МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ»
КАФЕДРА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. РЯДИ ФУР'Є

Методичні вказівки до вивчення
теми дисципліни «Вища математика»
для студентів енергетичних спеціальностей
усіх форм навчання

Рекомендовано Вченою радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Гриф надано Вченою радою
фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"
(*Протокол № 3 від 17.03.2016 р.*)

Київ
НТУУ «КПІ»
2016

Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання / Уклад.: М.І. Чернєй, Г.К. Новикова, Н.Л. Денисенко. — К.: НТУУ "КПІ", 2016. — 62 с.

Навчальне видання

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ.
РЯДИ ФУР'Є

Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни
«Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей
усіх форм навчання

Укладачі: *Чернєй Микола Іванович, канд. фіз.-мат. наук, доц.*
Новикова Ганна Костянтинівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Денисенко Наталя Леонідівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний
редактор *М.Є. Дудкін, д-р фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Н.В. Рева, канд. фіз.-мат. наук, ст. викладач.*

За редакцією укладачів

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Основні поняття

Теорія рядів займає дуже важливе місце в математичному аналізі. Перші дослідження в теорії рядів були ще у роботах Ньютона і Лейбніца. Важливі результати з теорії рядів були одержані Ейлером, Гаусом, Коші та іншими математиками.

Означення 1. Вираз виду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1}$$

де a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, – члени числової послідовності, називається *рядом*.

Число a_n – *загальний член* ряду. Крім повного запису (1) часто зустрічається скорочений запис: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Означення 2. Величина

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{2}$$

називається *n–ю частинною сумою* ряду (1).

Означення 3. Якщо існує скінченна границя S змінної S_n, коли $n \to \infty$, то говорять, що ряд (1) збігається і його сума дорівнює цій границі, тобто, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. У противному разі говорять, що ряд (1) розбігається. Запишемо так:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} S, & \text{ряд збігається;} \\ \infty, & \text{ряд розбігається;} \\ \text{не існує}, & \text{ряд розбігається.} \end{cases}$$

Покажемо на прикладах як досліджується числовий ряд на збіжність за допомогою означення 3.

Приклад 1. Задано ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$. Знайти S_n і суму ряду S.

Розв'язання. Частинну суму S_n можна записати так:

$$S_n=\frac{3+2}{6}+\frac{3^2+2^2}{6^2}+\frac{3^3+2^3}{6^3}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}=$$

$$=\left(\frac{3}{6}+\frac{3^2}{6^2}+\frac{3^3}{6^3}+\ldots+\frac{3^n}{6^n}\right)+\left(\frac{2}{6}+\frac{2^2}{6^2}+\frac{2^3}{6^3}+\ldots+\frac{2^n}{6^n}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^n}\right).$$

В кожній дужці маємо суму "n" членів геометричної прогресії, яка обчислюється за формулою

$S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$ при $q<1$, b_1 – перший член геометричної прогресії.

Отже, $S_n=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n\cdot 2}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n\cdot 2}\right)=\frac{3}{2}$. Тому $S=\frac{3}{2}$ і даний ряд збігається.

Приклад 2. Знайти частинну суму S_n і суму S заданого ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$$

Розв'язання. Спочатку виведемо формулу

$$\operatorname{arctg}a+\operatorname{arctg}b=\operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}.$$

Так як $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$, то

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b\right)=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b)}=\frac{a+b}{1-ab}.$$

Тоді $\operatorname{arctg} a+\operatorname{arctg} b=\operatorname{arctg}\frac{a+b}{1-ab}$. Маємо

$$S_1=\operatorname{arctg}\frac{1}{2};$$

$$S_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}}=\operatorname{arctg}\frac{5\cdot 16}{8\cdot 15}=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}.$$

Далі $S_3=S_2+a_3=\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{18}=\operatorname{arctg}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\operatorname{arctg}\frac{13\cdot 27}{18\cdot 26}=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}.$

Користуючись методом неповної математичної індукції, одержимо

$$S_n=\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}.$$

Тепер $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$ Отже, $S=\frac{\pi}{4}$ і ряд збігається.

Приклад 3. Знайти суму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7}{49n^2+7n-12}$.

Розв'язання. Розкладемо знаменник загального члена a_n на множники. Для зручності обчислень позначимо $7n=k$, тоді маємо $k^2+k-12=(k-3)(k+4)$. Далі $49n^2+7n-12=(7n-3)(7n+4)$,

$$a_n=\frac{7}{(7n-3)(7n+4)}=\frac{A}{7n-3}+\frac{B}{7n+4}=\frac{A(7n+4)+B(7n-3)}{(7n-3)(7n+4)};$$

$$A(7n+4)+B(7n-3)=7;$$

$$n(7A+7B)+(4A-3B)=7;$$

$$\begin{array}{c|l} n & 7A+7B=0; \\ n^0 & 4A-3B=7; \end{array} \quad \begin{cases} A+B=0; \\ 4A-3B=7; \end{cases} \quad \begin{cases} B=-A; \\ 4A+3A=7; \end{cases} \quad \begin{cases} A=1; \\ B=-1. \end{cases}$$

Таким чином,

$$a_n = \frac{1}{7n-3} - \frac{1}{7n+4}.$$

Далі, $S_n = \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{11}} + \qquad (n=1)$

$$+\cancel{\frac{1}{11}} - \cancel{\frac{1}{18}} + \qquad (n=2)$$

$$+\cancel{\frac{1}{18}} - \cancel{\frac{1}{25}} + \qquad (n=3)$$

……………………

$$+\cancel{\frac{1}{7n-17}} - \cancel{\frac{1}{7n-10}} +$$

$$+\cancel{\frac{1}{7n-10}} - \cancel{\frac{1}{7n-3}} +$$

$$+\cancel{\frac{1}{7n-3}} - \frac{1}{7n+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7n+4}.$$

Такий запис S_n дозволяє чітко бачити, які члени S_n зникають. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7n+4}\right) = \frac{1}{4}$ і $S = \frac{1}{4}$, тобто, ряд збігається.

1.2. Ряд геометричної прогресії

Рядом геометричної прогресії називається такий ряд

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^{n-1}. \qquad (3)$$

Запишемо частинну суму цього ряду:

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \;.$$

а) Нехай $|q|<1$, тоді маємо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1 q^n}{1-q}\right) = \frac{b_1}{1-q}$. Отже, $S = \frac{b_1}{1-q}$ і ряд (3) збігається.

б) Нехай $|q|>1$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ і ряд (3) розбігається.

в) Нехай тепер $q=1$. Тоді з (3) одержуємо

$$b_1 + b_1 + b_1 + \ldots + b_1 + \ldots .$$

Отже, $S_n = nb_1$; $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} nb_1 = \infty$. Ряд (3) розбіжний.

г) Якщо $q=-1$, то маємо

$$b_1 - b_1 + b_1 - \ldots + (-1)^{n+1} b_1 + \ldots, \qquad S_n = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n = 2k; \\ b_1, \text{ якщо } n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує, ряд (3) розбігається.

Отже, ***ряд геометричної прогресії збігається при*** $|q|<1$ ***і розбігається, якщо*** $|q|\geq 1$.

Зауваження. Ряд геометричної прогресії відіграє важливу роль при дослідженні числових рядів на збіжність. Він використовується як еталон для порівняння рядів.

1.3. Властивості збіжних числових рядів

Означення. Якщо у числовому ряді (1) відкинути перші “k” членів, то одержимо знову числовий ряд

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_n + \ldots, \tag{4}$$

який називається *залишком ряду* (1).

Теорема 1. *Якщо збігається числовий ряд (1), то ряд (4) також збігається. Має місце і обернене твердження.*

Теорема 2. *Якщо ряд (1), збігається і його сума дорівнює S, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c\cdot a_n$ *, де с – стала величина також збігається і його сума дорівнює* cS.

Теорема 3. *Збіжні числові ряди можна почленно додавати та віднімати, при цьому збіжність зберігається.*

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$.

Розв'язання. Так як $a_n=\frac{2}{5^{n-1}+n-1}\le\frac{2}{5^{n-1}}$, то

$$S_n=\frac{2}{1}+\frac{2}{6}+\frac{2}{27}+\ldots+\frac{2}{5^{n-1}+n-1}<\frac{2}{1}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\ldots+\frac{2}{5^{n-1}}=$$

$$=2\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}\right)=2\frac{1\cdot\left(1-\frac{1}{5^n}\right)}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{5^n}\right)=\frac{5}{2}.$$

Отже, $S_n<\frac{5}{2}$, а це означає, що $\lim_{n\to\infty}S_n$ існує і є скінченним числом, тобто, даний ряд збігається.

Приклад 5. Числові ряди $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ і $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ збігаються. Довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ збігається абсолютно.

Розв'язання. Скористаємось нерівністю

$$m^2 - mn + n^2 > 0;$$
$$m^2 + n^2 > mn.$$

Числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$ збігається згідно теореми 3. А це означає, що частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ обмежена сумою ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$. Тому існує границя цієї частинної суми і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ збігається абсолютно.

1.4. Необхідна ознака збіжності ряду

Теорема. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то його загальний член прямує до нуля, тобто,* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Наслідок (достатня ознака розбіжності):

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$*, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *розбігається.*

Приклад 6. Дослідити ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$ на збіжність.

Розв'язання. Застосуємо наслідок з необхідної ознаки:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0.$$

Отже, даний ряд розбігається.

1.5. Гармонічний ряд

Означення. *Середнім гармонічним двох чисел* "a" і "b" називається число "c", яке задовольняє співвідношення $\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

Числовий ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

називається *гармонічним рядом*, тому що

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(n-1+n+1\right)=n=\frac{1}{a_n}.$$

Незважаючи на те, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, гармонічний ряд розбіжний. Цей ряд часто використовується як еталон для порівняння рядів.

1.6. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Знакододатні ряди – це ряди виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n>0,\ \ n=1,2,3,\ldots$.

1) Ознаки порівняння

Теорема 1. *Нехай задані два ряди*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\,, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\,, \tag{2}$$

причому,

$$a_n \le b_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Тоді, якщо ряд (2) *збігається, то і ряд* (1) *теж збігається. Якщо ряд* (1) *розбігається, то ряд* (2) *також розбігається.*

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

Розв'язання. Маємо $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \le \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Ряд геометричної прогресії $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ збігається тому, що $q = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} < 1$.

Отже, за теоремою 1 даний ряд теж збігається.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$.

Розв'язання. Скористаємось нерівністю $\sin x > \frac{2}{\pi} x$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (пряма $y = \frac{2x}{\pi}$ лежить вище кривої $y = \sin x$). Маємо $\sin \frac{\pi}{2n} > \frac{2 \cdot \pi}{\pi \cdot 2n} = \frac{1}{n}$.

Оскільки гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то згідно теореми 1 даний ряд теж розбіжний.

Теорема 2. (Гранична ознака порівняння)

Нехай задані два ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{2}$$

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k\neq\left[\begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}\right.$, *то ряди* (1) *і* (2), *або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються, тобто, поводять себе однаково.*

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{n+1}{n}$.

Розв'язання. Перевіряємо необхідну умову збіжності

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln 1=0.$$

Будемо досліджувати далі. Порівняємо даний ряд з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який розбігається. Скористаємося граничною ознакою порівняння:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=1\neq 0.$$

Отже, даний ряд теж розбігається.

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$.

Розв'язання. Порівняємо даний ряд з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$, який збігається, тому що $q=\dfrac{1}{2}<1$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{1}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot 2^n}{2^n\cdot 1}=\pi<\infty\quad(\sin\alpha\sim\alpha\text{, коли }\ \alpha\to 0).$$

Отже, даний ряд теж збігається за теоремою 2.

2) Ознака Даламбера

Теорема. *Нехай задано ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Якщо при* $n \to \infty$ *існує скінченна границя* l *відношення* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, *тобто,* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, *то при* $l < 1$ *– ряд збігається, при* $l > 1$ *– ряд розбігається. У випадку* $l = 1$ *потрібне додаткове дослідження.*

Практична рекомендація. Якщо загальний член ряду a_n містить показникову функцію, степенево-показникову функцію або факторіал, то, як правило, застосовується ознака Даламбера.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$.

Розв'язання. Записуємо $a_n = \frac{n^3}{2^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}$. Далі

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^3} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^3 = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3 = \frac{1}{2} < 1 .$$

Отже, даний ряд збігається за ознакою Даламбера.

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$.

Розв'язання. Маємо $a_n = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$,

$a_{n+1} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n-1)(3n+2)} = a_n \frac{2n+3}{3n+2}$. Звідси $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+3}{3n+2}$.

За ознакою Даламбера одержуємо

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3} < 1.$$ Отже, даний ряд збігається.

Приклад 13. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$.

Розв'язання. Маємо $a_n = n!\sin\frac{\pi}{2^n}$, $a_{n+1} = (n+1)!\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$,

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{n!\sin\frac{\pi}{2^n}} = \left|\begin{array}{l}\sin\alpha \sim \alpha,\ \text{коли}\ \alpha \to 0; \\ (n+1)! = n!\cdot(n+1)\end{array}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\pi\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot\pi} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty .$$

Даний ряд розбігається за ознакою Даламбера.

3) Радикальна ознака Коші

Теорема. *Нехай дано знакододатний ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Якщо існує скінченна границя* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$, *то при* $l<1$ *– ряд збігається, при* $l>1$ *– ряд розбігається. При* $l=1$ *потрібне додаткове дослідження.*

Приклад 14. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+1}{2n}\right)^n$.

Розв'язання. Скористаємося радикальною ознакою Коші

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{n+1}{2n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+1}{2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\arcsin\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} < 1.$$ Отже, даний ряд збігається.

Приклад 15. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Р о з в ’ я з а н н я. За радикальною ознакою Коші маємо:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1.$$

Отже, ряд збігається.

4) Інтегральна ознака Коші

Теорема. *Нехай члени ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n \qquad (1)$$

додатні і не зростають, тобто, $a_1\ge a_2\ge a_3\ge\ldots\ge a_n>0$ *і нехай* $f(x)$ *така неперервна незростаюча функція, що* $f(1)=a_1, f(2)=a_2,\ldots, f(n)=a_n,\ldots$. *Тоді, якщо невласний інтеграл* $\int_1^{\infty}f(x)dx$ *збігається, то і ряд (1) теж збігається. Якщо ж цей інтеграл розбігається, то ряд (1) теж розбігається.*

Приклад 16. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Р о з в ’ я з а н н я. Скористаємося інтегральною ознакою Коші:

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1};\quad \int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{1}{x^2+1}dx=\lim_{A\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_1^A=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}(\operatorname{arctg}A-\operatorname{arctg}1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}<\infty.$$

Інтеграл збіжний, отже, даний ряд теж збігається.

Приклад 17. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

Р о з в ’ я з а н н я. Перетворимо загальний член ряду

$$a_n=\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2=\frac{1+2n+n^2}{(1+n^2)^2}=\frac{1+n^2}{(1+n^2)^2}+\frac{2n}{(1+n^2)^2}=\frac{1}{1+n^2}+\frac{2n}{(1+n^2)^2}.$$

Таким чином, даний ряд є сума двох рядів $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ і $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(1+n^2)^2}$.

Перший з цих рядів збігається (див. приклад 16). Досліджуємо другий ряд за інтегральною ознакою: $f(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}$;

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\left(1+x^2\right)^{-2}d(1+x^2)=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{\left(1+x^2\right)^{-1}}{-1}\right|_1^A=-\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{1+A^2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}<\infty.$$ Другий ряд збігається.

Згідно теореми 3 з 1.3 сума двох збіжних рядів також збігається. Отже, даний ряд збіжний.

Розглянемо приклад на комбінацію двох ознак.

Приклад 18. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}$. (1)

Розв'язання. Розглянемо спочатку такий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+2)\ln^2(5n+2)}$. (2)

Скористаємося інтегральною ознакою Коші: $f(x)=\frac{1}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}$;

$$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\int_1^{+\infty}\frac{1}{(5x+2)\ln^2(5x+2)}dx=\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A}\frac{d[\ln(5x+2)]}{\ln^2(5x+2)}=$$

$$=-\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left.\frac{1}{\ln(5x+2)}\right|_1^A=-\frac{1}{5}\lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln(5A+2)}-\frac{1}{\ln 7}\right)=\frac{1}{5\ln 7}<\infty,$$

тобто, ряд (2) збігається.

А тепер застосуємо граничну ознаку порівняння. Порівняємо даний ряд (1) з розглянутим рядом (2):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(5n+2)\ln^2(5n+2)}{(3n+4)\ln^2(5n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{3+\frac{4}{n}}=\frac{5}{3}\quad(\neq 0).$$

Отже, ряд (1) теж збігається.

5) Дослідження ряда Діріхле-Рімана

Це ряд виду $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ \text{де}\ \ p\in\mathbb{R}}$.

Він є узагальненням гармонічного ряду, тобто, при $p=1$ розбігається.

Нехай $p\neq 1$ і застосуємо інтегральну ознаку збіжності: $f(x)=\frac{1}{x^p}$,

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{A\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^A=\lim_{A\to\infty}\frac{A^{1-p}-1}{1-p}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & \text{якщо } p>1.\ \text{Ряд збігається.}\\ \infty, & \text{якщо } p<1.\ \text{Ряд розбігається.}\end{cases}$$

Отже, ***ряд Діріхле-Рімана збігається при*** $p>1$ ***і розбігається при*** $p\leq 1$.

Цей ряд використовується як еталон для порівняння при розв'язуванні прикладів за допомогою ознак порівняння.

Приклад 19. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$. (1)

Розв'язання. Порівняємо даний ряд (1) з таким рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, (2)

який збігається, бо $p=2>1$. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+n^2\right)^2 n^2}{\left(1+n^3\right)^2}=\left|\begin{array}{l}\text{поділимо чисельник}\\ \text{і знаменник на } n^6\end{array}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n^2}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{n^3}+1\right)^2}=1.$$

Отже, ряди (1) і (2) поводять себе однаково за граничною ознакою порівняння. Даний ряд (1) теж збігається.

Приклад 20. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$. (1)

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$, коли $\alpha\to 0$, то $\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\sim\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$

при $n\to\infty$. Порівняємо даний ряд з рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\frac{\pi}{4\sqrt{n}}=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}=\frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{6}}}. \qquad (2)$$

Тут $p=\frac{5}{6}<1$, тобто, ряд розбіжний. Далі

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}\cdot n^{\frac{5}{6}}}{\sqrt[3]{n}\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi\cdot\sqrt[6]{n^5}}{4\sqrt{n}\cdot\sqrt[3]{n}}=\frac{\pi}{4}\neq\left[\begin{array}{l}0\\ \infty\end{array}\right..$$

Отже, ряди (1) і (2) поводять себе однаково за граничною ознакою порівняння. Даний ряд (1) теж розбігається.

1.7. Знакозмінні числові ряди. Теорема Лейбніца про знакопочережні ряди

Означення. Числовий ряд називається *знакозмінним*, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні.

Ряд виду

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \qquad (1)$$

де $a_n > 0$, називається *знакопочережним.*

Теорема Лейбніца. *Якщо у знакопочережному ряді його члени спадають* $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд (1) збігається і його сума S не перевищує* a_1.

Зауваження. Для знакопочережного ряду, який задовольняє теоремі Лейбніца, сума ряду $S \approx S_n$, причому, похибка не перевищує першого з відкинутих членів ряду, тобто $|a_{n+1}|$.

Приклад 21. Обчислити суму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$ з точністю α=0.01.

Розв'язання. Будемо послідовно обчислювати члени ряда доти, поки не буде виконуватись нерівність $|a_{n+1}|<\alpha$. Сума ряда $S \approx S_n$. Маємо

$$a_1 = \frac{1}{1^2(1+3)} = \frac{1}{4};\ a_2 = \frac{1}{2^2(2+3)} = \frac{1}{20};\ a_3 = \frac{1}{3^2(3+3)} = \frac{1}{54};$$

$$a_4 = \frac{1}{4^2(4+3)} = \frac{1}{112} < 0.01.$$

Тоді $S \approx -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{54} = -\dfrac{59}{270} \approx -0.22$.

Достатня ознака збіжності знакозмінних рядів

Теорема. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *збігається, то знакозмінний ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *теж збігається.*

Приклад 22. Дослідити знакозмінний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k\alpha}{k^3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Розв’язання. Запишемо ряд з абсолютних величин членів даного ряда: $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\sin k\alpha}{k^3}\right|$. Скористаємось першою ознакою порівняння $\left|\frac{\sin k\alpha}{k^3}\right| \le \frac{1}{k^3}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$ збігається, так як p=3>1. Отже, ряд з абсолютних величин теж збігається. А тоді згідно теореми даний знакозмінний ряд також збігається.

Абсолютна та умовна збіжність

Існують знакозмінні ряди, які самі збігаються, а ряди з їх абсолютних величин розбігаються. Вводяться поняття абсолютної та умовної збіжності знакозмінних рядів.

Означення. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають ***абсолютно збіжним***, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Якщо ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається, але даний знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то він називається ***умовно збіжним***.

Властивості знакозмінних рядів:

1) Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при будь-якому переставленні його членів, тобто, сума ряда не залежить від порядку членів.
2) Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то для будь-якого числа *k* можна так переставити члени цього ряда, що він буде збігатися до числа *k*. Більше того, умовно збіжний ряд можна зробити взагалі розбіжним.

Приклад 23. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.

Розв'язання. Запишемо ряд з абсолютних величин членів даного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Застосуємо радикальну ознаку Коші:

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}<1,$$

ряд збігається. Отже, даний ряд збігається абсолютно.

Приклад 24. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$. (1)

Розв'язання. Запишемо ряд з абсолютних величин членів даного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}. \qquad (2)$$

Скористаємось граничною ознакою порівняння. Оскільки при великих значеннях "n" одиницями можна знехтувати, то порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot n}{n(n+1)\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n}{1+1/n}=2\neq 0.$$

Отже, ряд (2) з абсолютних величин теж розбіжний.

Досліджуємо тепер даний ряд (1) на умовну збіжність за допомогою теореми Лейбніца:

1) $\dfrac{2n+1}{n(n+1)}>\dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)(n+2)};\quad \dfrac{2n+1}{n}>\dfrac{2n+3}{n+2},\quad n\in\mathbb{N};$

$(2n+1)(n+2)>(2n+3)n;$

$\cancel{2n^2}+4n+n+2>\cancel{2n^2}+3n;\quad 2n+2>0,$ вірно.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = 0.$

Отже, даний ряд (1) збігається умовно.

Приклад 25. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$.

Розв'язання. Згідно теореми Лейбніца маємо:

1) $a_n > a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $\frac{n+1}{n} > \frac{n+2}{n+1}$; $(n+1)^2 > n(n+2)$;

$\cancel{n^2} + 2n + 1 > \cancel{n^2} + 2n$; $1 > 0$, вірно.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, умова не виконується.

Якщо хоч одна з умов теореми Лейбніца не виконується, то ряд розбіжний. Отже, даний ряд розбіжний.

Розглянемо тепер приклад на застосування рядів до знаходження границь.

Приклад 26. Довести за допомогою ряду, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,\ a > 0$.

Розв'язання. Досліджуємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$. За ознакою Даламбера маємо

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot a^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a\cdot n!}{n!(n+1)} = a\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

ряд збігається. Згідно необхідної ознаки збіжності знакододатних рядів $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, тобто, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$.

2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

2.1. Основні означення

Означення 1. Ряд, члени якого є функції від x, називається *функціональним*:

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots, \quad x\in D. \tag{1}$$

Нехай $x=x_0$, тоді одержуємо числовий ряд $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots$, який може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо цей ряд збіжний, то точка x_0 називається точкою збіжності ряду (1).

Означення 2. Множина точок збіжності функціонального ряду (1) називається *областю збіжності цього ряду*.

Для знаходження області збіжності ряда використовується ознака Даламбера або радикальна ознака Коші:

- Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|q(x)|$, то при $|q(x)|<1$ ряд збігається.
- Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=|q(x)|$, то при $|q(x)|<1$ ряд збігається.
- У випадку $|q(x)|=1$ потрібне додаткове дослідження.

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^3}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x)=\frac{(x-3)^n}{n^3};\quad u_{n+1}(x)=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}\cdot n^3}{(n+1)^3\cdot(x-3)^n}\right|=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}=$$

$=|x-3|$. Далі, $|x-3|<1;\ -1<x-3<1;\ 2<x<4$.

Тепер досліджуємо даний ряд на кінцях одержаного проміжку:

а) при x=4 отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, який збігається, бо p=3>1;

б) при x=2 отримаємо знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$, який збігається абсолютно.

Відповідь: $2\le x\le 4$ або $x\in[2;4]$.

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$.

Розв'язання. Маємо $u_n(x)=\frac{(x+2)^n}{(2n+1)3^n}$; $u_{n+1}(x)=\frac{(x+2)^{n+1}}{(2n+3)3^{n+1}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+2)^{n+1}\cdot(2n+1)3^n}{(2n+3)3^{n+1}\cdot(x+2)^n}\right|=\frac{|x+2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=$$

$$=\frac{|x+2|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}}=\frac{|x+2|}{3}.$$

Далі, $\frac{|x+2|}{3}<1;\ |x+2|<3;\ -3<x+2<3;\ -5<x<1$.

Досліджуємо даний ряд на кінцях проміжку:

а) при x =1 отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$. Порівняємо цей ряд з гармонічним рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який розбігається. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot n}{(2n+1)\cdot 1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\quad\begin{pmatrix}\neq 0\\ \neq\infty\end{pmatrix}.$$

Отже, при $x=1$ ряд розбігається.

б) при $x=-5$ отримаємо знакочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)3^n}=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(2n+1)3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. В пункті а) доведено, що відповідний ряд з абсолютних величин розбіжний. Тому застосуємо ознаку Лейбніца:

1) $\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{2n+3}$ – виконується;

2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ – виконується.

Таким чином, ряд збігається умовно, а $x=-5$ точка умовної збіжності ряду.

Відповідь: $-5\le x<1$ або $x\in[-5;1)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2x}$.

Розв'язання. Скористаємось радикальною ознакою Коші: $u_n(x)=\mathrm{e}^{-n^2x}$;

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mathrm{e}^{-n^2x}}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\begin{cases}0, \text{ якщо } x>0. \text{ Ряд збігається.}\\ \infty, \text{ якщо } x<0. \text{ Ряд розбігається.}\end{cases}$$

При x=0 маємо такий ряд: $1+1+\ldots+1+\ldots$. Він розбіжний за достатньою ознакою розбіжності ряду, бо $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}1=1\neq 0$.

Відповідь: $x>0$ або $x\in(0;+\infty)$.

Приклад 4. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n}$.

Розв'язання. Застосовуємо ознаку Даламбера:

$$u_n(x)=\sin\frac{x}{2^n};\ \ u_{n+1}(x)=\sin\frac{x}{2^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\dfrac{x}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}\right|=\begin{pmatrix}\text{відомо, що}\\ \sin\alpha\sim\alpha,\ \text{коли } \alpha\to 0\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot x}\right|=\frac{1}{2}<1$$

Отже, даний ряд збігається при всіх значеннях x, тобто при $x\in(-\infty;\infty)$.

Відповідь: $x\in(-\infty;\infty)$.

2.2. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Означення. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

називається *рівномірно збіжним* на деякому проміжку, якщо, яким би не було $\varepsilon>0$, існує таке число N з множини натуральних чисел, що для кожного $n>N$ та для всіх x з даного проміжку виконується нерівність

$$|R_n(x)|<\varepsilon,$$

де $R_n(x)$ – залишок ряду.

Теорема (ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду).

Функціональний ряд (1) збігається абсолютно і рівномірно на деякому проміжку, якщо існує збіжний числовий ряд з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \tag{2}$$

такий, що для всіх x з даного проміжку мають місце нерівності

$$|u_n(x)|<a_n,\quad n=1,2,\ldots. \tag{3}$$

В цьому випадку ряд (2) називається *мажорантним*, а ряд (1) – *мажоровним*.

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Теорема 1. (Про неперервність суми рівномірно збіжного функціонального ряду).

Сумою рівномірно збіжного на відрізку $[a,b]$ *функціонального ряду, члени якого неперервні на* $[a,b]$, *є функція, неперервна на цьому відрізку.*

Теорема 2. (Про почленне диференціювання функціонального ряду).

Якщо члени збіжного ряду (1) *мають неперервні на* $[a,b]$ *похідні, а ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ *збігається рівномірно на відрізку* $[a,b]$, *то на цьому відрізку ряд* (1) *можна почленно диференціювати, тобто*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \quad x \in [a,b].$$

Теорема 3. (Про почленне інтегрування функціонального ряду).

Якщо члени ряду (1) *неперервні на відрізку* $[a,b]$ *і цей ряд збігається рівномірно на* $[a,b]$, *то його можна почленно інтегрувати на цьому відрізку, тобто*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx, \quad x \in [a,b].$$

Приклад 5. Для даного функціонального ряду побудувати мажорантний ряд та довести рівномірну збіжність на заданому відрізку:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}, \quad [0,2]$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}, \quad \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!(x+3)^n}{n^n}$, $[-5,-1]$.

Розв'язання.

а) Позначимо $u_n(x)=\frac{\sqrt{x+1}\cos nx}{\sqrt[3]{n^5+1}}$. Тоді, оскільки $0\le x\le 2$, а для довільного x: $|\cos nx|\le 1$, то

$$|u_n(x)|\le\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5+1}}<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{n^5}}=\frac{\sqrt{3}}{n^{\frac{5}{3}}}=a_n$$

і в якості мажорантного ряду оберемо ряд $\sqrt{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$, який є знакододатним і збігається, бо $p=\frac{5}{3}>1$. Тоді за ознакою Вейєрштрасса заданий за умовою ряд рівномірно збігається на відрізку [0,2].

б) Позначимо $u_n(x)=x^{n!}$. Тоді, оскільки $|x|\le\frac{1}{2}$, то $|u_n(x)|\le\frac{1}{2^{n!}}=a_n$.

Розглянемо знакододатний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ і доведемо, що він збіжний, тобто, він є мажорантним рядом заданого функціонального ряду. Дійсно, застосовуючи ознаку Даламбера, одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n!}}{2^{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n!}}{2^{n!\cdot(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n!\cdot n}}=0<1.$$

Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається за ознакою Даламбера, і тоді заданий за умовою функціональний ряд збігається рівномірно на проміжку $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

в) Позначимо $u_n(x)=\dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$. Оскільки $-5\le x\le -1$, то $|x+3|\le 2$ і

тоді $|u_n(x)|=\dfrac{n!\cdot|x+3|^n}{n^n}\le\dfrac{n!\cdot 2^n}{n^n}=a_n$.

Розглянемо знакододатний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!2^n}{n^n}$ та дослідимо його на збіжність за ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!2^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)2^n\cdot 2\cdot n^n}{(n+1)^n(n+1)n!2^n}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\mathrm{e}}<1.$$

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається. Тому функціональний ряд, що заданий за умовою, рівномірно збігається на проміжку [–5, –1].

Приклад 6. Знайти суму ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)x^{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{tg}^n\,x}{n(n+1)}$.

Розв'язання.

а) Перепишемо ряд, який заданий за умовою, у вигляді

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}$$

та знайдемо його область збіжності. Для цього до ряду $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|x|^{n+2}}{n(n+2)}$, який складений з модулів його членів, застосуємо ознаку Даламбера:

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^{n+2}}{n(n+2)}; \quad |u_{n+1}(x)| = \frac{|x|^{n+3}}{(n+1)(n+3)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+3}\cdot n(n+2)}{(n+1)(n+3)\cdot|x|^{n+2}} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} = |x|,$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1,1)$. Оскільки заданий за умовою ряд є абсолютно збіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це відрізок [–1, 1]. Враховуючи, що ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1}$ є рівномірно збіжними на кожному відрізку вигляду $-1+\omega \le x \le 1-\omega$, де ω – будь-яке додатне число, менше за 1 (це випливає з ознаки Вейєрштрасса), то позначимо шукану суму:

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}, \quad x \in (-1,1),$$

та застосуємо до цього ряду теорему про почленне диференціювання. Одержимо:

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}$$

або $\quad S'(x) = 2x\cdot S_1(x)$, де $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$.

Оскільки

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}, \quad x \in (-1,1),$$

то

$$S_1'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad S_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x), \quad x \in (-1,1).$$

Тоді $\quad S'(x)=2x\ln(1+x),\quad x\in(-1,1)\quad\Rightarrow$

$$\Rightarrow S(x)=2\int_0^x t\ln(1+t)dt=\left|\begin{array}{l} u=\ln(1+t)\Rightarrow du=\dfrac{dt}{t+1}; \\ dv=tdt\Rightarrow v=\dfrac{t^2}{2}; \end{array}\right|=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}\ln(1+t)\Big|_0^x-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt\right)=2\left(\frac{x^2}{2}\ln(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\ln(1+x)\right)=$$

$$=\left(x^2-1\right)\ln(1+x)-\frac{x^2}{2}+x,\quad x\in(-1,1).$$

б) Для знаходження області збіжності ряду, розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\cos x|^{n+1}}{n(n+1)}$ та застосуємо до цього ряду ознаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\cos x|^{n+2}\cdot n(n+1)}{(n+1)(n+2)\cdot|\cos x|^{n+1}}=|\cos x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}=|\cos x|.$$

Нерівність $|\cos x|<1$ виконується для всіх $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{N}$, але при $x=k\pi,\ k\in\mathbb{N}$, заданий функціональний ряд збігається. Тому областю збіжності цього ряду є уся числова вісь. Але для подальшого застосування теореми про почленне диференціювання, будемо вважати, що $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{N}$.

Позначимо шукану суму: $\quad S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\cos^{n+1}x}{n(n+1)}$.

Тоді $\quad S'(x)=\sin x\cdot S_1(x),\ $ де $\ S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\cos^n x}{n}$;

$$S_1'(x)=\sin x\cdot S_2(x);\ \text{ де }\ S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos^{n-1}x.$$

Оскільки $S_2(x)=\dfrac{1}{1+\cos x}$, то

$$S_1(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{1+\cos t}dt=-\int_0^x \frac{d(\cos t)}{1+\cos t}=-\ln(1+\cos x)+\ln 2.$$

Тоді $S'(x)=-\sin x\cdot\ln(1+\cos x)+\ln 2\cdot(\sin x)$;

$$S(x)=-\int_0^x \sin t\cdot\ln(1+\cos t)dt+\ln 2\int_0^x \sin t dt=$$

$$=\int_0^x \ln(1+\cos t)d(1+\cos t)-\ln 2\cdot\left(\cos x-1\right)=$$

$$=\left((1+\cos t)\ln(1+\cos t)-(1+\cos t)\right)\Big|_0^x-\ln 2\cdot\left(\cos x-1\right)=$$

$$=(1+\cos x)\ln(1+\cos x)-1-\cos x-2\ln 2+2-\ln 2\cdot\left(\cos x\right)+\ln 2=$$

$$=(1+\cos x)\ln(1+\cos x)-\left(1+\ln 2\right)\cos x+1-\ln 2,\quad x\neq k\pi,\quad k\in\mathbb{N}.$$

в) Для знаходження області збіжності даного функціонального ряду, запишемо ряд із модулів членів заданого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\operatorname{tg} x\right|^n}{n(n+1)}$$

та скористаємося ознакою Даламбера. Одержимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\operatorname{tg} x\right|^{n+1}\cdot n(n+1)}{(n+1)(n+2)\cdot\left|\operatorname{tg} x\right|^n}=\left|\operatorname{tg} x\right|<1,$$

тобто, $-\dfrac{\pi}{4}+k\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}$. Оскільки при $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbb{N}$, ряд збігається, то область збіжності цього ряду має вигляд:

$$D=\left\{x\,\middle|\ -\frac{\pi}{4}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{4}+k\pi\right\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Але надалі для застосування до заданого за умовою ряду теореми про почленне диференціювання, ми будемо розглядати лише ті значення x з множини D, які задовольняють умову $x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$.

Позначимо шукану суму

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$$

та перепишемо цей ряд у вигляді

$$S(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x} S_1(x), \quad \text{де} \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^{n+1} x}{n(n+1)}.$$

Тоді

$$S_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} S_2(x), \quad \text{де} \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n}.$$

Далі,

$$S_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} S_3(x), \quad \text{де} \quad S_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg}^{n-1} x.$$

Оскільки для тих значень x з множини D, які задовольняють умову $x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$, виконується умова $|\operatorname{tg} x| < 1$, то

$$S_3(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}, \quad \text{а} \quad S_2'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Тому $\quad S_2(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg} t} dt = \int_0^x \frac{d(\operatorname{tg} t + 1)}{1 + \operatorname{tg} t} = \ln(\operatorname{tg} x + 1)$.

Звідси $\quad S_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(\operatorname{tg} x + 1)$;

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2 t} \ln(\operatorname{tg} t + 1) dt = \int_0^x \ln(\operatorname{tg} t + 1) d(\operatorname{tg} t + 1) =$$

$$= (\operatorname{tg} t + 1) \cdot \left(\ln(\operatorname{tg} t + 1) - 1 \right) \Big|_0^x = (\operatorname{tg} x + 1) \left(\ln(\operatorname{tg} x + 1) - 1 \right) + 1 =$$

$$= (\operatorname{tg} x + 1) \ln(\operatorname{tg} x + 1) - \operatorname{tg} x.$$

І, нарешті, одержуємо $S(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x} \ln(\operatorname{tg} x + 1) - 1.$

Приклад 7. Знайти суму ряду:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 3) x^{n+1}$.

Розв'язання.

а) Знайдемо спочатку інтервал збіжності заданого ряду, для цього застосуємо ознаку Даламбера:

$$u_n(x) = (-1)^n n x^{2n+1}; \quad u_{n+1}(x) = (-1)^{n+1} (n+1) x^{2n+3};$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)x^{2n+3}}{(-1)^n n x^{2n+1}} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = x^2 \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = x^2 < 1;$$

$$x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow x \in (-1,1),$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1,1)$. Оскільки даний ряд є розбіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це інтервал $(-1, 1)$. Відомо, що степеневий ряд всередині його проміжку збіжності можна почленно диференціювати та інтегрувати, при цьому отримані в результаті диференціювання та інтегрування ряди будуть мати той же радіус збіжності, що і вихідний ряд.

Позначимо шукану суму $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{2n+1}$, $x \in (-1,1)$, та перепишемо даний ряд у вигляді

$$S(x) = \frac{1}{2} x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1} = \frac{1}{2} x^2 S_1(x), \text{ де } S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}.$$

Інтегруючи ряд $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2nx^{2n-1}$ по x (за умови, що $|x|<1$), одержимо

$$\int_0^x S_1(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\int_0^x t^{2n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2n\frac{x^{2n}}{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{-x^2}{1-(-x^2)}=-\frac{x^2}{1+x^2},$$

або $\int_0^x S_1(t)dt=-\dfrac{x^2}{1+x^2}, \quad x\in(-1,1)$.

Тепер диференціюючи останню рівність, отримаємо

$$\left(\int_0^x S_1(t)dt\right)'_x=\left(-\frac{x^2}{1+x^2}\right)'_x \Rightarrow S_1(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad x\in(-1,1).$$

Отже, отримаємо $S(x)=\dfrac{1}{2}x^2S_1(x)=-\dfrac{1}{2}x^2\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}=-\dfrac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2}, \quad x\in(-1,1)$.

б) Спочатку знайдемо інтервал збіжності даного ряду. Для цього скористаємося ознакою Даламбера:

$$u_n(x)=(n^2+3n+3)x^{n+1};\ u_{n+1}(x)=((n+1)^2+3(n+1)+3)x^{n+2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left((n+1)^2+3(n+1)+3\right)x^{n+2}}{(n^2+3n+3)x^{n+1}}\right|=|x|\cdot 1=|x|<1 \Rightarrow |x|<1,$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x\in(-1,1)$. Оскільки даний ряд є розбіжним при $x=\pm 1$, то область збіжності цього ряду – це інтервал $(-1, 1)$.

Перетворимо цей ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+2)^2-(n+1)\right)x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2x^{n+1}-x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n.$$

Отримані ряди також збігаються в інтервалі $(-1, 1)$. Позначимо ряди через

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+3n+3)x^{n+1},\ S_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2x^{n+1} \text{ та } S_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

тоді $S(x) = S_1(x) - xS_2(x), \ \ x \in (-1,1)$.

Почленно інтегруючи два останні ряди по x (за умови, що $|x| < 1$), одержимо

$$\int_0^x S_1(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2 \int_0^x t^{n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+2} = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1} = xS_3(x),$$

де $S_3(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}, \ \ x \in (-1,1)$;

$$\int_0^x S_2(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, \ \ x \in (-1,1).$$

Диференціюючи останню рівність, отримаємо

$$\left(\int_0^x S_2(t)dt\right)'_x = \left(\frac{x}{1-x}\right)'_x \ \Rightarrow \ S_2(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \ \ x \in (-1,1).$$

Далі, інтегруючи $S_3(x)$ по x, маємо

$$\int_0^x S_3(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\int_0^x t^{n+1}dt = \sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2} = x^2 \cdot \frac{1}{1-x}, \ \ x \in (-1,1),$$

а потім, диференціюючи отриману рівність по x, одержимо

$$S_3(x) = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}, \ \ x \in (-1,1).$$

Отже, маємо $\int\limits_0^x S_1(t)dt = x\dfrac{2x - x^2}{(1-x)^2}$, звідки $\left(\int\limits_0^x S_1(t)dt\right)'_x = \left(\dfrac{2x^2 - x^3}{(1-x)^2}\right)'_x$

$$\Rightarrow S_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(1-x)^3};$$

$$S(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2}, \ \ x \in (-1,1).$$

2.3. Степеневі ряди та їх застосування

Означення 1. *Степеневим рядом* називається функціональний ряд, який має наступний вигляд

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \qquad (1)$$

де x_0 – фіксована точка числової осі, а сталі числа a_n (n=0,1,2,…) називаються *коефіцієнтами* степеневого ряду. При x_0=0 ряд (1) набуває вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\ . \qquad (2)$$

Означення 2. Областю збіжності ряду (1) є інтервал (x_0–R , x_0+R), де число $R \geq 0$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду.

Для кожної точки x, розташованої всередині цього інтервалу, ряд збігається, причому абсолютно, а для точок x, розташованих поза нього, ряд розбігається. У випадку x_0=0 інтервалом збіжності ряду (2) буде інтервал $(-R, R)$. На кінцях інтервалу збіжності відповідного степеневого ряду, питання про збіжність або розбіжність треба досліджувати окремо. Радіус збіжності степеневого ряду можна знайти за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

або

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\ .$$

Відрізок [a , b], інтервал (a , b), напіввідрізок [a , b) та напівінтервал $(a, b]$ назвемо проміжком та будемо позначати надалі $< a, b >$.

Кажуть, що функція $f(x)$, яка визначена на проміжку $< x_0 - R, x_0 + R >$, розкладається в цьому проміжку в степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$

якщо він збігається на цьому проміжку і його сума дорівнює $f(x)$ для всіх $x \in < x_0 - R, x_0 + R >$.

Означення 3. Степеневий ряд (1) називається *рядом Тейлора* функції $f(x)$, записаним в околі точки x_0, якщо коефіцієнти цього ряду обчислюються за формулами

$$a_0 = f(x_0),\ \ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ \ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots.$$

Теорема. (Про єдність розкладу функції в степеневий ряд)
Якщо в деякому околі точки x_0 *функція* $f(x)$ *розкладається в степеневий ряд*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots , \tag{3}$$

то цей розклад є єдиним, а сам ряд, що стоїть в правій частині (3) *є рядом Тейлора функції* $f(x)$, *тобто,*

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots.$$

Частинний випадок ряду Тейлора, коли x_0=0, називається *рядом Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots.$$

При цьому справедливі рівності:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ \ x \in \mathbb{R},\ \ (0! = 1); \tag{4}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{5}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{6}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}; \tag{8}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad -1 < x \le 1; \tag{9}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 \le x \le 1; \tag{10}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad -1 < x < 1. \tag{11}$$

Ряд (11) називають *біноміальним.* Частинними випадками рівності (11) є наступні формули

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}, \qquad -1 < x < 1; \tag{12}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1}, \qquad -1 < x < 1. \tag{13}$$

Властивості степеневих рядів

1. *Якщо радіус збіжності степеневого ряду* $R \neq 0$, *то цей ряд збігається рівномірно на кожному відрізку* $[a, b]$, *розташованому строго всередині проміжку збіжності цього ряду.*

2. *Сума степеневого ряду є функцією, неперервною в кожній внутрішній точці його проміжку збіжності.*
3. *Всередині інтервалу збіжності степеневий ряд можна почленно диференціювати і почленно інтегрувати; причому інтервал збіжності одержаного таким чином ряду співпадає з інтервалом збіжності ряду, який почленно диференціювали або інтегрували.*

Наведені розклади елементарних функцій в ряд Маклорена широко використовуються для наближених обчислень значень функцій в точці та значень похідних від елементарних функцій, а також наближених обчислень визначених інтегралів від елементарних функцій. Крім того, степеневі ряди використовуються для знаходження наближених розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь.

Приклад 8. Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2(x+2)^n}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$.

Розв'язання.

а) $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^2\cdot(n+3)}{(n+2)\cdot n^2}=1.$$

Оскільки $x_0=-2$, то інтервал збіжності: $(-3\ ,-1)$. При $x=-3$ та $x=-1$ маємо відповідні ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)^2}{n+2}$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)^2}{n+2}$, кожен з яких є розбіжним за достатньою ознакою розбіжності числового ряду. Тому область збіжності даного функціонального ряду – це інтервал $(-3\ ,-1)$.

б) $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{n\cdot(-1)^{n+2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

Тоді (–1, 1) – це інтервал збіжності даного степеневого ряду. При x = –1 маємо ряд $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який є розбіжним. При x = 1 маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, який збігається за теоремою Лейбніца. Тому областю збіжності даного функціонального ряду є проміжок (–1, 1].

в) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Це означає, що областю збіжності даного функціонального ряду є одна точка x = 0.

г) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Отже, ряд збігається в інтервалі (–∞, ∞).

Приклад 9. Користуючись формулами розкладу в ряд Маклорена функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ та $(1+x)^{\alpha}$, розкласти дані функції в ряд в околі точки x = 0:

а) $y=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 \text{ при } x=0;\end{cases}$ б) $y=\sin\frac{x}{2}$; в) $y=\cos^2 x$;

г) $y=\ln(10+x)$; д) $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання.

а) З формули (4) випливає, що для всіх $x\in(-\infty,+\infty)$ має місце формула

$$\mathrm{e}^x-1=\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots.$$

Тоді $y=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$ для $x\in(-\infty,+\infty)$.

б) З формули (7) випливає, що для всіх $x \in (-\infty, +\infty)$ має місце формула

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{2^5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)!} + \ldots$$

в) Оскільки $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, то користуючись формулою (8), одержимо

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{2^3 x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

г) Оскільки $\ln(10 + x) = \ln 10\left(1 + \frac{x}{10}\right) = \ln 10 + \ln\left(1 + \frac{x}{10}\right)$, то, користуючись формулою (9), одержимо

$$\ln(10 + x) = \ln 10 + \frac{x}{10} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 10^3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \ldots, \quad -10 < x \le 10.$$

д) Оскільки $\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = x^2\left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}}$, то, користуючись формулою (11), одержимо:

$$\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} = x^2\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right)}{3!}(-x^2)^3 + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - 2\right) \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!}(-x^2)^n + \ldots\right) =$$

$$= x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}x^8 + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}x^{2n+2} + \ldots$$

Приклад 10. Обчислити із точністю до 0.001:

а) $\cos 1^{\circ}$ б) $\sqrt[3]{30}$; в) $\int\limits_{0}^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$.

Розв'язання.

а) Користуючись розкладом функції $\cos x$ в степеневий ряд, можна записати:

$$\cos 1^{\circ} = \cos\frac{\pi}{180} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{180^{2n}(2n)!} = 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 4!} - \ldots$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, а його другий член вже менший за 0.001, то $\cos 1^{\circ} \approx 1$ із точністю до 0.001.

б) Знайдемо найближче за величиною до числа 30 число, з якого точно добувається корінь кубічний, та запишемо:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{1}{9}\right)} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Далі, використовуючи формулу (11) при $\alpha = \frac{1}{3}$, $x = \frac{1}{9} \in (-1,1)$, одержимо

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots\right) =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1\cdot 2}{3^2 2!\cdot 9^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3!\cdot 9^3} - \ldots\right).$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, причому

$$\frac{1\cdot 2}{3^2 2!\cdot 9^2} < 0.001 < \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3 3!\cdot 9^3},$$

то для того, щоб одержати результат із необхідною точністю, треба взяти три перших доданки. Таким чином, $\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{729}\right) = \frac{2265}{729} \approx 3.107$.

в) Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена:

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 \le x \le 1,$$

та, виконуючи почленне інтегрування одержаного степеневого ряду, знайдемо:

$$\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{0.5} \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \frac{x^6}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} + \ldots \right) dx =$$

$$= x\Big|_0^{0.5} - \frac{x^3}{9}\Bigg|_0^{0.5} + \frac{x^5}{25}\Bigg|_0^{0.5} - \frac{x^7}{49}\Bigg|_0^{0.5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}\Bigg|_0^{0.5} + \ldots =$$

$$= 0.5 - \frac{(0.5)^3}{9} + \frac{(0.5)^5}{25} - \frac{(0.5)^7}{49} + \ldots + (-1)^n \frac{(0.5)^{2n+1}}{(2n+1)^2} + \ldots$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, причому

$$\frac{(0.5)^5}{25} < 0.001 < \frac{(0.5)^7}{49},$$

то для того, щоб одержати результат із заданою точністю, треба взяти три перших доданки. Одержимо

$$\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \approx 0.5 - \frac{(0.5)^3}{9} + \frac{(0.5)^5}{25} = \frac{112.5 - 3.125 + 0.28125}{225} \approx 0.487.$$

Приклад 11. Користуючись розкладом функції в ряд Маклорена, знайти значення десятої похідної функції $y = x^6 \mathrm{e}^x$ при $x = 0$.

Розв'язання.

Розкладемо функцію в ряд Маклорена:

$$y = x^6 \mathrm{e}^x = x^6 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \right) =$$

$$= x^6 + x^7 + \frac{x^8}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{10}}{4!} + \ldots + \frac{x^{n+6}}{n!} + \ldots$$

З іншого боку, за означенням ряду Маклорена маємо

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(10)}(0)}{10!}x^{10} + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Тому, прирівнюючи коефіцієнти при x^{10}, одержимо $\frac{1}{4!} = \frac{y^{(10)}(0)}{10!}$. Звідси знайдемо $y^{(10)}(0) = \frac{10!}{4!}$.

Приклад 12. Знайти п’ять перших, відмінних від нуля члени розкладу в степеневий ряд розв’язку задачі Коші: $y'' - y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Розв’язання.

За означенням розкладу функції в ряд Маклорена маємо

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \ldots$$

За умовою $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$. З рівняння запишемо

$$y''(x) = y'(x) - 2y(x)$$

та, поклавши в цій рівності $x = 0$, знайдемо: $y''(0) = y'(0) - 2y(0) = -1$.

Диференціюючи задане рівняння, одержимо:

$$y'''(x) = y''(x) - 2y'(x),$$

звідки знаходимо: $y'''(0) = y''(0) - 2y'(0) = -1 - 2 = -3$. І, нарешті, оскільки

$$y^{(4)}(x) = y'''(x) - 2y''(x),$$

то $y^{(4)}(0) = y'''(0) - 2y''(0) = -3 + 2 = -1$.

Отже, остаточно маємо $y(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \ldots$

3. РЯДИ ФУР'Є

3.1. Тригонометричний ряд. Ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є

Означення 1. *Тригонометричним рядом* називається функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),$$

де a_0, $a_к$ і b_k (k = 1, 2,…) – сталі дійсні числа, які називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Нехай $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку [– π, π], яка не є парною та не є непарною. Числа a_0, $a_к$ і b_k (k = 1, 2,…), що визначаються за формулами

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\;\; a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,\;\; b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

називаються *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$.

Означення 2. Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$ називають *рядом Фур'є* цієї функції і записують у вигляді

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

В останньому записі стоїть знак відповідності $\sim$, який означає, що інтегровній на відрізку [–π, π] функції $f(x)$ ставиться у відповідність її ряд Фур'є. В яких випадках знак відповідності можна замінити знаком рівності, з'ясовано в двох наступних теоремах.

Теорема 1. (Теорема Діріхле)

Нехай функція $y=f(x)$ *задовольняє умовам:*

а) *періодична з періодом* 2π*;*

б) *неперервна усюди на відрізку* $[-\pi,\ \pi]$, *окрім, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду;*

в) *сегмент* $[-\pi,\ \pi]$ *можна розділити на скінченне число підсегментів (інтервалів), в кожному з яких функція* $f(x)$ *обмежена і монотонна.*

Тоді на відрізку $[-\pi, \pi]$ *ряд Фур'є збігається і його сума*

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

в точках неперервності дорівнює $f(x)$, *а в точках розриву дорівнює* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

В інтервалах неперервності функції $f(x)$ ряд Фур'є збігається рівномірно.

Означення 3. Умови б) і в) теореми Діріхле називаються *умовами Діріхле*, а функція, яка задовольняє цим умовам, називається *кусково-гладкою*.

Теорема 2.

Нехай функція $y=f(x)$ *задовольняє умовам:*

а) *періодична з періодом* 2π*;*

б) *неперервна на відрізку* $[-\pi,\ \pi]$ *усюди, окрім, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду, в яких покладемо*

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

в) *на кожному проміжку неперервності функція має неперервну похідну.*

Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ *на відрізку* $[-\pi, \pi]$ *збігається і його сума* $S(x)$ *в точках неперервності дорівнює* $f(x)$, *а в точках розриву функції дорівнює*

$S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. *В інтервалах, де* $f'(x)$ *неперервна, ряд Фур'є збігається рівномірно.*

Означення 4. Функція $y=f\ (x)$, яка задовольняє умовам б) і в) теореми 2 називається *кусково-гладкою*.

3.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Якщо функція $y=f\ (x)$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2 і є парною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

де $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)dx,\ \ a_k=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\cos kxdx,\ \ k=1,2,\ldots$

Якщо ж функція $y=f\ (x)$, яка задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2, є непарною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

де $b_k=\dfrac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}f(x)\sin kxdx,\ \ k=1,2,\ldots.$

3.3. Ряд Фур'є для 2*l*-періодичної функції

Нехай тепер задана періодична функція $f(x)$ з періодом $T=2l$, яка на відрізку $[-l,\ l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2. Якщо ця функція не є парною та не є непарною, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,\ \ a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

• Якщо $f(x)$ – парна $2l$-періодична функція, яка на відрізку $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

де $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ \ a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ k = 1,2,\ldots.$

• І, нарешті, якщо $f(x)$ – непарна $2l$-періодична функція, яка на відрізку $[-l, l]$ задовольняє умовам теореми 1 або теореми 2, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad \text{де}\ \ b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\ \ k = 1,2,\ldots.$$

Зауваження 1. При розв'язанні прикладів доцільно використовувати такі тотожності:

1) $\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z};$

2) $\sin(n\pi) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z};$

3) $\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k \ \text{ при }\ n = 2k, \\ 0 \ \text{ при }\ n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$

4) $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 \ \text{ при }\ n = 2k, \\ (-1)^{k+1} \ \text{ при }\ n = 2k-1,\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, a]$ і її треба розкласти в ряд Фур'є за синусами або за косинусами, то вважають, що функція задана на півперіоді, тобто $l=a$. Потім її графік продовжують парним чином, якщо мова йде про косинуси, і непарним, якщо мова йде про синуси.

Якщо ж функція $f(x)$ задана на відрізку $[0, a]$ і ніяких додаткових умов немає, то вважають, що вона задана на періоді, тобто $T=2l=a$.

Приклад 1. Функцію $y=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$, задану в інтервалі $(-\pi, \pi)$ розкласти в ряд Фур'є.

Розв’язання.

<u>Послідовність розв’язання прикладів на розкладення функцій в ряд Фур'є:</u>

1. Встановлюємо період функції. Якщо за умовою немає додаткових вимог про розклад в ряд Фур'є за синусами, або за косинусами, то вважаємо, що період функції, яку будемо розкладати в ряд Фур'є, дорівнює довжині інтервалу, на якому функція задана за умовою. В нашому випадку період дорівнює 2π (рис. 1).

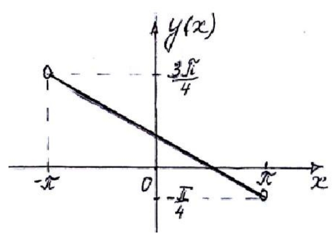

Рис. 1

2. З’ясовуємо, чи задовольняє функція умовам теорем 1, або 2.
3. Періодично продовжуємо функцію на всю числову вісь, побудуємо графік функції $y^*(x)$:

$$y^*(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2},\ \text{якщо}\ x\in(-\pi,\pi);\quad y^*(x+2k\pi)=y^*(x);$$

$$y^*(x)=\frac{\pi}{4},\ \text{якщо}\ x=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z},\ \text{(рис 2).}$$

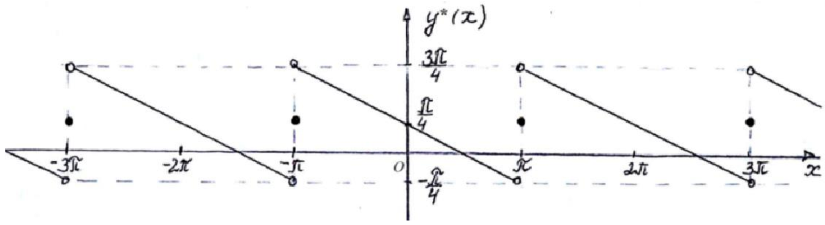

Рис. 2

4. З’ясовуємо, чи буде функція $y^*(x)$ парною, чи непарною, або не буде ані парною, ані непарною. В нашому випадку функція $y^*(x)$ не є парною і не є непарною.
5. Записуємо ряд Фур'є функції $y^*(x)$ та формули для обчислення коефіцієнтів Фур'є:

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

де

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx, \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos kxdx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin kxdx.$$

6. Обчислюємо коефіцієнти Фур'є та записуємо відповідь:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 - \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos kxdx = \left|\begin{array}{l} u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; du = -\frac{1}{2}dx; \\ dv = \cos kxdx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{k}\sin kx; \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\sin kx\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right) = 0;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin kx dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \;\Rightarrow\; du = -\frac{1}{2}dx; \\ dv = \sin kx dx \;\Rightarrow\; v = -\frac{1}{k}\cos kx; \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx \right) = -\frac{1}{k\pi}(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{(-1)^k}{k}.$$

Таким чином,

$$y^*(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx \quad \text{при всіх } x \in (-\infty, \infty), \text{ а}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin kx \quad \text{лише при } x \in (-\pi, \pi).$$

Приклад 2. Розкласти функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0, \pi)$ в ряд Фур'є: а) за синусами; б) за косинусами.

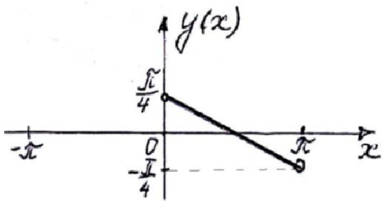

Рис. 3

Розв'язання.

а) Оскільки в ряд Фур'є за синусами можна розкласти лише непарну функцію, то задану в інтервалі $(0, \pi)$ функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, продовжимо непарним чином на інтервал $(-\pi, 0)$ і побудуємо функцію (рис. 4):

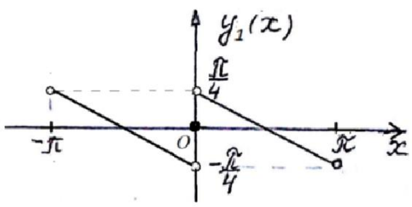

Рис. 4

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \text{ якщо } 0 < x < \pi; \\ -\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \text{ якщо } -\pi < x < 0; \\ 0, \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$$

Ця функція є непарною та визначена на інтервалі $(-\pi,\ \pi)$. Продовжимо її на всю числову вісь з періодом $T=2\pi$, і побудуємо графік функції $y^*(x)$:

$y^*(x)=y_1(x)$, якщо $x\in(-\pi,\pi)$; $y^*(x+2k\pi)=y^*(x)$;

$y^*(x)=0$, якщо $x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, (рис. 5).

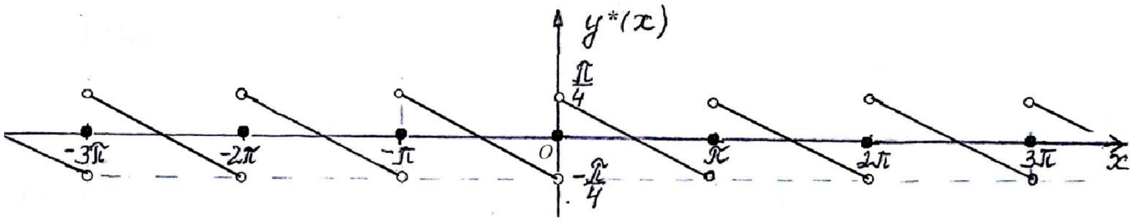

Рис. 5

Оскільки

$$y^*(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

де

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin kxdx=\begin{vmatrix} dv=\sin kxdx \ \Rightarrow\ v=-\frac{1}{k}\cos kx; \\ u=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ du=-\frac{1}{2}dx; \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos kx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\cos kxdx\right)=-\frac{2}{k\pi}\left(-\frac{\pi}{4}(-1)^k-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2k}\left((-1)^k+1\right)=\begin{cases}0,\ \text{при}\ k=2n-1;\\ \frac{1}{2n},\ \text{при}\ k=2n,\ n\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

то

$$y^*(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}\quad\text{при всіх } x\in(-\infty,+\infty),\ \text{а}$$

$$y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}\quad\text{лише при } x\in(0,\pi).$$

б) Оскільки в ряд Фур'є за косинусами можна розкласти лише парну функцію, то задану за умовою в інтервалі (0, π) функцію $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, продовжимо парним чином на інтервал ($-\pi$, 0) і побудуємо (рис.6) функцію

$$y_1(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{якщо } 0 \le x \le \pi; \\ \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}, & \text{якщо } -\pi \le x \le 0. \end{cases}$$

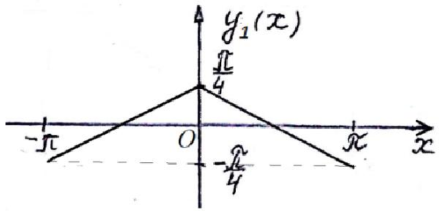

Рис. 6

Ця функція є парною та визначена на відрізку [$-\pi$, π].

Продовжимо її на всю числову вісь з періодом T=2π і побудуємо графік функції $y^*(x)$:

$y^*(x) = y_1(x)$, якщо $x \in [-\pi, \pi]$; $y^*(x + 2k\pi) = y^*(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, (рис.7).

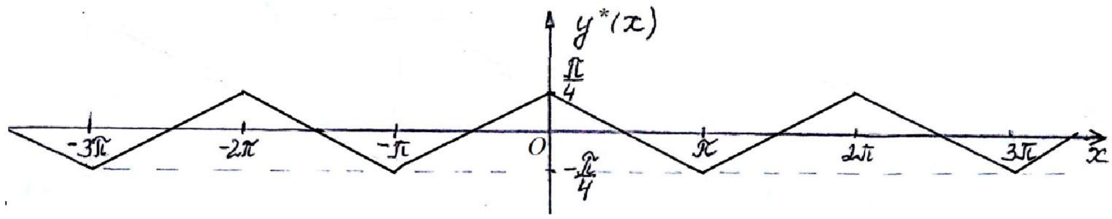

Рис. 7

Оскільки

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

де

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos kx dx = \begin{vmatrix} u = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow du = -\frac{1}{2}dx; \\ dv = \cos kx dx \Rightarrow v = \frac{1}{k}\sin kx; \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\sin kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2k}\int_0^{\pi}\sin kx dx\right) = -\frac{1}{k^2\pi}\cos kx\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, \text{ при } k = 2n; \\ \dfrac{2}{(2n-1)^2\pi}, \text{ при } k = 2n-1; \ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

то

$$y^*(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \text{ при всіх } x \in (-\infty, +\infty),$$

а

$$y(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} \text{ лише при } x \in (0, \pi).$$

Приклад 3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = \mathrm{e}^x$ в інтервалі $(-l, l)$ (рис. 8).

Розв’язання.

Період функції, яку будемо розкладати в ряд Фур'є, дорівнює $T=2l$. Задану за умовою функцію, продовжимо на всю числову вісь з цим періодом, побудуємо графік функції $y^*(x)$:

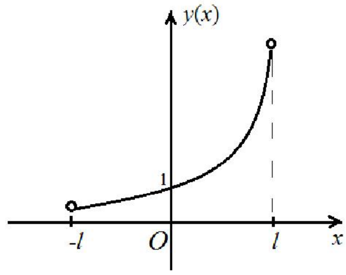

Рис. 8

$y^*(x) = \mathrm{e}^x$, якщо $x \in (-l, l)$; $y^*(x + 2kl) = y^*(x)$;

$y^*(x) = \mathrm{sh}\, l$, якщо $x = l(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, (рис.9).

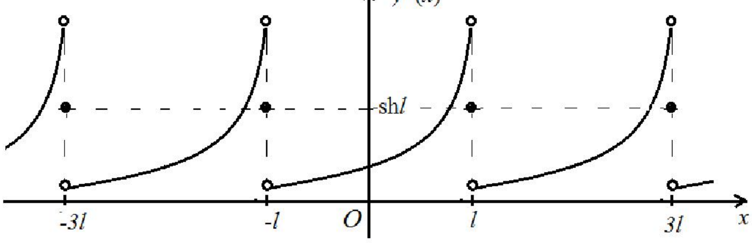

Рис. 9

Оскільки $y^*(x)$ не є парною та не є непарною функцією, то

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^x\,dx = \frac{1}{l}\left(\mathrm{e}^l - \mathrm{e}^{-l}\right) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,l}{l};$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^x \cos\frac{k\pi x}{l}dx = \left|\begin{array}{l} dv = \mathrm{e}^x\,dx \;\Rightarrow\; v = \mathrm{e}^x; \\ u = \cos\frac{k\pi x}{l} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow du = -\frac{k\pi}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx; \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\mathrm{e}^x \cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} + \frac{k\pi}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^x \sin\frac{k\pi x}{l}dx \right) = \left|\begin{array}{l} dv = \mathrm{e}^x\,dx \;\Rightarrow\; v = \mathrm{e}^x; \\ u = \sin\frac{k\pi x}{l} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow du = \frac{k\pi}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx; \end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{l}\left(2(-1)^k\,\mathrm{sh}\,l + \frac{k\pi}{l}\left(\mathrm{e}^x \sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l} - \frac{k\pi}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^x \cos\frac{k\pi x}{l}dx \right)\right).$$

Таким чином, $a_k = \dfrac{2(-1)^k\,\mathrm{sh}\,l}{l} - \dfrac{k^2\pi^2}{l^2}a_k$, звідки знаходимо

$$a_k = \frac{2l(-1)^k\,\mathrm{sh}\,l}{l^2 + k^2\pi^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Знайдемо

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \mathrm{e}^x \sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

З попередніх записів випливає, що

$$a_k = \frac{1}{l}\left(2(-1)^k \operatorname{sh} l + k\pi \cdot b_k\right), \text{ де } a_k = \frac{2l(-1)^k \operatorname{sh} l}{l^2 + k^2\pi^2},$$

тобто

$$l \cdot a_k = 2(-1)^k \operatorname{sh} l + k\pi \cdot b_k;$$

$$b_k = \frac{l \cdot a_k - 2(-1)^k \operatorname{sh} l}{k\pi} = \frac{l}{k\pi} \cdot \frac{2l(-1)^k \operatorname{sh} l}{l^2 + k^2\pi^2} - \frac{2(-1)^k \operatorname{sh} l}{k\pi} =$$

$$= \frac{2(-1)^k \operatorname{sh} l}{k\pi}\left(\frac{l^2}{l^2 + k^2\pi^2} - 1\right) = -\frac{2(-1)^k \operatorname{sh} l}{l^2 + k^2\pi^2} k\pi .$$

Тому

$$y^*(x) = \operatorname{sh} l \left(\frac{1}{l} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{l\cos\frac{k\pi x}{l} - k\pi \sin\frac{k\pi x}{l}}{l^2 + k^2\pi^2} \right) \text{ при всіх } x \in (-\infty, +\infty), \text{ а}$$

$$y(x) = \operatorname{sh} l \left(\frac{1}{l} + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{l\cos\frac{k\pi x}{l} - k\pi \sin\frac{k\pi x}{l}}{l^2 + k^2\pi^2} \right) \text{ лише для } x \in (-l, l).$$

Приклад 4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y = |x|$ в інтервалі $(-l, l)$.

Розв'язання.

Задану за умовою функцію продовжимо на всю числову вісь з періодом T=2l. Побудуємо графік функції $y^*(x)$:

$y^*(x) = |x|$ при $x \in [-l, l]$, $y^*(x + 2lk) = y^*(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, (рис.10)

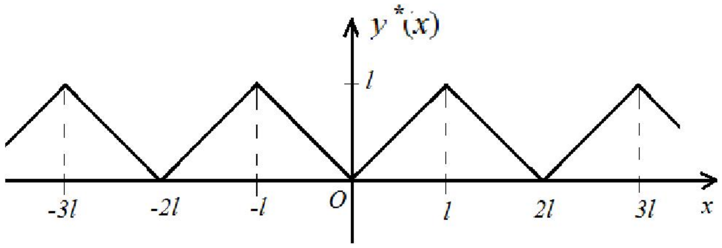

Рис. 10

та, враховуючи, що функція $y^*(x)$ – парна, запишемо:

$$y^*(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l},$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \frac{2}{l}\int_0^l x dx = \frac{2}{l}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^l = l;$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \begin{vmatrix} dv = \cos\frac{k\pi x}{l}dx \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}; \\ u = x \Rightarrow du = dx; \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{l}\left(\frac{lx}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l - \frac{l}{k\pi}\int_0^l \sin\frac{k\pi x}{l}dx\right) = \frac{2l}{k^2\pi^2}\cos\frac{k\pi x}{l}\Bigg|_0^l = \frac{2l}{k^2\pi^2}\Big((-1)^k - 1\Big) =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ якщо } k = 2n; \\ -\frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}, \text{ якщо } k = 2n+1,\ n = 0,1,2,... \end{cases}$$

Тоді

$$y^*(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^2} \quad \text{для всіх } x \in (-\infty, +\infty),$$

а

$$y(x) = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^2} \quad \text{лише для } x \in (-l, l).$$

Приклад 5. Розкласти в ряд Фур'є за синусами функцію $y = x^2$ в інтервалі (0, 4).

Розв’язання. Задану за умовою функцію продовжимо непарним чином інтервал (–4, 0). Побудуємо графік функції (рис. 11):

$$y_1(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x\in(0,4);\\ -x^2, \text{ якщо } x\in(-4,0);\\ 0, \text{ якщо } x=0.\end{cases}$$

Одержану функцію $y_1(x)$ з періодом T=8 продовжимо на всю числову вісь. Побудуємо графік функції $y^*(x)$:

$$y^*(x)=y_1(x), \text{ якщо } x\in(-4,4);\quad y^*(x+8k)=y^*(x);$$

$$y^*(x)=0, \text{ якщо } x=4k,\ k\in\mathbb{Z}, \text{ (рис. 12)}.$$

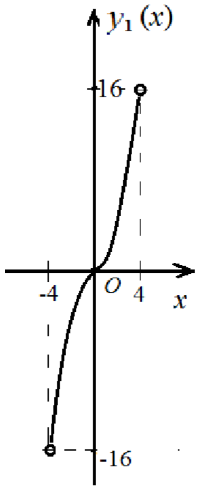

Рис. 11

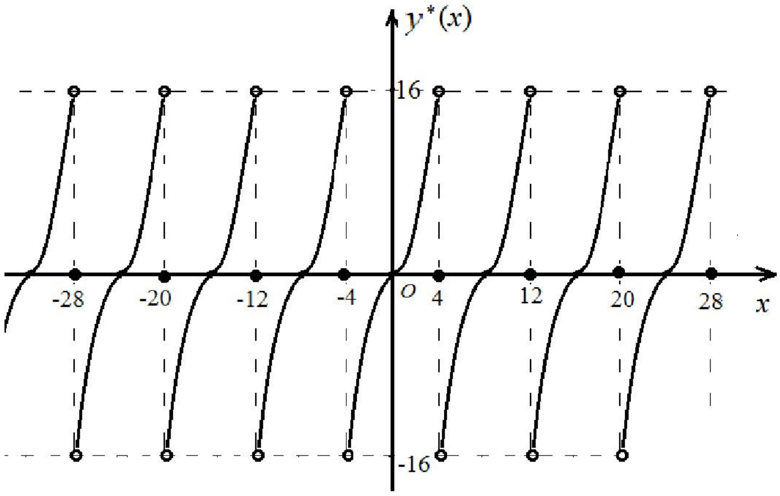

Рис. 12

Тоді

$$y^*(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{4},$$

де

$$b_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 x^2\sin\frac{k\pi x}{4}dx=\begin{vmatrix}u=x^2\ \Rightarrow\ du=2xdx;\\ dv=\sin\frac{k\pi x}{4}dx\ \Rightarrow\\ \Rightarrow\ v=-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4};\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4x^2}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big|_0^4+\frac{8}{k\pi}\int_0^4 x\cos\frac{k\pi x}{4}dx\right)=\left|\begin{array}{l} u=x \ \Rightarrow\ du=dx; \\ dv=\cos\dfrac{k\pi x}{4}dx \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ v=\dfrac{4}{k\pi}\sin\dfrac{k\pi x}{4}; \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{32}{k\pi}(-1)^k+\frac{4}{k\pi}\left(\frac{4x}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{4}\Big|_0^4-\frac{4}{k\pi}\int_0^4\sin\frac{k\pi x}{4}dx\right)=$$

$$=-\frac{32}{k\pi}(-1)^k+\frac{64}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi x}{4}\Big|_0^4=-\frac{32}{k\pi}(-1)^k+\frac{64}{k^3\pi^3}\left((-1)^k-1\right)=$$

$$=\frac{32}{k^3\pi^3}\left[(-1)^k\left(2-k^2\pi^2\right)-2\right].$$

Тому

$$y^*(x)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(2-k^2\pi^2\right)-2}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{4} \quad \text{при всіх } x\in(-\infty,+\infty),$$

а

$$y(x)=\frac{32}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(2-k^2\pi^2\right)-2}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{4} \quad \text{лише при } x\in(0,4).$$

Зауваження. Ряди Фур'є також часто застосовуються для знаходження суми числових рядів, оскільки ряд Фур'є збігається до значення відповідної функції в точках, де функція неперервна.

Так, наприклад, якщо в ряді Фур'є функції, яка визначена в прикладі 4, положити $x=0$, то одержимо:

$$y(0)=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos 0}{(2n+1)^2} \quad \Rightarrow \quad 0=\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Воробьев Н.Н.* Теория рядов. — 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1979. — 408 с. — (Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов).
2. *Грималюк В.П., Кухарчук М.М. Ясінський В.В.* Вища математика: Навч. посіб. для студ. вищ. техн. навч. закл.: У 2 ч. Ч.2. Ряди. Ряди Фур'є. Кратні та криволінійні інтеграли. Теорія поля. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Функції багатьох змінних. Теорія ймовірностей і математична статистика / Ред. І.В. Скрипник. – К.: Віпол, 2004. – Ч.2. – 400 с.: іл.
3. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч., Ч. 2: Учеб. пособие для втузов.— 5-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 1999.— 416 с.: ил.
4. *Дубовик В.П., Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібн.— К.: А.С.К., 2006.— 648 с.: ил.
5. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. Часть IV. Двойные, тройные и криволинейные интегралы, числовые, степенные и тригонометрические ряды. — Харьков: ХГУ, 1966.— 235 с. .: ил.
6. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. — 4-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2006. — 608 с.: ил. — (Высшее образование)
7. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х ч. Ч. 2: Специальные разделы математического анализа. / под ред. *А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича*.— Учеб. пособие. — 2-е узд.— М.: Наука, Физматлит, 1986.— 368 с.
8. *Шипачёв В.С.* Высшая математика.— М.: Высш. шк., 1991.— 479 с.

ЗМІСТ

1. ЧИСЛОВІ РЯДИ…………………………..…………………………3
1.1. Основні поняття ……………………………………………..3
1.2. Ряд геометричної прогресії……………………………….……6
1.3. Властивості збіжних числових рядів……………………………7
1.4. Необхідна ознака збіжності ряду…………………………...9
1.5. Гармонічний ряд……………………………………………10
1.6. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів………………10
1) Ознаки порівняння…………………………………………10
2) Ознака Даламбера……………………………………………13
3) Радикальна ознака Коші……………………………...14
4) Інтегральна ознака Коші……………………………...15
5) Дослідження ряда Діріхле-Рімана………………………….. 17
1.7. Знакозмінні числові ряди. Теорема Лейбніца про знакопочережні ряди…………………...…………..……....18
2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ………………….……………………….23
2.1. Основні означення...……………………………………………23
2.2. Рівномірна збіжність функціонального ряду..…………………..26
2.3. Степеневі ряди та їх застосування……………………………..…37
3. РЯДИ ФУР'Є……………………….……………………………...46
3.1. Тригонометричний ряд. Ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є ……….46
3.2. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій……………………...48
3.3. Ряд Фур'є для $2l$-періодичної функції ……………………….48
Список рекомендованої і використаної літератури……………………...61