# §6. Ряди Фур’є

**§6.1. Основні поняття і визначення**

При розв’язанні багатьох задач механіки, математики необхідно розвинути періодичну функцію з періодом  в ряд за тригонометричними функціями:



Такий ряд називають рядом Фур’є, а розвинення функції в ряд Фур’є задачею гармонічного аналізу.

При цьому виникає завдання визначити, які функції  можна розвинути в ряд, як знайти відповідні коефіцієнти та чи буде даний ряд збіжний?

***Означення***. Система функцій  називається ортогональною на відрізку  якщо



Якщо при цьому , систему  називають ортонормованою системою функцій.

Розглянемо тригонометричну систему функцій

1, 

Покажемо, що ця система ортогональна на відрізку . Для цього обчислимо інтеграли 

1..

2. 



3. 

4. 

5. .

6. 



.

7. .

8. 

.

Тобто, тригонометрична система функцій отрогональна на .

Система функцій



є повною ортогональною системою.

Нехай  є наближенням функції  на .

Середньоквадратична похибка  мінімальна тоді і тільки тоді, коли коефіцієнтами  та  вибрані, так звані, коефіцієнти Фур’є функції , які визначаються так:





Звідси для кожної функції   сума

,

де  – коефіцієнти Фур’є, збігається до  в змісті середнє квадратичне

.

Збіжність у загальному змісті характеризує теорема Діріхле.

***Теорема Діріхле.*** Нехай  задовольняє на інтервалі  умовам Діріхле:

* Інтервал  можна розбити на скінченне число інтервалів, в яких  неперервна і монотонна;
* якщо  точка розриву функції , то існують , тоді ряд Фур’є функції  збігається і виконується рівність



*Приклад 1.* Розвинути в ряд Фур’є функцію



.

*Розв’язання.*

.

.

.





. .

.

.









.

.

Остаточно маємо

 ,

.

**§6.2. Тригонометричні ряди Фур’є для парних та непарних функцій**

Для парної та непарної функції  та  із властивостей визначеного інтегралу відомо, що



Користуючись даними властивостями, маємо:

1. Якщо  парна, то 

де 

1. Якщо  непарна, то 

де 

*Приклад 2.* Розвинути в ряд Фур’є функцію .

*Розв’язання.*  – функція непарна, тому  де





. Тобто .

Нехай .

Тоді ,.

Таким чином, користуючись розвиненням в ряд Фур’є певних функцій, можна знаходити суми відповідних числових рядів.