

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 «Розв'язання нелінійних рівнянь»

Завдання 2.1. Розв'язати рівняння за допомогою вбудованих функцій Mathcad (табл. 2.1). Побудувати графік.

1. Аналітичне розв'язання рівнянь.

Для аналітичного розв'язання рівнянь в системі MathCad є спеціальний оператор **Solve (Розв'язати)** панелі Symbolic (Символьні).

Для того, щоб знайти корені рівняння за допомогою оператора Solve потрібно:

1. Вводимо оператор Solve з панелі Symbolic.
2. В лівому маркері задаємо вид рівняння, яке потрібно розв'язати. В якості „=” потрібно ввести знак рівності з панелі Boolean (Ctrl+”=”).

Приклад. $x^2-2x-3=0$. Для цього: Вводимо оператор Solve. Знак рівності вводимо з панелі Boolean

$$x^2 - 2 \cdot x - 3 = 0 \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Чисельне розв'язання рівнянь.

Функція root

На практиці часто приходиться мати справу з рівняннями, які містять в собі різного роду функції, і які розв'язати символічно практично неможливо. На практиці такі рівняння розв'язують підбором і підстановкою, а в MathCad для цього існує чисельний метод розв'язання рівнянь.

Для чисельного пошуку розв'язків алгебраїчних рівнянь з одним невідомим, в MathCad існує спеціальна функція **root** (корінь). Знаходиться в Функціях, в розділі **Solving**. Якщо визначена лише одна точка наближення до кореня, пошук розв'язку буде здійснюватися так званим методом січних. Якщо ж задано інтервал, на якому локалізовано розв'язок, то його пошук буде здійснено за із застосуванням методу поділу навпіл (або методу Больцано).

Якщо потрібно знайти корінь деякого рівняння, і відомо інтервал, на якому локалізований цей корінь, то найкраще використовувати функцію **root** з чотирьма аргументами: **root (f(x),x,a,b)**, де **f(x)** – функція, що визначає рівняння, **x** – змінна, **a,b** – межі інтервалу локалізації.

Обов'язковою умовою є те, що:

- значення функції на кінцях інтервалів повинні бути з протилежними знаками.
- функція **f(x)** повинна бути обмеженою і неперервною на проміжку (a,b).
- На проміжку локалізації повинен бути лише один корінь.

Функція polyroots

У тому випадку, коли рівнянні задане алгебраїчним поліномом, в MathCad є спеціальна функція пошуку коренів **polyroots (V)**. Де **V** – вектор, що складений

з коефіцієнтів полінома. $V=(x^0, x^1, x^2, \dots, x^n)$ де n – показник степеня. ((в MathCad записуємо зверху вниз від 0 до n)). Відповідь видається у вигляді вектора, що містить як дійсні, так і комплексні корені. Знаходиться в Функціях, в розділі **Solving**.

Приклад. Знайти корені рівняння такого виду: $x^4+x^3+x-10=0$

$$x^4 + x^3 + x - 10 = 0$$

$$\text{koef} := \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots(koef)} = \begin{pmatrix} -2.178 \\ -0.162 + 1.74i \\ -0.162 - 1.74i \\ 1.503 \end{pmatrix}$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $(x^2+x-3)^2+(x-10)^3$.

Розв'яжемо рівняння за допомогою функції **polyrootsi** для створення вектора з коефіцієнтів використаємо оператор **Coeffs**.

$$F(x) := (x^2 + x - 3)^2 + (x - 10)^3$$

$$V := F(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -991 \\ 294 \\ -35 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{polyroots}(V) = \begin{pmatrix} -10.196 \\ 1.69 + 4.755i \\ 1.69 - 4.755i \\ 3.816 \end{pmatrix}$$

3. Графічне розв'язання рівнянь.

Графічне розв'язання рівняння – це метод розв'язання, який заключається у визначенні по графіку функції, при яких величинах аргументу, дана функція приймає значення рівне нулю. Графічний метод є незамінним у тому випадку, коли рівняння неможливо розв'язати ні аналітично, ні чисельно. Це зазвичай трапляється у тому випадку, коли функції приймають не неперервний, а дискретний набір значень. Для розв'язання будуємо графік функції, та за допомогою інструментів **Zoom** та **Trace** визначаємо потрібні нам значення.

Варіанти завдань.

Таблиця 2.1

ЗАДАНИЕ 5.2. Найти корни полинома

№	уравнение	№	уравнение
1	$x^4 - x - 1 = 0; \quad x^3 + x - 3 = 0.$	16	$x^4 - x - 1 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0.$
2	$2x^4 - 9x^2 - 60x + 1 = 0; \quad x^3 - 2x + 2 = 0.$	17	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0; \quad x^3 + 3x - 1 = 0.$
3	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0; \quad x^3 + 2x^2 + 2 = 0.$	18	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0; \quad x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0.$
4	$2x^4 - x^2 - 10 = 0; \quad x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0.$	19	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0; \quad x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0.$
5	$3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0; \quad x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0.$	20	$2x^4 - x^2 - 10 = 0; \quad x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0.$
6	$x^4 - 18x^2 + 6 = 0; \quad x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0.$	21	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0.$
7	$x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0; \quad x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0.$	22	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0; \quad x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0.$
8	$x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0; \quad x^3 + 4x - 6 = 0.$	23	$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0; \quad x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0.$
9	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0; \quad x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0.$	24	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0; \quad x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0.$
10	$3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0.$	25	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0; \quad x^3 + 2x + 4 = 0.$
11	$2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0.$	26	$x^4 - x - 1 = 0; \quad x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0.$
12	$2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0.$	27	$2x^4 - x^2 - 10 = 0; \quad x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0.$
13	$x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0; \quad x^3 + 3x + 1 = 0.$	28	$3x^4 + 8x^3 + 10 = 0; \quad x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0.$
14	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0.$	29	$x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0. \quad x^4 - 18x^2 + 6 = 0;$
15	$2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0; \quad x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0.$	30	$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0; \quad x^3 - 0,1x^2 + 0,3x - 0,6 = 0.$

Завдання 2.2.

1. Побудувати графіки рівнянь;
2. Знайти корені рівнянь методами:
 - дихотомії,
 - хорд,
 - дотичних,
 - простих ітерацій з точністю $\epsilon=0,0001$ (табл. 2.2, табл. 2.3).

Допоміжні матеріали: <http://blog.kislenko.net/show.php?id=1018>

Метод дихотомії.

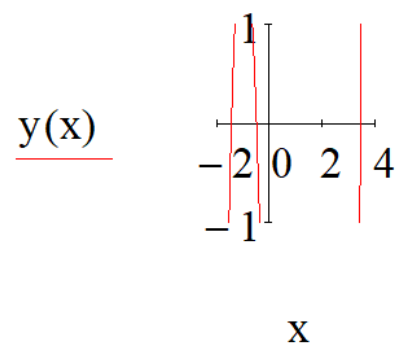
$$y(x) := 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 5$$

$$\text{mpd}(a, b, \epsilon) := \left| \begin{array}{l} L \leftarrow b - a \\ \text{while } |L| > \epsilon \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow \frac{a + b}{2} \\ b \leftarrow c \text{ if } y(a) \cdot y(c) < 0 \\ a \leftarrow c \text{ otherwise} \\ L \leftarrow b - a \end{array} \right. \\ \quad c \end{array} \right.$$

$$\text{mpd}(1, 4, 0.001) = 3.45$$

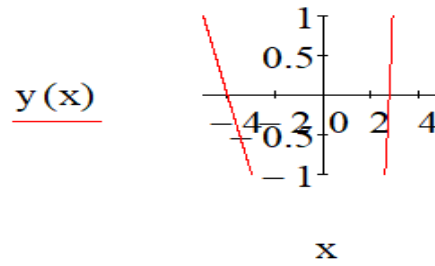
$$\text{mpd}(-1, -0.01, 0.001) = -0.5$$

$$\text{mpd}(-2, -1, 0.001) = -1.45$$



Метод Ньютона.

$$y(x) := 3^{x-1} - 4 - x$$



```

newton(y , x , ε) := while 1
                    |
                    |   c ← x -  $\frac{y(x)}{\frac{d}{dx}y(x)}$ 
                    |   ( break ) if |c - x| < ε
                    |   x ← c
                    | c
    
```

$$\text{newton}(y, -4, 0.001) = -3.996$$

$$\text{newton}(y, 2.5, 0.001) = 2.736$$

Таблиця 2.2

№ п/п	Трансцендентні рівняння	№ п/п	Трансцендентні рівняння
1	$x - \text{tg}(x) + 1 = 0$	16	$\ln(x + 1) + x - 1 = 0$
2	$\lg 0,1x + 1 - 3x + 5 = 0$	17	$x - \cos(\pi x) = 0$
3	$e^x - 5x = 0$	18	$x - \sin(x) - 0,25 = 0$
4	$\lg 0,1x + 1 - 5x - 6 = 0$	19	$e^x + x = 0$
5	$5x - 8\ln(x + 1) - 8 = 0$	20	$x - \sin(\pi x) = 0$
6	$x - \ln(x - 1) - 9,75 = 0$	21	$2x - \sin(x) - \cos(x) = 0$
7	$e^x + \ln(x + 1) - 10x = 0$	22	$x - \lg(x + 1) - 0,9 = 0$
8	$\lg 0,1x + 1 - 1/x = 0$	23	$x - e^x + x - 10 = 0$
9	$2\lg 0,1x + 1 - x/2 + 1 = 0$	24	$e^x + 4\sin(x) - x = 0$
10	$\lg 0,1x + 1 - 0,5x + 6 = 0$	25	$x * e^x - \sin(x) - x = 0$
11	$x - \cos(x) = 0$	26	$3\sin(x) + \cos(x) = 0$
12	$1,8x - \sin(10x) = 0$	27	$x - \text{tg}(x) = 0$
13	$x - 20\sin(x) = 0$	28	$1,8x - \text{ctg}(10x) = 0$
14	$2x - \ln(x + 1) + 1 = 0$	29	$x - 20\text{tg}(x) = 0$
15	$3x - \cos(x) - 1 = 0$	30	$3x - \text{ctg}(x) - 1 = 0$

Таблиця 2.3

Варіант	Завдання
1.	$3x^4 + 6x^3 - 9x^2 = 0$.
2.	$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.
3.	$x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.
4.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
5.	$x^3 + 3x^2 - 10x = 0$.
6.	$x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0$.
7.	$x^3 + x^2 - 10x + 8 = 0$.
8.	$x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.
9.	$2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 24x = 0$.
10.	$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$.