§3. Знакозмінні ряди

Знакозмінними називають такі ряди, які містять нескінченну множину як додатних, так і від'ємних чисел.

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots,$$

де $a_n > 0$ для всіх n, тобто члени ряду по черзі є додатними або від'ємними числами $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n;\ a_n > 0$.

Ознака Лейбніца. Якщо послідовність членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ є спадною $a_{n+1} \le a_n$ і такою, що $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд збігається. Причому, якщо S – сума ряду, то 0<S<a_1.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Згідно ознаки Лейбніца ряд збіжний.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n+1)^3}{n(n+4)(n+5)}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n(n+4)(n+5)} = 1 \neq 0.$$

Згідно ознаки Лейбніца ряд розбіжний.

Перейдемо до ознак збіжності знакозмінних рядів $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n;\ a_n>0$.

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збігається, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ збігається.

Означення: якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збігається, то знакозмінний ряд називають *абсолютно збіжним*.

Означення: якщо для знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ розбігається, а знакозмінний ряд збігається, то його називають *умовно збіжним*.

Властивості знакозмінних рядів:

1) Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якому переставленні його членів, тобто, сума ряда не залежить від порядку членів.

2) Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то для будь-якого числа k можна так переставити члени цього ряда, що він буде збігатися до числа k. Більше того, умовно збіжний ряд можна зробити взагалі розбіжним.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

Складемо ряд абсолютних величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2},$$

тоді $\frac{|\cos n|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \text{збіжний}\right)$,

тобто наш ряд абсолютно збіжний.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$.

Ряд абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний (гармонічний ряд). За ознакою Лейбніца $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, тобто наш ряд умовно збіжний.

§4. Функціональні ряди

4.1. Поняття про функціональні ряди

Означення. Функціональним називається ряд складений з членів, які є функціями від аргументу *x*:

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x), \qquad (1)$$

де всі функції $U_n(x)$ визначені на деякій множині *X*.

Прикладами функціональних рядів можуть бути такі:

1. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots;$ 2. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\ldots+\frac{1}{1+x^n}+\ldots.$

Наприклад, члени функціонального ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

визначені на всій дійсній осі, а члени ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x-1)} = \frac{1}{\ln(x-1)} + \frac{1}{\ln^2(x-1)} + \dots$$

визначені при $x \in (1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

Для функціональних рядів так само, як і для числових, можна скласти послідовність часткових сум

$$S_1(x)=U_1(x);$$
$$S_2(x)=U_1(x)+U_2(x);\ldots$$
$$S_n(x)=U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x);$$
$$S(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду.

Сумою функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ називають функцію

$$S(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

де $S_n(x)$ – сума n перших членів функціонального ряду (n -та часткова сума).

Якщо ряд збігається при деякому значенні *x з* області збіжності, то

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0.$$

Для довільного $a \in X$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(a)$ – числовий ряд.

Дамо незалежній змінній *x* деяке значення x_0 із області *X* визначення $U_n(x)$.

Отримаємо числовий ряд:

$$U_1(x_0) + U_2(x_0) + \ldots + U_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x_0). \quad (2)$$

Якщо цей ряд збігається, то кажуть, що функціональний ряд (1) збігається при $x = x_0$, якщо ряд (2) – розбігається, то кажуть, що ряд (1) розбігається при $x = x_0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ називають абсолютно збіжним на множині *X*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |U_n(x)|$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ при $x=1$, при $x=-1$.

При $x=1$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Це гармонічний ряд, він розбігається. Тобто, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ розбіжний при $x=1$.

Якщо $x=-1$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, що збігається за ознакою Лейбніца.

Як бачимо, при одних значеннях незалежної змінної ряд може збігатися, при інших розбігатися. Множина значень незалежної змінної, при яких функціональний ряд збіжний, називається *областю збіжності функціонального ряду*.

Приклад. Знайти область збіжності функціонального ряду:

$$\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$$

Скористаємось радикальною ознакою Коші. Якщо $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n(x)} < 1$, тоді ряд збіжний.

$$U_n(x) = \ln^n x.$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n(x)} = |\ln x| < 1, \text{ або}$$

$$-1 < \ln x < 1; \ \frac{1}{e} < x < e.$$

Нехай $x = e$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \ln e = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$ ряд розбіжний.

При $x = \frac{1}{e}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ - ряд розбіжний.

Отже, $x \in \left(\frac{1}{e}; e\right)$ - область збіжності даного ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$\cos x + \cos\frac{x}{2} + \ldots + \cos\frac{x}{n} + \ldots \quad .$$

Візьмемо довільне значення $x = x_0$.

Отримаємо числовий ряд $\cos x_0 + \cos\frac{x_0}{2} + \ldots + \cos\frac{x_0}{n} + \ldots$ із загальним членом $a_n = \cos\frac{x_0}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{x_0}{n} = 1 \neq 0.$$

Для даного ряду не виконується необхідна умова збіжності числових рядів. Тобто, ряд розбіжний для довільних x, його область збіжності – порожня множина.

Приклад Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^3}$.

Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x)=\frac{(x-3)^n}{n^3};\ \ u_{n+1}(x)=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(x-3)^n}\right|=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=$$

$=|x-3|$. Далі, $|x-3|<1;\ -1<x-3<1;\ 2<x<4$.

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

а) при x=4 отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається, бо p=3>1;

б) при x=2 отримаємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$, який збігається абсолютно.

Відповідь: $2\le x\le 4$ або $x\in[2;4]$.

4.2. Рівномірно збіжні функціональні ряди

Означення. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

називається *рівномірно збіжним* на деякому проміжку, якщо, яким би не було $\varepsilon > 0$, існує таке число N з множини натуральних чисел, що для кожного $n>N$ та для всіх x з даного проміжку виконується нерівність

$$|R_n(x)| < \varepsilon,$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).

Функціональний ряд (1) збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (2)$$

такий, що для всіх x з даного проміжку мають місце нерівності

$$|u_n(x)| < a_n, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (3)$$

В цьому випадку ряд (2) називається *мажорантним*, а ряд (1) – *мажоровним*.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема 1. (Про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду).

Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a,b]$ *функціонального ряду, члени якого неперервні на* $[a,b]$, *є функція, неперервна на цьому відрізку.*

Теорема 2. (Про почленне диференціювання функціонального ряду).

Якщо члени збіжного ряду (1) *мають неперервні на* $[a,b]$ *похідні, а ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *збігається рівномірно на відрізку* $[a,b]$, *то на цьому відрізку ряд* (1) *можна почленно диференціювати, тобто*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Теорема 3. (Про почленне інтегрування функціонального ряду). *Якщо члени ряду* (1) *неперервні на відрізку* $[a,b]$ *і цей ряд збігається рівномірно на* $[a,b]$, *то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx, \quad x \in [a,b].$$