_0,y_0)$ и $(x,y)$ области $D$, и, следовательно, представляет собой однозначную функцию $\Psi(x,y)$ точки $(x,y)$.

Эта функция имеет те же производные, что и искомая функция $v(x,y)$: $\frac{\partial \Psi}{\partial x}=P(x,y)=\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial \Psi}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}$, поэтому $v(x,y)$ может отличаться от $\Psi(x,y)$ только на постоянное слагаемое:

$$v(x,y)=\Psi(x,y)+c=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy+c=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+c\,. \quad (2.5)$$

Таким образом, имеем две дифференцируемые в области $D$ функции $u=\varphi(x,y)$, $v=\Psi(x,y)+c$, связанные уравнениями Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Следовательно, функция $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=$ $=\varphi(x,y)+i\Psi(x,y)+ic$ аналитическая в области $D$. ■

***Замечание.*** Аналогично находится аналитическая функция по ее мнимой части.

**Пример 2.4.** Найти аналитическую функцию $f(z)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^3-3xy^2$, $f(0)=i$.

***Решение.***

I) Так как $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}=6x$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=-6x$, то функция $u(x,y)=x^3-3xy^2$ удовлетворяет уравнению Лапласа (2.4) и является гармонической во всей комплексной плоскости. Возьмем в комплексной плоскости точки $(0,0)$ и $(x,y)$ и соединим их ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, соединяющих $(0,0)$ с $(x,0)$ и $(x,0)$ с $(x,y)$. Тогда по формуле (2.5) получаем:

$$v(x,y)=\int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} 6xy\,dx+3\left(x^2-y^2\right)dy+c=\int\limits_{(x,0)}^{(x,y)} 3\left(x^2-y^2\right)dy+c=3x^2y-y^3+c\,.$$

Следовательно,

$$f(z)=\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(3x^2y-y^3+c\right)=(x+iy)^3+ic=z^3+ic\,.$$

Из условия $f(0)=i$ следует, что $c=1$. Таким образом, $f(z)=z^3+i$.

II) Часто бывает более удобно для нахождения аналитической функции по ее действительной или мнимой части вместо формулы (2.5) использовать непосредственно условия Коши – Римана (2.2).

Из условия задачи, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, откуда $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x)$. Из последнего равенства следует, что $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + \varphi'(x)$.

С другой стороны, из условий Коши – Римана, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Значит, $6xy + \varphi'(x) = 6xy \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = C$. Таким образом, $v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + c$.

## §2.4. Геометрический смысл аргумента производной

Рассмотрим комплексную функцию $z = \lambda(t)$ действительного переменного $t$, определенную и непрерывную на некотором сегменте $D = [\alpha, \beta]$ действительной оси. Она определяет непрерывную кривую $L$.

**Теорема 1.**

Пусть в некоторой точке $t_0$ сегмента $[\alpha, \beta]$ $\exists \lambda'(t_0) \neq 0$ (по множеству $D$). Тогда в соответствующей точке $z_0 = \lambda(t_0)$ кривой $L$ существует касательная $T$ к ней, причем угол между $T$ и действительной осью совпадает с $\operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$.

***Доказательство.*** Проведем секущую через точки $z_0 = \lambda(t_0)$ и $z_1 = \lambda(t_1)$ кривой $L$. Направление секущей одинаково с направлением вектора $\frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$, поэтому секущая имеет предельное положение при $t_1 \to t_0$ $(z_1 \to z_0)$, если угол $\operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$ между последним вектором и действительной осью имеет предел при $t_1 \to t_0$. Но по условию теоремы $\exists \lambda'(t_0) = \lim\limits_{t_1 \to t_0} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} \neq 0$; поэтому $\exists \lim\limits_{t_1 \to t_0} \operatorname{Arg} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \operatorname{Arg} \lambda'(t_0)$. ■

Пусть функция комплексного переменного $w = f(z)$ определена и непрерывна в некоторой области $G$, и в точке $z_0 \in G$ $\exists f'(z_0) \neq 0$.

**Теорема 2.**

$\operatorname{Arg} f'(z_0)$ равен углу поворота касательной к кривой $L$ в точке $z_0$ при переходе к ее образу $\Lambda$ и к точке $w_0 = f(z_0)$.

***Доказательство.*** Проведем через точку $z_0$ какую-либо кривую $L$: $z = \lambda(t)$ $(\alpha \leq t \leq \beta,\ \lambda(t_0) = z_0)$, для которой существует производная $\lambda'(t) \neq 0$;

в этой точке кривая $L$ обладает касательной с углом наклона, равным $\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)$. Посредством отображения $w=f(z)$ эта кривая преобразуется в кривую $\Lambda$, расположенную в плоскости $w$: $w=f(\lambda(t))=\mu(t)$ $(\alpha \le t \le \beta,\ \mu(t_0)=f(z_0)=w_0)$. По правилу дифференцирования сложной функции, функция $\mu(t)$ дифференцируема в точке $t=t_0$ и $\mu'(t_0)=f'(z_0)\lambda'(t_0)\ne 0$, поэтому кривая $\Lambda$ обладает касательной в точке $w_0=f(z_0)$, причем угол между касательной и действительной осью равен $\operatorname{Arg}\mu'(t_0)=\operatorname{Arg}(\lambda'(t_0)f'(z_0))=\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)+\operatorname{Arg}f'(z_0)$. Следовательно, при переходе от кривой $L$ к ее образу $\Lambda$ угол наклона касательной в начальной точке кривой изменяется на величину $\operatorname{Arg}\mu'(t_0)-\operatorname{Arg}\lambda'(t_0)=\operatorname{Arg}f'(z_0)$, не зависящую от этой кривой. ■

## §2.5. Геометрический смысл модуля производной

По определению, $|f'(z_0)|=\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$, а числа $|z-z_0|$ и $|f(z)-f(z_0)|$ представляют собой соответственно расстояния между точками $z$ и $z_0$ плоскости $z$ и между их образами $f(z)$ и $f(z_0)$ в плоскости $w$. Поэтому отношение $\dfrac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ можно рассматривать как растяжение вектора $z-z_0$ в результате отображения посредством функции $w=f(z)$, а модуль производной $|f'(z_0)|$ можно рассматривать как растяжение в точке $z_0$ при отображении посредством функции $w=f(z)$. Величина растяжения в точке $z_0$ не зависит от того, какой берется вектор $z-z_0$, выходящий из этой точки.

**Пример 2.5.** Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении, осуществляемом функцией $w=z^4$ в точке $z_0=1+i$.

***Решение.*** Находим $f'(z)=4z^3$ и $|f'(1+i)|=\left|4(1+i)^3\right|=8\sqrt{2}>1$ – растяжение. Далее, $\arg f'(1+i)=\operatorname{arctg}(-1)+\pi=\dfrac{3\pi}{4}$, следовательно, угол поворота равен $\dfrac{3\pi}{4}$.

**Пример 2.6.** В каких точках плоскости угол поворота при отображении $w=\dfrac{1+iz}{1-iz}$ равен нулю? В каких точках коэффициент растяжения равен единице?

***Решение.*** Находим

$$w' = \frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{2i}{(1-iz)^2} = \frac{-2i}{(z+i)^2}.$$

При этом отображении угол поворота в точке $z$ есть

$$\arg w'(z) = \arg\left(\frac{-2i}{(z+i)^2}\right) = \arg\frac{-4x(y+1)-2i\left(x^2-(y+1)^2\right)}{\left(x^2+(y+1)^2\right)^2}.$$

Угол поворота в точке $z$ равен нулю, если $w'(z)$ является положительным действительным числом, то есть

$$\begin{cases} \operatorname{Im} w'(z) = 0; \\ \operatorname{Re} w'(z) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)^2 = x^2; \\ x(y+1) < 0. \end{cases}$$

Отсюда $y = -x-1$ ($x \neq 0$). Итак, угол поворота данного отображения равен нулю в точках прямой $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Re} z - 1$ с выколотой точкой $z = -i$.

По условию, коэффициент растяжения $|w'(z)| = 1$, то есть $\left|\frac{-2i}{(z+i)^2}\right| = 1$, или $\left|(z+i)^2\right| = 2$, откуда $|z+i| = \sqrt{2}$. Это уравнение окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $z = -i$.

# Глава 3. Конформные отображения. Элементарные аналитические функции и соответствующие конформные отображения

## § 3.1. Конформные отображения, отображения первого и второго рода. Критерий конформности

Отображение посредством непрерывной функции, сохраняющее углы между кривыми, проходящими через данную точку, называется конформным в этой точке. При этом если сохраняются не только величины углов, но и направление их отсчета, то говорят о конформном отображении первого рода; если же направление отсчета углов меняется на противоположное, то говорят о конформном отображении второго рода. Отображение называется конформным в области, если оно конформно в каждой точке этой области.

**Теорема 3.** Если функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z_0$ и $f'(z_0) \neq 0$, то отображение посредством этой функции конформно в точке $z_0$, причем $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ – угол поворота, а $|f'(z_0)|$ – коэффициент линейного растяжения при этом отображении в точке $z_0$.

**<u>Теорема 4</u> (принцип соответствия границ).** Пусть даны две односвязные ограниченные области $D$ и $\Delta$ с границами $\Gamma$ и $\gamma$. Пусть в $D$ задана аналитическая функция $w=f(z)$, непрерывная и дифференцируемая в замыкании $\overline{D}=D\cup\Gamma$. Если $w=f(z)$ является взаимно однозначным и непрерывным вместе со своим обратным отображением $\Gamma$ на $\gamma$, и положительному обходу $\Gamma$ (то есть такому, при котором $D$ остается слева) соответствует положительный обход $\gamma$, то функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение области $D$ на область $\Delta$.

## § 3.2. Линейная и дробно-линейная функция. Свойства дробно-линейного отображения

Пусть $a$, $b$, $c$, $d$ – комплексные числа, $ad-bc\neq 0$.

Функция, определяемая равенствами

$$w=\begin{cases}\dfrac{az+b}{cz+d}, \text{если } z\in C, z\neq -\dfrac{d}{c},\\ \dfrac{a}{c}, \text{если } z=\infty,\\ \infty, \text{если } z=-\dfrac{d}{c},\end{cases} \qquad (3.1)$$

называется дробно-линейной.

Если $ad-bc=0$, то функция (3.1) сводится к постоянной.

При $c=0$ функция (3.1) становится линейной: $w=Az+B$, $A=\dfrac{a}{d}, B=\dfrac{b}{d}$.

Рассмотрим ее частные случаи:

1. $A=1$, $w=z+B$ – точка $z$ переносится в точку $w$ в направлении вектора $B$ на расстояние, равное его длине (параллельный перенос);

2. $A=e^{i\alpha}$, $B=0$, $w=e^{i\alpha}z$ – в этом случае $|w|=|z|$, $\arg w=\arg z+\alpha$, т.е. точка $z$ переходит в точку $w$ при помощи поворота вектора $z$ около нулевой точки (начала координат) на угол $\alpha$;

3. $A=r, r\in R_+$ – действительное положительное число, $B=0$, $w=rz$ – здесь $|w|=r|z|$, $\arg w=\arg z$, т.е. точка $z$ переходит в точку $w$, лежащую на прямой $Oz$ на расстоянии от начала координат $O$, равном $r$ расстояний от точки $z$ (преобразование подобия с коэффициентом $r$).

Общее преобразование $w=Az+B$ производится путем применения трех простейших преобразований 1-3.

Каждое дробно-линейное отображение может быть получено в результате последовательного выполнения трех отображений: линейного ($\eta = cz + d$), отображения $\xi = \dfrac{1}{\eta}$ и снова линейного ($w = A + B\xi$, где $A = \dfrac{a}{c}$, $B = \dfrac{bc - ad}{c}$).

**<u>Теорема 5.</u>** Функция (3.1) осуществляет конформное отображение расширенной комплексной плоскости $z$ на расширенную комплексную плоскость $w$.

***Доказательство.*** $w' = \dfrac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0$ $\forall z \neq \infty$ и конечна при $z \neq -\dfrac{d}{c}$.

При $z = -\dfrac{d}{c}$ $w = \infty$, поэтому рассмотрим функцию $\xi = \dfrac{1}{w} = \dfrac{cz + d}{az + b}$, которая осуществляет конформное отображение точки $z = -\dfrac{d}{c}$ в точку $\xi = 0$ $\left(\dfrac{d\xi}{dz} = \dfrac{bc - ad}{(az + b)^2}\right)$.

В случае $z = \infty$ выполним подстановку $z = \dfrac{1}{\zeta}$, тогда $w = \dfrac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$.

В точке $\zeta = 0$ при $c \neq 0$ $w = \dfrac{a + b\zeta}{c + d\zeta}$ – аналитическая и $w' = -\dfrac{ad - bc}{c^2} \neq 0$.

При $z = \infty$ и $c = 0$ рассмотрим функцию $\xi = \dfrac{1}{w} = \dfrac{d}{az + b}$ $\left(w = \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}\right)$ и выполним подстановку $z = \dfrac{1}{\zeta}$; $\xi = \dfrac{d\zeta}{a + b\zeta}$ конформно отображает точку $\zeta = 0$ в точку $\xi = 0$ $\left(\dfrac{d\xi}{d\zeta} = \dfrac{ad}{(a + b\zeta)^2}\right)$. ■

## Основные свойства дробно-линейного отображения (ДЛО)

1. **<u>Круговое свойство</u>**: при дробно-линейном отображении образом любой окружности (прямой) является окружность или прямая.

***Доказательство.*** Для линейной функции свойство очевидно.

Рассмотрим отображение $w = \dfrac{1}{z}$, $z = x + iy$.

Уравнение любой окружности или прямой имеет вид:

$$A\left(x^2 + y^2\right) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{3.2}$$

$A, B, C, D \in R.$

При $A = 0$ и $B \neq 0, C \neq 0$ одновременно получаем прямую; при $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$ – окружность.

Заметим, что $x^2 + y^2 = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $2x = z + \overline{z}$, $2y = -i\left(z - \overline{z}\right)$, тогда (3.2) можно записать следующим образом:

$$Az\overline{z} + (B - iC)z + (B + iC)\overline{z} + D = 0, \text{ или } Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \tag{3.3}$$

$E = B + iC$.

Таким образом, любая окружность (прямая) задается уравнением (3.3) и наоборот, уравнение (3.3) задает окружность (прямую).

$w = \dfrac{1}{z} \;\Rightarrow\; z = \dfrac{1}{w} \;\Rightarrow$ (3.3) запишется в виде

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0. \tag{3.4}$$

(3.4) имеет тот же вид, что и (3.3), следовательно, образом прямой или окружности при отображении $w = \dfrac{1}{z}$ является прямая или окружность.

При $z = -\dfrac{d}{c}$ $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ обращается в $\infty$, поэтому образ каждой прямой или окружности, проходящей через точку $z = -\dfrac{d}{c}$, должен содержать бесконечно удаленную точку, т.е. является прямой.

Образ прямой или окружности, не проходящей через $z = -\dfrac{d}{c}$, не может содержать бесконечно удаленную точку, а значит, является окружностью. ■

2. **<u>Сохранение симметрии:</u>** при дробно-линейном отображении пара точек, симметричных относительно окружности или прямой, переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности или прямой.

Точки $P$ и $P'$ называются симметричными относительно окружности $\Gamma$, если они лежат на одном луче, выходящем из центра окружности $O$ и $|OP||OP'| = R^2$, $R$ – радиус окружности (центр окружности считается симметричным бесконечно удаленной точке). Можно доказать, что это определение эквивалентно тому, что любые окружности и прямая, проходящие через $P$ и $P'$, ортогональны к $\Gamma$.

***Доказательство.*** Окружности, проходящие через $P$ и $P'$, симметричные относительно окружности $\Gamma$, ортогональны $\Gamma$. По круговому свойству, дробно-линейное отображение переводит $\Gamma$ и окружности, проходящие через $P$ и $P'$, в некоторую другую окружность и ортогональные к ней окружности, проходящие через соответствующие точки $Q$ и $Q'$, следовательно, $Q$ и $Q'$ – симметричны. Если $\Gamma$ переходит при отображении в прямую, то центры всех преобразованных ортогональных окружностей лежат на прямой, а значит $Q$ и $Q'$ симметричны относительно этой прямой. ■

**Пример 3.1.** Найти точку, симметричную точке $z$ относительно окружности $|z|=2$, если a) $z=1$; b) $z=\frac{3}{2}i$.

***Решение.***

a) По условию, $P=1$, $O$ – начало координат, значит, точка $z'$, симметричная точке $z=1$ относительно окружности $|z|=2$ должна лежать на луче $\arg z=0$; кроме того, выполняется равенство $1\cdot|OP'|=4$, то есть $|z'|=4$. Окончательно, $z'=4$.

b) Рассуждая аналогично пункту a), получаем, что $z'=\frac{8}{3}i$.

3. **Инварианты ДЛО:** существует единственное дробно-линейное отображение, которое три разные точки $z_1,z_2,z_3$ переводит соответственно в три разные точки $w_1,w_2,w_3$; оно задается формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}. \tag{3.5}$$

***Доказательство.*** Общий вид ДЛО $w=\frac{az+b}{cz+d}$.

Задавая точки $z_k$, получим соответственно $w_k$ $(k=1,2,3)$: $w_k=\frac{az_k+b}{cz_k+d}$.

Образуем разности $w-w_1=\frac{(ad-bc)(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)}$, $w-w_2=\frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}$, $w_3-w_1=\frac{(ad-bc)(z_3-z_1)}{(cz_3+d)(cz_1+d)}$, $w_3-w_2=\frac{(ad-bc)(z_3-z_2)}{(cz_3+d)(cz_2+d)}$.

Образовав необходимые соотношения, получим (3.5). ■

Отношение $\dfrac{z-z_1}{z-z_2}:\dfrac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$ называется двойным или ангармоническим отношением четырех точек $(z, z_1, z_2, z_3)$.

Если одна из точек $z_k$, $w_k$ $(k=1,2,3)$ является бесконечно удаленной, то в формуле (3.5) разности, в которые входит эта точка, следует заменить единицами (например, при $z_3=\infty$ и $w_2=\infty$ формула (3.5) примет вид $\dfrac{w-w_1}{w_3-w_1}=\dfrac{z-z_1}{z-z_2}$).

**<u>Геометрический смысл:</u>** функция $w=f(z)$, определяемая равенством (3.5), конформно отображает круг, граница которого проходит через точки $z_1$, $z_2$, $z_3$, на круг, граница которого проходит через точки $w_1$, $w_2$, $w_3$ (если порядок обхода границ при этом не изменяется).

**<u>Пример 3.2.</u>** Найти образ множества $E=\{z:\operatorname{Im} z=1\}$ при отображении $w=\dfrac{z-1}{z+1}$.

***Решение.***

*Способ 1.* $E$ – прямая, параллельная оси $Ox$, и $z=i\in E$, следовательно, по круговому свойству, ее образом будет либо прямая, либо окружность. При отображении $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ все точки множества $E$ переходят в конечные точки $w$-плоскости, поэтому образом $E$ будет окружность $\Gamma$. Возьмем три точки множества $E$: $z=i$, $z=i-1$, $z=\infty$ и найдем их образы, принадлежащие $\Gamma$: $w(i)=\dfrac{i-1}{i+1}=i$, $w(i-1)=\dfrac{i-2}{i}=1+2i$, $w(\infty)=1$. Эти три точки $w$-плоскости однозначно определяют окружность $\Gamma:|w-1-i|=1$.

*Способ 2.* При $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ точка $z=-1$ переходит в точку $w=\infty$, следовательно, точка $z^*=-1+2i$, симметричная точке $z=-1$ относительно прямой $E$, переходит в центр окружности, являющейся образом множества $E$: $w(z^*)=\dfrac{-2+2i}{2i}=1+i$. Так как $w(\infty)=1$, то искомая окружность задается равенством $|w-1-i|=1$.

*Способ 3.* $w=\dfrac{z-1}{z+1}=1-2\cdot\dfrac{1}{z+1}$, т.е. $w$ можно представить в виде композиции отображений $\xi=z+1$, $\eta=\dfrac{1}{\xi}$, $w=1-2\eta$.

Отображение $\xi=z+1$ переводит множество $E$ $z$-плоскости в такое же множество $\xi$-плоскости.

Отображение $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ – дробно-линейное и переводит $E$ в окружность: $\eta(i) = -i$, $\eta(\infty) = 0$, а точкам мнимой оси сопоставляет опять точки мнимой оси. В силу конформности отображения $\eta = \dfrac{1}{\xi}$ в точке $\xi = i$ угол между $E$ и мнимой осью, равный $\dfrac{\pi}{2}$, сохранится, следовательно, диаметр окружности проходит по мнимой оси, а значит, уравнение этой окружности – $\left|\eta + \dfrac{i}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$.

Отображение $w = 1 - 2\eta$ сводится к равномерному растяжению $\eta$-плоскости в 2 раза, повороту ее вокруг $\eta = 0$ на угол $\pi$ и сдвигу вдоль вектора $\eta = 1$.

**<u>Пример 3.3.</u>** Найти образ области $D$ при отображении $w = \dfrac{z}{z-1}$, где $D = \{z, 0 < \mathrm{Re}(z) < 1, 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$.

***Решение.*** Выделим действительную и мнимую части функции $w$. Имеем:

$$u = \frac{x(x-1) + y^2}{(x-1)^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

Будем искать образ границы области $D$ (рис. 3.1).

a) Сторона $OA$: $y = 0, 0 \le x \le 1$ отображается на отрицательную часть действительной оси ($v = 0, -\infty < u \le 0$).

b) Сторона $AB$: $x = 1, 0 < y \le 1$, отображается в линию $u = 1, -\infty < v \le -1$.

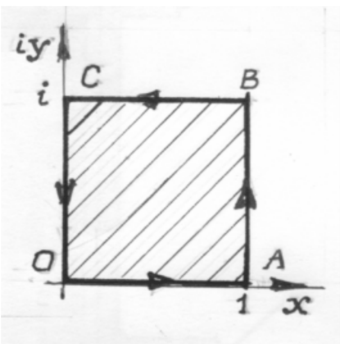



Рис.3.1

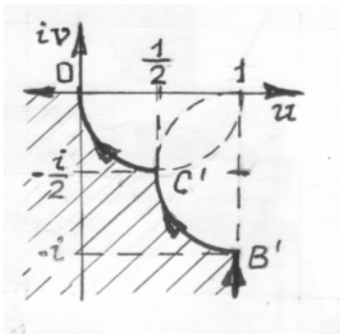



Рис. 3.2

c) Сторона $BC$: $y = 1, 1 \ge x \ge 0$, отображается в линию, параметрическое уравнение которой имеет вид:

$$u = \frac{x(x-1)+1}{(x-1)^2+1},\ v = -\frac{1}{(x-1)^2+1},\ 0 \le x \le 1.$$

Исключив параметр $x$, получим:

$$(u-1)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},\ \frac{1}{2} \le u \le 1,\ -\frac{1}{2} \le v \le -1.$$

d) Аналогично, образ стороны $CO$ определяется уравнением:

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4},\ 0 \le u \le \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} \le v \le 0.$$

В соответствии с принципом соответствия границ, образом квадрата будет область, заштрихованная на рис. 3.2.

**<u>Пример 3.4.</u>** Найти дробно-линейное отображение, которое точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$ оставляет неподвижными, а точку $z_3 = i$ переводит в точку $w_3 = 0$. Найти образ полуплоскости $\mathrm{Im}(z) > 0$ при данном отображении.

***Решение.*** По условию имеем три пары соответствующих точек:

$$\begin{aligned} &z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = i, \\ &w_1 = 1, \quad w_2 = -1, \quad w_3 = 0. \end{aligned}$$

Применяя формулу (3.5), получим искомое дробно-линейное отображение:

$$w = \frac{iz+1}{z+i}.$$

Найдем теперь образ верхней полуплоскости, границей которой является действительная ось. Согласно круговому свойству, действительная ось отображается в окружность. Чтобы найти ее, на действительной оси выберем три точки, например: $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = -1$, образами которых будут точки $w_1 = 1,\ w_2 = -i,\ w_3 = -1$. Они лежат на окружности $|w| = 1$. По принципу соответствия границ получаем, что образом верхней полуплоскости будет область $D' = \{w, |w| < 1\}$.

**<u>Пример 3.5.</u>** Найти дробно-линейное отображение, которое круг $|z - 4i| < 2$ отображает на полуплоскость $v > u$ так, что $w(4i) = -4,\ w(2i) = 0$.

***Решение.*** Условие задачи определяет две пары соответствующих точек. Третью пару найдем, пользуясь свойством симметрии дробно линейного отображения.

По этому свойству, точки $z_1 = 4i$ и $z_3 = \infty$, симметричные относительно окружности $|z-4i| = 2$, перейдут в точки $w_1 = -4$ и $w_3 = -4i$, симметричные относительно прямой $u = v$. Таким образом, найдена третья пара точек $z_3 = \infty$ и $w_3 = -4i$.

По формуле (3.5) найдем искомое отображение $w = \dfrac{-4iz-8}{z-2-4i}$.

## § 3.3. Показательная функция, ее свойства

Функция $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x+iy$, называется показательной и обозначается $e^z$.

Очевидно, $\forall z \in C \quad e^z \neq 0$, т.е. при отображении $w = e^z$ начало координат $w$-плоскости не принадлежит образу конечной $z$-плоскости.

Аналитическая в области $D$ функция $w = f(z)$ называется однолистной в области $D$, если в разных точках области она принимает разные значения. Область, в которой функция однолистна, называется областью однолистности этой функции.

Если $f(z_1) = f(z_2)$ при некоторых значениях $z_1 \neq z_2$, то функция называется многолистной.

### Основные свойства показательной функции

1. Любая полоса шириной $2\pi$, стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолистности функции $w = e^z$.

***Доказательство.*** Пусть $z_1 \neq z_2$. Если $e^{z_1} = e^{z_2}$, то $e^{z_1 - z_2} = 1$, следовательно, $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in Z\ (k \neq 0)$.

Таким образом, условие однолистности нарушается в точках, для которых $z_1 - z_2 = 2\pi ki$, $k \in Z\ (k \neq 0)$. Этому условию не удовлетворяют точки $z$ комплексной плоскости, для которых $h < \operatorname{Im} z < h + 2\pi, h \in R$. Значит, полоса шириной $2\pi$, стороны которой параллельны действительной оси, является областью однолистности функции $w = e^z$. ■

2. При отображении $w = e^z$
   - образом прямой $y = a$ является луч, выходящий из начала координат под углом $a$ к положительному направлению действительной оси;

- образом прямой $x=d$ является окружность с центром в начале координат и радиусом $e^d$.

***Доказательство.*** Пусть $y=a$, тогда $z=x+ia$, $-\infty<x<\infty$, поэтому $w=e^{x+ia}=e^x(\cos a+i\sin a)$, а значит $\arg w=a$, $|w|=e^x$. При изменении $x$ от $-\infty$ до $\infty$ $|w|=e^x$ меняется от 0 до $\infty$, поэтому образом прямой $y=a$ является луч $\arg w=a$.

Пусть $x=d$, тогда $z=d+iy$, $-\infty<y<\infty$, поэтому $w=e^{d+iy}=e^d(\cos y+i\sin y)$. Представив $w=u+iv$, получаем $u=e^d\cos y$, $v=e^d\sin y$, или $u^2+v^2=\left(e^d\right)^2$. ■

**<u>Пример 3.6.</u>** Найти образ области $D=\{z: 0<\operatorname{Im} z<2\pi, \operatorname{Re} z\geq 0\}$ при отображении $w=e^z$.

***Решение.*** Выделим действительную и мнимую части функции $w$. Имеем:

$$u=e^x\cos y, v=e^x\sin y.$$

Будем искать образ границы области $D$:

1) луч $y=2\pi$, $0\leq x<\infty$, отображается в луч $1\leq u<\infty$, $v=0$;
2) отрезок $x=0$, $0\leq y\leq 2\pi$, отображается в окружность единичного радиуса ($e^z=e^{iy}$);
3) луч $y=0$, $0\leq x<\infty$, отображается в луч $1\leq u<\infty$, $v=0$.

В соответствии с принципом соответствия границ, образом области $D$ является вся плоскость с разрезом по положительной части действительной оси и удаленной окружностью единичного радиуса.

## § 3.4. Тригонометрические и гиперболические функции, их свойства

Тригонометрические функции задаются формулами:

$$\cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),\ \sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right),\ tgz=\frac{\sin z}{\cos z},\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гиперболические функции определяются по формулам:

$$chz=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right),\ shz=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right),\ thz=\frac{shz}{chz},\ cthz=\frac{chz}{shz}.$$

Известные из тригонометрии соотношения между тригонометрическими функциями действительного аргумента сохраняются и в комплексной области, но утверждения «$|\sin z| \le 1$, $|\cos z| \le 1$ для любого $z \in C$» неверны.

Из определения следуют очевидные соотношения:

- $\cos z = ch(iz)$, $chz = \cos(iz)$;
- $\sin z = -ish(iz)$, $shz = -i\sin(iz)$;
- $tgz = -ith(iz)$, $thz = -itg(iz)$;
- $ctgz = icth(iz)$, $cthz = ictg(iz)$.

### Основные свойства тригонометрических функций

1. Отображение $w = \sin z$ переводит ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, в сетку гипербол и эллипсов с общими фокусами $\pm 1$.

***Доказательство.***

$w = u + iv = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cos(iy) + \sin(iy)\cos x =$
$= \sin xchy + i\cos xshy$, т.е. $u = \operatorname{Re}(\sin z) = \sin xchy$, $v = \operatorname{Im}(\sin z) = \cos xshy$, следовательно, при отображении $w = \sin z$ прямая $x = a$ $\left(a \ne \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z\right)$ переходит в кривую, параметрическое уравнение которой имеет вид: $u = \sin achy$, $v = \cos ashy$, $-\infty < y < \infty$.

Исключая переменную $y$, получим $\dfrac{u^2}{\sin^2 a} - \dfrac{v^2}{\cos^2 a} = 1$ $\left(a \ne \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z\right)$.

При этом координата $u$ сохраняет знак $\sin a$, координата $v$ пробегает всю числовую ось, т.е. образом прямой $x = a$ $\left(a \ne \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z\right)$ является одна ветвь гиперболы с полуосями $|\sin a|, |\cos a|$ и фокусами $\pm 1$.

Если $a = \pi k$, $k \in Z$, то прямая $x = a$ переходит в кривую, параметрическое уравнение которой $u = 0, v = (-1)^k shy, -\infty < y < \infty$, т.е. в мнимую ось плоскости $w$.

Если $a = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то $u = (-1)^k chy$, $v = 0$, $-\infty < y < \infty$, т.е. прямая $x = a$ при $a = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, переходит в луч $u \le -1$, $v = 0$ в случае нечетного $k$, и в луч $u \ge 1$, $v = 0$ в случае четного $k$.

Аналогично, образом прямой $y = a$ $(a \neq 0)$ при отображении $w = \sin z$ является эллипс $\frac{u^2}{ch^2 a} + \frac{v^2}{sh^2 a} = 1$ с полуосями $cha$ и $|sha|$ и с фокусами в точках $\pm 1$.

Если $a = 0$, то образом действительной оси $z$-плоскости является отрезок $[-1, 1]$ действительной оси $w$-плоскости. ■

2. Отображение $w = \sin z$ конформно во всех точках $z$-плоскости, кроме $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, поэтому сетка эллипсов и гипербол должна быть ортогональной.

3. Отображение $w = \cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ сводится к сдвигу $\xi = z + \frac{\pi}{2}$ плоскости в направлении действительной оси и отображению $w = \sin \xi$.

4. Отображение $w = \operatorname{tg} z$ переводит ортогональную сетку прямых, параллельных координатным осям, в ортогональную сетку дуг окружностей (отрезок), проходящих через точки $w = -i$ и $w = i$ в единичном круге $|w| \leq 1$ и дуг окружностей (отрезок) в $|w| \leq 1$, ортогональных им.

В этом можно убедиться, представив $w = \operatorname{tg} z$ в виде $w = \frac{1}{i} \cdot \frac{\left(e^{iz}\right)^2 - 1}{\left(e^{iz}\right)^2 + 1}$, тем самым сводя это отображение к повороту $\zeta = iz$, показательной $t = e^{\zeta}$, степенной $\xi = t^2$ и дробно-линейной $w = \frac{1}{i} \cdot \frac{\xi - 1}{\xi + 1}$ функциям.

## § 3.5. Логарифмическая функция, ее свойства

Однозначной непрерывной ветвью многозначной функции $f(z)$ в области $D$ называется однозначная непрерывная функция $\varphi(z)$, значение которой в каждой точке $z \in D$ совпадает с одним из значений функции $f(z)$.

Логарифмической функцией комплексного аргумента называется функция, обратная к показательной, т.е. определяемая уравнением $e^w = z$, $z \neq 0$, и обозначаемая $w = \operatorname{Ln} z$.

Справедлива формула

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k),\ k \in Z. \tag{3.6}$$

Логарифмическая функция определена на всей комплексной плоскости с выколотой точкой $z = 0$, бесконечнозначна и разные ее значения отличаются на $2\pi k i$, $k \in Z$.

Каждое значение функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ называется логарифмом комплексного числа. Значение логарифма комплексного числа $z$, $z \neq 0$, которое соответствует $\ln|z| + i \arg z$, называется главным значением функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ и обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z\,,\ -\pi < \arg z \le \pi\,.$$

Поэтому $\mathrm{Ln}\, z = \ln z + 2\pi k i$, $k \in Z$.

**Пример 3.7.**

1. $\mathrm{Ln} 1 = 2\pi k i$, $k \in Z$;
2. $\mathrm{Ln}(-1) = (2k+1)\pi i$, $k \in Z$;
3. $\mathrm{Ln}(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) = \ln\sqrt{2} + (8k-1)\frac{\pi i}{4}$, $k \in Z$.

Правила о логарифме произведения и частного сохраняют свою силу и для многозначного логарифма комплексного числа: $\mathrm{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$, $\mathrm{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2$ (равенства следует понимать в том смысле, что эти множества одинаковы). $\mathrm{Ln}\, z + \mathrm{Ln}\, z \neq 2\mathrm{Ln}\, z$, т.к. сумма получается из множества чисел $\mathrm{Ln}\, z$ путем сложения любого из этих чисел с таким же или отличным от него числом того же множества, а множество $2\mathrm{Ln}\, z$ получается путем удвоения каждого из чисел $\mathrm{Ln}\, z$.

В области $D$, которая является комплексной плоскостью с разрезом вдоль луча, выходящего из начала координат под углом $\alpha_1$ к действительной оси, существует бесчисленное множество разных однозначных ветвей функции $w = \mathrm{Ln}\, z$. Каждая из этих ветвей отображает область $D$ на одну из полос

$$D_k = \{w : \alpha_1 + 2\pi k < \mathrm{Im}\, w < \alpha_1 + 2(k+1)\pi\},\ k \in Z\,. \tag{3.7}$$

Для выделения однозначной ветви логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ достаточно определить полосу $D_k$, на которую эта ветвь отображает область $D$. Для определения полосы $D_k$ достаточно вычислить лишь значение логарифмической функции в какой-нибудь точке $z_0 \in D$. Ветвь логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, которая отображает $D$ на $D_k$, обозначим $\mathrm{Ln}_k z$.

Тогда $\mathrm{Ln}_k z = \mathrm{Ln}_0 z + 2\pi k i$, $k \in Z$, где $\mathrm{Ln}_0 z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}_0 z$, $\alpha_1 < \mathrm{Arg}_0 z < \alpha_1 + 2\pi$.

Каждая ветвь $\mathrm{Ln}_k z$ удовлетворяет теореме о производной обратной функции, по которой $\left(\mathrm{Ln}_k z\right)' = \dfrac{1}{z}$, $k \in Z$, $z \in D$. Следовательно, отображение, осуществляемое каждой ветвью логарифмической функции, является конформным для всех точек $z \in D$.

Так как главное значение аргумента комплексного числа выбирается из $\left(-\pi, \pi\right]$, то в формуле (3.7) естественно выбрать $\alpha_1 = -\pi$, тогда область $D$ – это плоскость с разрезом по лучу $\left(-\infty, 0\right]$, $D_k = \left\{w : \left(2k-1\right)\pi < \operatorname{Im} w < (2k+1)\pi\right\}$, $k \in Z$.

Ветвь логарифмической функции, отображающая область $D$ на полосу $D_0$, является главной ветвью $\ln z$, остальные однозначные непрерывные ветви функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ в этой области имеют вид $\mathrm{Ln}_k z = \ln z + 2\pi k i$, $k \in Z$.

Значение $\mathrm{Ln}\, z$, равное $\mathrm{Ln}_k z$, при однократном обходе точки $z$ вокруг начала координат вдоль какой-нибудь окружности $|z| = r$ переходит в число $\mathrm{Ln}_{k+1} z$, если обход совершается против движения часовой стрелки, и в число $\mathrm{Ln}_{k-1} z$ – при обходе по часовой стрелке.

Конечная точка $z$, при обходе которой по какой-нибудь окружности достаточно малого радиуса, многозначная функция, непрерывно изменяясь, переходит от одного значения к другому, называется точкой ветвления функции. Это определение естественным образом переносится и на случай $z = \infty$.

Точки $z = 0,\ z = \infty$ – точки ветвления $w = \mathrm{Ln}\, z$.

**Пример 3.8.** Найти образ плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси при отображении той ветвью логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, которая точку $z_0 = 1$ переводит в точку $w_0 = 4\pi i$.

***Решение.*** Полоса $D_k$, являющаяся образом плоскости с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси, определяется ветвью $\mathrm{Ln}_k z$ логарифмической функции, которую найдем из условия $\mathrm{Ln}_k 1 = 4\pi i$. Положив в равенстве (3.6) ($\mathrm{Ln}_k z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$, $k \in Z$) $z = 1$, получим $4\pi i = 2k\pi i$, т.е. $k = 2$. Отсюда условием $\mathrm{Ln}_k(1) = 4\pi i$ определяется ветвь $\mathrm{Ln}_2 z = \ln z + 4\pi i$, которая, согласно формуле (3.7), указанную область отображает на полосу $D_2 = \left\{w : 3\pi < \operatorname{Im}(w) < 5\pi\right\}$.

**Пример 3.9.** Найти образ области $\Delta = \left\{z : 2 < |z| < 4,\ z \notin [-4, -2]\right\}$ при отображении ветвью логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$, которая определяется ее значением $w_0 = -2\pi i$ в данной точке $z_0 = 1$.

***Решение.*** Ветвь, определяемая условием $\mathrm{Ln}\, 1 = -2\pi i$, имеет вид

$$\mathrm{Ln}_{-1} z = \ln|z| + i \arg z - 2\pi i.$$

При этом отображении образом области $D=\{z:-\pi<\arg z<\pi\}$ является полоса $D_{-1}=\{w:-3\pi<\operatorname{Im} w<-\pi\}$. Образом дуги окружности $|z|=2$, $-\pi<\arg(z)<\pi$, является отрезок $u=\ln 2$, $-3\pi<v<-\pi$, а образом дуги окружности $|z|=4$, $-\pi<\arg(z)<\pi$, является отрезок $u=\ln 4$, $-3\pi<v<-\pi$. Поэтому образом области $\Delta$ является прямоугольник $\ln 2<u<\ln 4, -3\pi<v<-\pi$.

## § 3.6. Степенная функция, ее свойства

Функция $w=z^n$, $n=2,3,?$ , называется целой степенной функцией; она определена и однозначна на всей комплексной плоскости.

Функция $w=z^n$ аналитическая во всей комплексной плоскости (производная $w'=nz^{n-1}$ существует во всех точках плоскости); отображение, осуществляемое посредством степенной функции, конформно в каждой точке комплексной плоскости, кроме $z=0$ ($w'=nz^{n-1}$ обращается в нуль при $z=0$).

Положив $z=re^{i\varphi}$, $w=\rho e^{i\psi}$, находим $\rho=r^n$, $\psi=n\varphi$, поэтому отображение $w=z^n$ каждый вектор $z\neq 0$ поворачивает на угол $(n-1)\arg z$. Это означает, что образом луча, выходящего из начала координат, является луч, также выходящий из начала координат; образом окружности $|z|=R$ является окружность $|w|=R^n$.

Функция $w=z^n$ отображает взаимно-однозначно и конформно внутренность любого угла с вершиной в точке $z=0$ и раствора $\alpha$, $0<\alpha<\dfrac{2\pi}{n}$, на внутренность угла с вершиной в точке $w=0$ и раствора $n\alpha$, $0<n\alpha<2\pi$. При $\alpha=\dfrac{2\pi}{n}$ функция $w=z^n$ отображает область $D=\left\{z:\varphi_0<\arg z<\varphi_0+\dfrac{2\pi}{n}\right\}$ на плоскость с разрезом вдоль луча $\arg w=n\varphi_0$.

***Замечание.*** Два семейства прямых, параллельных координатным осям, отображаются посредством функции $w=z^2$ в два семейства парабол с общим фокусом в начале координат и с осями на действительной оси.

**Пример 3.10.** Найти образы при отображении $w=z^2$ следующих областей: a) $D=\left\{z:-\pi<\arg z<-\dfrac{\pi}{2}\right\}$; b) $D=\{z:\operatorname{Im} z<-1\}$.

***Решение.***

a) Так как образом луча $\arg z = -\pi$ при отображении функцией $w = z^2$ является луч $\arg w = -2\pi$, а образом луча $\arg z = -\dfrac{\pi}{2}$ – луч $\arg w = -\pi$, то образом области $D = \left\{ z : -\pi < \arg z < -\dfrac{\pi}{2} \right\}$ является область $D = \{w : 0 < \arg w < \pi\}$, то есть верхняя полуплоскость.

b) Так как функция $w = z^2$ взаимно однозначно переводит прямую $\operatorname{Im} z = c$ в параболу $v^2 = 4c^2(c^2 + u)$, то образом границы области $D = \{z : \operatorname{Im} z < -1\}$ – прямой $\operatorname{Im} z = -1$ – является парабола $v^2 = 4(1 + u)$. Поскольку точка $z = 0$, не принадлежащая области $D = \{z : \operatorname{Im} z < -1\}$, при отображении $w = z^2$ остается неподвижной, то ее образ $w = 0$ также не принадлежит образу этой области. Значит, образом области является внешность параболы $v^2 = 4(1 + u)$.

**Пример 3.11.** Найти образы заданных множеств при указанных отображениях: a) $D = \left\{ z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$, $w = z^4$; b) $D = \{z : \operatorname{Re} z = 2\}$, $w = z^2$.

***Решение.***

a) Так как при отображении $w = z^4$ окружность $|z| = R$ переходит в окружность $|z| = R^4$, образом луча $\arg z = 0$ является луч $\arg w = 0$, а образом луча $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$ – луч $\arg w = \pi$, то образом области $D = \left\{ z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$ является область $D = \{z : 1 < |w| < 16,\ 0 < \arg w < \pi\}$.

b) Так как функция $w = z^2$ взаимно однозначно переводит прямую $\operatorname{Re} z = c$ в параболу $v^2 = 4c^2(c^2 - u)$, то образом множества $D$ – прямой $\operatorname{Re} z = 2$ – является парабола $v^2 = 16(4 - u)$.

Функция $w = \sqrt[n]{z}$, обратная к $z = w^n$, определена на всей комплексной плоскости, $n$-значна при $z \neq 0$.

Все $n$ значений, представляющих те точки плоскости $w$, в которых $w^n$ принимает одно и то же значение $z$, располагаются в вершинах правильного $n$-угольника, вписанного в окружность $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ $\left( w = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \dfrac{\operatorname{Arg} z}{n} + i \sin \dfrac{\operatorname{Arg} z}{n} \right) \right)$. Обратно, вершины любого правильного $n$-угольника с центром в начале координат можно рассматривать как $n$

значений $\sqrt[n]{z}$. Поэтому область $D$ плоскости $w$ будет областью однолистности для $z = w^n$ тогда и только тогда, когда из $n$ вершин любого правильного многоугольника с центром $w = 0$ она содержит не более, чем одну вершину.

Пусть область $D$ – комплексная плоскость с разрезом по лучу, выходящему из начала координат под углом $\varphi_0$ к положительному направлению действительной оси. В этой области существуют $n$ различных ветвей

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{n}\right),\ k = 0, 1, ?\ , n-1, \tag{3.8}$$

где $\varphi_0 + 2\pi k < \operatorname{Arg}_k z < \varphi_0 + 2\pi(k+1)$, функции $\sqrt[n]{z}$. Каждая из ветвей взаимно-однозначно отображает область $D$ на один из секторов

$$D_k = \left\{w : \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}k < \operatorname{Arg} w < \frac{\varphi_0}{n} + \frac{2\pi}{n}(k+1)\right\},\ k = 0, 1, ?\ , n-1.$$

Для выделения ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$, $k = 0, 1, ?\ , n-1$, достаточно определить сектор $D_k$, на который эта ветвь отображает область $D$. При проведении разрезов в комплексной плоскости удобно брать $\varphi_0 = 0$ (разрез по положительному направлению оси $Ox$) или $\varphi_0 = -\pi$ (разрез по отрицательной части действительной оси).

В результате однократного обхода вокруг начала координат вдоль какой-либо окружности $|z| = r$ значения $\sqrt[n]{z}$, непрерывно изменяясь, переходят от ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_k$ к ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k+1}$ при обходе против часовой стрелки и к ветви $\left(\sqrt[n]{z}\right)_{k-1}$ при обходе по часовой стрелке. После $n$-кратного обхода вокруг начала координат в одном направлении значение функции $\sqrt[n]{z}$, переходя с одной ветви к другой, придет к исходному.

Точки $z = 0, z = \infty$ - точки ветвления функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Каждая ветвь функции $w = \sqrt[n]{z}$ удовлетворяет теореме о производной обратной функции, по которой

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)'_k = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{z}\right)_k^{n-1}},\ k = 0, ?\ , n-1,\ z \in D,$$

и поэтому осуществляет конформное отображение области $D$ на одну из областей $D_k$.

**Пример 3.12.** Найти образы следующих областей при отображении ветвью функции $w=\sqrt{z}$, выделяемой ее значением в указанной точке: а) $D=\{z:\operatorname{Im} z>0\}$, $\sqrt{i}=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$; b) $D=\left\{z:(\operatorname{Im} z)^2>2\operatorname{Re} z+1\right\}$, $\sqrt{-1}=-i$.

***Решение.***

а) Так как $w=\sqrt{z}$ – обратная к $z=w^2$ функция, то задание можно переформулировать следующим образом: в $w$-плоскости найти такую область, которая при отображении $z=w^2$ переводится в данную область $D$. Таких областей две: $D_1=\left\{w:0<\arg w<\frac{\pi}{2}\right\}$ и $D_2=\left\{w:-\pi<\arg w<-\frac{\pi}{2}\right\}$. Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w=-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, то есть $D_2$.

b) В $z$-плоскости $D$ – внешность параболы $y^2=2x+1$, которая является образом при отображении $z=w^2$ прямой $\operatorname{Im} w=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (или $\operatorname{Im} w=-\frac{\sqrt{2}}{2}$). Таким образом, область $D$ является образом двух областей: $D_1=\left\{w:\operatorname{Im} w>\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ и $D_2=\left\{w:\operatorname{Im} w<-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$. Из этих двух областей выбираем ту, которая содержит точку $w=-i$, то есть $D_2$.

**Пример 3.13.** В плоскости $z$ с разрезом по положительной части действительной оси найти значение ветви функции $\sqrt[3]{z}$ в точке $z=8i$ при условии $\sqrt[3]{-1}=-1$.

***Решение.*** По формуле (3.8),

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_k=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{3}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{3}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,$$

где $2\pi k<\operatorname{Arg}_k z<2\pi(k+1)$, так как $\varphi_0=0$. Из условия $\sqrt[3]{-1}=-1$ имеем

$$\cos\frac{\operatorname{Arg}_k(-1)}{3}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k(-1)}{3}=-1.$$

Отсюда $\cos\frac{\operatorname{Arg}_k(-1)}{3}=-1$ и $\operatorname{Arg}_k(-1)=3\pi$.

Таким образом, $k=1$ и искомая ветвь имеет вид

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_1=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_1 z}{3}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}_1 z}{3}\right),\ 2\pi<\operatorname{Arg}_1 z<4\pi,$$

а ее значением в точке $z=8i$ будет

$$\left(\sqrt[3]{8\,i}\right)_1=2\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_1(8i)}{3}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}_1(8i)}{3}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i.$$

**Пример 3.14.** Найти образ верхней полуплоскости при отображении той ветвью функции $\sqrt[3]{z}$, которая точку $i$ переводит в точку $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

***Решение.*** Возьмем $\varphi_0=0$. По формуле (3.8),

$$\left(\sqrt[3]{z}\right)_k=\sqrt[3]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}_k z}{3}+i\sin\frac{\operatorname{Arg}_k z}{3}\right),\ k=0,\,1,\,2,$$

где $2\pi k<\operatorname{Arg}_k z<2\pi(k+1)$.

Из условия $\sqrt[3]{i}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ получаем $k=1$. Тогда $D_1=\left\{w:\frac{2\pi}{3}<\operatorname{Arg} w<\frac{4\pi}{3}\right\}$ является образом плоскости $z$ с разрезом по положительной части действительной оси при отображении ветвью $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$.

Итак, образом верхней полуплоскости при отображении ветвью $\left(\sqrt[3]{z}\right)_1$ будет область $\left\{w:\frac{2\pi}{3}<\arg(w)<\pi\right\}$.

## § 3.7. Функция Жуковского и обратная ей, их свойства

Функция, задаваемая равенством $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, называется функцией Жуковского.

Во всех точках комплексной плоскости, кроме $z=0, z=\infty$, функция аналитическая; $w'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$.

Функция Жуковского однолистна в любой области $D$, в которой нет различных точек, связанных равенством $z_1\cdot z_2=1$, в частности, если $D$: а) $|z|>1$; б) $|z|<1$; в) $\operatorname{Im} z>0$; г) $\operatorname{Im} z<0$.

*Геометрическое поведение функции.* Пусть $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$. Тогда, записав функцию Жуковского в виде $w = u + iv$, получим

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\ v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi. \tag{3.9}$$

1. Рассмотрим окружность $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $\rho > 0$ – фиксированное число.

$u = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cos\varphi$, $v = \frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \dfrac{u}{\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)}$,

$\sin\varphi = \dfrac{v}{\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)}$ $(\rho \ne 1)$, т.е. $\dfrac{u^2}{\frac{1}{4}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\frac{1}{4}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2} = 1$ $(\rho \ne 1)$.

Следовательно, функция Жуковского переводит окружность $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$ $(\rho \ne 1)$ в эллипс с полуосями $\frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $\frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|$ и фокусами $w = \pm 1$. При $\rho > 1$ эллипсы ориентированы так же, как и окружности, при $0 < \rho < 1$ эллипсы ориентированы противоположно окружностям. При $\rho = 1$ эллипс вырождается в отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды, т.е. образом окружности $|z| = 1$ является отрезок $[-1, 1]$, проходимый дважды. Таким образом, функция Жуковского конформно отображает внешность (внутренность) единичного круга на внешность отрезка $[-1, 1]$ (рис. 3.3).

2. Рассмотрим луч $z = re^{i\alpha}$, $0 < r < +\infty$, $\alpha$ – фиксировано.

$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\alpha$, $v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\alpha$, $0 < r < +\infty$, $\Rightarrow$ $\dfrac{u}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$,

$\dfrac{v}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$, $\alpha \ne \dfrac{\pi k}{2}, k \in Z$.

Значит,

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1,\ \alpha \ne \frac{\pi k}{2}, k \in Z. \tag{3.10}$$

Это уравнение задает гиперболу с фокусами в точках $w = \pm 1$ и асимптотами $v = \pm u \cdot tg\alpha$.

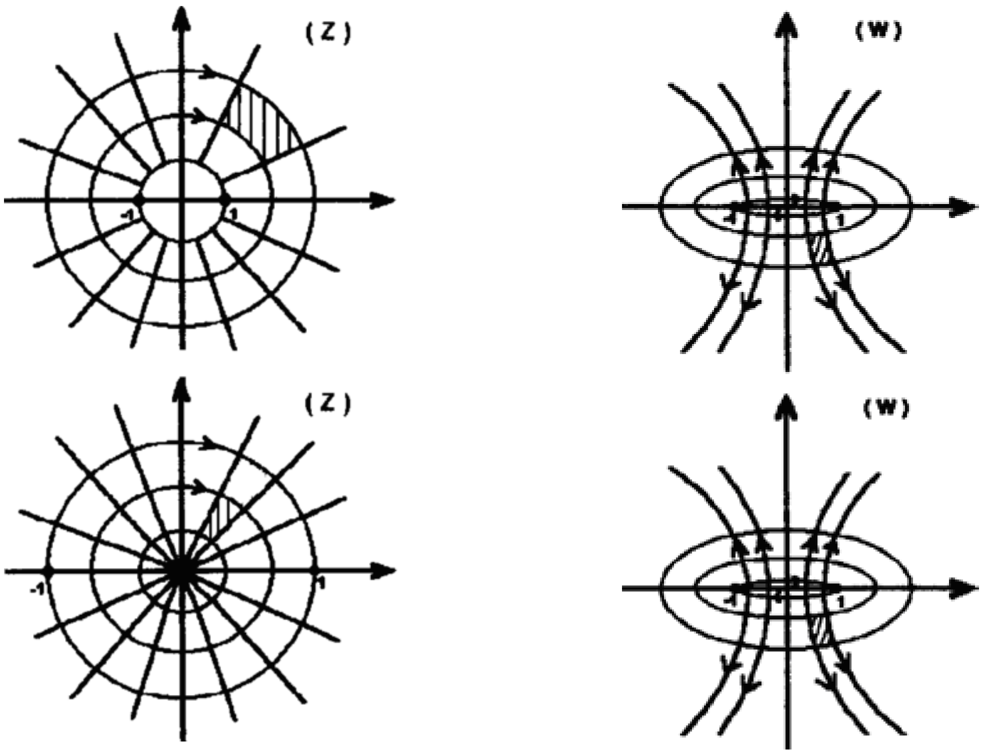



Рис. 3.3

При $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ луч $z = re^{i\alpha}$ переходит в правую ветвь гиперболы, при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ – в левую ветвь (рис. 3.4); при замене $\alpha$ на $-\alpha$ получаем ту же ветвь гиперболы, но с противоположной ориентацией.

Луч $\arg z = 0$ переходит в луч $[1, \infty)$, проходимый дважды; луч $\arg z = \pi$ переходит в луч $(-\infty, -1]$, проходимый дважды. Лучи $\arg z = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg z = \dfrac{3\pi}{2}$ переходят в мнимую ось $\operatorname{Re} w = 0$.

Таким образом, функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ на плоскость $w$ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, \infty)$; нижняя полуплоскость $\operatorname{Im} z < 0$ отображается аналогично.

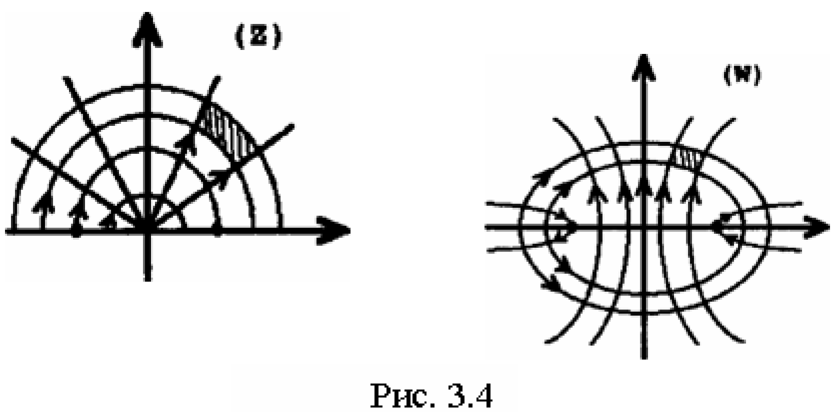



Рис. 3.4

**Пример 3.15.** Найти образы следующих множеств при отображении функцией Жуковского $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$: a) $D=\left\{z:|z|<1,\ z\notin\left[-1,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$; b) $D=\left\{z:\frac{\pi}{4}\le\arg z\le\frac{3\pi}{4},\ z\notin[0,i]\right\}$.

***Решение.***

a) Окружность единичного радиуса $|z|=1$ отображается функцией Жуковского в отрезок $[-1,1]$, проходимый дважды. При помощи формулы (3.9) находим, что отрезок действительной оси $x\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$, $y=0$ ($\varphi=\pi$, $\frac{1}{2}\le r\le 1$) переходит в отрезок действительной оси $u\in\left[-\frac{5}{4},-1\right]$, $v=0$; отрезок действительной оси $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $y=0$ ($\varphi=0$, $\frac{1}{2}\le r\le 1$) переходит в отрезок действительной оси $u\in\left[1,\frac{5}{4}\right]$, $v=0$. Таким образом, исходная область отображается на всю комплексную плоскость с разрезом по отрезку действительной оси $u\in\left[-\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right]$, $v=0$.

b) Так как луч $\arg z=\frac{\pi}{2}$ переходит в мнимую ось $\operatorname{Re} w=0$; $w(i)=0$, $w\left(\frac{i}{2}\right)=-i\frac{3}{4}$ и $w(0)=\infty$, то отрезок $x=0$, $0\le y\le 1$, проходимый дважды, переходит в отрицательную часть мнимой оси, проходимую дважды. При помощи формулы (3.10) находим, что луч $\arg z=\frac{3\pi}{4}$ ($\varphi=\frac{3\pi}{4}$, $0\le r<\infty$) переходит в левую ветвь гиперболы $2u^2-2v^2=1$; луч $\arg z=\frac{\pi}{4}$ ($\varphi=\frac{\pi}{4}$, $0\le r<\infty$) переходит в правую ветвь гиперболы $2u^2-2v^2=1$. Таким образом, исходная область отображается на внутренность гиперболы $2u^2-2v^2=1$ с разрезом по отрицательной части мнимой оси.

**Пример 3.16.** Найти образ области $D=\left\{z:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}>1,\ a>1\right\}$ при отображении ветвью функции $w=z+\sqrt{z^2-1}$ такой, что $w(\infty)=0$.

***Решение.*** В $w$-плоскости существуют две области, которые функцией Жуковского отображаются на указанную внешность эллипса:

$D_1 = \{w : |w| > a + \sqrt{a^2 - 1}\}$ и $D_2 = \{w : |w| < a - \sqrt{a^2 - 1}\}$. В качестве образа при отображении, обратном к функции Жуковского, выбираем область $D_2$ (так как она содержит точку 0).

## § 3.8. Построение конформных отображений

<u>**Теорема 6**</u> **(теорема Римана о существовании конформного отображения).** Каждую односвязную область $G \subset \overline{C}$, граница которой содержит более одной точки, можно конформно отобразить на круг с центром в начале координат.

<u>**Теорема 7**</u> **(единственности для конформного отображения).** Существует лишь одна функция $F(z)$, конформно отображающая область $G$ на круг $\{|w| < 1\}$ и удовлетворяющая условиям

$$F(z_0) = 0 \text{ и } F'(z_0) > 0,$$

где $z_0$ – заданная конечная точка области $G$.

При фактическом построении функции, реализующей конформное отображение данной области $G$ на круг или на полуплоскость, используются уже изученные примеры конформных отображений путем суперпозиции подходящих отображений.

<u>**Пример 3.17.**</u> Отобразить конформно и однолистно множество: a) $E = \{z : z \notin [-i, 2i]\}$; b) $E = \{z : |z| < 1,\ |z + i| > 1\}$; c) $E = \{z : \operatorname{Im} z < 2,\ -1 < \operatorname{Re} z < 3\}$; d) $E = \{z : |z + i| > 1,\ |z + 3i| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость.

***Решение.***

a) Множество $E$ представляет собой плоскость с разрезом вдоль отрезка $[-i, 2i]$ мнимой оси. Переведем разрез в разрез по лучу с началом в точке $0$. Это можно сделать с помощью дробно-линейного отображения $w_1 = \dfrac{z + i}{z - 2i}$.

Поскольку точка $0 \in [-i, 2i]$ при этом отображении перейдет в $w_1(0) = -\dfrac{1}{2}$, то разрез переходит в отрицательную часть действительной оси. Выделим в полученной области (плоскости с разрезом) однозначную ветвь функции $w_2 = \sqrt{w_1}$ требованием $\sqrt{1} = 1$. Поскольку область в плоскости $w_1$ задается неравенствами $-\pi < \arg w_1 < \pi$, то ее образ будет задаваться неравенствами $-\frac{\pi}{2} < \arg w_2 < \frac{\pi}{2}$, то есть будет правой полуплоскостью. Последнее отображение – поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, то есть $w = e^{i\frac{\pi}{2}} w_2 = iw_2$. Окончательный ответ имеет вид $w = i\sqrt{\frac{z+i}{z-2i}}$, где ветвь корня выделяется условием $\sqrt{1} = 1$.

b) Область $E$ представляет «круговую луночку», то есть ограничена дугами двух окружностей. В этой ситуации целесообразно отобразить точки пересечения окружностей в 0 и $\infty$. Найдем точки пересечения окружностей $|z| = 1$ и $|z+i| = 1$:

$$\begin{cases} |z| = 1, \\ |z+i| = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + (y+1)^2 = 1, \end{cases}$$

откуда искомые точки – $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ и $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Отображение задается формулой $w_1 = \dfrac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}$.

Так как $w_1(0) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z+i| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Поскольку $w_1(i) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то дуга окружности $|z| = 1$ отобразится на луч $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Так как положительному обходу границы луночки, то есть $z_1$, $i$, $z_2$, 0, соответствует обход $\infty$, $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то область, являющаяся образом $E$, будет углом $\left\{-\frac{2\pi}{3} < \arg w_1 < -\frac{\pi}{3}\right\}$. Отображение $w = w_1^3$ переведет этот угол в $\{-2\pi < \arg w < -\pi\} = \{0 < \arg w < \pi\}$, то есть $w = \left(\dfrac{z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}{z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}}\right)^3$ – искомое отображение.

c) *Способ 1.* Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной $\pi$. Для этого надо применить параллельный перенос

$w_1 = z+1-2i$, поворот $w_2 = e^{i\frac{\pi}{2}} w_1 = iw_1$ и сжатие $w_3 = \frac{\pi}{4} w_2$. Результатом будет полуполоса $\{\operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < \pi\}$. Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в $\left\{|w_4| = e^{\operatorname{Re} w_3} > 1,\ 0 < \arg w_4 = \operatorname{Im} w_3 < \pi\right\}$. Полученная область – «круговая луночка», одна из граничных «окружностей» которой – действительная ось.

Применим отображение $w_5 = \frac{w_4 - 1}{w_4 + 1}$. Так как $w_5(\infty) = 1$, то образом объединения двух полупрямых $\{w_4 : \operatorname{Im} w_4 = 0, \operatorname{Re} w_4 \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]\}$ будет луч $[0, +\infty]$; аналогично, из $w_5(i) = i$ следует, что образ верхней полуокружности $\{w_4 : \operatorname{Im} w_4 \geq 0, |w_4| = 1\}$ – луч $[0, +\infty i]$. Анализируя направление обхода (или используя то, что $w_5(2i) = 3 + 4i$), найдем, что образом «круговой луночки» будет первая четверть $\{w_5 : \operatorname{Re} w_5 > 0, \operatorname{Im} w_5 > 0\} = \left\{w_5 : 0 < \arg w_5 < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Наконец, отображение $w = w_5^2$ дает требуемое.

*Способ 2.* Отобразим данную полуполосу на горизонтальную полуполосу шириной $2\pi$. Для этого надо применить, аналогично первому способу, следующие отображения: $w_1 = z+1-2i$, $w_2 = iw_1$ и $w_3 = \frac{\pi}{2} w_2$. Результатом будет полуполоса $\{\operatorname{Re} w_3 > 0,\ 0 < \operatorname{Im} w_3 < 2\pi\}$. Отображение $w_4 = e^{w_3}$ переведет ее в $\{|w_4| > 1,\ 0 < \arg w_4 < 2\pi\}$, то есть внешность единичного круга с разрезом вдоль $[1, +\infty]$.

Функция Жуковского $w_5 = \frac{1}{2}\left(w_4 + \frac{1}{w_4}\right)$ отображает внешность единичного круга во внешность отрезка $[-1, 1]$, а полупрямую $[1, +\infty]$ оставляет на месте. Итак, образом в плоскости $w_5$ будет внешность полупрямой $[-1, +\infty]$. Сдвиг $w_6 = w_5 + 1$ отобразит ее на область $\{0 < \arg w_6 < 2\pi\}$, а применение отображения $w = \sqrt{w_6}$ с выделением ветви $\sqrt{-1} = i$, дает искомое отображение.

d) Данная область представляет собой внешность двух кругов, касающихся между собой в точке $z = -2i$. Поэтому отображение $w_1 = \frac{1}{z+2i}$ переводит обе окружности в прямые, не имеющие конечных точек пересечения, то есть параллельные. Так как $w_1(0) = -\frac{i}{2}$, $w_1(-i+1) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, то одна из этих прямых – $\left\{\operatorname{Im} w_1 = -\frac{1}{2}\right\}$, а поскольку $w_1(-4i) = \frac{i}{2}$, то другая прямая – $\left\{\operatorname{Im} w_1 = \dfrac{1}{2}\right\}$. Бесконечная точка принадлежит данной области, а $w_1(\infty) = 0$, поэтому образ области – полоса $\left\{|\operatorname{Im} w_1| < \dfrac{1}{2}\right\}$. Применяя растяжение $w_2 = \pi w_1$, получим полосу $\left\{|\operatorname{Im} w_2| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$ шириной $\pi$. Теперь функция $w_3 = e^{w_2}$ отображает эту полосу на правую полуплоскость $\left\{|\arg w_3| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$, поворачивая которую с помощью $w = iw_3$, найдем искомое отображение.

**Пример 3.18.** Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $w(2i) = 0$ и $\arg w'(2i) = 0$.

***Решение.*** Так как точка $-2i$ симметрична точке $2i$ относительно действительной оси (границы нашей области), то ее образ $w(-2i)$ должен быть симметричен центру окружности $|w| = 1$ относительно этой окружности, то есть $w(-2i) = \infty$. Любая дробно-линейная функция, осуществляющая такое отображение двух точек, имеет вид $w = k\dfrac{z-2i}{z+2i}$.

Чтобы найти $k$, прежде всего заметим, что образ точки $z = 0$, то есть $w(0) = -k$, должен находится на единичной окружности, то есть $k = e^{i\theta}$. Чтобы найти $\theta$, найдем $w'(2i) = e^{i\theta}\left.\dfrac{4i}{(z+2i)^2}\right|_{z=2i} = -e^{i\theta}\dfrac{i}{4}$, откуда $\arg w'(2i) = \pi + \theta + \dfrac{\pi}{2} = 0$, откуда $\theta = -\dfrac{3\pi}{2}$, или $e^{i\theta} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, то есть $w = i\dfrac{z-2i}{z+2i}$ – искомое отображение.

# Глава 4. Интегрирование функций комплексного переменного

## § 4.1. Понятие интеграла от функции комплексного переменного

Непрерывная кривая $L$, задаваемая уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, называется гладкой, если в $[a,b]$ существует производная $z'(t)$ (в точках $t = a,\ t = b$ – односторонняя), непрерывная и отличная от нуля.

Кривая, составленная из конечного числа гладких кривых, называется кусочно-гладкой.

Пусть $f(z)$ – непрерывная функция в области $D$ комплексной плоскости, $L$ – спрямляемая кривая, лежащая в области $D$ с началом в точке $z_0$ и концом в точке $z$.

Разобьем кривую $L$ произвольным образом на $n$ частей $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{n-1}$ точками $z_0, z_1, z_2, ..., z_n = z$. На каждой из частей $\gamma_k$ выберем точку $\xi_k$ и составим сумму $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$, $k = \overline{0, n-1}$. Обозначим $l_k$ – длина кривой $\gamma_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $\lambda = \max\limits_k \{l_k\}$.

Интегралом от функции $f(z)$ по кривой $L$ называется $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \int\limits_L f(z)dz$.

Если через $-L$ обозначить ту же кривую $L$, но с противоположным направлением обхода, то $\int\limits_{-L} f(z)dz = -\int\limits_L f(z)dz$.

Если $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то, полагая $z_k = x_k + iy_k$, $\xi_k = \zeta_k + i\eta_k$, $u(\zeta_k, \eta_k) = u_k$, $v(\zeta_k, \eta_k) = v_k$, $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k = (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) = = \Delta x_k + i\Delta y_k$, получим

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k + iv_k)(\Delta x_k + i\Delta y_k) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i\sum_{k=0}^{n-1} (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k),$$

то есть действительная и мнимая части комплексной интегральной суммы сами являются интегральными суммами для пары действительных функций от $x$ и $y$; первая сумма – для пары функций $u(x, y)$ и $-v(x, y)$ и данного разбиения кривой $L$, вторая – для пары $v(x, y)$ и $u(x, y)$ и того же разбиения. Так как кривая – спрямляемая, а каждая из функций любой пары непрерывна на $L$, то интегральные суммы стремятся к конечным пределам $\int\limits_L u(x, y)dx - v(x, y)dy$ и $\int\limits_L v(x, y)dx + u(x, y)dy$ для любой последовательности разбиений, удовлетворяющей условию $\lambda \to 0$.

Таким образом,

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy. \qquad (4.1)$$

## §4.2. Некоторые свойства интеграла от функции комплексного переменного

Свойства интеграла от функции комплексного переменного непосредственно следуют из свойств криволинейного интеграла:

1. $\int\limits_L (af(z)+bg(z))dz = a\int\limits_L f(z)dz + b\int\limits_L g(z)dz$;

2. $\int\limits_{L_1+L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{L_2} f(z)dz$, где $L_1+L_2$ – кривая, составленная из дуг $L_1$ и $L_2$ так, что конец $L_1$ совпадает с началом $L_2$;

3. $\left|\int\limits_L f(z)dz\right| \le \int\limits_L |f(z)|d\sigma$, где $\sigma$ – длина дуги, отсчитываемая от начала $L$ до произвольной ее точки в выбранном направлении;

4. Связь с определенным интегралом: пусть $L$ – гладкая кривая, задаваемая уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \le t \le b$, то

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_L udx - vdy + i\int\limits_L vdx + udy =$$

$$\int\limits_a^b \{u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t)\}dt +$$

$$+i\int\limits_a^b \{v(x(t),y(t))x'(t) + u(x(t),y(t))y'(t)\}dt =$$

$$\int\limits_a^b \{u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))\}\{x'(t) + iy'(t)\}dt = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Таким образом,

$$\int\limits_L f(z)dz = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{4.2}$$

**<u>Пример 4.1.</u>** Вычислить $\int\limits_L \frac{dz}{z-a}$, где $L = \{z,\ |z-a| = \rho\}$ – окружность, проходимая против часовой стрелки.

***Решение.*** Параметрическое уравнение окружности $L$ имеет вид $z = a + \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, то есть $z'(\varphi) = \frac{dz}{d\varphi} = i\rho e^{i\varphi}$, поэтому по формуле (4.2)

$$\int\limits_L \frac{dz}{z-a} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

**Пример 4.2.** Вычислить $\int\limits_L |z|\bar{z}\,dz$, где $L$ – часть окружности $|z|=1$, $0 \le \arg(z) \le \pi$, выбрав за начало $L$ точку $z=1$.

***Решение.*** Запишем уравнение кривой $L$ в виде $z=e^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Тогда $\bar{z}=e^{-it}$, $dz=ie^{it}dt$. Используя формулу (4.2), получаем:

$$\int\limits_L |z|\bar{z}dz=\int\limits_0^{\pi} e^{-it}ie^{it}dt=i\int\limits_0^{\pi}dt=\pi i.$$

**Пример 4.3.** Вычислить: $\int\limits_L \left(z^2+z\bar{z}\right)dz$, где $L$ – дуга параболы $y=x^2$, $0 \le x \le 1$, $z=0$ – начало кривой.

***Решение.*** Выпишем действительную и мнимую части подынтегральной функции:

$$z^2+z\bar{z}=(x+iy)^2+(x+iy)(x-iy)=2x^2+i2xy \Rightarrow \begin{cases} u=2x^2 \\ v=2xy \end{cases}.$$

Воспользовавшись формулой (4.1), имеем $\left(y=x^2, dy=2xdx\right)$:

$$\int\limits_L \left(z^2+z\bar{z}\right)dz=\int\limits_L 2x^2dx-2xydy+i\int\limits_L 2xydx+2x^2dy=$$

$$=2\int\limits_0^1 \left(x^2-2x^4\right)dx+6i\int\limits_0^1 x^3dx=-\frac{2}{15}+\frac{3i}{2}.$$

**Пример 4.4.** Вычислить: $\int\limits_L \frac{dz}{|\operatorname{Im} z|+|\operatorname{Re} z|}$, где $L$ – квадрат с вершинами в точках 1, $i$, $-1$, $-i$, проходимый против часовой стрелки (рис. 4.1).

***Решение.*** Поскольку на сторонах квадрата ABCD выполняется равенство $|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=|x|+|y|=1$, получаем

$$\int\limits_L \frac{dz}{|\operatorname{Im} z|+|\operatorname{Re} z|}=\int\limits_L dz.$$

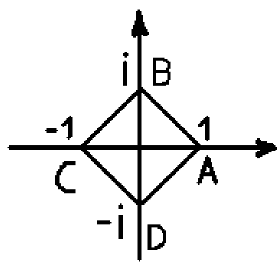


Рис. 4.1

Посчитаем интеграл вдоль отрезка AB: $y=1-x$, $0 \le x \le 1$, $dy=-dx$, $dz=dx+idy=(1-i)dx$, откуда $\int\limits_{AB} dz=\int\limits_1^0 (1-i)dx=-1+i$. Аналогично, $\int\limits_{BC} dz=-1-i$, $\int\limits_{CD} dz=1-i$, $\int\limits_{DA} dz=1+i$. Окончательно, $\oint\limits_L \frac{dz}{|\operatorname{Im} z|+|\operatorname{Re} z|}=0.$

## §4.3. Интегральная теорема Коши

**<u>Теорема Коши</u> (для простого контура).**

Если $f(z)$ – функция, аналитическая в некоторой односвязной области $D$, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz$, взятый вдоль любого замкнутого жорданового кусочно-гладкого контура $\Gamma$, лежащего в $D$, равен нулю.

***Доказательство*** проведем в предположении непрерывности $f'(z)$ вплоть до границы области $D$.

Так как $f(z)$ – аналитическая, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, причем в силу непрерывности $f'(z)$ частные производные функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ непрерывны, следовательно, $\int\limits_{\Gamma} udx - vdy = 0$ и $\int\limits_{\Gamma} vdx + udy = 0$ как интегралы по замкнутому контуру от полных дифференциалов, поэтому $\int\limits_{\Gamma} f(z)dz = 0$. ■

**<u>Пример 4.5.</u>** Определить, когда для интеграла $\int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z^2 - 9}$ можно применить интегральную теорему Коши, если $\Gamma$: 1) $|z| = \frac{1}{2}$; 2) $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$; 3) $|z-1| = 5$; 4) $|z| = 4$.

***Решение.*** Подынтегральная функция $f(z) = \frac{1}{z^2 - 9}$ имеет особенности в точках $z = \pm 3$. Поэтому

1) круг $|z| \le \frac{1}{2}$ полностью входит в область аналитичности $f(z)$, и теорема Коши имеет место;

2) рассуждения аналогичны п. 1);

3) в круге с центром $z = 1$ и радиуса 5 функция $f(z)$ имеет особенности и не является аналитической, следовательно, теорема Коши не применима;

4) рассуждая аналогично п. 3) получаем, что теорема Коши также не применима.

**<u>Следствия из теоремы Коши</u>:**

1) если $f(z)$ аналитическая в области $D$, то интеграл не зависит от пути интегрирования, т.е. если $\gamma_1 \subset D$ и $\gamma_2 \subset D$ – две кривые, имеющие общие начало и конец, то

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz\,;$$

2) если функции $f(z)$ и $g(z)$ вместе со своими производными первого порядка аналитические в односвязной области $D$, то справедлива формула

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)g'(\xi)d\xi = f(\xi)g(\xi)\Big|_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} f'(\xi)g(\xi)d\xi\,;\ z_0\,,\ z\in D.$$

**<u>Теорема Коши</u> (для сложного контура).**

Пусть $f(z)$ – функция, аналитическая в области $D$; $\Gamma$ и $\gamma_k$, $k=\overline{1,n}$ – спрямляемые жордановы кривые, лежащие в $D$; причем $\gamma_k$ принадлежат внутренности $\Gamma$, $k=\overline{1,n}$; каждая кривая $\gamma_i$ лежит во внешности $\gamma_k$, $i,k=\overline{1,n}$, $i\neq k$; многосвязная область $g$, ограниченная кривыми $\Gamma,\gamma_1,?\ ,\gamma_n$, принадлежит области $D$. Тогда $\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz$ (все интегралы берутся в одном направлении).

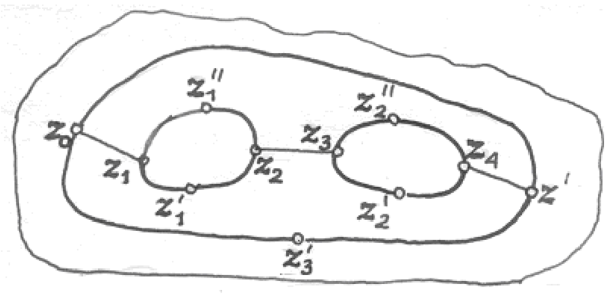



Рис. 4.1

***Доказательство*** проведем для $n=2$ (в общем случае рассуждения аналогичны).

Соединим жордановыми спрямляемыми дугами $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ кривую $\Gamma$ с $\gamma_1$, $\gamma_1$ с $\gamma_2$, $\gamma_2$ с $\Gamma$ соответственно и рассмотрим контуры $C_1 = z_0\, z_3'\, z'\, z_4\, z_2'\, z_3\, z_2\, z_1'\, z_1\, z_0$ и $C_2 = z_0\, z_1\, z_1''\, z_2\, z_3\, z_2''\, z_4\, z'\, z_3''\, z_0$ (рис. 4.1). По теореме Коши для простого контура $\int_{C_1} f(z)dz = 0$, $\int_{C_2} f(z)dz = 0$.

Следовательно, $0=\int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz + \int_{-\gamma_1} f(z)dz +$

$+\int_{-\gamma_2} f(z)dz + \ldots + \int_{-\gamma_n} f(z)dz$, поэтому $\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz$. ■

**<u>Пример 4.6.</u>** Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{1}{z}$, аналитическую в области $D$, получающейся из конечной плоскости путем исключения начала координат (область не является односвязной в конечной плоскости). Если $\Gamma$

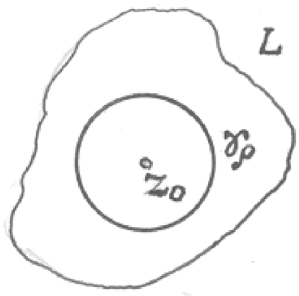
– любая замкнутая жорданова спрямляемая кривая, внутри которой находится начало координат, а $\gamma$ – окружность с центром в начале, содержащаяся внутри $\Gamma$, то будем иметь $\int\limits_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$.

## §4.4. Интегральная формула Коши и ее следствия

**Теорема (интегральная формула Коши).** Пусть функция $f(z)$ – однозначная и аналитическая в области $G$, и $L$ – замкнутая жорданова спрямляемая кривая, принадлежащая $G$ вместе со своей внутренностью $D$.

Тогда для всякой точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \tag{4.3}$$




***Доказательство.*** Опишем из точки $z_0$ как из центра окружность радиуса $\rho$, столь малого, чтобы круг $|z - z_0| \le \rho$ лежал внутри $L$ (рис. 4.2). Тогда для составного контура, образованного кривыми $L$ и $\gamma_\rho$, будем иметь:

Рис. 4.2

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L} \frac{f(z)dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0}. \tag{4.4}$$

Следовательно, для доказательства (4.3) достаточно установить равенство

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0},$$

или (используя пример 4.1.)

$$\int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z - z_0} - f(z_0) \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = 0. \tag{4.5}$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке $z_0$ неравенство $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ ($z \in \gamma_\rho$) будет выполняться $\forall \varepsilon > 0$, если $\rho < \delta(\varepsilon)$.

При этом условии получаем: $\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$, а значит,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz = 0. \tag{4.6}$$

Интеграл $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$ равен левой части равенства (4.5) и, в силу (4.4), не зависит от $\rho$. Следовательно, он равен нулю при всех рассматриваемых значениях $\rho$. Таким образом, справедливо (4.5), а значит, имеет место интегральная формула Коши (4.3). ■

Суть теоремы заключается в выражении значения функции внутри области через значения на границе.

**Следствия.**

1) **(Теорема о среднем)** Значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке $z_0$ области аналитичности равно среднему арифметическому ее значений на любой окружности с центром в точке $z_0$ (сама окружность и ее внутренность лежат в той же области).

***Доказательство.***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} i\rho e^{i\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi})d\varphi. \ ■$$

2) **(Принцип максимума)** Если функция – непостоянная, аналитическая в области $G$ и непрерывная в $\overline{G}$, то ее модуль не может достигать наибольшего значения во внутренней точке области $G$.

***Доказательство.*** Если для функции $f(z)$ в области $G$ выполняется одно из условий а) $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{const}$ или б) $|f(z)| = \mathrm{const}$, то $f(z) = \mathrm{const}$.

а) $f = u + iv$; $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \Rightarrow$ по условиям Коши-Римана $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \Rightarrow v = \mathrm{const}, f = \mathrm{const}.$

б) Пусть $|f(z)| \equiv M \neq 0$. Рассмотрим аналитическую функцию $\ln f(z) = \ln|f(z)| + i\arg f(z)$: $\mathrm{Re}(\ln(f(z))) = \ln|f(z)| = \ln M = \mathrm{const}$, $\Rightarrow$ $\ln(f(z)) = \mathrm{const}$, $\Rightarrow f(z) \equiv \mathrm{const}$.

Пусть $|f(z)|$ достигает максимума внутри области $G$ на множестве $E$, то есть $\forall z \in E$ $|f(z)| = M$.

Если $E = G$, то на $\overline{G}$ $|f(z)| = \mathrm{const}$, $\Rightarrow f(z) = \mathrm{const}$.

Если $E \neq G$, то найдется граничная точка $z_0$ множества $E$, $z_0 \in G$, а так как в любой окрестности $z_0$ есть точки множества $E$, и функция $f(z)$ непрерывна, то $|f(z_0)| = M$.

Построим окружность $C$: $|z - z_0| = r$ такую, что $C \subset G$, и на этой окружности найдется точка $z_1 \notin E$, а значит $|f(z_1)| < M$.

Из непрерывности функции $f(z)$ получаем: для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется дуга $C_1$ окружности $C$, на которой $|f(z)| < M - \varepsilon$, а на оставшейся части $C \setminus C_1$ окружности $|f(z)| \leq M$.

По теореме о среднем $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(z)d\varphi = \dfrac{1}{2\pi r}\left\{\int_{C_1} f(z)ds + \int_{C\setminus C_1} f(z)ds\right\}$, $ds = rd\varphi$.

Следовательно, $M = |f(z_0)| \leq \dfrac{1}{2\pi r}\{(M-\varepsilon)|C_1| + M|C \setminus C_1|\} =$

$= \dfrac{1}{2\pi r}M(|C_1| + |C \setminus C_1|) - \dfrac{\varepsilon}{2\pi r}|C_1| = M - \dfrac{\varepsilon}{2\pi r}|C_1|$, где через $|\cdot|$ обозначена длина соответствующей дуги. Полученное противоречие завершает доказательство. ■

**<u>Пример 4.7.</u>** Вычислить $\displaystyle\int_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz$, где a) $L = \{z : |z-1| = 1\}$, b) $L = \left\{z : |z| = \dfrac{1}{3}\right\}$, c) $L = \{z : |z - 1 - i| = \sqrt{2}\}$.

***Решение.***

а) Запишем интеграл в виде $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz = \int\limits_{|z-1|=1} \frac{\frac{ze^z}{(z^2+1)}}{(z-1)}dz$, функция $f(z)=\frac{ze^z}{(z^2+1)}$ – аналитическая в области $|z-1|<1$, а точка $z_0=1\in\{z,|z-1|<1\}$, поэтому по формуле (4.3) имеем $\int\limits_{|z-1|=1} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz = 2\pi i\left.\frac{ze^z}{z^2+1}\right|_{z=1} = \pi e i$.

b) В области $|z|<\frac{1}{3}$ подынтегральная функция $\frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}$ аналитическая, поэтому из интегральной теоремы Коши имеем $\int\limits_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz = 0$.

c) В области $|z-1-i|<\sqrt{2}$ лежат две точки, в которых знаменатель обращается в нуль: $z_1=1$ и $z_2=i$, поэтому воспользоваться непосредственно формулой (4.3) невозможно. Разложим функцию на сумму простых дробей

$$\frac{z}{(z^2+1)(z-1)} = -\frac{z-1}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2(z-1)}.$$

Тогда, применяя формулу (4.3) к каждому из интегралов, имеем:

$$\int\limits_L \frac{ze^z}{(z^2+1)(z-1)}dz = -\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{(z-1)e^z}{z^2+1}dz + \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{(z-1)}dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_L \frac{\frac{(z-1)e^z}{z+i}}{z-i}dz + \frac{1}{2}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1}dz \overset{(4.3)}{=}$$

$$= -\pi i\left.\frac{(z-1)e^z}{z+i}\right|_{z=i} + \pi i e^z\Big|_{z=1} = \frac{\pi}{2}(1-i)e^i + \pi e i.$$

**<u>Пример 4.8.</u>** Доказать, что $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ $(a>1)$.

***Решение.*** Заменой $z = e^{i\varphi}$ сведем интеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi}$ к интегралу по контуру от функции комплексной переменной. Так как $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, воспользовавшись формулой $\cos\varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi} = \frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$(z^2+2az+1) = (z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2-1}) = (z-z_1)(z-z_2).$$

Точка $z_2 = -a+\sqrt{a^2-1} \in \{|z|<1\}$, точка $z_1 = -a-\sqrt{a^2-1} \in \{|z|>1\}$; таким образом, функция $(z+a+\sqrt{a^2-1})^{-1}$ – аналитическая в $|z|<1$, и из формулы (4.3) имеем:

$$\frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2az+1} = \frac{2}{i}\int\limits_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z+a+\sqrt{a^2-1}}}{z+a-\sqrt{a^2-1}}\,dz =$$

$$= \frac{2}{i}\left.\frac{2\pi i}{z+a+\sqrt{a^2-1}}\right|_{z=-a+\sqrt{a^2-1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

## §4.5. Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma$ – спрямляемая кривая, $\varphi(\xi)$ – непрерывная на $\Gamma$ функция, $z \notin \Gamma$.

Интегралом типа Коши называется интеграл вида $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi - z}$.

Интегралом Коши называется интеграл, фигурирующий в интегральной формуле Коши.

**Пример 4.9.** Интегралы типа Коши, не являющиеся интегралами Коши: a) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x-z}$, $x\in R$; b) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\overline{\xi}\,d\xi}{\xi-z}$; c) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{\xi^{-2}d\xi}{\xi-z}$.

**Теорема (о дифференцируемости интеграла типа Коши).**

Пусть $\Gamma$ – спрямляемая кривая, $\varphi(\xi)$– непрерывная на $\Gamma$ функция, $z\notin\Gamma$, $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi)d\xi}{\xi-z}$. Тогда в любой области П, не содержащей точек $\Gamma$, функция $F(z)$ бесконечно дифференцируема, причем справедлива формула $F^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}d\xi$.

**Следствия.**

1) Если функция $f(z)$ аналитическая в области $G$, то она $\infty$-дифференцируема в области $G$ (если функция аналитическая, то она представима интегралом Коши, который является частным случаем интеграла типа Коши).

2) Для производной $n$-го порядка справедлива формула:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz; \tag{4.7}$$

3) Если функция $f(z)$ аналитическая в области $G$, то $\forall n$ $f^{(n)}(z)$ является аналитической в области $G$.

4) **Теорема Морера.** Если функция $f(z)$ однозначная и непрерывная в односвязной области $G$, причем для любой кусочно-гладкой замкнутой кривой $\Gamma\subset G$ выполняется $\int\limits_{\Gamma}f(z)dz=0$, то функция $f(z)$ – аналитическая в $G$.

***Доказательство.*** Так как $\int\limits_{\Gamma}f(z)dz=0$ для любой замкнутой кривой $\Gamma$, то $\int\limits_{z_0}^{z}f(\xi)d\xi=F(z)$ – однозначная функция.

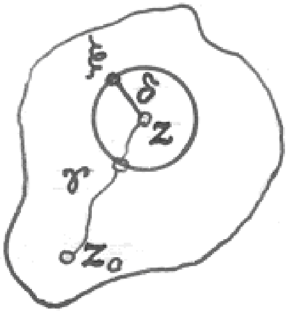


Рис. 4.3

Построим $\delta$-окрестность точки $z$ (рис. 4.3), в силу непрерывности функции, $\forall\xi$, $|\xi-z|<\delta$, выполняется неравенство $|f(\xi)-f(z)|<\varepsilon$. Обозначим через $\sigma$ радиус, связывающий $z$ и $\xi$.

Покажем, что $F'(z)=f(z)$.

$$\left|\frac{F(\xi)-F(z)}{\xi-z}-f(z)\right|=\left|\frac{1}{\xi-z}\left\{\int_{\gamma+\sigma} f(\tau)d\tau-\int_{\gamma} f(\tau)d\tau\right\}-f(z)\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\xi-z}\left\{\int_{\sigma} f(\tau)d\tau-f(z)(\xi-z)\right\}\right|=\left|\frac{1}{\xi-z}\int_{\sigma}(f(\tau)-f(z))d\tau\right|\le$$

$$\le\frac{1}{|\xi-z|}\int_{\sigma}|f(\tau)-f(z)||d\tau|\le\frac{\varepsilon\delta}{\delta}=\varepsilon,$$

следовательно, $\dfrac{F(\xi)-F(z)}{\xi-z}\to f(z)$ при $\xi\to z$.

Таким образом, $F(z)$ – аналитическая функция в области $G$, а значит, по следствию 3, ее производная $f(z)$ – аналитическая в $G$. ■

**5) <u>Неравенства Коши.</u>**

Пусть $\gamma:|z-z_0|=\rho$, $M(\rho)=\max\limits_{\gamma}|f(z)|$ и функция $f(z)$ – аналитическая в области $G$, содержащей круг $|z-z_0|\le\rho$. Тогда $\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\dfrac{n!M(\rho)}{\rho^n}$ $\forall n=0,1,2,\ldots$.

***Доказательство.*** Так как $f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}d\xi$, то $\left|f^{(n)}(z_0)\right|\le\dfrac{n!}{2\pi}\dfrac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\dfrac{n!M(\rho)}{\rho^n}$. ■

**<u>Пример 4.10.</u>** Вычислить $\displaystyle\int_{|z|=3}\frac{z\sin z}{(z-2)^3}dz$.

***Решение.*** Воспользовавшись (4.7), имеем:

$$\int_{|z|=3}\frac{z\sin z}{(z-2)^3}dz=\frac{2\pi i}{2!}(z\cdot\sin z)''\Big|_{z=2}=\pi i\,(2\cos z-z\sin z)\big|_{z=2}=2\pi i(\cos 2-\sin 2).$$

**Пример 4.11.** Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 x\,dx$.

***Решение.*** Сделав замену $z = e^{ix}$ и воспользовавшись формулой $\sin x = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$, имеем:

$$\int\limits_0^{2\pi} \sin^6 x\,dx = -\frac{1}{64i} \int\limits_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^6}{z^7} dz = -\frac{2\pi}{64\cdot 6!} \left[(z^2-1)^6\right]^{(6)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi}{32}\cdot C_6^3 = \frac{5\pi}{8}.$$

# Глава 5. Ряды аналитических функций

## §5.1. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad (5.1)$$

где $z_0, c_n \in C\ (n = 0, 1, 2, 3, ?\ )$ – фиксированные числа.

Множеством сходимости степенного ряда называется множество точек $z$, при которых ряд (5.1) сходится.

Будем в дальнейшем считать, что $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

**Теорема Коши-Адамара.**

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}$ $(0 \le R \le \infty)$, то

- при $R = \infty$ ряд (5.1) сходится во всей комплексной плоскости;
- при $R = 0$ ряд (5.1) сходится только в точке $z = z_0$ и расходится при $z \ne z_0$;
- при $0 < R < \infty$ ряд (5.1) сходится абсолютно в круге $|z - z_0| < R$ и расходится во внешности этого круга.

Круг $\{z : |z - z_0| < R\}$, внутри которого (5.1) сходится, а во внешности расходится, называется кругом сходимости, $R$ – радиусом сходимости. Поведение ряда (5.1) на границе круга сходимости может быть различным.

**Пример 5.1.** Найти радиусы сходимости рядов: a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$ .

***Решение.***

a) По формуле Коши – Адамара имеем: $\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ . Для вычисления последнего предела воспользуемся формулой Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n \cdot e^{-n+\theta_n/12n},\ \theta_n \in (0,1).$$

Тогда

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\, n^n \cdot e^{-n+\theta_n/12n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{1-\theta_n/12n}}{\sqrt[2n]{2\pi n}} = e\ ,$$

откуда $R = e^{-1}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^{n^3}$ – степенной ряд, у которого многие коэффициенты равны нулю. Прежде чем воспользоваться формулой Коши – Адамара, запишем выражения коэффициентов $c_k$ этого ряда через номер коэффициента $k$ ( здесь $c_k$ – коэффициент при $k$-ой степени $z$):

$$c_k = \begin{cases} 3^n, k = n^3, n = 0,1,? \ ; \\ 0, k \neq n^3. \end{cases}$$

Так как требуется найти верхний предел неотрицательной последовательности, можно не рассматривать ее нулевые члены. Поэтому

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^3]{|c_{n^3}|} = \lim_{n\to\infty} (3^n)^{\frac{1}{n^3}} = 1\,.$$

Значит, $R = 1$.

**Пример 5.2.** Найти множество сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\alpha}}$ $(\alpha \in R)$.

***Решение.*** $\frac{1}{R}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{1}{n^{\alpha}}}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{-\frac{\alpha}{n}}=1$, т.е. $R=1$, поэтому $|z|<1$ – круг сходимости.

На окружности $|z|=1$ $\left|\frac{z^n}{n^{\alpha}}\right|=\frac{1}{n^{\alpha}}$, поэтому при $\alpha>1$ ряд абсолютно сходится во всех ее точках, а при $\alpha\le 0$ расходится. При $0<\alpha\le 1$ и $z=1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ расходится. В остальных точках окружности ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^{\alpha}}$ сходится, так как при $z=e^{i\varphi}$ $(0<\varphi<2\pi)$ $S_{n+p}-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{e^{ik\varphi}}{k^{\alpha}}=$

$$=e^{i(n+1)\varphi}\left\{\sum_{j=0}^{p-2}\sigma_j\left[\frac{1}{(n+j+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+j+2)^{\alpha}}\right]+\frac{\sigma_{p-1}}{(n+p)^{\alpha}}\right\},$$

$\sigma_j=1+e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}+?\ +e^{ji\varphi}=\frac{1-e^{i(j+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}=e^{ji\frac{\varphi}{2}}\frac{\sin\frac{j+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. Так как $\left|\sigma_j\right|\le\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$, то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{e^{ik\varphi}}{k^{\alpha}}\right|<\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left\{\sum_{j=0}^{p-2}\left[\frac{1}{(n+j+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(n+j+2)^{\alpha}}\right]+\frac{1}{(n+p)^{\alpha}}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}\ (n+1)^{\alpha}}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

**<u>Теорема Абеля.</u>**

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ сходится в точке $z_1\ne z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z-z_0|<|z_1-z_0|$.

***Доказательство.*** Так как $z_1$ не лежит во внешности круга сходимости, то она лежит внутри него или на его границе. В обоих случаях круг $|z-z_0|<|z_1-z_0|$ содержится в круге сходимости, а значит, ряд в нем абсолютно сходится. ■

**<u>Теорема</u> (о почленном дифференцировании степенных рядов).**

В круге сходимости $|z-z_0|<R$ $(R>0)$ степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ его сумма $f(z)$ является аналитической функцией, причем производная $f'(z)$ может быть получена путем почленного дифференцирования (5.1), т.е.

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(z-z_0)^{n-1},$$

$$f^{(p)}(z)=\sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)(n-2)?\ (n-p+1)c_n(z-z_0)^{n-p}, \tag{5.2}$$

откуда $c_p=\dfrac{f^{(p)}(z_0)}{p!}$.

## §5.2. Ряд Тейлора

**<u>Теорема</u> (о разложении функции в ряд Тейлора).**

Если функция $f(z)$ – аналитическая в области $D$, $z_0\in D$, то в любом круге $U=\{z,|z-z_0|<R\}\subset D$ эту функцию можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \tag{5.3}$$

где

$$c_n=\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad \left(\gamma_r=\{\xi,|\xi-z_0|=r<R\}\right). \tag{5.4}$$

***Доказательство.*** Пусть $z\in U$ – произвольная точка; выберем число $r$ так, чтобы $|z-z_0|<r<R$, и обозначим $\gamma_r=\{\xi,|\xi-z_0|=r\}$.

По интегральной формуле Коши, $f(z)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$; $\quad \dfrac{1}{\xi-z}=$

$$\frac{1}{\xi-z_0-(z-z_0)}=\frac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=\frac{1}{(\xi-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}.$$

Ряд $\dfrac{1}{2i\pi}\cdot\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$ сходится равномерно по $\xi$ на $\gamma_r$ по признаку Вейерштрасса, так как $f(\xi)$ непрерывна, а, следовательно, ограничена на $\gamma_r$, а $\left|\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Следовательно, последнее равенство можно почленно проинтегрировать на $\gamma_r$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n ,$$

где $c_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_r}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. ■

Ряд (5.3), коэффициенты которого определены формулами (5.4), называется рядом Тейлора функции $f(z)$ с центром в точке $z_0$.

**<u>Теорема</u> (единственность разложения в степенной ряд).**

Если функция $f(z)$ в круге $U = \{z, |z - z_0| < R\}$ представима как сумма степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, то коэффициенты этого ряда однозначно определяются по формулам $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.

***Доказательство*** следует из формулы (5.2).

**<u>Основные разложения:</u>**

- $$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \quad (|z| < +\infty);$$

(5.5)

- $$\sin z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$$

(5.6)

- $$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$$

(5.7)

- $$\operatorname{sh} z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad (|z| < +\infty);$$

(5.8)

- $$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (|z| < +\infty);$$

(5.9)

- $$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n} \quad (|z| < 1)$$

(5.10)
(здесь $\ln z$ – главная ветвь логарифма);

- $$(1+z)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{\alpha}^{n} z^n \ (|z| < 1), \ C_{\alpha}^{n} = \begin{cases} \dfrac{\alpha(\alpha-1)?\ (\alpha-n+1)}{n!}, & n = 1, 2, \ldots \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

(5.11) (здесь $z_{\alpha}$ – главная ветвь степенной функции); в частности,

- $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

(5.12)

**Пример 5.3.** Разложить указанные функции в ряд Тейлора в окрестности точки $z_0$: a) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 0$; b) $\dfrac{1}{(1-z)^3}$, $z_0 = 0$; c) $\dfrac{z}{1-z+z^2}$, $z_0 = 0$; d) $\dfrac{z-1}{2z^2+5z+2}$, $z_0 = -1$; e) $\cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$; f) $e^z$, $z_0 = 3$; g) главная ветвь функции $\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)$, $z_0 = 0$.

***Решение.***

a) Из формулы (5.12) для $|z| < 1$ имеем:

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

b) Из теоремы о почленном дифференцировании степенных рядов и формулы (5.12) имеем для $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)'' = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}\right)' = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2}.$$

c) Записав данную функцию в виде

$$\frac{z}{1-z+z^2} = \frac{z(z+1)}{(z+1)(z^2-z+1)} = \frac{z(z+1)}{1+z^3}$$

и воспользовавшись формулой (5.12), для всех $|z|<1$ имеем:

$$\frac{z(z+1)}{1+z^3}=z(z+1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n}=z(z+1)\left(1-z^3+z^6-z^9+?\ \ +(-1)^n z^{3n}+?\ \right)=$$

$$=z+z^2-z^4-z^5+z^7+z^8-z^{10}-z^{11}+\ldots+(-1)^n z^{3n+1}+(-1)^n z^{3n+2}+\ldots$$

d) Воспользовавшись методом неопределенных коэффициентов, разложим функцию на простейшие дроби:

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\frac{z-1}{(z+2)(2z+1)}=\frac{A}{z+2}+\frac{B}{2z+1}=\frac{A(2z+1)+B(z+2)}{(z+2)(2z+1)},$$

$$\left.\begin{aligned} z^1 &: 2A+B=1 \\ z^0 &: A+2B=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \begin{aligned} A&=1, \\ B&=-1. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\frac{1}{z+2}-\frac{1}{2z+1}.$$

Применяя к каждой из дробей формулу (5.12), получаем:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{1-(-(z+1))}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n\ ,\ |z+1|<1,$$

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2(z+1)-1}=-\frac{1}{1-2(z+1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n\ ,\ |z+1|<\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{z-1}{2z^2+5z+2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n+(-1)^n\right)(z+1)^n$$

для всех точек круга $\left|z+1\right|<\dfrac{1}{2}$.

e) Пользуясь тригонометрическими формулами, получаем:

$$\cos z=\cos\left(\left(z-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}=$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Из разложений (5.6) и (5.7):

$$\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}}{(2n)!},\ \sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Окончательно имеем:

$$\cos z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1+\left(z-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{2!}-\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{3!}+\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^4}{4!}+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n+1)!}+(-1)^n\,\frac{\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!}+\ldots\right],\ z\in C.$$

f) Из разложения (5.5) имеем:

$$e^z=e^{(z-3)+3}=e^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-3)^n}{n!},\ z\in C.$$

g) Продифференцируем функцию $\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)$:

$$F(z)=\left(\ln\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)\right)'=\frac{1}{z+\sqrt{1+z^2}}\cdot\left[1+\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\right]=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}.$$

Из формулы (5.11) имеем:

$$\left(1+t\right)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{-1/2}^{k}t^{k}\quad\left(\left|t\right|<1\right),$$

$$C_{-1/2}^{k}=\begin{cases}(-1)^{k}\dfrac{1\cdot 3\cdot ?\ \ \cdot(2k-1)}{k!\,2^{k}}, & k=1,2,...;\\ 1, & k=0.\end{cases}$$

$$\left(1+t\right)^{-1/2}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{1\cdot 3\cdot ?\ \ \cdot\left(2k-1\right)}{k!\,2^{k}}t^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^{2}}t^{k}\ .$$

Тогда

$$\left(1+z^{2}\right)^{-1/2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^{2}}z^{2k}\quad\left(\left|z\right|<1\right).$$

Проинтегрировав почленно последнее равенство, получим:

$$\ln\left(z+\sqrt{1+z^{2}}\right)=\int_{0}^{z}F\left(t\right)dt=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\frac{\left(2k\right)!}{2^{2k}\left(k!\right)^{2}}\frac{z^{2k+1}}{2k+1},$$

где $\left|\,z\,\right|<1$.

## §5.3. Ряд Лорана

**<u>Теорема</u> (о разложении в ряд Лорана).**

Любую функцию $f(z)$, аналитическую в кольце $V=\{z, r<|z-z_0|<R\}$, $0 \le r < R \le \infty$, можно в этом кольце представить как сумму сходящегося ряда

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n, \tag{5.13}$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$c_n=\int\limits_{|\xi-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}} \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,...), \tag{5.14}$$

где $r<\rho<R$.

***Доказательство.*** Фиксируем точку $z \in V$ и построим кольцо $V'=\{\xi : r'<|\xi-z_0|<R'\}$ такое, что $z\in V'$, $\overline{V'}\subset V$.

По интегральной формуле Коши, $f(z)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int\limits_{\partial V'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=$ $=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}$, где $\Gamma'=\{\xi : |\xi-z_0|=R'\}$, $\gamma'=\{\xi : |\xi-z_0|=r'\}$ – окружности, ориентированные против часовой стрелки.

При любых $\xi\in\Gamma'$ справедливы соотношения $\dfrac{|z-z_0|}{|\xi-z_0|}<1$ и $\dfrac{1}{\xi-z}=\dfrac{1}{(\xi-z_0)\left(1-\dfrac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ (сходимость равномерная на $\Gamma'$ по $\xi$), поэтому $\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi-z}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$, $c_n=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int\limits_{\Gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{(\xi-z_0)^{n+1}}$ $(n=0,1,2...)$.

При всех $\xi\in\gamma'$ справедливы соотношения $\dfrac{|\xi-z_0|}{|z-z_0|}<1$ и $-\dfrac{1}{\xi-z}=\dfrac{1}{z-z_0-(\xi-z_0)}=\dfrac{1}{(z-z_0)\left(1-\dfrac{\xi-z_0}{z-z_0}\right)}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\xi-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}$ (сходимость

равномерная на $\gamma'$ по $\xi$), поэтому $-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'}\frac{f(\xi)d\xi}{\xi - z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{d_n}{(z-z_0)^n}$,
$d_n = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'} f(\xi)(\xi - z_0)^{n-1}d\xi \;\; (n = 1, 2...)$.

В последних двух формулах заменим $n$ на $-n$, получим $c_n = d_{-n} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{\gamma'} f(\xi)(\xi - z_0)^{-n-1}d\xi \;\; (n = -1, -2, ...)$.

Таким образом, $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, где ряд определяется как объединение двух рядов (по положительным и неположительным степеням), а окружности $\Gamma'$ и $\gamma'$ можно заменить (по интегральной теореме Коши) любой окружностью $|\xi - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$. ■

Ряд (5.13), коэффициенты которого определяются по формулам (5.14), называется рядом Лорана функции $f(z)$ в кольце $V$.

Выражение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ называется правильной частью ряда Лорана, а $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + ...$ – главной частью ряда Лорана.

***Замечание.*** Если $z_0 = \infty$, то рядом Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки функции $f(z)$ называется ряд $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, при этом правильной его частью называется $\tilde{f}_1(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + ...$, а главной – $\tilde{f}_2(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ....$

По формуле Коши – Адамара, $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}$, $\frac{1}{r} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_{-n}|}$.

**Теорема (о единственности разложения в ряд Лорана).**

Всякий сходящийся ряд по отрицательным и положительным степеням $z - z_0$ является рядом Лорана своей суммы, т.е. если функция $f(z)$ в кольце $V$ представима рядом вида (5.13), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам (5.14).

**Пример 5.4.** Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ в кольце:
a) $V_1=\{z:0<|z|<1\}$; b) $V_2=\{z:1<|z|<2\}$; c) $V_3=\{z:2<|z|<\infty\}$.

***Решение.*** Используя метод неопределенных коэффициентов, представим рациональную функцию $f(z)$ в виде суммы простых дробей: $f(z)=\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$.

Пользуясь формулой (5.12), получаем следующие разложения:

a) $-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ (сходится при $|z|<1$),

$\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$ (сходится при $|z|<2$), поэтому в кольце $V_1$ $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$;

b) $-\dfrac{1}{z-1}=-\dfrac{1}{z\left(1-\dfrac{1}{z}\right)}=-\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^n=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}z^n$ (сходится при $|z|>1$), поэтому в кольце $V_2$ (с учетом второго разложения в а)) $f(z)=-\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}z^n-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$;

c) $\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{2}{z}\right)}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\left(\dfrac{z}{2}\right)^n$ (сходится при $|z|>2$), поэтому в кольце $V_3$ (с учетом первого разложения в b)) $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\left(\dfrac{1}{2^{n+1}}-1\right)z^n$.

## §5.4. Классификация изолированных особых точек однозначного характера

Точка $z_0\in\overline{C}$ называется изолированной особой точкой функции $f(z)$, если существует такая проколотая окрестность этой точки (т.е. $0<|z-z_0|<R$ при конечной $z_0$ или $R<|z|<\infty$ при $z_0=\infty$), в которой $f(z)$ аналитична.

В зависимости от поведения $f(z)$ при приближении к такой точке различают три типа особых точек.

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ называется а) устранимой точкой, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=A$;

б) полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$;

в) существенно особой точкой, если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ не существует.

Изолированные особые точки могут быть классифицированы по виду лорановского разложения функции в проколотой окрестности этой точки.

**<u>Теорема</u> (критерий устранимой точки).**

Изолированная особая точка $z_0 \in C$ функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда лорановское разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ не содержит главной части, т.е. $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

**<u>Теорема</u> (критерий полюса).**

Изолированная особая точка $z_0 \in C$ функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ содержит конечное число отличных от нуля членов, т.е. $f(z)=\sum\limits_{n=-N}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Порядок полюса $z_0$ функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$ в этой точке. Из теоремы о критерии полюса следует, что порядок полюса совпадает с номером $N$ старшего члена главной части лорановского разложения функции в проколотой окрестности полюса.

**<u>Теорема</u> (критерий существенно особой точки).**

Изолированная особая точка $z_0$ функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда главная часть лорановского разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z_0$ содержит бесконечно много отличных от нуля членов, т.е. $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$.

Эти критерии справедливы и для случая $z_0=\infty$ с учетом определения ряда Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.

**<u>Пример 5.5.</u>** Определить характер особых точек функций: a) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$; b) $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)^n}$; c) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$.

***Решение.***

a) $z=0$ – устранимая особая точка, так как $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\sin z}{z}=1$;

b) $z=2$ – полюс порядка $n$, так как $\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{1}{(z-2)^n}=\infty$, а порядок нуля функции $(z-2)^n$ в точке $z=2$ равен $n$;

c) $z=0$ – существенно особая точка, так как при стремлении $z=x$ к 0 по действительной оси предел справа равен $\infty$, а слева 0; при стремлении $z=iy$ к 0 по мнимой оси функция $e^{\frac{1}{z}}=\cos\dfrac{1}{y}-i\sin\dfrac{1}{y}$ вообще не имеет предела.

**<u>Пример 5.6.</u>** Найти полюсы функции $f(z)$ и определить их кратности:

a) $f(z)=\dfrac{ze^z}{z^4-z^3-3z^2+5z-2}$; b) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(1-\cos z)}$.

***Решение.***

a) Запишем функцию $f(z)$ в виде $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-1)^3(z+2)}$.

Точки $z=1$ и $z=-2$ являются полюсами, так как

$$\lim_{z\to 1}\frac{ze^z}{(z-1)^3(z+2)}=\infty,\ \lim_{z\to -2}\frac{ze^z}{(z-1)^3(z+2)}=\infty.$$

Точки $z=1$ и $z=-2$ нули знаменателя, причем $z=1$ – нуль третьего порядка, а $z=-2$ простой нуль. Числитель в этих точках в нуль не обращается, поэтому точки $z=1$ и $z=-2$ будут соответственно полюсами 3-го и 1-го порядка функции $f(z)$.

b) Нулями знаменателя будут точки $z=2\pi n$, $n\in Z$. Разложим знаменатель $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z=0$:

$$\varphi(z)=z^3(1-\cos z)=z^3\left[1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{(2k)!}\right]=z^3\left(\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\ldots\right).$$

Точка $z=0$ – нуль пятого порядка функции $\varphi(z)$. Поэтому $z=0$ – полюс пятого порядка $f(z)$.

Разложим $\varphi(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точек $z=2\pi n,\, n\in Z,\, n\neq 0$ :

$$\varphi(z)=\left((z-2\pi n)^3+3\cdot 2\pi n(z-2\pi n)^2+3\cdot 4\pi^2 n^2(z-2\pi n)+8\pi^3 n^3\right)\times$$

$$\times\left(\frac{(z-2\pi n)^2}{2!}-\frac{(z-2\pi n)^4}{4!}+?\right),$$

поэтому эти точки – нули 2-го порядка знаменателя, значит, они будут полюсами 2-го порядка функции $f(z)$.

Поведение функции в окрестности существенно особой точки характеризует

**Теорема Сохоцкого-Казорати-Вейерштрасса.**

Если точка $z_0$ – изолированная существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого числа $A\in\overline{C}$ можно найти последовательность точек $z_n\to z_0$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=A$.

***Доказательство.*** 1) $A=\infty$. Так как функция $f(z)$ не может быть ограниченной в проколотой окрестности $\{z:0<|z-z_0|<r\}$, то в этой окрестности найдется точка $z_1$ такая, что $|f(z_1)|>1$. Аналогично, в окрестности $\left\{z:0<|z-z_0|<\frac{|z_1-z_0|}{2}\right\}$ найдется точка $z_2$ такая, что $|f(z_2)|>2$ и т.д. В окрестности $\left\{z:0<|z-z_0|<\frac{|z_1-z_0|}{n}\right\}$ найдется точка $z_n$ такая, что $|f(z_n)|>n$. Очевидно, при $n\to\infty$ $z_n\to z_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=\infty$.

2) $A \neq \infty$. Либо точки, в которых функция $f(z)$ равна $A$ ($A$-точки), имеют $z_0$ своей предельной точкой, и тогда из них можно выбрать последовательность $z_n \to z_0$, на которой $f(z_n) = A$; либо существует проколотая окрестность $\{z : 0 < |z - z_0| < r'\}$, в которой $f(z) \neq A$. В этой окрестности определена аналитическая функция $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$, для которой $z_0$ также является существенно особой точкой (ибо $f(z) = A + \dfrac{1}{\varphi(z)}$ и если бы $\varphi(z)$ при $z \to z_0$ стремилась бы к конечному или бесконечному пределу, то $f(z)$ вела бы себя аналогичным образом), а значит, найдется последовательность $z_n \to z_0$ такая, что $\varphi(z_n) \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n \to \infty} f(z_n) = A$. ■

**Теорема Пикара.**

Если точка $z_0$ – изолированная существенно особая точка функции $f(z)$, то в любой проколотой окрестности точки $z_0$ функция $f(z)$ принимает любое конечное комплексное значение, за исключением, быть может, одного.

## § 5.6. Вычет. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов

При изучении аналитических функций наиболее интересными являются точки, в которых функции перестают быть аналитическими – их особые точки, так как именно в них и главных частях лорановских разложений в их окрестностях содержится основная информация об аналитических функциях. Если трактовать аналитическую функцию как комплексный потенциал векторного поля (например, поля скоростей течения жидкости), то особые точки будут интерпретироваться как источники, стоки, вихри и другие элементы, определяющие это поле.

### 5.6.1.Понятие вычета в конечной точке

Пусть $z_0 \neq \infty$ – изолированная особая точка однозначной аналитической в проколотой окрестности точки $z_0$ функции $f(z)$, $L$ – замкнутый жорданов кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя точку $z_0$ и лежащий целиком в окрестности $z_0$.

Вычетом функции $f(z)$ в точке $z_0$ называется интеграл от этой функции по контуру $L$, деленный на $2\pi i$:

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(z)dz\,. \tag{5.15}$$

**Теорема Коши о вычетах.** Интеграл от функции $f(z)$, взятый по замкнутому контуру $\Gamma$, содержащемуся в области $D$, где функция является однозначной и аналитической, за исключением изолированных особых точек однозначного характера, и не проходящему через особые точки, равен произведению суммы вычетов функции относительно всех особых точек $z_1,?\ ,z_n$, заключенных внутри $\Gamma$, на $2\pi i$:

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z)\,. \tag{5.16}$$

***Доказательство.*** Пусть функция $f(z)$ – однозначная и аналитическая в области $D$, за исключением изолированных особых точек однозначного характера; $\Gamma$ – замкнутый контур, лежащий в $D$; его внутренность может содержать лишь конечное число особых точек (в противном случае особые точки имели бы, по крайней мере, одну предельную точку, являющуюся также особой, но неизолированной).

Опишем около каждой из изолированных особых точек $z_1,?\ ,z_n$ функции $f(z)$, расположенных внутри $\Gamma$, окружность $\gamma_\kappa : |z-z_k|=\rho_k$ столь малого радиуса $\rho_k$, чтобы эта окружность лежала внутри $\Gamma$ и чтобы каждая из них лежала во внешности остальных. Тогда по интегральной теореме Коши для составного контура будем иметь:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)dz\,,$$

Учитывая определение вычета $\underset{z=z_k}{res}\, f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\gamma_k} f(z)dz$, получаем требуемое. ■

***Замечание.*** Вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z_k \in C$ равен коэффициенту при $(z-z_k)^{-1}$ в ее лорановском разложении в окрестности $z_k$:

$$\underset{z=z_k}{res}\, f(z)=c_{-1}\,.$$

Действительно, в проколотой окрестности $z_k$ функция $f(z)$ представляется рядом Лорана $f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_k)^n$; интегрируя почленно (что возможно ввиду равномерной сходимости ряда Лорана на $\gamma_k$), получим ,с учетом теоремы Коши и (4.7)

$$\int\limits_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{\gamma_k} (z-z_k)^n dz = c_{-1} 2\pi i .$$

### 5.6.2. Вычисление вычета в конечных точках

1) $z_0$ – устранимая особая точка функции $f(z)$, тогда $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = 0$.

2) $z_0$ – полюс $n$-го порядка функции $f(z)$, тогда

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{(z-z_0)^n f(z)\right\}. \qquad (5.17)$$

В частности, если $z_0$ – простой полюс, то $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$.

Действительно, в проколотой окрестности точки $z_0$ имеем разложение

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + ? \ + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \ .$$

Умножим обе части разложения на $(z-z_0)^n$, затем продифференцируем почленно $n-1$ раз и получим:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{(z-z_0)^n f(z)\right\} = (n-1)! c_{-1} + n(n-1)...2c_0 (z-z_0) + ... .$$

Переходя теперь к пределу при $z \to z_0$, получаем формулу для вычисления вычета в полюсе $n$-го порядка.

*Приведем две модификации этих формул.*

Если в окрестности $z_0$ $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – аналитические функции в точке $z_0$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$ (то есть $z_0$ – простой полюс), то

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}, \qquad (5.18)$$

так как

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \underset{z=z_0}{res}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(z)}{\dfrac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Если $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, где $\varphi(z)$ – аналитическая в точке $z_0$, $m \in N$, то

$$\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(z_0). \qquad (5.19)$$

3) $z_0$– существенно особая точка функции $f(z)$, тогда, раскладывая $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, находим $c_{-1}$; $\underset{z=z_0}{res}\, f(z) = c_{-1}$.

### 5.6.3. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть $z_0 = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$, тогда вычетом в бесконечности называется величина

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L} f(z)dz,$$

где $L^-$ – замкнутый жорданов кусочно-гладкий контур, содержащий внутри себя начало координат и полностью лежащий в окрестности бесконечно удаленной точки $\{z, R < |z| < \infty\}$, где $f(z)$ аналитическая, причем $L^-$ означает, что обход контура $L$ осуществляется в отрицательном направлении.

В окрестности бесконечности разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана имеет вид $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$. Интегрируя почленно вдоль $\gamma_R^- = \{z, |z| = R\}$, находим

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1}.$$

**<u>Основная теорема о вычетах.</u>**

Если $z_1, \ldots, z_n$– изолированные конечные особые точки функции $f(z)$, аналитической, за исключением этих точек, во всей комплексной плоскости; то

$$\sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z) + \underset{z=\infty}{res}\, f(z) = 0. \qquad (5.20)$$

***Доказательство.*** Построим окружность $\gamma_R = \{z, |z| = R\}$ столь большого радиуса, что она содержит внутри все конечные особые точки $z_k$; пусть $\gamma_R$ ориентирована против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z);$$

с другой стороны, учитывая направление обхода окружности,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = -\underset{z=\infty}{res}\, f(z).$$

Значит, справедливо утверждение теоремы. ■

### 5.6.4. Вычисление вычета в бесконечности

1) $z_0 = \infty$ – устранимая особая точка функции $f(z)$, тогда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \lim_{z\to\infty} z\big(f(\infty) - f(z)\big), \text{ где } f(\infty) = \lim_{z\to\infty} f(z). \qquad (5.21)$$

2) $z_0 = \infty$ – полюс $m$-го порядка функции $f(z)$, тогда

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\lim_{z\to\infty}\left(z^{m+2} f^{(m+1)}(z)\right). \qquad (5.22)$$

3) если $z_0 = \infty$ – существенно особая точка функции $f(z)$, то чаще применяется формула $\underset{z=\infty}{res}\, f(z) = -c_{-1}$.

**<u>Пример 5.7.</u>** Вычислить вычет функции $f(z)$ в точке $z_0$: a) $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$, $z_0 = i$; b) $f(z) = \text{ctg}^2 z$, $z_0 = 0$; c) $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$, $z_0 = \infty$; d) $f(z) = \ln z \cdot \sin\dfrac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$, причем выбирается главная ветвь логарифма.

***Решение.***

а) Точка $z_0 = i$ – простой полюс $f(z)$, так как

$$\lim_{z\to i} f(z)=\lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{(z+i)(z-i)}=\infty.$$

Поэтому, воспользовавшись частным случаем формулы (5.17), получаем:

$$\underset{z=i}{res}\, f(z)=\lim_{z\to i}\frac{(z-i)ze^{iz}}{(z+i)(z-i)}=\frac{ie^{-1}}{i+i}=\frac{1}{2e}.$$

b) Точка $z_0=0$ – полюс 2-го порядка, так как знаменатель $\sin^2 z$ в точке $z_0=0$ имеет нуль 2-го порядка. При помощи формулы (5.17) получаем:

$$\underset{z_0=0}{res}\, f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\operatorname{ctg}^2 z\right)=\lim_{z\to 0}\left[2z\cdot\operatorname{ctg}^2 z-\frac{2z^2\operatorname{ctg} z}{\sin^2 z}\right]=$$

$$=2\lim_{z\to 0} z\cdot\operatorname{ctg} z\cdot\left[\frac{\cos z\cdot\sin z-z}{\sin^2 z}\right]=2\lim_{z\to 0}\frac{(\cos z\cdot\sin z-z)'}{\left(\sin^2 z\right)'}=$$

$$=2\lim_{z\to 0}\frac{-\sin^2 z+\left(\cos^2 z-1\right)}{2\sin z\cdot\cos z}=-2\lim_{z\to 0}\frac{2\sin^2 z}{2\sin z\cdot\cos z}=-2\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{\cos z}=0.$$

c) Так как $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}\cdot z\cdot(z-1)}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{z\cdot(z-1)}=0$, то $z_0=\infty$ – устранимая особая точка. Воспользовавшись формулой (5.21), найдем:

$$\underset{z=\infty}{res}\, f(z)=\lim_{z\to\infty} z\left(0-\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}\right)=\lim_{z\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{z}}{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z-1}=0.$$

d) Точка $z_0=1$ – существенно особая точка. Разложим функцию в ряд, воспользовавшись формулами (5.6) и (5.10):

$$\ln z=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{(z-1)^k}{k}=(z-1)-\frac{(z-1)^2}{2}+\frac{(z-1)^3}{3}+\ldots$$

$$\sin\frac{1}{z-1}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{2k-1}\frac{1}{(2k-1)!}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!(z-1)^3}+\frac{1}{5!(z-1)^5}-\ldots..$$

Перемножая два ряда, найдем коэффициент при первой отрицательной степени $(z-1)^{-1}$:

$$c_{-1}=\frac{1}{2\cdot 3!}-\frac{1}{4\cdot 5!}+\frac{1}{6\cdot 7!}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n+1)!}.$$

### 5.6.5. Вычисление интегралов с помощью вычетов

**I.** Если однозначная функция $f(z)$ – аналитическая в замкнутой области $\overline{D}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_k \in D$, $k=1,2,...,n$, область $D$ ограничена замкнутой жордановой кусочно-гладкой кривой $\Gamma$, то

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{res}\, f(z), \qquad (5.23)$$

где контур $\Gamma$ обходится в положительном направлении относительно области $D$.

**Пример 5.8.** Вычислить интегралы:

a) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|+|z-1|=\varepsilon}\frac{z^2+1}{z^2(z-2)}dz$ ; b) $\displaystyle\int\limits_{|z-1-i|=2}\frac{\cos\frac{1}{z}}{iz+1}dz$.

***Решение.***

a) Особыми точками подынтегральной функции являются $z_1 = 0$ – полюс 2-го порядка, $z_2 = 2$ – простой полюс, $z_3 = \infty$ – устранимая особая точка. Точки $z_1, z_2 \in D$, $z_3 \notin D$ ($D$ – область, ограниченная контуром $\Gamma$). Воспользовавшись формулой (5.17), подсчитаем вычеты в точках $z_1$, $z_2$:

$$\underset{z=0}{res}\,\frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2+1}{(z-2)}\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z^2-4z-1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{4},$$

$$\underset{z=2}{res}\,\frac{z^2+1}{z^2(z-2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2+1}{z^2} = \frac{5}{4}.$$

Тогда из (5.23) имеем:

$$\int_{\Gamma}\frac{z^2+1}{z^2(z-2)}dz = 2\pi i\left(\frac{5}{4}-\frac{1}{4}\right) = 2\pi i.$$

b) Внутри контура интегрирования лежат две особые точки подынтегральной функции: $z = i$ – простой полюс и $z = 0$ – существенно особая точка, для вычисления вычета в которой формул не существует и, следовательно, подсчитывать вычет сложно. Вне контура лежит только одна особая точка – $z = \infty$, причем вычет в ней достаточно легко считается по формуле (5.21). Отсюда

$$\int\limits_{|z-1-i|=2} \frac{\cos\frac{1}{z}}{iz+1}dz = -2\pi i\cdot \underset{z=\infty}{res}\, \frac{\cos\frac{1}{z}}{iz+1} = -2\pi i\cdot \lim_{z\to\infty} \frac{-z\cdot\cos\frac{1}{z}}{iz+1} = \frac{2\pi i}{i} = 2\pi$$

.

**II.** Теорию вычетов можно применять для вычисления интегралов вида

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx,$$

где $R(u,v)$ – рациональная функция аргументов $u$, $v$, не имеющая особенностей на окружности $u^2+v^2=1$.

Пусть $z=e^{ix}$, тогда $\cos x = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $\sin x = \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)$, $dx = \frac{dz}{iz}$.

Когда $x$ меняется от 0 до $2\pi$, точка $z$ пробегает окружность $|z|=1$ в положительном направлении. Исходный интеграл такой заменой сводится к интегралу по замкнутому контуру от функции комплексного аргумента, который легко вычисляется с помощью вычетов (см. I).

**Пример 5.9.** Вычислить интегралы: a) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}$, $|\rho|\neq 1$, $\rho$ – комплексное число; b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$, $a>1$.

***Решение.***

a) Сделав замену переменной $z=e^{ix}$, получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2} = i\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{\rho z^2-\left(1+\rho^2\right)z+\rho}.$$

Точки $z=\rho$ , $z=\dfrac{1}{\rho}$ – простые полюсы подынтегральной функции, причем только один лежит в круге $|z|<1$. Если $|\rho|<1$, то в круге $|z|<1$ лежит полюс $z=\rho$ и

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}=2\pi i\cdot \underset{z=\rho}{res}\ \frac{i}{\rho z^2-\left(1+\rho^2\right)z+\rho}=\frac{2\pi}{1-\rho^2}.$$

Если $|\rho|>1$, то в круге $|z|<1$ лежит полюс $z=\dfrac{1}{\rho}$ и

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-2\rho\cos x+\rho^2}=2\pi i\cdot \underset{z=\frac{1}{\rho}}{res}\ \frac{i}{\rho z^2-\left(1+\rho^2\right)z+\rho}=\frac{2\pi}{\rho^2-1}.$$

b) Заменой переменных $x=\cos\varphi$ сведем исходный интеграл к следующему виду:

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}.$$

Выполнив замену переменной $z=e^{i\varphi}$ и воспользовавшись формулой (5.20), находим:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{a-\cos\varphi}=-\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-2az+1}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

**III.** Теорию вычетов можно использовать при вычислении несобственных интегралов по вещественной оси, если методы действительного анализа оказываются неэффективными.

1) Если функция $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек $z_k$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, непрерывная в замкнутой полуплоскости за исключением тех же точек, и $\lim\limits_{z\to\infty} zf(z) = 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z).$$

Для нижней полуплоскости правую часть последней формулы нужно брать с минусом.

2) Если функция $f(z)$ – аналитическая в верхней полуплоскости за исключением конечного числа особых точек $z_k$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $k = 1, 2, ..., n$, непрерывная в замкнутой полуплоскости за исключением тех же точек, и $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{imx} f(x)dx = 2i\pi \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z)e^{imz}, \ m > 0.$$

Если, кроме того, функция $f(z)$ вещественна на действительной оси, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos mx dx = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z)e^{imz}, \ m > 0,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin mx dx = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{n} \underset{z=z_k}{res}\, f(z)e^{imz}, \ m > 0.$$

**Пример 5.10.** Вычислить интегралы: a) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^n}$; b) $I = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$.

***Решение.***

a) В верхней полуплоскости находится единственный полюс подынтегральной функции $z = i$ порядка $n$. Найдем $\underset{z=i}{res}\, f(z)$ по формуле (5.17):

$$\underset{z=i}{res}\, f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\left(\left(\frac{z-i}{z^2+1}\right)^n\right)^{(n-1)}\Bigg|_{z=i} = \frac{1}{(n-1)!}\left((z+i)^{-n}\right)^{(n-1)}\Big|_{z=i} =$$

$$= \frac{-n(n+1)?\ (2n-2)i}{(n-1)! \cdot 2^{2n-1}}. \text{ Поэтому } I = \frac{(2n-2)!\pi}{((n-1)!)^2\, 2^{2n-2}}.$$

b) $$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}dx = -\pi \operatorname{Im} \underset{z=ai}{res} \frac{e^{iz}}{z^2+a^2} = -\pi \operatorname{Im} \frac{e^{-a}}{2ai} = \frac{\pi}{2ae^a}.$$

# Глава 6. Преобразование Лапласа

## §6.1. Функция-оригинал, изображение. Аналитичность изображения

Функцией-оригиналом называют любую комплекснозначную функцию действительного аргумента $t$ $f : R \to C$, удовлетворяющую условиям:

1) $f(t)$ непрерывна вместе со своими производными, кроме отдельных точек разрыва первого рода, причем на каждом конечном интервале таких разрывов конечное число;

2) для $t < 0$ $f(t) \equiv 0$;

3) существуют положительные константы $M$ и $s$ такие, что $|f(t)| < Me^{st}$, при этом число $a$, являющееся нижней гранью таких $s$, называют показателем роста функции $f(t)$.

В приложениях $t$, как правило, это время, $f(t)$ - функция, описывающая физический процесс. С этой точки зрения безразлично, как протекал этот процесс до момента наблюдения (при $t < 0$), поэтому второе условие не ограничивает области приложения метода, рассматриваемого в этой главе.

Простейшей функцией-оригиналом является «единичная функция» (или функция Хевисайда):

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Функции $\eta(t)\sin\omega t$, $\eta(t)\cos\omega t$, $\eta(t)e^{\omega t}$ также являются оригиналами. В дальнейшем множитель $\eta(t)$ будем опускать и всегда под функцией-оригиналом понимать функцию, домноженную на $\eta(t)$.

Изображением функции $f(t)$ (по Лапласу) будем называть функцию

$$F(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt\,, z\in C\,.$$

Соответствие $f(t)\to F(z)$ называется преобразованием Лапласа (функция $f(t)$ преобразуется по Лапласу в функцию $F(z)$) и обозначается $F(z)\fallingdotseq f(t)$ либо $f(t)\fallingdotseq F(z)$, либо $F[f]$ (оригинал, как правило, строчной буквой, изображение – соответствующей прописной).

**<u>Теорема</u> (об аналитичности изображения).**

Для оригинала $f(t)$ с показателем роста $s$ изображение $F(z)$ – аналитическая функция, определенная в полуплоскости $\operatorname{Re} z>s$.

***Доказательство.*** Так как $z=x+iy$, то $\left|e^{-zt}\right|=\left|e^{-xt}\right|\cdot\left|e^{-iyt}\right|=e^{-xt}$, поэтому $\left|\int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt\right|\le\int_0^\infty Me^{st}\left|e^{-tz}\right|dt=M\int_0^\infty e^{t(s-x)}dt=\dfrac{M}{s-x}e^{t(s-x)}\Big|_0^\infty=\dfrac{M}{x-s}$.

Следовательно, интеграл сходится при $x>s$, т.е функция $F(z)$ определена в полуплоскости $\operatorname{Re} z>s$.

$$\left|\int_0^\infty\left[f(t)e^{-tz}\right]_z' dt\right|=\left|\int_0^\infty f(t)te^{-tz}dt\right|\le M\int_0^\infty e^{st}\left|te^{-tz}\right|dt=M\int_0^\infty te^{t(s-x)}dt=$$

$=M\left[\dfrac{te^{t(s-x)}}{s-x}\Bigg|_0^\infty-\int_0^\infty\dfrac{e^{t(s-x)}}{s-x}dt\right]=\dfrac{M}{(s-x)^2}$, следовательно, $F'(z)$ существует. ■

## §6.2. Формула обращения преобразования Лапласа. Единственность обращения

**<u>Теорема</u> (формула обращения).**

Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста $s$, $F(z)$ – его изображение, то в точках непрерывности $f(t)=\dfrac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(z)e^{tz}dz$, где $a\in R,\ a>s$, интеграл понимается в смысле Коши.

***Доказательство.*** Рассмотрим $f_b(t)=\dfrac{1}{2i\pi}\int_{a-ib}^{a+ib}F(z)e^{tz}dz=$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_{a-ib}^{a+ib}\left[\int_0^\infty f(\xi)e^{-z\xi}d\xi\right]e^{tz}dz=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty f(\xi)\left[\int_{a-ib}^{a+ib}e^{tz-\xi z}dz\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty\frac{f(\xi)}{t-\xi}e^{z(t-\xi)}\Bigg|_{z=a-ib}^{a+ib}d\xi=\frac{1}{2i\pi}\int_0^\infty\frac{f(\xi)}{t-\xi}\left[e^{a(t-\xi)}e^{ib(t-\xi)}-e^{a(t-\xi)}e^{-ib(t-\xi)}\right]d\xi=$$

$$=\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{t-\xi}e^{-a\xi}\sin b(t-\xi)d\xi=$$ (выполним замену $u=(\xi-t)b$)

$$=\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_{-bt}^{\infty}\frac{f\left(\frac{u}{b}+t\right)}{-\frac{u}{b}}e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)}\sin(-u)\frac{1}{b}du=\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_{-bt}^{\infty}f\left(\frac{u}{b}+t\right)e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)}\frac{\sin u}{u}du=$$

$$=\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_{-bt}^{\infty}\left[f\left(\frac{u}{b}+t\right)e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)}-f(t)e^{-at}\right]\frac{\sin u}{u}du+\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_{-bt}^{\infty}f(t)e^{-at}\frac{\sin u}{u}du=$$

$$=\frac{e^{at}}{\pi}\int\limits_{-bt}^{\infty}\left[f\left(\frac{u}{b}+t\right)e^{-a\left(\frac{u}{b}+t\right)}-f(t)e^{-at}\right]\frac{\sin u}{u}du+\frac{e^{at}}{\pi}f(t)e^{-at}\int\limits_{-bt}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du.$$

Так как $f(t)e^{-at}$ - непрерывная функция, то можно показать, что первое слагаемое бесконечно мало при $b\to\infty$; интеграл Эйлера подсчитывается по формуле $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du=\pi$. Значит, $\lim\limits_{b\to\infty}f_b(t)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}F(z)e^{tz}dz=f(t)$. ■

**<u>Теорема</u> (единственность обращения).**

Если два оригинала $f_1(t)$ и $f_2(t)$ имеют одно и то же изображение $F(z)$, то функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ совпадают во всех точках $t$, где обе функции непрерывны.

***Доказательство.*** В точке $t$, где функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ непрерывны, имеют место формулы $f_1(t)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{tz}dz$ и $f_2(t)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(z)e^{tz}dz$, а значит, $f_1(t)=f_2(t)$. ■

Таким образом, оригинал определяется своим изображением с точностью до значений в точках разрыва.

## §6.3. Свойства преобразования Лапласа

1. **<u>Линейность:</u>** $\alpha f(t)+\beta g(t)\risingdotseq\alpha F(z)+\beta G(z)$ (следует из линейности интеграла).

2. **<u>Теорема подобия:</u>** $f(\alpha t)\risingdotseq\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$.

***Доказательство.*** $f(\alpha t) \risingdotseq \int_0^\infty f(\alpha t)e^{-zt}dt = \int_0^\infty f(u)e^{-z\frac{u}{\alpha}}\frac{1}{\alpha}du = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{z}{\alpha}\right)$. ■

3. **<u>Дифференцирование оригинала:</u>** если $f^{(n)}(t)$ является оригиналом, то $f^{(n)}(t) \risingdotseq z^n F(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-2)}(0)$, в частности, для $n=1$ $f'(t) \risingdotseq zF(z) - f(0)$.

***Доказательство.*** $f'(t) \risingdotseq \int_0^\infty f'(t)e^{-zt}dt = f(t)e^{-zt}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f(t)ze^{-zt}dt =$

$= -f(0) + z\int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt = zF(z) - f(0)$, т.е. для $n=1$ формула доказана.

Для $n=2$

$f''(t) = [f'(t)]' \risingdotseq z[zF(z) - f(0)] - f'(0) = z^2F(z) - zf(0) - f'(0)$.

Далее по индукции. ■

4. **<u>Дифференцирование изображения</u>:** $F^{(n)}(z) \risingdotseq (-1)^n t^n f(t)$.

***Доказательство.*** $F'(z) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt\right) = -\int_0^\infty f(t)te^{-tz}dt \risingdotseq -tf(t)$.

$F''(z) = \frac{d}{dz}F'(z) = -\frac{d}{dz}\left(\int_0^\infty f(t)te^{-tz}dt\right) = \int_0^\infty f(t)t^2e^{-tz}dt \risingdotseq t^2 f(t)$.

Далее по индукции. ■

5. **<u>Интегрирование оригинала</u>:** $\int_0^t f(t)dt \risingdotseq \frac{F(z)}{z}$.

***Доказательство.*** Очевидно, что если $f(t)$ – оригинал, то $g(t) = \int_0^t f(t)dt$ – оригинал. Поэтому $f(t) = g'(t) \risingdotseq zG(z) - g(0) = zG(z) = F(z)$, значит, $\int_0^t f(t)dt \risingdotseq G(z) = \frac{F(z)}{z}$.■

6. **<u>Интегрирование изображения</u>:** $\int_z^\infty F(z)dz \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$ (если интеграл сходится).

***Доказательство.*** $\int_z^\infty F(z)dz = \int_z^\infty\left[\int_0^\infty f(t)e^{-tz}dt\right]dz = \int_0^\infty f(t)\left[\int_z^\infty e^{-tz}dz\right]dt =$

$= \int_0^\infty f(t)\left(-\frac{e^{-tz}}{t}\Big|_{z=z}^\infty\right)dt = \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-tz}}{t}dt \risingdotseq \frac{f(t)}{t}$.

7. **<u>Теорема запаздывания</u>:** для $\lambda > 0$ $f(t-\lambda) \doteqdot e^{-z\lambda}F(z)$.

***Доказательство.*** $f(t-\lambda) \doteqdot \int\limits_0^{\infty} f(t-\lambda)e^{-zt}dt = \int\limits_{-\lambda}^{\infty} f(u)e^{-z(u+\lambda)}du =$ (так как при $t<0$ $f(u)=0$) $= \int\limits_0^{\infty} f(u)e^{-zu}e^{-z\lambda}du = e^{-z\lambda}\int\limits_0^{\infty} f(u)e^{-zu}du = e^{-z\lambda}F(z)$.

8. **<u>Теорема смещения</u>:** для $\lambda \in C$ $F(z-\lambda) \doteqdot e^{\lambda t}f(t)$.

***Доказательство.*** $e^{\lambda t}f(t) \doteqdot \int\limits_0^{\infty} f(t)e^{\lambda t}e^{-zt}dt = F(z-\lambda)$.

## §6.4. Примеры преобразований Лапласа

1. $1 \doteqdot \int\limits_0^{\infty} 1\cdot e^{-tz}dt = -\left.\dfrac{e^{-tz}}{z}\right|_{t=0}^{\infty} = \dfrac{1}{z}$, $\operatorname{Re} z > 0$.

2. $e^{\lambda t} \doteqdot \int\limits_0^{\infty} e^{\lambda t}e^{-tz}dt = \left.\dfrac{1}{\lambda - z}e^{t(\lambda - z)}\right|_{t=0}^{\infty} = -\dfrac{1}{\lambda - z} = \dfrac{1}{z-\lambda}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\lambda$.

3. $\sin\lambda t = \dfrac{e^{i\lambda t} - e^{-i\lambda t}}{2i} \doteqdot \dfrac{1}{2i}\left[\dfrac{1}{z-i\lambda} - \dfrac{1}{z+i\lambda}\right] = \dfrac{\lambda}{z^2+\lambda^2}$, $\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im}\lambda|$.

4. $\cos\lambda t = \dfrac{e^{i\lambda t} + e^{-i\lambda t}}{2} \doteqdot \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{z-i\lambda} + \dfrac{1}{z+i\lambda}\right] = \dfrac{z}{z^2+\lambda^2}$, $\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im}\lambda|$.

5. $sh\lambda t = \dfrac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2} \doteqdot \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{z-\lambda} - \dfrac{1}{z+\lambda}\right] = \dfrac{\lambda}{z^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} z > |\operatorname{Re}\lambda|$.

6. $ch\lambda t = \dfrac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \doteqdot \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{z-\lambda} + \dfrac{1}{z+\lambda}\right] = \dfrac{z}{z^2-\lambda^2}$, $\operatorname{Re} z > |\operatorname{Re}\lambda|$.

7. $t^n = (-1)^n t^n \dfrac{1}{(-1)^n} \doteqdot= F^{(n)}\left[\dfrac{1}{(-1)^n}\right] = \dfrac{1}{(-1)^n}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{(n)} =$

$= (-1)^n(-1)(-2)(-3)...(-n)\dfrac{1}{z^{n+1}} = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$, $\operatorname{Re} z > 0$.

8. $t^n e^{\lambda t} = (-1)^n t^n \dfrac{e^{\lambda t}}{(-1)^n} \doteqdot F^{(n)}\left[\dfrac{e^{\lambda t}}{(-1)^n}\right] = \dfrac{1}{(-1)^n}\left(\dfrac{1}{z-\lambda}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(z-\lambda)^{n+1}}$, $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re}\lambda$.

9. $$t\sin\lambda t = -t\frac{\sin\lambda t}{-1} \risingdotseq F'[-\sin\lambda t] = \left(-\frac{\lambda}{z^2+\lambda^2}\right)' = \frac{2\lambda z}{\left(z^2+\lambda^2\right)^2},$$

$\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im}\lambda|$.

10. $$t\cos\lambda t = -t\frac{\cos\lambda t}{-1} \risingdotseq F'[-\cos\lambda t] = \left(-\frac{z}{z^2+\lambda^2}\right)' = \frac{z^2-\lambda^2}{\left(z^2+\lambda^2\right)^2},$$

$\operatorname{Re} z > |\operatorname{Im}\lambda|$.

11. $$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t} \risingdotseq \int_z^\infty F\left[e^{bt}-e^{at}\right]dz = \int_z^\infty\left(\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right)dz = \ln\frac{z-b}{z-a}\Bigg|_{z=z}^{\infty} =$$

$$= \ln 1 - \ln\frac{z-b}{z-a} = \ln\frac{z-a}{z-b},\ \operatorname{Re} z > \max(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b).$$

12. $$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_z^\infty F[\sin t]dz = \int_z^\infty \frac{1}{z^2+1}dz = \operatorname{arctg} z\Big|_{z=z}^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} z = \operatorname{arcctg} z,$$

$\operatorname{Re} z > 1$.

Преобразования Лапласа применяются при решении дифференциальных уравнений, к расчету электрических контуров и в других областях.