Тема 2. ВІДНОШЕННЯ

§1 Кортежі

Нехай задана деяка множина X.

Візьмемо множину натуральних чисел $N_n=\{1,2,\ldots,n\}$ і задамо деякі відображення множини N_n у множину X (числу 1 ставиться у відповідність елемент $x_1 \in X$, числу 2 – елемент $x_2 \in X$, …, числу n – елемент $x_n \in X$).

Отримуємо набір $x_1, x_2, \ldots, x_n$ елементів множини X, в якому деякі елементи можуть повторюватись декілька разів (при відображенні N_n у X може трапитись, що різним числам відповідає один і той же елемент множини X). Розташовуючи елементи цього набору за порядком номерів, отримуємо **кортеж ($x_1,\ldots,x_n$)** довжини n, який складено з елементів множини X. Елемент x_k , $1<=k<=n$, називається ***k*-тою компонентою** або ***k*-тою координатою кортежу** $(x_1, \ldots, x_n)$.

Два кортежі $(x_1,\ldots,x_n)$ і $(y_1,\ldots,y_n)$ вважаються **рівними**, якщо вони мають однакову довжину і їх компоненти з однаковими номерами рівні.

Будемо позначати кортежі грецькими літерами. Компонентами кортежу можуть бути множини, кортежі і т.д.

Приклад. 1) Кортежі $\alpha=(3^2,4^2,5^2)$ і $\beta=(\sqrt{81},\sqrt{256},\sqrt{625})$ рівні, $\alpha=\beta$.

2) Кортежі (a,b,c) і (b,a,c,a) не рівні, так як мають різну довжину.

3) Кортежі (1,2,3) і (2,1,3) мають однакову довжину і складаються з однакових елементів, але вони не рівні, так як порядок їх компонент не співпадає.

4) Кортежі $\alpha=(\{a,b\},c,d)$ і $\beta=(\{b,a\},c,d)$ рівні, так як множини $\{a,b\}$ і $\{b,a\}$ рівні (для множин порядок елементів не грає ролі).

5) Кортежі $\alpha=((a,b),c,d)$ і $\beta=((b,a),c,d)$ різні, так як різні кортежі (a,b) і (b,a).

§2 Декартовий добуток

Узагальнимо поняття кортежу і будемо розглядати такі кортежі, у яких компоненти належать різним множинам.

Нехай задані множини X_1, X_2, ..., X_n. Розглянемо такі кортежі $\alpha=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ елементів цих множин, що $x_k\in X_k$, $1\le k\le n$.

Множина, що складається з таких кортежів, називається **декартовим добутком множин** X_1, X_2, ..., X_n і позначається:

$$X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\left\{(x_1,\ldots,x_n)\ \middle|\ x_1\in X_1,\ldots,x_n\in X_n\right\}.$$

Приклад. $X_1=\{a,b\}$, $X_2=\{1,2,3\}$, то

$$X_1\times X_2=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\},$$

$$X_2\times X_1=\{(1,a),(2,a),(3,a),(1,b),(2,b),(3,b)\}.$$

Таким чином, множини $X_1\times X_2$ і $X_2\times X_1$ різні: $X_1\times X_2\neq X_2\times X_1$.

Прийнято вважати, що якщо хоча б одна з множин X_1, X_2 порожня, то їх декартовий добуток порожній:

$$X_1 \times \varnothing = \varnothing \times X_2 = \varnothing.$$

Якщо $X_1 = X_2$, то декартовий добуток $X_1 \times X_1$ називається **декартовим квадратом множини** X_1 і позначається:

$$X_1 \times X_1 = X_1^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_1\}$$

В якості універсальної множини для множини $X_1 \times X_2$ є множина:

1) $U \times U$, якщо $X_1 \subset U$ *і* $X_2 \subset U$;

2) $U_1 \times U_2$, якщо $X_1 \subset U_1$ *і* $X_2 \subset U_2$.

Властивості декартового добутку

Операція декартового добутку не є асоціативною та комутативною, тобто (A×B)×C≠A×(B×C), A×B≠B×A.

Справедлива така тотожність відносно операції перетину (для об'єднання не вірно):

$$(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D).$$

Дистрибутивність буде виконуватись для наступних операцій:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$
$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$
$$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C),$$
$$\overline{(A \times B)} = (\overline{A} \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times B) \cup (A \times \overline{B}).$$

Для підмножин будуть вірні твердження:

- Якщо $A \subseteq B$, то $A \times C \subseteq B \times C$,
- Якщо $A, B \neq \emptyset$, то $A \times B \subseteq C \times D \iff A \subseteq C \wedge B \subseteq D$.

Знайдемо число елементів декартового добутку $X \times Y$ у випадку, коли $|X|=k$, а $|Y|=m$: $X=\{(x_1, \ldots, x_k)\}$, $Y=\{(y_1, \ldots, y_m)\}$.

Декартовий добуток $X \times Y$ складається з кортежів (x_i, y_j), які можна розташувати наступним чином:

$$(x_1,y_1), (x_1,y_2), \ldots, (x_1,y_m);$$

$$(x_2,y_1), (x_2,y_2), \ldots, (x_2,y_m);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(x_k,y_1), (x_k,y_2), \ldots, (x_k,y_m).$$

Ми отримаємо k рядків з m пар в кожному. Звідси випливає, що загальна кількість кортежів, що містяться в множині X×Y, дорівнює $k \cdot m$, тобто $n(X) \times n(Y)$. Має місце формула:

$$n(X \times Y) = n(X) \times n(Y)$$ - **правило добутку.**

$$n(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m) = n(X_1) \times n(X_2) \times \ldots \times n(X_m)$$

§3 Бінарні відношення

Підмножина $R \subset X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ називається n-місним відношенням на множині $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$.

Бінарним відношенням між елементами множин $x \in X$ та $y \in Y$ називають підмножину R множини $X \times Y$ $(R \subset X \times Y)$. Позначаються: $(x, y) \in R$ або xRy.

Областю визначення бінарного відношення R називають множину $\delta_R = \{x | \text{існує } y, \text{таке, що } (x, y) \in R\}$

Областю значень бінарного відношення R називають множину $\rho_R = \{y | \text{існує } x, \text{таке, що } (x, y) \in R\}$

Доповненням бінарного відношення R між елементами X та Y вважається множина $-R = \bar{R} = (X \times Y) \backslash R$.

Оберненим відношенням для бінарного відношення R називається множина $R^{-1} = \{(x, y) | (y, x) \in R\}$.

Образом множини *X* відносно *R* називають множину R^{-1}(X).

Добутком (композицією) відношень $R_1 \subseteq X \times Y$ та $R_2 \subseteq Y \times Z$ називається відношення

$R_1 \circ R_2 = \{(x, y) | \text{існує } z, \text{ таке, що } (x, z) \in R_1 \text{ та } (z, y) \in R_2\}$.

Приклад. $P = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,d)\}$, а $Q = \{(a,b),(b,c),(c,a),(c,d)\}$, то

$$P \circ Q = \{(a,c),(a,a),(a,d),(b,b)\},$$

$$Q \circ R = \{(a,a),(b,d),(c,b),(c,c)\}.$$

Властивості обернених відношень:

1) $\left(R^{-1}\right)^{-1} = R$;
2) якщо $R \subset S$, то $R^{-1} \subset S^{-1}$;
3) $\overline{R}^{-1} = \overline{R^{-1}}$;
4) $\left(R \cap S\right)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
5) $\left(R \circ S\right)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

§4 Способи задання відношень

1) **Матричний спосіб.** Введемо символ $\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, xRy \\ 0, x\bar{R}y \end{cases}.$

Бінарне відношення задається двовимірною таблицею – матрицею суміжності, якій взаємоднозначно співставляють елементи множини X та Y. Кожна клітинка (i, j) відповідає елементам множини $X \times Y$. Якщо xRy, то в клітинці (i, j) ставлять одиницю, якщо $x\bar{R}y$ - нуль.

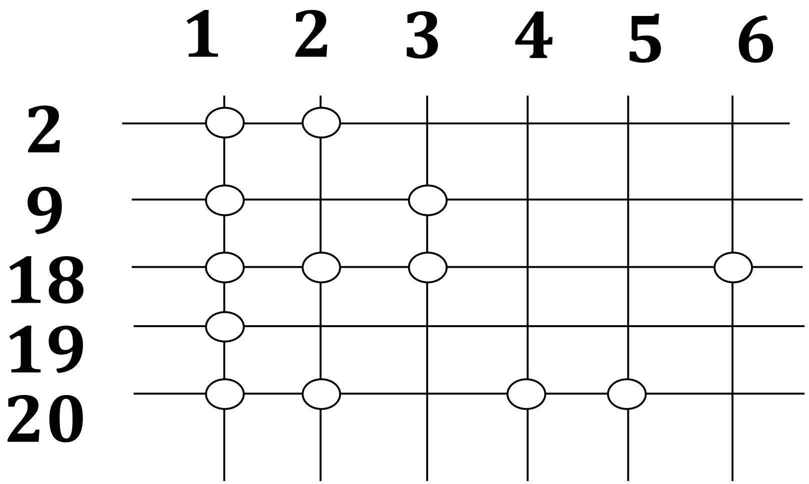
Приклад. Задати бінарне відношення на множинах матричним способом

$$\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6\}, \qquad \mathrm{B} = \{2,9,18,19,20\};$$

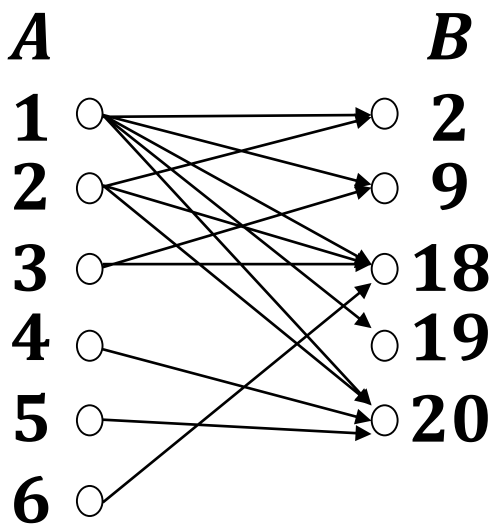
$$R = \{(a, b) | a \in A, b \in B; a - \text{дільник } b\}$$

$$\mathrm{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathbf{2} \\ \mathbf{9} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{19} \\ \mathbf{20} \end{array} \end{array}$$

2) **Табличний спосіб.** Для табличного задання відношення $R \subset X \times Y$ проводять вертикалі, кожну з яких позначають деяким елементом з X і горизонталі, позначаючи їх елементами з Y. Потім точками позначають перетин тих прямих, які задовольняють відношення R.



3) **Стрілочне зображення.** При стрілочному зображенні відношення $R \subset X \times Y$ елементи X та Y позначаються точками, після чого спрямованими від x до y стрілками, з’єднуються ті і тільки ті з них, де $x \in X$ та $y \in Y$, для яких $(x, y) \in R$.

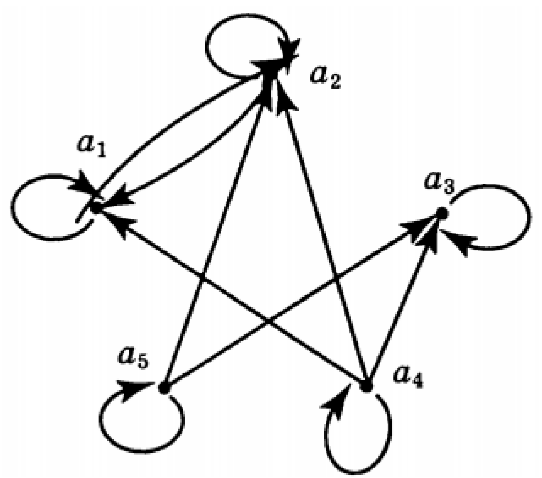


4) **Фактор-множина.** Сукупність всіх елементів $y \in Y$, для яких $(x, y) \in R$, називають **перерізом (перетином)** відношення R за елементом *x*. Позначують R_x.

Сукупність всіх перерізів відношення R за елементами множини *X* називають **фактором** або **фактор-множиною** множини Y.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ \{2,9,18,19,20\} & \{2,18,20\} & \{9,18\} & \{20\} & \{20\} & \{18\} \end{pmatrix}.$$

5) ***Графічний спосіб.*** Цей спосіб передбачає побудову ***графа*** відношення.



§5 Операції над відношеннями

Оскільки відношення є множинами, елементами яких є впорядковані пари, то над ними можна виконувати всі відомі операції над множинами.

$P = \{(a,b),(a,c),(b,a),(c,d)\}$, а $Q = \{(a,b),(b,c),(c,a),(c,d)\}$, то

$$P \cup Q = \{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,d)\};$$

$$P \cap Q = \{(a,b),(c,d)\};$$

$$P \setminus Q = \{(a,c),(b,a)\};$$

$$P \oplus Q = \{(a,c),(b,a),(b,c),(c,a)\}.$$

§6 Властивості бінарних відношень

Нехай $C = A \times B, aRb, R \subseteq C$.

1) ***Рефлексивність.*** Якщо для довільного елементу *c* виконується cRc, тобто елемент $c \in C$ знаходиться у відношенні R до самого себе, відношення R називається *рефлексивним.*

Приклад. $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}$ рефлексивне на множині $A = \{1,2,3,\}$, проте не рефлексивне на множині $A' = \{1,2,3,4\}$.

- $=$"дорівнює"
- $\leq$"менше або дорівнює"
- $\geq$"більше або дорівнює"
- $\subseteq$"є підмножиною або дорівнює"

2) ***Антирефлексивність.*** Якщо із $c_1 R c_2$ слідує, що $c_1 \neq c_2$, відношення R називають *антирефлексивним.*

Приклад. Відношення $S = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2)\}$ антирефлексивне у множині $A = \{1,2,3,\}$.

- $\neq$ «не рівно»
- $<$ «менше»
- $>$ «більше»
- $\subset$ «є підмножиною»
- "бути старшим" у множині людей
- "бути батьком"

Порожнє відношення прийнято вважати як рефлексивним, так і антирефлексивним.

Якщо відношення є ні рефлексивним, ні антирефлексивним, то його називають ***не рефлексивним***.

Приклад. Відношення $P = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,3)\}$ не рефлексивне, оскільки елемент *2*, на відміну від всіх інших, не перебуває у відношенні сам з собою $\left((2,2) \notin P\right)$.

- $\neq$ "не дорівнює"
- $<$ "менше"
- $>$ "більше"
- $\subset$ "є підмножиною"

3) ***Симетричність.*** Якщо для пари $c_1 R c_2$ слідує, що $c_2 R c_1$, то відношення R називають *симетричним*.

Приклад. Відношення $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)\}$ симетричне.

Симетричними є відношення паралельності, перпендикулярності, подібності, універсальне відношення тощо.

Для симетричного відношення його графік симетричний відносно діагоналі – бісектриси координатного кута.

4) ***Антисиметричність.*** Якщо із $c_1 R c_2$ та $c_2 R c_1$ слідує $c_1 = c_2$, відношення R називають *антисиметричним*.

Приклад. Відношення $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(4,4)\}$ антисиметричне: є пари (c_1, c_1) і немає пар $(c_1, c_2), (c_2, c_1)$. Антисиметричними є відношення включення, “менше”, “більше”, “менше дорівнює” тощо.

5) ***Асиметричність.*** Якщо із $c_1 R c_2$ не виконується $c_2 R c_1$, то відношення R називають *асиметричним*.

Приклад. Відношення $S = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ асиметричне. Асиметричними є відношення включення, “менше”, “більше” тощо.

Відношення рівності, діагональне та порожнє вважають як симетричними, так і антисиметричними.

6) ***Транзитивність.*** Якщо $c_1 R c_2$ та $c_2 R c_3$ слідує, що $c_1 R c_3$, то відношення R називають *транзитивним*.

Приклад. Відношення $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(4,4)\}$ транзитивне.

Приклади транзитивних відношень

- **Відношення часткового порядку**:
  - строга нерівність : $(a < b),\ (b < c)\ \Rightarrow\ (a < c)$
  - нестрога нерівність : $(a <= b),\ (b <= c)\ \Rightarrow\ (a <= c)$
  - **включення підмножини:**
    - строга підмножина $(A \subset B\,; and; B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
    - нестрога підмножина $(A \subseteq B\,; and; B \subseteq C) \Rightarrow (A \subseteq C)$
  - **подільність:**
    - $(a \mid b),\ (b \mid c)\ \Rightarrow\ (a \mid c)$
    - $(a \vdots b),\ (b \vdots c)\ \Rightarrow\ (a \vdots c)$
- **Рівність** : $(a = b),\ (b = c) \Rightarrow\ (a = c)$
- **Еквівалентність** : $(a \Leftrightarrow b),\ (b \Leftrightarrow c)\ \Rightarrow\ (a \Leftrightarrow c)$
- **Імплікація** : $(a \Rightarrow b),\ (b \Rightarrow c)\ \Longrightarrow\ (a \Rightarrow c)$
- **Паралельність** : $(a \parallel b),\ (b \parallel c)\ \Rightarrow\ (a \parallel c)$
- Відношення подібності геометрическиx фігур
- Бути предком.

7) ***Антитранзитивність.*** Якщо $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_2$ та $\mathrm{C}_2 R \mathrm{C}_3$ виходить, що не виконується $\mathrm{C}_1 R \mathrm{C}_3$, то відношення R називають *антитранзитивним*: для будь-яких трійок a, b, c відсутня транзитивність.

Приклад.

- Відношення перемогти в турнірах «на виліт»: якщо А переміг гравця В, а В переміг гравця С, то А не грав з С, отже, не міг його перемогти.
- Бути сином (батьком, бабусею).
- Гра «Камінь, ножиці, папір». Камінь перемагає ножиці, ножиці виграють у паперу, але камінь програє паперові і т. д.

Приклади нетранзитивних відношень:

- Харчовий ланцюжок: це відношення не завжди є транзитивним (приклад — вовки їдять оленів, олені їдять траву, але вовки не їдять траву).
- Бути переважніше ніж. Якщо ми хочемо яблуко замість апельсина, а замість яблука ми б хотіли кавун, то це не значить, що ми віддамо перевагу кавуну.
- Бути другом.
- Бути колегою по роботі.
- Бути підлеглим. Наприклад, у часи феодального ладу в Західній Європі була в ходу приказка: «Васал мого васала — не мій васал».
- Бути схожим на іншу людину.

§7 Спеціальні бінарні відношення

Віднóшення еквівалéнтності (~) на множині — це бінарне відношення для якого виконуються наступні умови:

1. Рефлексивність: ~ для будь-якого в ,
2. Симетричність: якщо ~, то ~,
3. Транзитивність: якщо ~та ~, то ~.

Рефлексивне, транзитивне та антисиметричне відношення на множині C називають *відношеннями часткового порядку*, позначається $c_1 \leq c_2$, c_1,c_2 $\in$C.

Частковий порядок $\leq$ на множині C називається *лінійним*, якщо довільні елементи C порівняльні по $\leq$.

Антирефлексивне, асиметричне, транзитивне відношення називають *відношенням строгого порядку,* позначається $c_1 < c_2$, $c_1, c_2 \in C$.

Приклад. Які з наведених відношень на множині студентів 1-го курсу є відношеннями еквівалентності?

а) a і b однакового віку; б) a і b знайомі; в) a і b студенти різних груп.

Розв'язання.

а) aRb, bRa; якщо aRb та bRc, то aRc; aRa, отже R – відношення еквівалентності;

б) aRb та bRc, не слідує, що обов'язково aRc, отже дане відношення не являється еквівалентним.

в) aRa - не виконується, отже відношення не є еквівалентним.