§5. Степеневі ряди

§5. Поняття про степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n \qquad (1)$$

або

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 (x - x_0)^n \qquad (2)$$

Ряди (1) та (2) називаються рядами по степенях x та $(x - x_0)$ відповідно.

Зазначимо, що $a_i \in R,\ x_0 \in R.$

Степеневий ряд є окремим випадком функціонального ряду.

Збіжність ряду (1) регламентується теоремою Абеля.

Теорема Абеля. 1. Якщо степеневий ряд (1) збіжний при $x = a$, то він абсолютно збіжний і при таких *x*, що $|x| < |a|$.

2. Якщо степеневий ряд розбіжний при $x = b$, то він розбіжний і при таких *x*, що $|x| > |b|$.

Доведення. 1. Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ збіжний при $x = a$, то збіжний є ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a^n$.

Звідси $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = 0$ (необхідна умова збіжності) й існує *M* таке, що $|a_n a^n| \le M$ для всіх *n*.

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n a^n \left(\frac{x}{a}\right)^n$. Звідси $\left| a_n a^n \left(\frac{x}{a}\right)^n \right| \le M \left|\frac{x}{a}\right|^n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} M\left|\frac{x}{a}\right|^n$ збігається, як геометрична прогресія зі знаменником $q=\left|\frac{x}{a}\right|<1,\ |x|<|a|,$ що і треба було довести.

2. Це твердження випливає з простих логічних міркувань.

Враховуючи теорему Абеля, структуру області збіжності (1) можна зобразити так, як показано на рис. 1.

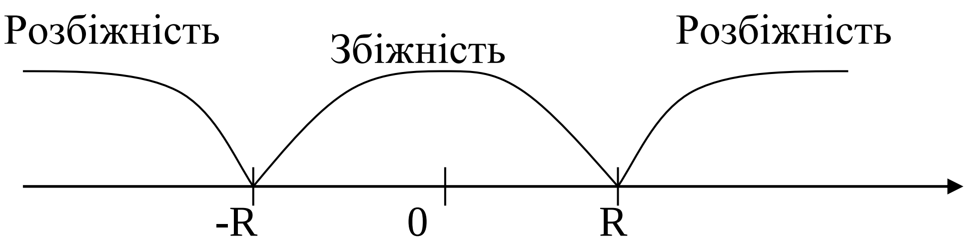

Рис. 1

Перебираючи значення x між a та b, зближуючи a та b, маємо випадок, коли існує таке число R, що ряд збіжний при $|x| < R$ і розбіжний при $|x| > R$. Таке число називають ***радіусом збіжності ряду***. Очевидно, що R=0, $R = \infty$ або $0 < R < \infty$.

Радіус збіжності можна визначити за допомогою ознаки Д’Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1.$$

Звідси $|x| < \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$ Аналогічно, $R = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}.$

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n$.

Маємо $a_{n+1} = 4^{n+1}$; $a_n = 4^n$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{4^n}{4^{n+1}} \right| = \frac{1}{4}.$$

Ряд збігається, якщо $|x| < \frac{1}{4}$, тобто $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$ при $|x| = \frac{1}{4}$ ознака Абеля не чинна.

Розглянемо цей випадок.

Нехай $x = \frac{1}{4}$. Тоді маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$. Цей ряд розбіжний.

Нехай $x = -\frac{1}{4}$. Тоді маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Цей ряд розбіжний. Остаточно, область збіжності цього ряду $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n x^n}{n^2}$.

Маємо $a_{n+1}=\frac{100^{n+1}}{(n+1)^2}$; $a_n=\frac{100^n}{n^2}$. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{100^n(n+1)^2}{n^2\cdot 100^{n+1}}=\frac{1}{100}$.

Ряд збігається, якщо $|x|<\frac{1}{100}$, тобто $-\frac{1}{100}<x<\frac{1}{100}$.

При $|x|=\frac{1}{100}$ ознака Абеля не чинна.

Нехай $x=\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, який є збіжний (узагальнений гармонічний ряд).

Нехай $x=-\frac{1}{100}$. Тоді матимемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, який є абсолютно збіжний.

Остаточно, для області збіжності даного ряду маємо $-\frac{1}{100}\le x\le\frac{1}{100}$.

§5.2 Стандартні розвинення елементарних функцій

Сумою степеневого ряду (1) є деяка функція. Виникає запитання, чи не можна для довільної функції *f(x)* підібрати такі коефіцієнти $a_0,\ a_1,\ ...,\ a_{n,\ ..}$, щоб ряд (1) збігався саме до неї.

Нехай *f(x)* є нескінченно диференційованою і $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$, де $a_0,\ a_1,\ ...$ – невідомі.

Знайдемо похідні.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...;$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + ...;$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + ...;$$

$$f^{IV}(x) = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5x + ...;$$

...

$$f^{(n)} = n!a_n.$$

За умови, що *f(x)* і всі її похідні визначені в точці 0, одержимо:

$f(0)=a_0;\ \ f'(0)=a_1;\ \ f''(0)=2a_2;\ \ f'''(0)=3\cdot 2\cdot 1a_3,\ f^{IV}(0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4$ і т.д. $f^{(n)}(0)=n!\,a_n$.

Звідки

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \qquad (3)$$

Ряд (3) називається ***рядом Маклорена*** для всіх *f(x)*. Якщо *f(x)* або деякі її похідні не визначені при *x*=0, то на основі ряду (1) визначаємо:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2++\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \qquad (4)$$

Ряд (4) називається ***рядом Тейлора*** для *f(x)*.

Зображення функції *f(x)* у вигляді (3) та (4) називається розвиненням *f(x)* у відповідний ряд.

Приклад. Розвинемо в ряд Маклорена функцію $f(x) = e^x$.

Маємо

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^x \ ,$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = e^0 = 1.$$

Згідно з виразом (3)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (5)$$

Знайдемо область збіжності отриманого ряду

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}n!}{(n+1)!x^n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Отже $-\infty < x < +\infty$ - область збіжності ряду.

Приклад. Розвинути в ряд Маклорена функцію $f(x) = \sin x$.

$f'(x) = \cos x$;

$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$;

$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$;

....

$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$;

$f(0) = 0$; $f'(0) = 1$; $f''(0) = 0$; $f'''(0) = -1$; $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq 1$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (6)$$

Область збіжності $(-\infty; \infty)$.

Приклад. Нехай $f(x)=\cos x$.

Міркуючи аналогічно, маємо:

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \quad . \qquad (7)$$

Приклад. Розвинути функцію $f(x)=(1+x)^{\alpha}$, $\alpha\in R$ в ряд Маклорена.

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$;

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$;

$f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$;

....

$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$;

....

$f(0)=1$; $f'(0)=\alpha$; $f''(0)=\alpha(\alpha-1)$;...

$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)$.

Остаточно

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+\ldots \quad (8)$$

Ряд (8) називається біноміальним. Дослідимо його на збіжність.

$$U_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{n}}{n!};$$

$$U_{n+1}(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)n!\,x^{n+1}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(n+1)!\,x^{n+1}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=|x|.$$

Звідки $-1<x<1$.

Наслідок.

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x - x^2 - x^3 + x^4 - \dots \qquad (9)$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad (10)$$

Приклад. Розвинути функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в ряд Маклорена.

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots\right) dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{(див.10)}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \,. \qquad (11)$$

Приклад. Нехай $f(x)=\ln(1+x)$.

Маємо (9)

$$\ln(1+x)=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\int_0^1\left(1-x+x^2-x^3+\ldots\right)dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots,$$

тобто
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\ . \qquad (12)$$

Замінимо у виразі (12) x на -x

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\qquad .$$

Тоді $\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots\right)$, тобто

$$\ln\frac{x+1}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right),\ x\in(-1;1). \qquad (13)$$

§5.2 Застосування степеневих рядів

Степеневі ряди застосовують для наближеного обчислення, зокрема для визначення значень і меж функцій, наближення функцій, наближеного інтегрування, визначення частинних і загальних розв’язків диференціальних рівнянь і т. ін.

Приклад. Визначити $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$ (перша стандартна границя).

Скориставшись розкладом (6)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\ldots}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right)=1.$$

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{30}$.

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=3\sqrt[3]{1+\frac{1}{9}}=3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Скориставшись розкладом (8).

$$\sqrt[3]{30}\approx 3\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}\cdot\frac{1}{81}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}\cdot\frac{1}{729}\right)\approx 3+0{,}1111-$$

$$-0{,}0041+0{,}0003\approx 3{,}1073.$$

Приклад. Обчислити $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

Цей інтеграл не можна виразити через елементарні функції.

Скористаємось розкладом (5), припускаючи $x = -\frac{x^2}{2}$.

В неелементарних функціях маємо

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} + \ldots\right) dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 2 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!} + \ldots \; .$$

Приклад. Визначити частинний розв’язок рівняння $y' = x - y, \quad y(0) = 0.$

Будемо шукати розв’язок у вигляді степеневого ряду:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \ldots$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots$$

Підставимо початкові умови у вираз $y(x)$: $y(0) = a_0 = 0.$

Підставимо тепер $y(x)$ та $y'(x)$ в рівняння.

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + 5a_5 x^4 + \ldots =$$

$$= x - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - a_4 x^4 - a_5 x^5 - \ldots\ .$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності:

$$x^0 \mid a_1 = 0;$$

$$x^1 \mid 2a_2 = 1 - a_1;$$

$$x^2 \mid 3a_3 = -a_2;$$

$$x^3 \mid 4a_4 = -a_3;$$

$$x^4 \mid 5a_5 = -a_4.$$

Знайдено відповідні коефіцієнти:

$$a_2 = \frac{1}{2}; \;\; a_3 = -\frac{1}{6}; \;\; a_4 = \frac{1}{24}; \;\; a_5 = -\frac{1}{120};$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^5 + \ldots .$$

Приклад. Знайти розв’язок рівняння $y' = x^2 + y^2;\ \ y(1) = 1.$

Будемо знаходити розв’язок у вигляді степеневого ряду

$$y(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots;$$

$$y(1) = 1;\ \ y'(1) = 1 + 1 = 2.$$

Продиференціюємо рівняння

$$y'' = 2x + 2yy';\ \ y''(1) = 2 + 2\cdot 1\cdot 2 = 6;$$

$$y''' = 2 + 2y'\cdot y' + 2y\cdot y'';$$

$$y'''(1) = 2 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 1\cdot 6 = 2 + 8 + 12 = 28.$$

Остаточно,

$$y(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{28}{3!}(x-1)^3 + \ldots =$$

$$= 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + \frac{14}{3}(x-1)^3 + \ldots .$$