Лабораторна робота №8.

Алгоритми визначення мінімального шляху між вершинами графа.

Мета роботи: Вивчення алгоритмів пошуку найкоротших шляхів на графах і реалізація алгоритму на мові високого рівня.

Задача роботи: Дослідити задачу знаходження мінімальної відстані:
а) від джерела до всіх інших вершин заданого графа (алгоритм Дейкстри);
б) між усіма парами вершин заданого графа (алгоритм Флойда).

Теоретичні відомості.

Алгоритм Дейкстри.

Для заданого графа *G* (рис. 13) знайти найкоротші шляхи від джерела v_1 до всіх інших вершин, використовуючи алгоритм Дейкстри.

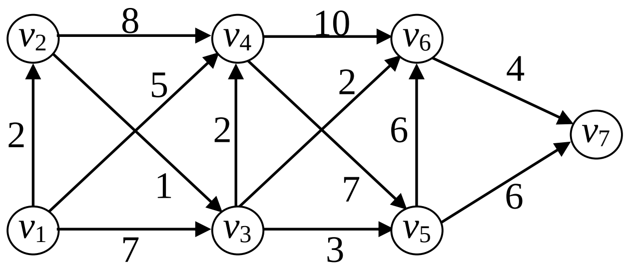

Рис. 13. Орієнтований граф *G*

Крок 1. Призначимо всім вершинам, окрім початкової мітки $(\infty,-)$, а початковій $v_1(0,-)$ (перше значення – це відстань від початкової вершини, друге – попередня вершина). Задамо дві множини: множину постійних міток *П* та множину тимчасових міток *T*. $П_0 = \{v_1(0,-)\}$, $T_0=\varnothing$.

Крок 2. Переглядаємо всі вершини, в які є шлях з початкової, змінюємо значення їх міток і заносимо їх в множину тимчасових міток $T_1 = \{v_2(2,v_1), v_3(7,v_1), v_4(5,v_1)\}$.

З множини T_1 обираємо вершину, в яку з v_1 найменша відстань і переносимо її з T_1 в множину $П_1$: $П_1 = \{v_1(\infty,-), v_2(2,v_1)\}$.

Крок 3. Від всіх вершин з множини *П* переглядаємо шляхи до суміжних з ними вершин, змінюємо значення їх міток і заносимо їх в множину тимчасових міток, якщо в множині *T* вже є така вершина, обираємо значення з меншою відстанню $T_2 = \{v_3(7, v_1), v_3(3, v_2), v_4(10, v_2), v_4(5, v_1)\} \Rightarrow T_2 = \{v_3(3, v_2), v_4(5, v_1)\}$.

$\Pi_2 = \{v_1(\infty, -), v_2(2, v_1), v_3(3, v_2)\}$.

Крок 4. Перевіряємо, чи всі вершини мають постійні мітки, тобто знаходяться у множині *П*. Якщо так, то найкоротші шляхи від джерела v_1 до всіх інших вершин знайдено, якщо ні переходимо на крок 3.

$T_3 = \{v_4(5, v_1), v_6(5, v_3), v_5(6, v_3)\}$, $\Pi_3 = \{v_1(\infty, -), v_2(2, v_1), v_3(3, v_2), v_4(5, v_1)\}$.

$T_4 = \{v_6(5, v_3), v_5(6, v_3)\}$, $\Pi_4 = \{v_1(\infty, -), v_2(2, v_1), v_3(3, v_2), v_4(5, v_1), v_6(5, v_3)\}$.

$T_5 = \{v_5(6, v_3), v_7(9, v_6)\}$, $\Pi_5 = \{v_1(\infty, -), v_2(2, v_1), v_3(3, v_2), v_4(5, v_1), v_6(5, v_3), v_5(6, v_3)\}$.

$T_6 = \{v_7(9, v_6)\}$, $\Pi_6 = \{v_1(\infty, -), v_2(2, v_1), v_3(3, v_2), v_4(5, v_1), v_6(5, v_3), v_5(6, v_3), v_7(9, v_6)\}$.

Отже, щоб потрапити з вершини v_1 у вершину v_7 треба пройти найменшу відстань 9: $v_1 \xrightarrow{2} v_2 \xrightarrow{1} v_3 \xrightarrow{2} v_6 \xrightarrow{4} v_7$.

Алгоритм Флойда.

Для заданого графа *G* (рис. 14) знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин, використовуючи алгоритм Флойда.

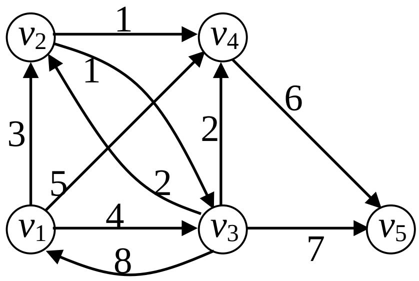

Рис. 14. Орієнтований граф *G*

Матриця ваг

$$
\begin{array}{c}
 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 4 & 5 & \infty \\
\infty & 0 & 1 & 1 & \infty \\
8 & 2 & 0 & 2 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad k = 1
$$

Матриця маршруів

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
v_2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\
v_3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
v_4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\
v_5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5
\end{array}
$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad k=2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 5 & \infty \\ \infty & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad k=3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & \infty \\ 9 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 8 & 2 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad k=4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 10 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad k=5 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Відповідь: Матриця ваг Матриця маршруів

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 4 & 10 \\ 9 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 8 & 2 & 0 & 2 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 6 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Завдання.

1. Орієнтований граф G(V,E), граф взяти з лабораторної роботи №7, нанести на ребра напрям.
2. Для заданого графа знайти найкоротший шлях від першої вершини (джерела) до всіх інших вершин заданого графа, використовуючи алгоритм Дейкстри.
3. Для заданого графа знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин за допомогою алгоритму Флойда.
4. Скласти алгоритм та написати програму реалізації алгоритмів Дейкстри та Флойда за варіантами (парні варіанти за списком - Дейкстри, непарні - Флойда).

Контрольні запитання.

1. Чи будуть коректно працювати алгоритми Дейкстри та Флойда з графом, у якого є ребра з від'ємною вагою?
2. В чому полягає ідея алгоритмів Дейкстри та Флойда?