**Практичне заняття №3-4.**

**Задачі прикладного характеру**

**Завдання**

**Задача 1 (Поширення чуток).** Розглянемо населений пункт, у якому кожний із жителів має зустрічі з деякими іншими жителями. Чи може в цьому населеному пункті поширитися чутка?

*Вказівка.* Щоб відповісти на запитання задачі, поставимо у відповідність кожному жителю вершину графа. З’єднаємо дві вершини ребром у тому випадку, якщо відповідні жителі спілкуються один з одним. За умови зв’язності отриманого графа на поставлене запитання можна відповісти позитивно. У свою чергу граф буде зв’язним, якщо для нього існує покривне дерево. Отже, щоб розв’язати задачу, потрібно перевірити, чи є в цього графа покривне дерево.

**Задача 2 (Аналіз мережі комунікації).** Є мережа доріг, що зв’язує кожен населений пункт із деяким іншим. Потрібно визначити, чи можна, користуючись цими дорогами, проїхати з кожного населеного пункту в будь-який інший.

*Вказівка.* Для розв’язання задачі поставимо у відповідність кожному населеному пункту і точці перетину наявних доріг вершину графа. Дві вершини з’єднаємо ребром у тому випадку, якщо між пунктами існує дорога. Якщо граф містить покривне дерево, між будь-якими пунктами можна проїхати по існуючій мережі доріг.

**Задача 3 (Проект реконструкції (будівництва) мережі комунікацій мінімальної вартості).** Планується реконструкція мережі доріг, що мають зв’язувати задану кількість населених пунктів. Вартість будівництва або реконструкції доріг між будь-якими двома пунктами відома. Необхідно реконструювати (чи побудувати) мережу доріг так, щоб вартість будівництва була мінімальною і по цій мережі можна було проїхати між будь-якими двома пунктами.

*Вказівка.* Для розв’язання задачі потрібно побудувати мережу, вершини якої відповідають населеним пунктам і точками перетину доріг, а ребра – дорогам. Кожному ребру слід приписати вагу, рівну вартості будівництва (чи реконструкції) цієї ділянки дороги. Проект зводиться до задачі побудови для отриманої мережі покривного дерева мінімальної вартості.

**Задача 4 (Проект реконструкції мережі комунікацій мінімальної вартості з фіксованими зв’язками).** За умовою задачі 3 потрібно реконструювати мережу доріг так, щоб деякі ділянки доріг включилися у створювану мережу незалежно від вартості їхньої реконструкції. Наприклад, з причини зручності користування ними.

*Вказівка.* Проект зводиться до задачі побудови для отриманої мережі покривного дерева мінімальної вартості із заздалегідь зафіксованими зв’язками. Фіксовані зв’язки зафарбовуються безпосередньо перед розв’язанням задачі.

Типові задачі на побудову максимального покривного дерева найчастіше належать до сфери проектування мереж за умови максимізації прибутку від експлуатації мережі.

**Задача 5.** Для мережі, зображеної на рис., побудувати мінімальне і максимальне покривні дерева.



**Задача 6 (Вибір лідерів).** Є колектив людей, спрямований на виконання певного завдання. Потрібно на основі системи переваг членів колективу вибрати серед них лідера.

*Вказівка.* Побудувати мережу з вершинами, що відповідають кожному члену колективу. Дугами відобразити бажання кожного члена колективу бачити своїм лідером того чи іншого члена. Як ваги дуг узяти кількісну оцінку цього бажання (бальну чи яку-небудь іншу). Розв’язання задачі зводиться до побудови максимального орієнтованого лісу для побудованої мережі. Корені виявлених дерев відповідатимуть ймовірним лідерам.\

**Задача 7 (Вибір маршруту, що займає найменший час).** Пасажир звертається за послугами в авіакомпанію. Він бажає потрапити з Києва в Делі за найкоротший час, однак безпересадочних рейсів не існує. Потрібно визначити маршрут, що має запропонувати йому компанія.

*Вказівка.* Щоб вирішити це питання, необхідно побудувати мережу з вершинами в аеропортах, через які може проходити політ. Дуги мають відповідати повітряним лініям між аеропортами. Довжиною дуги слід вважати час польоту плюс час очікування в аеропорту. Якби пасажир ставив умову не найменшого часу в дорозі, а найменшого часу, проведеного в повітрі (наприклад, через самопочуття), то за вагу дуги слід було б узяти тільки час самого польоту. У цілому задача зводиться до відшукання найкоротшого шляху між вершинами, що відповідають Києву і Делі.

**Задача 8 (Розміщення торгового центру).** Адміністрація регіону планує будівництво нового торгового центру, що має обслуговувати кілька районів. Центр вирішено розташувати біля якої-небудь магістралі таким чином, щоб мінімізувати відстань до найбільш віддаленої від нього точки.

*Вказівка.* Для розв’язання задачі райони слід зобразити вершинами графа, автомагістралі – ребрами. Тоді задача зводиться до відшукання центра отриманого графа.

**Задача 9 (Розміщення автозаправної станції).** У цьому ж регіоні прийнято рішення організувати автозаправну станцію таким чином, щоб мінімізувати сумарну відстань від неї до всіх районів.

*Вказівка.* Як і раніше, райони слід зобразити вершинами графа, автомагістралі – ребрами. Задача зводиться до відшукання медіани графа.

**Задача 10 (Розміщення станції техобслуговування).** У межах тієї ж задачі в регіоні вирішено побудувати станцію техобслуговування для надання допомоги водіям, що потрапили в аварію на якій-небудь автомагістралі регіону. Критерієм якості розміщення станції прийнято мінімум максимальної відстані, яку ремонтники мають здолати до можливого місця аварії.

*Вказівка*. Як і в попередній задачі, районам слід поставити у відповідність вершини графа, автомагістралям – ребра. Задача зводиться до відшукання для отриманого графа головного центра.

**Задача 11 (Розміщення складу).** Підприємець, що має мережу магазинів, вирішив побудувати склад для постачання своїх торгових точок, відстань від яких до найбільш віддаленої точки буде мінімальною. Як знайти місце розташування складу?

*Вказівка*. Для розв’язання задачі потрібно побудувати граф, вершинам якого поставити у відповідність магазини, дугам – відрізки доріг, по яких можна переїжджати між магазинами. Задача зводиться до відшукання для отриманого графа головного абсолютного центра.

**Задача 12 (Підбір екіпажів літаків).** Під час Другої світової війни багато льотчиків з інших країн тікали в Англію, щоб поступити на службу в Королівські військово-повітряні сили (ВПС). У той час для виконання польотів потрібно було два пілоти. Основною вимогою до екіпажу була наявність спільної мови. Задача полягала в тому, щоб у повітрі одночасно перебувала максимальна кількість літаків.

*Вказівка*. Побудувати граф, кожна вершина якого відповідає пілоту ВПС. Дуги з’єднують тих пілотів, що можуть літати разом, тобто знають одну й ту ж мову. Будь-яке паросполучення цього графа являє собою припустиму множину літаків, що одночасно можуть перебувати у повітрі. Задача зводиться до знаходження максимального паросполучення.

**Задача 13 (Розміщення в готелі).** У готель, в якому вільні лише двомісні номери, прибула велика група туристів. Задача адміністрації – розмістити їх таким чином, щоб в одному номері поселити або тільки родичів, або осіб однієї статі. Як це зробити, щоб зайнятими виявилися мінімум номерів?

*Вказівка*. Побудувати граф, кожна вершина якого відповідає туристу. Дугами з’єднати осіб, що можуть проживати в одному номері. Задача зводиться до знаходження для отриманого графа паросполучення мінімальної потужності.

**Задача 14 (Обслуговування перекладачами).** Конференцію, на яку прибула велика кількість різномовних учасників, обслуговує обмежена кількість перекладачів. Кожен перекладач володіє кількома мовами. Потрібно так скомплектувати групи з учасників конференції, щоб задіяти мінімальну кількість перекладачів.

*Вказівка*. Побудувати граф, вершини якого відповідають учасникам конференції і перекладачам. Дугами попарно з’єднати учасників і перекладачів, прийнятних один для одного. Задача звелася до побудови на отриманому графі паросполучення мінімальної потужності.

**Задача 15 (Організація комітету**). Деякий загальнонаціональний комітет має бути сформований таким чином, щоб до нього входило принаймні по одному представнику від кожної з наявних у країні 15 областей і принаймні по одному представнику кожної із зареєстрованих у країні 40 партій. Свої послуги для участі в роботі комітету запропонувало 60 чоловік, для кожного з яких відомо, яку область він представляє і від імені якої партії виступає. Необхідно визначити склад комітету, що включає найменшу кількість претендентів і задовольняє перелічені вище вимоги.

*Вказівка.* Побудувати граф, у якому кожна область або край і кожна партія представлені однією вершиною. Таким чином, граф матиме кількість вершин, що дорівнює сумі числа партій і областей. Нехай кожна людина, котра виявила бажання брати участь у роботі комітету, зображується дугою графа, яка з’єднує вершини, що відповідають області, у якій вона проживає, і партії, до якої вона належить. Будь-який комітет, що задовольняє всі географічні і партійні вимоги, відповідає якому-небудь покриттю цього графа. Шуканий комітет з найменшим числом членів відповідає покриттю графа з найменшою кількістю дуг, тобто покриттю мінімальної потужності.

**Задача 16 (Проблема посередницького агентства).** Посередницьке агентство створює можливість зустрічі кожному клієнту, що звернувся до нього, принаймні з одним прийнятним для нього виробником товару. Розмір витрат агентства на організацію кожної зустрічі є різним залежно від конкретних заходів, необхідних для організації (витрати часу агента, витрати коштів агентства, час і місце зустрічі клієнтів, система уподобань учасників зустрічі тощо).

Як агентство може з мінімальними витратами виконати всі зобов’язання перед клієнтами?

*Вказівка*. Для розв’язання задачі слід побудувати граф, у якому кожному клієнту відповідає вершина і кожній сумісній парі – дуга. Кожній дузі потрібно приписати вагу, що дорівнює витратам на від-повідну зустріч.

Кожне покриття цього графа являє собою спосіб організації принаймні однієї прийнятної зустрічі для кожного клієнта.

У задачі потрібно знайти для агентства покриття з найменшими загальними витратами, інакше кажучи – покриття з мінімальною вагою.

**Задача 17 (Задача бюро знайомств).** Останнім часом значного поширення набули організації, що підшукують пари людей, які задовольняють один одного відповідно до певних вимог. Задача бюро – надати кожному клієнту якнайбільше варіантів вибору. Яку стратегію роботи йому слід вибрати?

*Вказівка*. Слід побудувати граф, у якому кожному клієнту відповідає вершина і кожній сумісній парі – дуга. Кожній дузі потрібно приписати вагу, що дорівнює витратам на відповідну зустріч.

Будь-яке покриття цього графа являє собою спосіб організації принаймні однієї зустрічі, прийнятної для кожного клієнта. Бюро потрібно знайти покриття з мінімальною вагою.

**Задача 18 (Вибір оптимального туристичного маршруту).** Турист збирається на автомобілі відвідати ряд цікавих з його погляду місць, проїхавши при цьому мінімальну відстань. Який маршрут він має вибрати?

Ця задача може розв’язуватися в різних різновидах. Наприклад, з погляду туристичної фірми можна розв’язувати задачу розробки різних екскурсійних маршрутів, що відповідають певним вимогам, пов’язаним з їх довжиною або часом обходу запланованих місць.

*Вказівка*. Як вершини графа слід узяти пункти всіх вибраних визначних пам’яток, як ваги – довжини ділянок доріг. Тоді сформульована задача відповідає загальній задачі комівояжера на отриманому графі.

**Задача 19 (Обробка виробу на кількох верстатах).** У цеху з *п* різними верстатами виріб має бути оброблений на кожному з верстатів у деякій довільній послідовності. При цьому час переналагоджування, необхідний для передачі виробу від верстата *х* до верстата *у*, дорівнює *а*(*х, у*). Яку послідовність обробки на кожному з верстатів вибрати, щоб мінімізувати загальний час обробки виробу?

*Вказівка*. Ця задача розв’язується як задача комівояжера на графі, кожна вершина якого відповідає верстату, а кожна дуга (*х*, *у)* має вагу *а(х, у).*

**Задача 20 (Тактика кур’єра).** Кур’єр банку щодня має доставляти листи з центрального офісу в усі інші відділення банку. Зазвичай, коли він приносить листи в яке-небудь відділення, йому вручають додаткову кореспонденцію, що має бути доставлена в наступне на його шляху відділення. Негативно ставлячись до цієї роботи, кур’єр хотів би довідатися, у якому порядку йому потрібно відвідувати пункти призначення, щоб мінімізувати загальну кількість листів, що розносяться додатково.

*Вказівка*. Кур’єр має розв’язати свою задачу шляхом розв’язання загальної задачі комівояжера на графі, вершини якого відповідають відділенням банку, а дуги – можливим переїздам між ними.

Дуги при цьому слід інтерпретувати в такий спосіб. Нехай у цьому графі довжина дуги *(х, у)* дорівнює прогнозованій кількості додаткових листів, що кур’єру довелося б перевезти з відділення *х* у відділення *у.*

Припустимо, що кур’єр хоче дістати підвищення на службі і для цього має максимально збільшити загальну кількість листів, що доставляються додатково. У цьому випадку він міг би, звичайно, безупинно переміщатися між усіма відділеннями банку й у підсумку доставляти практично необмежену кількість листів. Однак припустимо, що йому дозволяється кожне відділення відвідувати рівно один раз. Нехай М дорівнює деякому дуже великому числу і нехай довжина кожної дуги тепер дорівнює М мінус її початкова довжина. Якщо є *п* відділень банку, то кожен гамільтонів контур графа включає *п* дуг.

Тепер задача кур’єра може розв’язуватися шляхом пошуку мінімального за довжиною гамільтонового контуру з *п* дуг.