

В. П. Денисюк, В. К. Репета,  
К. А. Гаєва, Н. О. Клешня

---

# Вища МАТЕМАТИКА

**МОДУЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ НАВЧАННЯ**

**У чотирьох частинах**

*Частина 3*

*Третє видання, стереотипне*

*Рекомендовано  
Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів  
вищих навчальних закладів*

Київ  
Видавництво Національного авіаційного університету  
«НАУ-друк»  
2009

УДК 51(075.8)  
ББК В 11я7  
В 558

*Розповсюджувати та тиражувати  
без офіційного дозволу НАУ забороняється*

*Рецензенти:*

**В. І. Нікішов**, д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України  
(Інститут гідромеханіки НАН України)

**Н. О. Вірченко**, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
(Національний технічний університет України «КПІ»)

**В. Ф. Мейш**, д-р фіз.-мат. наук, проф.  
(Національний аграрний університет)

*Гриф надано Міністерством освіти і науки України  
(Лист № 14/18.2-1389 від 21.06.2005).*

**Вища математика.** Модульна технологія навчання : навч.  
В 558 посіб. : У 4 ч. Ч. 3./ В. П. Денисюк, В. К. Репета, К. А. Гаєва,  
Н. О. Клешня. — 3-тє вид., стереотип. — К. : Вид-во Нац.  
авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. — 444 с.

ISBN 978–966–598–515–0

ISBN 978–966–598–516–7 (частина 3)

У посібнику запропоновано модульну технологію вивчення вищої математики.

Викладено основні розділи курсу вищої математики (ряди, кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли, теорія поля, теорія функції комплексної змінної, операційне числення та чисельні методи), які традиційно вивчаються на другому курсі.

Навчальний матеріал поділено на логічно завершені розділи — модулі, які складаються з тем (мікромодулів). Кожна тема містить стислі теоретичні відомості, практичну частину, у якій наведено приклади виконання типових вправ, завдання для аудиторної та самостійної роботи з відповідями, а також індивідуальні тестові завдання.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів.

УДК 51(075.8)  
ББК В 11я7

ISBN 966–598–515–0  
ISBN 966–598–516–7 (частина 3)

© Денисюк В. П., Репета В. К.,  
Гаєва К. А., Клешня Н. О., 2006–2009  
© НАУ, 2009

## ВСТУП

---

У посібнику запропоновано модульну технологію вивчення курсу вищої математики на другому курсі для студентів інженерних спеціальностей.

Пропонований матеріал поділяється на п'ять модулів:

- 1) ряди;
- 2) кратні, криволінійні, поверхневі інтеграли та теорія поля;
- 3) теорія функції комплексної змінної;
- 4) операційне числення;
- 5) чисельні методи.

Кожен модуль містить загальні положення, в яких сформульовані теми розділу, базисні поняття, основні задачі, вимоги до теоретичних та практичних знань і вмій студентів, якими вони повинні володіти після вивчення даного модуля.

Тема (мікромодуль) містить:

- 1) теоретичну частину;
- 2) практичну частину;
- 3) індивідуальні тестові завдання.

У теоретичній частині викладено у стислій формі необхідний матеріал для опанування розглядуваної теми (конспект лекції). Найважливіші питання обгрунтовані ретельно. До всіх тем подано посилання на літературу, що дасть можливість студентам у разі необхідності більш детально і ґрунтовно опанувати теоретичний матеріал.

Практична частина містить приклади розв'язання типових задач, які ілюструють теоретичний матеріал, а також вправи з відповідями для аудиторної і самостійної роботи студентів.

Наприкінці теми вміщено індивідуальні тестові завдання, які слугують для контролю засвоювання студентами матеріалу даного розділу. На кожному практичному занятті студент здає індивідуальне завдання попереднього мікромодуля, виконане у письмовій формі.

Варіанти тестових завдань є основою для формування модульних контрольних робіт, які проводяться безпосередньо після вивчення кожного модуля, а також для формування завдань семестрового контролю.

Враховуючи різну кількість годин, відведених за планом для вивчення вищої математики студентам різних спеціальностей, провідний викладач (лектор) може коригувати вміст модулів, кількість тестових завдань, які студент повинен виконати протягом семестру. Про ці заходи викладач повідомляє студентів на початку семестру.

**Загальна характеристика розділу.** Цей розділ є продовженням тем «Границя послідовності», «Формула Тейлора». Ряди є важливим математичним апаратом для вивчення властивостей функцій і проведення наближених обчислень.

### СТРУКТУРА МОДУЛЯ

- Тема 1. Числові ряди.
- Тема 2. Функціональні ряди.
- Тема 3. Ряди Фур'є.
- Тема 4. Інтеграл Фур'є.

**Базисні поняття.** 1. Числовий ряд. 2. Сума ряду. 3. Збіжність ряду. 4. Абсолютна й умовна збіжності. 5. Функціональний ряд. 6. Область збіжності функціонального ряду. 7. Степеневий ряд. 8. Ряди Тейлора і Маклорена. 9. Ряд Фур'є. 10. Інтеграл Фур'є.

**Основні задачі.** 1. Встановлення збіжності або розбіжності знакостало-го числового ряду. 2. Встановлення абсолютної або умовної збіжності знакозмінних рядів. 3. Знаходження радіуса і області збіжності степеневого ряду. 4. Розкладання функції у степеневий ряд. 5. Використання рядів для наближених обчислень. 6. Розвинення функції у ряд Фур'є.

### ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

#### 1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

- 1.1. Числовий ряд. Сума, частинна сума, залишок. Збіжність ряду.
- 1.2. Властивості збіжних рядів.
- 1.3. Альтерновний ряд.
- 1.4. Абсолютна й умовна збіжність.
- 1.5. Функціональний ряд. Область збіжності.
- 1.6. Степеневий ряд. Інтервал і радіус збіжності.
- 1.7. Властивості степеневих рядів.
- 1.8. Ряд Тейлора.

1.9. Застосування степеневих рядів для наближених обчислень значень функції, інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь.

1.10. Ортогональність тригонометричної системи функцій на відрізку  $[-\pi; \pi]$ .

1.11. Ряд Фур'є, коефіцієнти Фур'є функції  $f(x)$  для проміжків  $[-\pi; \pi]$ ,  $[-l; l]$ .

1.12. Розкладання функції у ряд Фур'є за синусами і косинусами на проміжках  $[0; \pi]$ ,  $[0; l]$ .

1.13. Інтеграл Фур'є.

## 2. Знання на рівні доведень та виведень

- 2.1. Необхідна умова збіжності.
- 2.2. Достатні ознаки збіжності знакоподатних числових рядів (порівняння, Д'Аламбера, радикальна й інтегральна Коші).
- 2.3. Ознака Лейбніца.
- 2.4. Теорема Абеля.
- 2.5. Розкладання у степеневий ряд основних елементарних функцій.

## 3. Уміння в розв'язанні задач

- 3.1. Досліджувати числові ряди на збіжність.
- 3.2. Знаходити радіус і область збіжності степеневих рядів.
- 3.3. Розкласти функції у степеневий ряд.
- 3.4. Застосовувати ряди до наближених обчислень.
- 3.5. Обчислювати коефіцієнти і записувати ряд Фур'є для різних випадків задання функції.
- 3.6. Зображення функції інтегралом Фур'є.

## Тема 1. ЧИСЛОВІ РЯДИ

Основні поняття та означення, збіжність. Необхідна умова збіжності. Властивості числових рядів. Достатні ознаки збіжності знакоподатних рядів (порівняння, Д'Аламбера, Коші). Альтернативні ряди. Теорема Лейбніца. Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжності.



**Література:** [3, розділ 5, п.п. 5.1—5.3], [9, розділ 9, §1], [14, розділ 3, §2], [15, розділ 13, п. 13.1], [16, розділ 16, §1—8], [17, розділ 4, §13—15].

## Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1. Основні поняття та означення

Нехай задано послідовність дійсних чисел

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\}.$$

Числовим рядом (або просто рядом) називають вираз

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1.1)$$

Числа  $u_1, u_2, \dots$  називають членами ряду;  $u_n$  — загальний член ряду. Ряд вважають заданим, якщо відома залежність загального члена ряду від номера  $n$ , тобто  $u_n = f(n)$ .

Суму

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

перших  $n$  членів ряду називають  $n$ -ю частинною сумою ряду (1.1).

Якщо існує скінченна границя  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , то ряд (1.1) називають *збіжним*, а число  $S$  — його сумою.

Якщо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не існує або  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , то ряд називають *розбіжним*. Такий ряд суми не має.

Різницю

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

називають  $n$ -м залишком ряду.

Розглянемо приклади.

1. Ряд  $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n$  розбігається. Справді,


$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2 + \dots + n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

2. Ряд  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$  розбігається, оскільки послідовність частинних сум  $\{S_n\} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$  не має границі.

3. Покажемо, що ряд  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)}$  збігається, і обчислимо його суму. Розглянемо частинну суму:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Оскільки існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ , то ряд збіжний і його сума  $S = 1$ .

 *Зуваження.* Корисно пам'ятати таке твердження. Якщо послідовність  $\{u_n\}$  можна подати у вигляді  $\{f(n) - f(n+1)\}$ , тобто

$$u_1 = f(1) - f(2), \quad u_2 = f(2) - f(3), \quad \dots, \quad u_n = f(n) - f(n+1),$$

тоді

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + \dots + f(n-1) - f(n) + f(n) - f(n+1) = f(1) - f(n+1).$$

4. Розглянемо ряд геометричної прогресії (або *геометричний ряд*):

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0).$$

При  $q = 1$  ряд розбіжний. Нехай  $q \neq 1$ , тоді

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Знайдемо границю цієї суми залежно від значення  $q$ :

1) якщо  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q},$$

ряд збіжний і його сума

$$S = \frac{a}{1 - q};$$

2) якщо  $|q| > 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ , тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , ряд розбіжний;

3) при  $q = -1$  ряд набирає вигляду

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n+1} a + \dots$$

і є розбіжним (обгрунтуйте це самостійно).



**Висновок.** Ряд геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad (a \neq 0)$$

збігається за умови  $|q| < 1$  і розбігається, якщо  $|q| \geq 1$ .

5. У теорії рядів особливе місце посідає ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який називають *гармонічним* рядом. Покажемо, що цей ряд розбіжний. Для доведення використаємо відому з першого семестру нерівність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Звідси після логарифмування обох частин нерівності за основою  $e$  дістанемо:

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1, \quad \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \quad \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n.$$

Тоді

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots + (\ln(n+1) - \ln n) = \ln(n+1).$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ , то гармонічний ряд розбіжний.

### 1.2. Властивості числових рядів

1. Якщо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  збіжний і його сума дорівнює  $S$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$  та-

кож збіжний і його сума дорівнює  $CS$  ( $C = \text{const}$ ). Якщо ж ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  роз-

бігається і  $C \neq 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C u_n$  також розбігається.



2. Якщо числові ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  та  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  збіжні і  $S_u$  та  $S_v$  — їхні суми відповідно, тоді збіжні також ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$  і їхні суми дорівнюють  $S_u \pm S_v$ , відповідно.



*Зауваження.* Сума (різниця) збіжного і розбіжного рядів є розбіжний ряд. Сума (різниця) двох розбіжних рядів може бути як збіжним, так і розбіжним рядом.

3. На збіжність ряду не впливає відкидання чи приєднання до нього скінченної кількості членів.

4. Ряд (1.1) збіжний (розбіжний) тоді і тільки тоді, коли збіжний (розбіжний) довільний його залишок. Крім того, якщо ряд збігається, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots) = 0.$$

### 1.3. Необхідна ознака збіжності числового ряду

Часто потрібно встановити не суму ряду, а лише його збіжність чи розбіжність. У таких випадках відшукування частинної суми  $S_n$  стає не ефективним. Існує ряд ознак, які дають можливість вивчити ряд на збіжність без використання суми  $S_n$ . Важливу інформацію про поведінку ряду може дати, зокрема, необхідна ознака збіжності числового ряду.

#### Теорема 1

(необхідна ознака збіжності). Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член  $u_n$  прямує до нуля, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

*Доведення.* Нехай ряд (1.1) збігається, причому  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Тоді і  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S$ . Враховуючи, що  $u_n = S_n - S_{n-1}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

**Наслідок** (достатня ознака розбіжності ряду). Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$  або ця границя не існує, то ряд (1.1) розбігається

Справді, якби ряд збігався, то за теоремою 1 виконувалась би гранична рівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , що суперечить умові. Отже, ряд розбігається.



**Зауваження.** На практиці студенти часто роблять грубу помилку, стверджуючи, що якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то ряд збігається. Насправді, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Проте якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , то ряд — розбіжний.

Наприклад, загальний член  $u_n = \frac{1}{n}$  гармонічного ряду прямує до нуля, якщо  $n \rightarrow \infty$ , проте цей ряд розбіжний.

## 1.4. Достатні ознаки збіжності знакододатних рядів

Ряди з невід'ємними членами називають *знакододатними*. Для дослідження збіжності таких рядів найчастіше використовують ознаки порівняння, Д'Аламбера, радикальну та інтегральну ознаки Коші.

### 1.4.1. Ознаки порівняння

Збіжність або розбіжність знакододатного ряду часто встановлюють за допомогою порівняння його з рядом, поведінка якого відома. Такі ряди називатимемо *еталонними*.

**Теорема 2** Нехай задано два ряди з додатними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1.2)$$

і

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (1.3)$$

члени яких задовольняють нерівність

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (1.4)$$

Тоді:

- а) якщо збігається ряд (1.3), то збігається і ряд (1.2);
- б) якщо розбігається ряд (1.2), то розбігається і ряд (1.3).

**Доведення.** Нехай  $S_n(u)$ ,  $S_n(v)$  —  $n$ -і частинні суми рядів (1.2) і (1.3) відповідно. З нерівностей (1.4) випливає, що


$$S_n(u) \leq S_n(v). \quad (1.5)$$

Нехай ряд (1.3) збігається і його сума дорівнює  $S_v$ , тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(v) = S_v.$$

Члени ряду (1.3) знакододатні, тому  $S_n(v) \leq S_v$ , а оскільки виконується нерівність (1.5), то  $S_n(u) \leq S_v$ . Отже, послідовність частинних сум  $\{S_n(u)\}$  монотонно зростаюча і обмежена зверху числом  $S_v$ . За теоремою Вейерштрасса існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u) = S_u$ , тобто ряд (1.2) є збіжним.

Нехай ряд (1.2) розбіжний. Оскільки члени цього ряду невід'ємні, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(u) = \infty$ . Тоді, враховуючи нерівність (1.5), дістаємо  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(v) = \infty$ , що вказує на розбіжність ряду (1.3).

 *Зауваження.* Теорема 2 справджується й у випадку, коли нерівність  $0 \leq u_n \leq v_n$  виконується не для всіх членів рядів, а починаючи з деякого номера  $n > N_0$ .

На практиці більш ефективною є гранична ознака порівняння.

**Теорема 3** (гранична ознака порівняння). Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  і  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$  — ряди з додатними членами. Якщо існує скінченна, відмінна від нуля, границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \quad (0 < k < \infty),$$


то вказані ряди одночасно збіжні або розбіжні.

Для порівняння часто використовують такі ряди:

- а) геометричний ряд;
- б) гармонічний ряд;
- в) узагальнений гармонічний ряд (або ряд Діріхле—Рімана).

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

який є збіжним для  $p > 1$  і розбіжним для  $p \leq 1$ .

 *Зауваження.* При дослідженні рядів на збіжність корисно знати, що показникова функція  $a^n$  ( $a > 1$ ) при  $n \rightarrow \infty$  зростає швидше, ніж

степенева функція  $n^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), а степенева функція  $n^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ) зростає швидше за логарифмічну функцію  $\ln n$ , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = \infty \quad (a > 1, \alpha > 0), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\ln n} = \infty \quad (\alpha > 0).$$

### 1.4.2. Ознака Д'Аламбера

Основний недолік застосування ознак порівняння полягає в необхідності вибору еталонного ряду, тобто ще перед дослідженням ряду ми повинні передбачити його поведінку. Ознака Д'Аламбера дає можливість для певних типів рядів розв'язати задачу про збіжність, використовуючи лише дії над самим рядом.

#### Теорема 4

(ознака Д'Аламбера). Нехай  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  — ряд з додатними членами. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то ряд збігається при  $l < 1$  і розбігається при  $l > 1$  (тут  $l$  може бути рівним  $\infty$ ).

Якщо  $l = 1$ , то ряд може бути збіжним або розбіжним, і для розв'язання питання про збіжність ряду потрібні додаткові дослідження.

*Доведення.* Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ , тоді за означенням границі послідовності для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує таке натуральне число  $N$ , що для всіх  $n \geq N$  виконується нерівність

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon,$$

або

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Розглянемо випадки:

1)  $l < 1$ . Візьмемо число  $\varepsilon$  таким, що  $l + \varepsilon = q < 1$ . Тоді виконуються нерівності

$$\begin{aligned} u_{N+1} &< qu_N, \\ u_{N+2} &< qu_{N+1} < q^2 u_N, \\ u_{N+3} &< qu_{N+2} < q^3 u_N, \\ &\dots \end{aligned}$$

Порівняємо ряди  $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$  та  $qu_N + q^2u_N + q^3u_N + \dots$ . Оскільки останній ряд збігається як сума нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником  $q \in (0; 1)$ , то за ознакою порівняння ряд  $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots$  збігається, отже, збігається і початковий ряд.

2)  $l > 1$ . Тоді, починаючи з деякого номера  $N$ , виконується нерівність  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > l - \varepsilon$ . Візьмемо число  $\varepsilon$  таким, що  $l - \varepsilon > 1$ . Отже,  $u_{n+1} > u_n$ , і в цьому випадку виконується достатня умова розбіжності ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ .

### 1.4.3. Радикальна ознака Коші

У деяких випадках, наприклад, коли загальний член ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  можна подати у вигляді степеня деякого виразу, тобто  $u_n = (f(n))^n$ , дослідження збіжності ряду зручно проводити за допомогою радикальної ознаки Коші. Її формулювання має певну схожість із формулюванням ознаки Д'Аламбера.

**Теорема 5** (радикальна ознака Коші). Якщо для ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  з додатними членами існує скінченна або нескінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$$

то цей ряд збіжний, якщо  $l < 1$ , і розбіжний, якщо  $l > 1$ .

У випадку  $l = 1$  питання про збіжність ряду залишається відкритим.



*Зуваження.*

1. Ознакою Д'Аламбера доцільно користуватися насамперед тоді, коли загальний член ряду містить  $n!$  або показникову функцію  $a^n$ .

2. Існують випадки, коли застосування ознаки Д'Аламбера не приводить до результату. Так, застосовуючи цю ознаку до ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ , де  $P_m(n)$ ,  $Q_k(n)$  — многочлени степенів  $m$  і  $k$  відповідно, завжди дістають  $l = 1$ , що потребує додаткового дослідження, зазвичай застосування ознак порівняння.

3. При використанні радикальної ознаки Коші користуються відомими границями:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_m(n)} = 1 (P_m(n) — \text{многочлен степеня } m)$ .

#### 1.4.4. Інтегральна ознака Коші. Узагальнений гармонічний ряд

**Теорема 6** (інтегральна ознака Коші). Нехай члени знакододатного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  є значеннями деякої неперервної монотонно спадної на проміжку  $[1; \infty)$  функції  $f(x)$  для цілих значень аргументу  $x$ , тобто  $u_1 = f(1)$ ,  $u_2 = f(2)$ , ...,  $u_n = f(n)$ , ... Тоді ряд і невластний інтеграл  $\int_1^{\infty} f(x) dx$  одночасно збіжні або розбіжні.

*Доведення.* Розглянемо криволінійну трапецію, обмежену графіком функції  $y = f(x)$ , віссю  $Ox$  та прямими  $x = 1$ ,  $x = n$  (рис. 1.1). Площа її дорівнює  $I_n = \int_1^n f(x) dx$ . Впишемо в цю трапецію й опишемо навколо неї ступінчасті фігури, утворені з прямокутників, основами яких є відрізки  $[1; 2]$ ,  $[2; 3]$ , ...,  $[n-1; n]$ , а висоти дорівнюють  $f(1)$ ,  $f(2)$ , ...,  $f(n)$ .

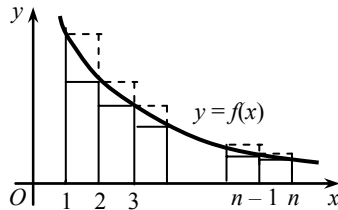


Рис. 1.1

Порівнюючи площі криволінійної трапеції та утворених фігур, дістанемо нерівності

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n) < I_n < f(1) + f(2) + \dots + f(n-1),$$

тобто

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n < I_n < u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1},$$

або

$$S_n - u_1 < I_n < S_n - u_n. \quad (1.6)$$

Тут  $S_n$  — частинна сума ряду.

Розглянемо можливі випадки:

1) Нехай інтеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  збіжний. Це означає, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x)dx = I.$$

Доведемо, що в цьому випадку існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , тобто ряд є збіжний. Для цього достатньо показати, що  $\{S_n\}$  — монотонно зростаюча та обмежена зверху послідовність. Справді, оскільки  $f(x) > 0$ , то послідовності  $\{S_n\}$  та  $\{I_n\}$  монотонно зростаючі. Крім того, враховуючи нерівність (1.6), дістаємо

$$S_n < u_1 + I_n < u_1 + I,$$

звідки впливає обмеженість послідовності  $\{S_n\}$ . Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність частинних сум  $\{S_n\}$  має границю і ряд є збіжний.

2) Нехай невласний інтеграл  $\int_1^{\infty} f(x)dx$  розбігається. Тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$  і з умови (1.6) випливає, що  $S_n > u_n + I_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ . Це значить, що ряд теж розбіжний.

Дослідимо за допомогою інтегральної ознаки Коші *узагальнений гармонічний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

де  $p$  — дійсне число.

Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{1}{x^p}$ , тоді  $u_n = \frac{1}{n^p} = f(n)$ . Ця функція задовольняє всі умови теореми 6. При  $p \neq 1$  маємо:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x^{-p} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{A^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{якщо } p > 1, \\ \infty, & \text{якщо } p < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При  $p = 1$  маємо гармонічний ряд, який розбігається:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^A = \infty.$$



**Висновок.** Узагальнений гармонічний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots$$

збігається для  $p > 1$  і розбігається для  $p \leq 1$ .

### 1.5. Альтерновні та знакозмінні ряди

Ряд вигляду

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad (1.7)$$

де  $u_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) називатимемо *альтерновним*. У такому ряді знаки членів строго чергуються, тобто довільні сусідні члени мають різні знаки.

Збіжність ряду (1.7) досліджують за допомогою достатньої ознаки, встановленої Лейбніцем.

**Теорема 7** (Ознака Лейбніца.) Альтерновний ряд (1.7) збіжний, якщо:

- 1)  $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$ ;
- 2) загальний член ряду прямує до нуля:  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

Іншими словами, ряд (1.7) збіжний, якщо послідовність його членів монотонно прямує до нуля при  $n \rightarrow \infty$ .

При цьому сума  $S$  ряду задовольняє подвійну нерівність

$$0 < S < u_1.$$

*Доведення.* Розглянемо спочатку частинну суму з парним числом членів:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + u_{2n-1} - u_{2n} = \\ &= (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}). \end{aligned}$$

З першої умови теореми випливає, що кожна різниця у дужках додатна, тому  $S_{2n} > 0$  і  $\{S_{2n}\}$  — зростаюча послідовність. З іншого боку,

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} < u_1,$$

бо вирази у дужках додатні.



Отже, послідовність частинних сум  $\{S_{2n}\}$  зростає і обмежена зверху числом  $u_1$ . Тому вона має границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S$ , причому  $0 < S < u_1$ .

Обчислимо тепер границю частинних сум з непарним числом членів. Зрозуміло, що  $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$ . Враховуючи другу умову теореми, дістаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Отже, як для парних, так і для непарних  $n$  існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ . Це значить, що альтерновний ряд збігається, причому  $0 < S < u_1$ .



*Зауваження.*

**1.** Ряд вигляду

$$-u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad (1.8)$$

де  $u_n > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), також є *альтерновним*. Після домноження всіх його членів на  $-1$  дістанемо ряд вигляду (1.7).

Ряди вигляду (1.7) та (1.8) називають рядами *лейбніцевого типу*.

**2.** Перша умова ознаки Лейбніца може виконуватися не з першого, а починаючи з деякого номера.

**3.** З ознаки Лейбніца випливає, що абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (1.7) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S - S_n| \leq u_{n+1},$$

або

$$|r_n| \leq u_{n+1}.$$

Цю властивість використовують для наближеного обчислення суми альтерновного ряду із заданою точністю.

Альтерновний ряд є окремим випадком знакозмінного ряду.

Числовий ряд, що містить нескінченну кількість як додатних, так і від'ємних членів, називають *знакозмінним*.

Для знакозмінних рядів справджується така достатня ознака збіжності.

**Теорема 8** Нехай числовий ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

є знакозмінним (тут числа  $u_1, u_2, \dots$  можуть мати довільний знак).

Якщо збігається знакододатний ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

утворений із модулів членів заданого ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд.

Із цієї теореми випливає, що при дослідженні на збіжність знакозмінних рядів можна користуватися ознаками збіжності знакододатних рядів.

Наприклад, знакозмінний ряд

$$\frac{\cos 1}{1^2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \frac{\cos 3}{3^2} + \dots + \frac{\cos n}{n^2} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$$

збігається, оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2},$$

утворений із модулів членів даного ряду, збігається.

Справді, оскільки  $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  збігається ( $p = 2 > 1$ ), то за ознакою порівняння (теорема 2) ряд із модулів збігається, отже, за теоремою 8 збігається і вихідний ряд.



*Зауваження.* Зазначимо, що обернене до теореми 8 твердження неправильне: якщо знакозмінний ряд збігається, то це не означає, що збігається ряд, складений із модулів його членів.

Наприклад, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  збігається, проте ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  є розбіжним.

Знакозмінний ряд називають *абсолютно збіжним*, якщо ряд, складений із модулів його членів, збігається.

Знакозмінний ряд називають *умовно збіжним*, якщо ряд, складений із модулів його членів, розбігається, а сам ряд є збіжним.

Так, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  є умовно збіжним, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$  — абсолютно збіжним.

Абсолютно збіжним рядам притаманна низка властивостей, якими не володіють умовно збіжні ряди. Сформулюємо основні властивості абсолютно збіжних рядів.

1. Якщо ряд абсолютно збіжний і його сума дорівнює  $S$ , то ряд, утворений з нього перестановленням членів, також збігається і має ту саму суму  $S$ , що і заданий ряд.

2. Абсолютно збіжні ряди з сумами  $S_1$  та  $S_2$  можна почленно додавати (віднімати). Утворений ряд є абсолютно збіжним, і його сума дорівнює  $S_1 + S_2$  ( $S_1 - S_2$ ).

3. Добуток двох абсолютно збіжних рядів із сумами  $S_1$  та  $S_2$  є абсолютно збіжний ряд, сума якого дорівнює  $S_1 S_2$ .

### Т.1

 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Доведіть за означенням збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^n - 7^n}{14^n}$  і знайдіть його суму.

*Розв'язання.* Обчислимо  $n$ -у частинну суму ряду:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5 \cdot 2 - 7}{14} + \frac{5 \cdot 2^2 - 7^2}{14^2} + \dots + \frac{5 \cdot 2^n - 7^n}{14^n} = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{7^2} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{5}{7^n} \cdot \frac{1}{2^n} = \\ &= \frac{5}{7} \left( 1 + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7^{n-1}} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1 - \frac{1}{7^n}}{1 - \frac{1}{7}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \\ &= \frac{5}{6} \left( 1 - \frac{1}{7^n} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7^n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ , то існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{5}{6} - 1 = -\frac{1}{6}$ ,

це значить, що заданий ряд збіжний і його сума  $S = -\frac{1}{6}$ .

2. Знайдіть суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ .

*Розв'язання.* Розклавши загальний член ряду на елементарні дробі, дістанемо

$$u_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right),$$

$$S_n = \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\
& = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}, \\
& \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Отже, сума ряду  $S = \frac{1}{2}$ .

3. Дослідіть на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+5} = \frac{2}{6} + \frac{2}{7} + \frac{2}{8} + \dots + \frac{2}{n+5} + \dots$$

*Розв'язання.* Цей ряд дістаємо із гармонічного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , якщо його домножити на 2 і відкинути перші п'ять членів. Гармонічний ряд розбіжний, а добуток ряду на ненульове число і відкидання скінченної кількості членів не порушує його розбіжності. Тому заданий ряд розбіжний.

Доведіть розбіжність рядів, використовуючи достатню ознаку розбіжності ряду.

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{100n+7}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{100n+7} = \frac{3}{100} \neq 0$ , то ряд розбіжний.

5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n}$ .

*Розв'язання.* Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = 1 \neq 0,$$

отже, ряд розбіжний.

6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n$ .

*Розв'язання.* Знайдемо границю загального члена ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^n = [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right)^{\frac{n+1}{2} \cdot \frac{-2n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{2n}{n+1}} = e^{-2} \neq 0.$$

Отже, ряд розбіжний.

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаки порівняння.

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 4}.$$

*Розв'язання.* Загальний член ряду є відношенням многочленів першого і третього степенів, степінь знаменника на 2 більший від степеня чисельника.

Отже, для порівняння вибираємо узагальнений гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Оскільки  $\frac{n}{n^3 + 4} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$  і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  збіжний, то за ознакою порівняння (теорема 2) заданий ряд збіжний.

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}.$$

*Розв'язання.* Покажемо, що ряд розбігається. Справді, з нерівності  $\ln n < n$  випливає нерівність  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ). Оскільки члени заданого ряду більші від відповідних членів розбіжного гармонічного ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , то ряд розбіжний.

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{2n+4}}.$$

*Розв'язання.* Оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$  розбіжний ( $p = \frac{1}{4} < 1$ ) і

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{2n+4}}}{\frac{1}{\sqrt[4]{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[4]{2n+4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad (0 < k < \infty),$$

то за граничною ознакою порівняння (теорема 3) вихідний ряд також розбіжний.



*Зауваження.*

1. При оцінюванні загального члена  $u_n = \frac{a}{b}$ , поданого у вигляді додатного дробу, причому  $a > 0$ ,  $b > 0$ , часто використовують такі міркування: дріб збільшиться, якщо збільшити його чисельник або зменшити знаменник, не змінюючи його знака, і зменшиться, якщо збільшити його знаменник або зменшити чисельник.

2. Ряд, загальний член якого  $u_n = \frac{P_m(n)}{Q_k(n)}$ , є відношенням многочленів степенів  $m$  і  $k$  відповідно, збіжний, якщо  $k - m > 1$ . У цьому випадку вихідний ряд збігається або розбігається разом з рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{k-m}}$ .

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(\sqrt{n}+5)}.$$

*Розв'язання.* Загальний член даного ряду задовольняє нерівність

$$u_n = \frac{\cos^2 n}{n(\sqrt{n}+5)} \leq \frac{1}{n(\sqrt{n}+5)} < \frac{1}{n^{1,5}}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1,5}}$  збіжний ( $p = 1,5 > 1$ ), тому заданий ряд також збіжний.

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{3}{2n+1}.$$

*Розв'язання.* Порівняємо ряд із розбіжним гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

Враховуючи еквівалентність  $\arcsin x \sim x$ , коли  $x \rightarrow 0$ , обчислюємо границю

$$k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arcsin \frac{3}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Отже, за граничною ознакою порівняння заданий ряд розбіжний.

Дослідіть на збіжність ряди, користуючись ознаками Д'Аламбера або Коші.

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{(2n+1)!}.$$

*Розв'язання.* Наявність факторіала зазвичай указує на доцільність застосування ознаки Д'Аламбера. Маємо

$$u_n = \frac{(n+1)^3 \cdot 3^n}{(2n+1)!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2(n+1)+1)!};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 \cdot 3^{n+1}}{(2n+3)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)^3 \cdot 3^n} =$$

$$= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)^3 \frac{(2n+1)!}{(2n+2)(2n+3)(2n+1)!} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n n!}.$$

*Розв'язання.* Застосуємо спочатку ознаку Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{n^n}{e^n n!}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!};$$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1} (n+1)!} \cdot \frac{e^n n!}{n^n} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n (n+1)}{n^n} \cdot \frac{n!}{n!(n+1)} = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = 1.$$

Отже, питання про збіжність ряду залишається відкритим. Застосування ознаки Коші також нічого не дає. Результат дає використання формули Стірлінга

$$n! \sim \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n}, \quad n \rightarrow \infty,$$

звідки дістаємо еквівалентність  $\frac{n^n}{e^n n!} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, n \rightarrow \infty$ . Виходить, що заданий ряд поводить себе так само, як і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ , який є розбіжним

( $p = \frac{1}{2} < 1$ ). Отже, заданий ряд також розбіжний.

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}.$$

*Розв'язання.* Цей ряд зручно досліджувати за радикальною ознакою Коші. Маємо

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{1}{2} \right)^n \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{2} > 1,$$

отже, ряд розбіжний.

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}.$$

*Розв'язання.* За радикальною ознакою Коші дістанемо

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\sqrt{n}}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1.$$

Якщо скористатися ознакою Д'Аламбера, досягнемо такого самого результату.

Доведемо збіжність ряду, використовуючи ознаку порівняння. Для порівняння візьмемо збіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Знайдемо спочатку границю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2^{\sqrt{x}}} &= \left| \frac{\sqrt{x} = t,}{t \rightarrow \infty} \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^4}{2^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^3}{2^t \ln 2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{12t^2}{2^t (\ln 2)^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24t}{2^t (\ln 2)^3} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{24}{2^t (\ln 2)^4} = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що починаючи з деякого номера  $N_0$  виконується нерівність  $2^{\sqrt{n}} > n^2$ , або  $\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \frac{1}{n^2}$  ( $n \geq N_0$ ). Отже,  $\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , і, оскільки відкидання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність, доходимо висновку про збіжність початкового ряду.

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)}.$$

*Розв'язання.* Функція  $f(x) = \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)}$  задовольняє умови інтегральної ознаки, тому задача зводиться до дослідження збіжності невласного інтеграла

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2) \ln(x+2)} &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{d(\ln(x+2))}{\ln(x+2)} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln |\ln(x+2)| \Big|_1^A = \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} (\ln |\ln(A+2)| - \ln \ln 3) = \infty. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл розбіжний, отже заданий ряд також розбіжний.



*Зауваження.* Переконайтесь самостійно, що дослідження ряду за допомогою ознаки Д'Аламбера результату не дає ( $l = 1$ ).



$$17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n^2 + 1) \ln^2(n+1)}.$$

*Розв'язання.* При  $n \rightarrow \infty$  справджуються еквівалентності

$$\frac{n}{(2n^2 + 1)} \sim \frac{1}{2n}, \quad \ln(n+1) \sim \ln n,$$

тому згідно з граничною ознакою порівняння заданий ряд збігається або розбігається разом із рядом  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n \ln^2 n}$ . Застосуємо до останнього ряду інтегральну ознаку Коші:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{-1}{\ln x} \Big|_2^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left( -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Невласний інтеграл збіжний, отже, вихідний ряд також збіжний.



*Зауваження.* Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  збіжний, якщо  $p > 1$ , і розбіжний, якщо  $p \leq 1$ . Доведіть це самостійно

Дослідіть на абсолютну й умовну збіжність знакозмінні ряди.

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n.$$

*Розв'язання.* Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n,$$

складений з модулів членів заданого ряду, і застосуємо до цього ряду радикальну ознаку Коші. Дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n+1}{3n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отже, ряд з модулів членів заданого ряду збіжний, тому за теоремою 8 заданий ряд збігається, причому абсолютно.



*Зауваження.*

1. Дослідження альтерновного ряду на абсолютну й умовну збіжність можна проводити у такому порядку: спочатку досліджують ряд,

складений із модулів членів заданого ряду. Якщо він розбіжний, то далі переходять до перевірки виконання умов теореми Лейбніца. Або ж спочатку застосовують теорему Лейбніца, після чого у разі збіжності альтерновного ряду досліджують ряд, складений із модулів членів вихідного ряду. На практиці рекомендуємо дотримуватися першого способу.

2. Якщо при дослідженні знакозмінного ряду дістають  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \infty$

або  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$  і знакозмінний ряд є розбіжним.

$$19. 1 - \frac{2}{7} + \frac{3}{13} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{n}{6n-5} + \dots$$

*Розв'язання.* Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0$ , то заданий ряд розбігається.

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}.$$

*Розв'язання.* Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n},$$

складений із модулів членів заданого ряду, і застосуємо до цього ряду ознаку Д'Аламбера. Дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n+2} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+2} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, ряд із модулів членів збігається, тому збігається і початковий ряд, причому збіжність є абсолютною.

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

*Розв'язання.* Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

складений із модулів членів заданого ряду, розбіжний, оскільки він є узагальненим гармонічним рядом з  $p = \frac{1}{2} < 1$ .

Перевіримо тепер виконання умов теореми Лейбніца:

$$1) 1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \dots > \frac{1}{\sqrt{n}} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Отже, заданий ряд умовно збіжний.

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}.$$

*Розв'язання.* Оскільки  $\sin x$  — непарна функція, то ряд можна записати у вигляді  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \sin \frac{1}{2^n}$ . Дослідимо на збіжність ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{2^n}$ , складений із модулів його членів. Застосовуючи ознаку Д'Аламбера і враховуючи еквівалентність  $\sin x \sim x$ ,  $x \rightarrow 0$ , дістанемо:

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \sin \frac{1}{2^{n+1}}}{n \sin \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \frac{1}{2^{n+1}}}{n \frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд із модулів членів збігається, тому початковий ряд є абсолютно збіжним.

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{n^3} \right).$$

*Розв'язання.* Ряд є знакозмінним. Оскільки  $\ln \left( 1 + \frac{1}{n^3} \right) \sim \frac{1}{n^3}$  за умови  $n \rightarrow \infty$ , то ряд веде себе так само, як і знакозмінний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ . Оскільки для будь-якого натурального  $n$  виконується нерівність  $\frac{|\sin n|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ , то  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^3} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ . Враховуючи, що еталонний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  збіжний ( $p = 3 > 1$ ), доходимо висновку про те, що вихідний ряд, як і ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$ , абсолютно збіжний.

24. Обчисліть наближено суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{4^n n!}$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

Розв'язання. Оскільки  $\cos \pi n = (-1)^n$ , то маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2 \cdot 2!} - \frac{1}{4^3 \cdot 3!} + \frac{1}{4^4 \cdot 4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{4^n \cdot n!} + \dots,$$

члени якого строго чергуються. Згідно з наслідком із теореми Лейбніца абсолютна похибка від заміни суми збіжного ряду (1.7) його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|r_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

Знайдемо найменше  $n$ , починаючи з якого виконується нерівність  $u_{n+1} < \varepsilon$ , тоді і  $|r_n| < \varepsilon$ :

$$\frac{1}{4^2 \cdot 2!} = \frac{1}{32} > \varepsilon, \quad \frac{1}{4^3 \cdot 3!} = \frac{1}{64 \cdot 6} > \varepsilon, \quad \frac{1}{4^4 \cdot 4!} = \frac{1}{256 \cdot 24} < \varepsilon.$$

Отже,  $|r_3| < u_4 < \varepsilon$ , тому для досягнення вказаної точності достатньо взяти суму перших трьох членів ряду:

$$S \approx -\frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} = -0,25 + 0,0312 - 0,0026 \approx -0,221.$$

### Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Доведіть за означенням збіжність рядів і знайдіть їхню суму.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}. \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}. \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)}. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

Доведіть розбіжність рядів, використовуючи достатню ознаку розбіжності ряду.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \sin \frac{n}{n^2 + 1}. \quad 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^2 + 2n + 5}}. \quad 7. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-2}{n+3} \right)^n.$$

$$8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}. \quad 9. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^2}. \quad 10. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{6n+5}.$$

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаки порівняння.

$$\begin{array}{lll}
 11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n^2-1}. & 12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{4n^5+3}. & 13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}. \\
 14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+2}. & 15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+4)}. & 16. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n+2}. \\
 17. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}). & 18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right). & 19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}. \\
 20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}+2}{\sqrt[3]{n^5}+1}. & 21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{n}}-1}{n}. & 22. \sum_{n=1}^{\infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right).
 \end{array}$$

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$\begin{array}{lll}
 23. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^n}. & 24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)!}. & 25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}. \\
 26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{n^3 \cdot 7^{n+1}}. & 27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^{n^2}}. & 28. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{4n+1}{3^n}. & 29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}.
 \end{array}$$

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи радикальну ознаку Коші.

$$\begin{array}{lll}
 30. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{5n+3}\right)^n. & 31. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{2n+3}. & 32. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}. \\
 33. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos}^n \left(\frac{n}{2n+1}\right). & 34. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n}. & 35. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n^2+1}\right)^n.
 \end{array}$$

Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи інтегральну ознаку Коші.

$$\begin{array}{lll}
 36. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}. & 37. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}. & 38. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}. \\
 39. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \ln(2n+1)}. & 40. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.
 \end{array}$$

Дослідіть на абсолютну та умовну збіжність знакозмінні ряди.

$$\begin{array}{ll}
 41. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{n+1}. & 42. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+n+1}.
 \end{array}$$

$$43. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+9}{11n-3}.$$

$$44. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n + n}{4^n + 1}.$$

$$45. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}.$$

$$46. \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \operatorname{tg} \frac{(-1)^n}{5^n}.$$

$$47. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+3}{3n+2} \right)^n.$$

$$48. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln^3 n}}.$$

$$49. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n!}.$$

$$50. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n}{2^n}.$$

Обчисліть наближено суму рядів з точністю  $\varepsilon$ , вказавши найменшу достатню кількість членів ряду.

$$51. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \cdot n!}, \varepsilon = 0,001. \quad 52. \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{2}{13} \right)^{n+1}, \varepsilon = 0,001.$$

### Відповіді

$$1. S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}, S = \frac{1}{2}. \quad 2. S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}, S = \frac{3}{2}. \quad 3. S_n = 1 - \frac{1}{(n+2)!}, S = 1.$$

*Вказівка.*  $u_n = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$ . 4.  $S_n = \ln \frac{n+1}{2n}, S = -\ln 2$ . 11. Розбігається. 12. Збігається. 13. Розбігається. 14. Збігається. 15. Розбігається. 16. Розбігається. 17. Розбігається. 18. Збігається. 19. Збігається. 20. Збігається. 21. Збігається. 22. Розбігається. 23. Збігається. 24. Збігається. 25. Збігається. 26. Розбігається. 27. Збігається. 28. Збігається. 29. Збігається. 30. Збігається. 31. Збігається. 32. Збігається. 33. Розбігається. 34. Збігається. 35. Збігається. 36. Збігається. 37. Збігається. 38. Збігається. 39. Розбігається. 40. Розбігається. 41. Збіжний умовно. 42. Збіжний умовно. 43. Розбіжний. 44. Збіжний абсолютно. 45. Збіжний умовно. 46. Збіжний абсолютно. 47. Збіжний абсолютно. 48. Збіжний абсолютно. 49. Збіжний абсолютно. 50. Збіжний абсолютно. 51.  $S \approx 0,944, n = 3$ . 52.  $S \approx 0,134, n = 3$ .

## T.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Доведіть за означенням збіжність рядів і знайдіть їхню суму.

$$1.1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{12^n}.$$

$$1.1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}.$$

$$1.1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

$$1.1.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}.$$

$$1.1.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)}.$$

$$1.1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 2^n}{10^n}.$$

$$1.1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n - 3^n}{12^n}.$$

$$1.1.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+7)}.$$

$$1.1.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)(n+6)}.$$

$$1.1.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{21^n}.$$

$$1.1.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+6)}.$$

$$1.1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 3^n}{15^n}.$$

$$1.1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n}.$$

$$1.1.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+5)}.$$

$$1.1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}.$$

$$1.1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 2^n}{14^n}.$$

$$1.1.17. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n-3)}.$$

$$1.1.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{20^n}.$$

$$1.1.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 5^n}{30^n}.$$

$$1.1.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$1.1.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}.$$

$$1.1.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 8^n}{24^n}.$$

$$1.1.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}.$$

$$1.1.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n - 4^n}{28^n}.$$

$$1.1.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 9^n}{18^n}.$$

$$1.1.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

$$1.1.27. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-2)}.$$

$$1.1.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n - 3^n}{30^n}.$$

$$1.1.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+5)(3n+2)}.$$

$$1.1.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n - 2^n}{18^n}.$$

1.2. Доведіть розбіжність рядів.

$$1.2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{n^2}.$$

$$1.2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{1000n+1}.$$

$$1.2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^n.$$

$$1.2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{5n^2 - 3n + 1}.$$

$$\begin{array}{ll}
1.2.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3+2 \ln n} . & 1.2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} . \\
1.2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^n . & 1.2.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+5}{5n+1000} . \\
1.2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{3^n} . & 1.2.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+1}{n(3n+1)} . \\
1.2.11. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-n) . & 1.2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n!+10} . \\
1.2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{1+2 \ln n} . & 1.2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+n!}{100+n!} . \\
1.2.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{n}+3} . & 1.2.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-5}{3n}\right)^n . \\
1.2.17. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{4^n} . & 1.2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+7}{7n-4} . \\
1.2.19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n^2} . & 1.2.20. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+4n+5}-n) . \\
1.2.21. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4^n} . & 1.2.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2+\ln n} . \\
1.2.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-5}{100n+3} . & 1.2.24. \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n-1}{n^2} . \\
1.2.25. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\pi n}{6n+1} . & 1.2.26. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+2n}-n) . \\
1.2.27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+5}{n+4}\right)^n . & 1.2.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)n}{(n+3)(n+1)} . \\
1.2.29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{2n} . & 1.2.30. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{4n^2+3n+7}-2n) .
\end{array}$$

1.3. Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами, використовуючи ознаку Д'Аламбера.

$$1.3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n+2)!}{n^5} . \quad 1.3.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n-1}{5^n (n+1)!} . \quad 1.3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 2^n} .$$



$$\begin{array}{lll}
1.3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n \cdot 3^{n-1}} & 1.3.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (n+3)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} & 1.3.6. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{2\pi}{3^n} \\
1.3.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!} & 1.3.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 7 \cdot 13 \cdots (6n-5)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n+1)} & 1.3.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n(n+1)}{5^n} \\
1.3.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n} & 1.3.11. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{5^n} & 1.3.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n/2}}{n!} \\
1.3.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+3)!} & 1.3.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)} & 1.3.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!} \\
1.3.16. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg} \frac{2\pi}{5^n} & 1.3.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2 + 1) \cdot 2^n}{(n+1)!} & 1.3.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(2n+3)!} \\
1.3.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (2n-1)}{5^n} & 1.3.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdots (4n-1)} & 1.3.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} \\
1.3.22. \sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n} & 1.3.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)} & 1.3.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
1.3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+2) \cdot n!} & 1.3.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdots (5n-3)} & 1.3.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!} \\
1.3.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^3}{(2n)!} & 1.3.29. \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1) \sin \frac{\pi}{4^n} & 1.3.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}
\end{array}$$

1.4. Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами, використовуючи радикальну ознаку Коші.

$$\begin{array}{ll}
1.4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2} \cdot 5^n & 1.4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2} \\
1.4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{n}{2n+1} \right)^n & 1.4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{2n}{2n+1} \right)^n \\
1.4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arcsin} \frac{n}{2^n} \right)^n & 1.4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 - 2} \right)^n \\
1.4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{2^n + 1}{5^n} & 1.4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{n+2} \right)^{n^2} \cdot 7^n
\end{array}$$

$$1.4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\ln^n(n+1)}.$$

$$1.4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5^n}\right)^{3n}.$$

$$1.4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{\pi n}{3n+5}\right)^{2n}.$$

$$1.4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi n}{6n+1}\right)^n.$$

$$1.4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{n^2}.$$

$$1.4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{n^3}\right)^{2n}.$$

$$1.4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4n}\right)^{n+1}.$$

$$1.4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{((n+1)/n)^{n^2}}.$$

$$1.4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{2n}} - 1\right)^n \cdot (n+1)^n.$$

$$1.4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{n^2}.$$

$$1.4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n+2}}{\ln^n(n+3)}.$$

$$1.4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{n^2}.$$

$$1.4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{7n^2+4}\right)^n.$$

$$1.4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n.$$

$$1.4.23. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{\pi n}{4n+3}\right)^{2n}.$$

$$1.4.24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}.$$

$$1.4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n+1)/n)^{n^2}}{4^n}.$$

$$1.4.26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{4n}} - 1\right)^n \cdot (3n+1)^n.$$

$$1.4.27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}.$$

$$1.4.28. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{\sqrt{3}n}{n+2}.$$

$$1.4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln(n+1))^n}.$$

$$1.4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsin}^n \frac{n+2}{2n}.$$

1.5. Дослідіть на збіжність ряди з додатними членами, використовуючи ознаку порівняння.

$$1.5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}.$$

$$1.5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^5+n-1}}.$$

$$1.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{5n^2+2}.$$

$$1.5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3n}}.$$

$$1.5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

$$1.5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}.$$

$$\begin{array}{lll}
1.5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt[3]{2n^4+1}} & 1.5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1} & 1.5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n-1} \\
1.5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} & 1.5.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^2+1} & 1.5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n^3+1} \\
1.5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^2+5} & 1.5.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n^2-n+1} & 1.5.15. \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{\pi}{n^2+1} \\
1.5.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+4)} & 1.5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2\pi}{3n+2} & 1.5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{n^3+n+1} \\
1.5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^2-1} & 1.5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n(n-4)} & 1.5.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n \cdot \sqrt[3]{n+1}} \\
1.5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n-1} & 1.5.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+2} & 1.5.24. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{4n} \\
1.5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{2n+1}}{n^3+1} & 1.5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 5^n} & 1.5.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+4)} \\
1.5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+4} & 1.5.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5n^2+3} & 1.5.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+2}}{n(n+1)}
\end{array}$$

1.6. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи граничну ознаку порівняння.

$$\begin{array}{ll}
1.6.1. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{1}{n+2} & 1.6.2. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{2}{n^3} \right) \\
1.6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) & 1.6.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \\
1.6.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right) & 1.6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{n^2+1}{n^2} \right) \\
1.6.7. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{n^4+1} & 1.6.8. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n+1} \\
1.6.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^4}} - 1}{\operatorname{tg} \frac{1}{n^2}} & 1.6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \right)^2
\end{array}$$

$$1.6.11. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 2}. \quad 1.6.12. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( \frac{2n^2 + 3}{2n^2} \right).$$

$$1.6.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n^2 + n + 5} \right)^2. \quad 1.6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{2}{n} \right).$$

$$1.6.15. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \frac{n}{(n+1)(n+2)}. \quad 1.6.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n - 1}{\sqrt{n}}.$$

$$1.6.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin \frac{1}{2^n}}{3^n + 2}. \quad 1.6.18. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-2}{n^3 + 4} \right)^3.$$

$$1.6.19. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{4^n + 1}. \quad 1.6.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{\sqrt[4]{n}}.$$

$$1.6.21. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 \left( \frac{n+2}{n} \right). \quad 1.6.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n+1}}{n+3} \right)^2.$$

$$1.6.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left( \frac{2n+1}{2n} \right). \quad 1.6.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin^4 \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$1.6.25. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{3}{5^n + 2}. \quad 1.6.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 5^n}.$$

$$1.6.27. \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{4}{\sqrt{n}} \right). \quad 1.6.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}}}{n}.$$

$$1.6.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \left( \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \right). \quad 1.6.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^3}} - 1}{\sin \frac{1}{n}}.$$

1.7. Дослідіть на збіжність ряди, використовуючи граничну ознаку порівняння та інтегральну ознаку Коші.

$$1.7.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n+4)}. \quad 1.7.2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(\ln^2 n + 1)}.$$

$$1.7.3. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln(\ln n)}. \quad 1.7.4. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln^2(\ln n)}.$$

$$1.7.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n^2+1)\ln(n+2)}.$$

$$1.7.6. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(2n^2+3)\ln^4 n}.$$

$$1.7.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln^2(n+1)}.$$

$$1.7.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{2}{n}}{\ln(n+3)}.$$

$$1.7.9. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\sqrt{\ln n}}.$$

$$1.7.10. \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}.$$

$$1.7.11. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}.$$

$$1.7.12. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(4+\ln^4 n)}.$$

$$1.7.13. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n}}{\sqrt[3]{\ln n}}.$$

$$1.7.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3(2n+1)}.$$

$$1.7.15. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 3^{-n^2}.$$

$$1.7.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(4+\ln^2 n)}.$$

$$1.7.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^6(n+2)}.$$

$$1.7.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot \ln(n+5)}.$$

$$1.7.19. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}.$$

$$1.7.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot \ln^3(n+4)}.$$

$$1.7.21. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n\sqrt{n}}.$$

$$1.7.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3+2)\ln(n+5)}.$$

$$1.7.23. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(9+4\ln^2 n)}.$$

$$1.7.24. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-n^4}.$$

$$1.7.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}}.$$

$$1.7.26. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 5^{-n^2}.$$

$$1.7.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3 \cdot \ln^2(n+1)}.$$

$$1.7.28. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n(1+\ln^4 n)}.$$

$$1.7.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$1.7.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n^2+4)\ln(n+1)}.$$

1.8. Дослідіть ряди на абсолютну й умовну збіжність.

$$1.8.1. \text{ a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+3)}{n^3 + 1}.$$

$$1.8.2. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n-1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n-1)}{4^{n+2}}.$$

$$1.8.3. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \frac{2}{n\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (n^3 + 1)}{n^4 + 1}.$$

$$1.8.4. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n^2 + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{n!}.$$

$$1.8.5. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\ln n}}.$$

$$1.8.6. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n-1}{3n+2} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (4n+1)}{n(3n-1)}.$$

$$1.8.7. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3n^2 - 7n + 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^3 n}.$$

$$1.8.8. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1) \ln^2 (2n+1)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1) (3n+1)}{n^2 + 1}.$$

$$1.8.9. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{3^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(5n-1)}.$$

$$1.8.10. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{2}{3n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+2)!}.$$

$$1.8.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5^n}{n!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[5]{n^2 + 7}}.$$

$$1.8.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{5n-3}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 6^{n-1}}{(n+1)!}.$$

$$1.8.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-1)^2}{7^n}.$$

$$\begin{array}{ll}
1.8.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right); & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{4n^2+1}}. \\
1.8.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2} \cdot \sqrt{n+1}}. \\
1.8.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+2}{3n-2} \right)^n; & \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \sqrt[3]{\ln n}}. \\
1.8.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n-1)}{5n^2+7}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot 3^n}{5^{n-2}}. \\
1.8.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{\pi}{3n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}. \\
1.8.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n \cdot 2^n}{3^n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+4}}. \\
1.8.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{1}{4n+1}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)}{5n^3+9}. \\
1.8.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2n^2+3}; & \text{ б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln^2 n}. \\
1.8.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+3}}. \\
1.8.23. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \frac{3n^2+1}{5n^2-1} \right)^n; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{n^3+1}}. \\
1.8.24. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{\sqrt{n}}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n-2}{n+2} \right)^{n^2}. \\
1.8.25. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left( \frac{n+1}{n+3} \right); & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{3n+1}{7n-1} \right)^n. \\
1.8.26. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}^n \frac{3n-1}{3n^2+1}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}. \\
1.8.27. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\ln n}}; & \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)^2}{3^n}.
\end{array}$$

$$1.8.28. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3^{n+4}}{n!}.$$

$$1.8.29. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2 + 2}{5n^3 - 1}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln^4 n}.$$

$$1.8.30. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{arctg} \frac{2}{n \cdot \sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (5n-1)}{5n^2 + 1}.$$

## Тема 2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Функціональні ряди. Основні поняття та означення. Рівномірна збіжність. Ознака Вейерштрасса. Властивості рівномірно збіжних рядів. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал та радіус збіжності степеневого ряду. Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання функцій у ряд Тейлора. Застосування степеневих рядів.



**Література:** [3, розділ 5, п.п. 5.4—5.5], [9, розділ 9, §2], [14, розділ 3, §2], [15, розділ 13, п.п. 13.2—13.3], [16, розділ 16, §9—28], [17, розділ 5, §16—19].

### Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 2.1. Основні поняття та означення

Нехай задано послідовність функцій

$$\{u_n(x)\} = \{u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots\},$$

кожна з яких визначена на деякій множині  $D$ .

Функціональним рядом називають вираз

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x). \quad (1.9)$$

Якщо у ряді (1.9) зафіксувати  $x = x_0 \in D$ , то функціональний ряд стане числовим. Цей ряд може збігатися або розбігатися. Якщо у точці  $x_0$  числовий ряд збігається, то точку  $x_0$  називають точкою збіжності функціонального ряду. Множину всіх значень  $x$ , для яких функціональний ряд збіжний,



називають *областю його збіжності*. Область збіжності функціонального ряду не ширша від множини  $D$ , на якій визначені члени ряду.

Суму

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

перших  $n$  членів ряду (2.1) називають  *$n$ -ю частинною сумою цього ряду*.

У кожній точці  $x$ , яка належить області збіжності, існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ , яку називають сумою ряду (1.9).

Якщо функціональний ряд (1.9) збіжний до функції  $S(x)$ , то різницю  $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$  називають  *$n$ -м залишком ряду*:

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$$

У точках збіжності ряду залишок ряду при  $n \rightarrow \infty$  прямує до нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Функціональний ряд (1.9) називають *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд

$$|u_1(x)| + |u_2(x)| + \dots + |u_n(x)| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|.$$

Для відшукування області абсолютної збіжності функціонального ряду використовують достатні ознаки збіжності числових рядів. Наприклад, за

ознакою Д'Аламбера знаходять границю  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = l(x)$ , після чого

розв'язують нерівність  $l(x) < 1$ . Додатково проводять дослідження ряду в точках, для яких  $l(x) = 1$ . Аналогічно досліджують функціональний ряд і за радикальною ознакою Коші.

## 2.2. Рівномірна збіжність функціонального ряду

Функціональний ряд (1.9) називають *рівномірно збіжним* на множині  $D$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  існує таке число  $N = N(\varepsilon)$ , яке залежить від  $\varepsilon$  і не залежить від  $x$ , що для всіх  $n > N$  і для всіх  $x \in D$  виконується нерівність

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

З'ясуємо геометричну інтерпретацію рівномірної збіжності функціонального ряду. Нехай на проміжку  $(a; b)$  функціональний ряд (1.9) є рівно-

мірно збіжним,  $S(x)$  — його сума,  $S_n(x)$  —  $n$ -а частинна сума. Візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$  і побудуємо на  $(a; b)$  графіки функцій  $y = S(x)$ ,  $y = S(x) + \varepsilon$  та  $y = S(x) - \varepsilon$  (рис. 1.2, а). Графіки двох останніх функцій утворюють смугу шириною  $2\varepsilon$ . Якщо ряд (1.9) збігається рівномірно на  $(a; b)$  до функції  $S(x)$ , то існує такий номер  $N = N(\varepsilon)$ , що графіки всіх частинних сум  $y = S_n(x)$ ,  $n > N$  на проміжку  $(a; b)$  розміщені всередині  $2\varepsilon$ -смуги.

Це означає, що суму  $S(x)$  на проміжку  $(a; b)$  можна наближено замінити з будь-якою наперед заданою точністю однією й тією самою частинною сумою  $S_n(x)$ .

Для нерівномірно збіжних рядів такого номера не існує: графіки частинних сум виходять за межі  $2\varepsilon$ -смуги (рис. 1.2, б). Це означає, що обчислення суми  $S(x)$  для всіх  $x \in (a; b)$  з однією точністю  $\varepsilon$  за допомогою частинної суми  $S_n(x)$  неможливе. Оскільки ряд збіжний, то, щоб обчислити суму ряду в кожній точці з інтервала  $(a; b)$ , потрібно взяти різну кількість членів ряду.

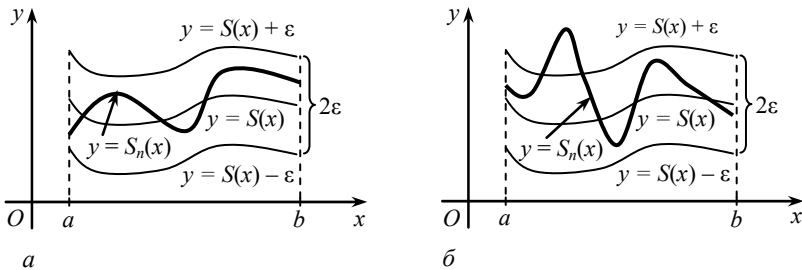


Рис. 1.2

Для дослідження функціональних рядів на рівномірну збіжність часто використовують таку достатню ознаку рівномірної збіжності.

**Теорема 1** (ознака Вейєрштрасса). Функціональний ряд (1.9) абсолютно і рівномірно збіжний на множині  $D$ , якщо існує такий знако-

додатний збіжний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , що для всіх  $x \in D$  виконуються нерівності

$$|u_n(x)| \leq a_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При цьому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  називають *мажорантним* для ряду (1.9), а сам ряд (1.9) називають *правильно збіжним* на множині  $D$ .

**Теорема 2** (*критерій Коші*). Функціональний ряд (1.9) збігається рівномірно на множині  $D$  тоді і тільки тоді, коли для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує число  $N = N(\varepsilon)$  таке, що для всіх  $n > N$ , для будь-якого натурального  $p$  і для всіх  $x \in D$  виконується нерівність

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon.$$

### 2.3. Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Якщо функціональний ряд (1.9) рівномірно збіжний на деякому проміжку  $I$  і члени цього ряду — неперервні функції на  $I$ , то сума цього ряду є функція, неперервна на цьому проміжку.

2. Якщо функціональний ряд (1.9) збіжний на проміжку  $I$ , його члени на цьому проміжку мають неперервні похідні  $u'_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), причому ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  рівномірно збіжний на проміжку  $I$ , то заданий ряд можна по-членно диференціювати, тобто

$$S'(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x), \quad x \in I.$$

3. На будь-якому відрізку, що належить проміжку  $I$  рівномірної збіжності функціонального ряду (1.9), члени якого — неперервні функції на  $I$ , цей ряд можна по-членно інтегрувати, тобто на проміжку  $[\alpha; \beta] \in I$  виконується формула

$$\int_{\alpha}^{\beta} S(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx.$$

Перелічені властивості рівномірно збіжних рядів дають змогу ефективно використовувати їх при наближених обчисленнях.

### 2.4. Степеневі ряди

Функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad (1.10)$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  — дійсні числа, називають *степеневим* рядом.

Розглядають також степеневий ряд за степенями двочлена  $x - x_0$ , тобто ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (1.11)$$

де  $x_0$  — деяке сталє число. Заміною  $x - x_0 = t$  ряд (1.11) зводиться до ряду (1.10). Тому основні твердження для степеневих рядів будемо формулювати для рядів вигляду (1.10).

Область збіжності степеневого ряду (1.10) містить принаймні одну точку  $x = 0$  (ряд (1.11) завжди збігається у точці  $x = x_0$ ).

**Теорема 3** (Абеля). Якщо степеневий ряд вигляду (1.10) збігається для  $x = x_1 \neq 0$ , то він абсолютно збіжний для всіх значень  $x$ , що задовольняють нерівність  $|x| < |x_1|$  (рис. 1.3, а).

*Доведення.* За умовою числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_1^n$  збігається. Отже, за необхідною ознакою збіжності  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$ . Звідси випливає, що величина  $a_n x_1^n$  обмежена, тобто існує таке число  $M > 0$ , що виконується нерівність  $|a_n x_1^n| \leq M, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Нехай  $|x| < |x_1|$ , позначимо  $q = \frac{|x|}{|x_1|}$ , тоді  $q < 1$  та

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| \leq M \cdot q^n.$$

Отже, модуль кожного члена ряду (1.10) не перевищує відповідного члена збіжного ряду геометричної прогресії. Тому за ознакою порівняння для всіх  $x$ , що задовольняють нерівність  $|x| < |x_1|$ , ряд (1.10) є абсолютно збіжним.

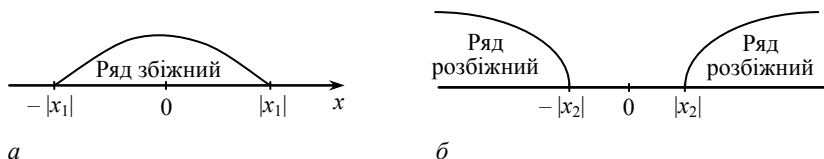


Рис. 1.3



**Наслідок.** Якщо ряд (1.10) розбігається при  $x = x_2$ , то він розбігається і для всіх значень  $x$ , що задовольняють нерівність  $|x| > |x_2|$  (рис. 1.3, б).

Справді, якщо припустити збіжність ряду в точці  $x = x_3$ , яка задовольняє нерівність  $|x_3| > |x_2|$ , то за теоремою Абеля ряд збігався би при всіх  $x$ , для яких  $|x| < |x_3|$ , зокрема, й у точці  $x = x_2$ , що суперечить умові.

Теорема Абеля характеризує множини точок збіжності та розбіжності степеневому ряду. Можливі такі три випадки:

- 1) ряд збіжний лише в одній точці  $x = 0$ ;
- 2) ряд збіжний для будь-якого  $x \in (-\infty; \infty)$ ;
- 3) існує таке додатне число  $R$ , що при  $|x| < R$  ряд абсолютно збіжний, а при  $|x| > R$  — розбіжний (рис. 1.4).

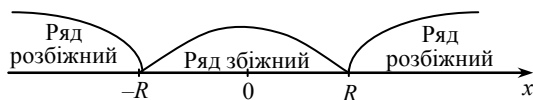


Рис. 1.4

Число  $R$  називають *радіусом збіжності* степеневому ряду. Зв'язок між радіусом та інтервалом збіжності степеневих рядів (1.10), (1.11) наведено в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Радіус збіжності $R$	Інтервал збіжності степеневому ряду (1.10)	Інтервал збіжності степеневому ряду (1.11)
$R = 0$	$x = 0$	$x = x_0$
$R = \infty$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$
$0 < R < \infty$	$(-R; R)$	$(-R + x_0; R + x_0)$

Радіус збіжності можна знайти з таких міркувань. Утворимо ряд із модулів членів степеневому ряду (1.10)

$$|a_0| + |a_1x| + |a_2x^2| + \dots + |a_nx^n| + \dots$$

і застосуємо до нього ознаку Д'Аламбера. Припустимо, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \neq 0, \quad x \neq 0.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд збігається, якщо  $|x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ , звідси

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Отже, радіус збіжності можна визначити за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (1.12)$$

Аналогічно, скориставшись радикальною ознакою Коші, дістають ще одну формулу для обчислення радіуса збіжності

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (1.13)$$



*Зауваження.*

1. У разі, коли  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ , радіус збіжності  $R = \infty$ .

2. Якщо степеневий ряд містить не всі степені  $x$ , тобто є неповним, то радіус збіжності безпосередньо за формулами (1.12) та (1.13) знаходити не можна. У цьому випадку інтервал збіжності визначають за ознакою Д'Аламбера (чи Коші) для ряду, складеного з модулів членів заданого ряду, або ж, виконавши відповідну заміну (якщо це можливо), зводять неповний степеневий ряд до повного, після чого знаходять радіус збіжності.

3. Якщо  $0 < R < \infty$ , то в цьому разі степеневий ряд у точках, які є кінцями інтервалу збіжності, може збігатися або розбігатися. Підставляючи по черзі у заданий ряд точки  $x = \pm R$  (чи  $x = -R + x_0; R + x_0$ ), досліджують утворені числові ряди на збіжність. У результаті область збіжності степеневого ряду може відрізнятись від інтервалу збіжності не більше ніж двома точками. Іншими словами, область збіжності степеневого ряду (1.10) — це інтервал збіжності  $(-R; R)$  (для ряду (1.11) —  $(-R + x_0; R + x_0)$ ), доповнений, можливо, двома точками  $x = \pm R$  (чи  $x = -R + x_0; R + x_0$ ).

### 2.5. Властивості степеневих рядів

1. Степеневий ряд (1.10) абсолютно і рівномірно збігається на будь-якому відрізку  $[-a; a]$ , який цілком міститься в інтервалі збіжності  $(-R; R)$ .

2. Сума  $S(x)$  степеневого ряду (1.10) неперервна функція на проміжку  $(-R; R)$ .

3. (Про почленне диференціювання.) Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати. Ряд, утворений диференціюванням, має той самий інтервал збіжності, причому, якщо

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

то

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

4. (Про почленне інтегрування.) На будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності  $(-R; R)$ , степеневий ряд можна почленно інтегрувати.

Зокрема, якщо відрізок інтегрування  $[0; x] \in (-R; R)$  і  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , то

$$\int_0^x S(x) dx = \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

причому утворений після інтегрування ряд має той самий інтервал збіжності.

5. Степеневі ряди  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  та  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  із радіусами збіжності  $R_1$  та  $R_2$  відповідно можна почленно додавати, віднімати, перемножувати. Радіус збіжності утворених рядів не менший, ніж менше з чисел  $R_1$  та  $R_2$ .

Ці властивості використовують для розвинення функцій у ряди і їх застосування для обчислення наближених значень функцій і інтегралів.

## 2.6. Ряд Тейлора

Нехай функція  $f(x)$  задана в околі точки  $x_0$  і має похідні всіх порядків. Постає питання, за яких умов і як цю функцію можна подати у вигляді степеневого ряду за степенями  $x - x_0$ , тобто справджується формула

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots \quad (1.14)$$

Знайдемо коефіцієнти ряду. Для цього застосуємо такий алгоритм. Послідовно продиференціюємо ряд (1.14) за змінною  $x$ :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n a_n(x - x_0)^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - x_0) + 4 \cdot 3 a_4(x - x_0)^2 \dots + n(n-1) a_n(x - x_0)^{n-2} + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 a_4(x - x_0) + \dots + n(n-1)(n-2) a_n(x - x_0)^{n-3} + \dots$$

.....

Звідси, після підстановки значень  $x = x_0$ , дістанемо

$$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}, \quad a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \quad \dots$$

Після цього формула (1.14) набирає вигляду

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (1.15)$$

Ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots \quad (1.16)$$

називають *рядом Тейлора* функції  $f(x)$ .

Нагадаємо відому з першого семестру *формулу Тейлора*. Якщо функція  $f(x)$  має в точці  $x_0$  і деякому її околі похідні до  $(n+1)$ -го порядку включно, то для довільного  $x$  із цього околу має місце формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

де  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$  — залишковий член у формі Лагранжа,

$$c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1.$$

#### Теорема 4

Для того щоб ряд Тейлора (1.16) збігався до функції  $f(x)$  в інтервалі  $(x_0 - R; x_0 + R)$ , тобто справджувалась рівність (1.15), необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція  $f(x)$  мала похідні всіх порядків і залишковий член формули Тейлора прямував до нуля при  $n \rightarrow \infty$  для всіх  $x$  із цього інтервалу:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R).$$

Порівнюючи формулу (1.15) із формулою Тейлора, помітимо, що ряд Тейлора відрізняється від формули Тейлора відсутністю залишкового члена  $R_n(x)$  і наявністю нескінченної кількості членів.

На практиці часто користуються наступною теоремою, яка дає досить прості достатні умови розкладання функції в ряд Тейлора.

#### Теорема 5

Якщо функція  $f(x)$  в інтервалі  $(x_0 - R; x_0 + R)$  має похідні всіх порядків та існує число  $M > 0$  таке, що



$$|f^{(n)}(x)| < M, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R), \quad n = 1, 2, \dots,$$

то функцію  $f(x)$  можна розкласти у збіжний до цієї функції ряд Тейлора.

Частинний випадок ряду Тейлора, коли  $x_0 = 0$ , називають рядом *Маклорена* — розклад функції у степеневий ряд за степенями  $x$ :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (1.17)$$

## 2.7. Розкладання елементарних функцій у ряд Маклорена

Щоб розкласти функцію  $f(x)$  у ряд Маклорена, потрібно:

- 1) обчислити значення похідних  $f'(x)$ ,  $f''(x)$ , ...,  $f^{(n)}(x)$ , ... у точці  $x = 0$ ;
- 2) записати ряд (1.17) і знайти інтервал його збіжності;
- 3) визначити інтервал, в якому залишковий член формули Маклорена  $R_n(x) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Зазначена процедура часто призводить до громіздких викладок. Тому на практиці при розкладанні функцій у ряд Тейлора (Маклорена) часто використовують відомі розвинення основних елементарних функцій у комбінації з правилами додавання, віднімання, множення рядів і теоремами про інтегрування та диференціювання степеневих рядів.

Наведемо розклади деяких елементарних функцій у ряд Маклорена (див. табл. 1.2):

Таблиця 1.2

№	Ряд Маклорена функції $f(x)$	Область збіжності
1	$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
2	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
3	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
4	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
5	$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$

6	$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-(n-1))}{n!}x^n + \dots$	$-1 \leq x \leq 1,$ $\forall m \geq 0;$ $-1 < x \leq 1$ әә $m \in (-1; 0);$ $-1 < x < 1,$ $\forall m \leq -1.$
7	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$	$-1 < x < 1$
8	$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$	$-1 < x < 1$

## 2.8. Деякі застосування степеневих рядів

Степеневі ряди використовують для наближеного обчислення значень функцій, визначених інтегралів, розв'язання диференціальних рівнянь, що задовольняють початкові умови, тощо.

### 2.8.1. Наближене обчислення значень функцій

Нехай треба обчислити значення функції  $f(x)$  при  $x = x_0$ . Якщо функцію  $f(x)$  можна розкласти у степеневий ряд в інтервалі  $(-R; R)$  і  $x_0 \in (-R; R)$ , то точне значення  $f(x_0)$  дорівнює сумі цього ряду в точці  $x = x_0$ , а наближене — частинній сумі  $S_n(x_0)$ . Абсолютну похибку  $|f(x_0) - S_n(x_0)| = |r_n(x_0)|$  можна знайти, оцінюючи залишок ряду  $r_n(x_0)$ .

Так, для альтерновних рядів (рядів лейбніцевого типу) справджується оцінка (див. наслідок із теореми Лейбніца)

$$|r(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) - u_{n+2}(x_0) + \dots| < |u_{n+1}(x_0)|.$$

Оцінювання залишку знакододатного чи знакозмінного рядів значно складніше. В цьому випадку, використовуючи властивості модулів, запишуть оцінку

$$|r(x_0)| = |u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \dots| \leq |u_{n+1}(x_0)| + |u_{n+2}(x_0)| + \dots$$

Якщо можна підібрати такий знакододатний числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  (звичай це ряд геометричної прогресії), що

$$u_{n+1}(x_0) \leq a_1, u_{n+2}(x_0) \leq a_2, \dots,$$

тоді точність обчислення значення функції  $f(x_0)$  обмежена значенням суми ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , тобто

$$|r(x_0)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

### 2.8.2. Наближене обчислення визначених інтегралів

Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , причому первісна  $F(x)$  не виражається через елементарні функції або її важко знайти. У цьому разі виконують такі дії:

- 1) задають точність обчислення  $\varepsilon > 0$ ;
- 2) розкладають підінтегральну функцію  $f(x)$  у степеневий ряд (ряд Маклорена);
- 3) якщо проміжок інтегрування  $[a; b]$  належить інтервалу збіжності  $(-R; R)$ , то далі користуються властивістю про почленне інтегрування степеневого ряду.

Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

### 2.8.3. Наближене розв'язання диференціальних рівнянь

Якщо інтегрування диференціального рівняння не зводиться до квадратур, тобто розв'язок не виражається через елементарні функції, або ж інтегрування рівняння ускладнене, то застосовують наближене розв'язання диференціального рівняння за допомогою ряду Тейлора.

Нехай треба розв'язати задачу Коші, тобто знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y), \tag{1.18}$$

який задовольняє початкову умову  $y(x_0) = y_0$ .

Розв'язок рівняння шукаємо у вигляді ряду Тейлора

$$y = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots,$$

де доданок  $y(x_0) = y_0$  заданий початковою умовою, а інші коефіцієнти  $y'(x_0)$ ,  $y''(x_0)$ , ...,  $y^{(n)}(x_0)$ , ... підлягають визначенню. Підставивши у диференціальне рівняння (1.18) значення  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , визначимо коефіцієнти

ент  $y'(x_0)$ , тобто  $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ . Щоб знайти коефіцієнт  $y''(x_0)$ , диференціюємо обидві частини рівняння за змінною  $x$ :  $(y')' = (f(x, y))'$ , звідси  $y'' = f_1(x, y, y')$ . Підставивши у праву частину одержаного рівняння значення  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $y' = y'(x_0)$ , дістанемо значення  $y''(x_0)$ . Продовжуючи процес диференціювання і підстановки у праву частину одержаних рівнянь відомих уже значень, дістають коефіцієнти  $y'''(x_0)$ ,  $y^{(4)}(x_0)$  і т. д. Ряд Тейлора із визначеними коефіцієнтами є частинним розв'язком рівняння (1.18) для тих значень  $x$ , при яких він збігається. Частинна сума цього ряду буде наближеним розв'язком заданої задачі Коші.



*Зауваження.*

1. Розглянутий метод послідовного наближення застосовний для розв'язання диференціальних рівнянь довільного порядку.
2. Питання про похибку наближеного розв'язку диференціального рівняння ми не розглядаємо.

## Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Знайдіть область збіжності функціональних рядів.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x^2+x-1}}.$$

*Розв'язання.* Оскільки узагальнений гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  збіжний для  $p > 1$ , то область збіжності заданого ряду визначасмо з нерівності  $x^2 + x - 1 > 1$ , звідки дістаємо  $x^2 + x - 2 > 0$ ,  $x \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$ .

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{nx}}.$$

*Розв'язання.* Ряд визначений для будь-якого дійсного  $x$ , причому незалежно від  $x$  члени цього ряду додатні. Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^{(n+1)x}} \cdot \frac{2^{nx}}{n} = \frac{1}{2^x} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2^x}.$$

Оскільки ряд збігається, якщо  $l(x) < 1$ , то розв'язуємо нерівність

$$\frac{1}{2^x} < 1, \quad 2^x > 1, \quad x > 0.$$

При  $x = 0$  виконується умова  $l(x) = 1$ , тому перевіримо в цій точці ряд на збіжність:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-0}} = \sum_{n=1}^{\infty} n$  — розбіжний ряд.

Отже, область збіжності заданого ряду — інтервал  $(0; \infty)$ .

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}.$$

*Розв'язання.* Ряд визначений на всій числовій прямій, крім однієї точки —  $x = -1$ . Розглянемо випадки:

1)  $x = 1$ , тоді загальний член ряду  $u_n = \frac{1}{2}$  не прямує до нуля, отже, в цій точці ряд розбіжний;

2)  $-1 < x < 1$ , тоді  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n} = 1 \neq 0$ , ряд розбігається;

3)  $x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ . Покажемо, що у цьому випадку ряд збігається.

Справді, оскільки ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$  збіжний для  $x$ , що задовольняють умову

$$\left| \frac{1}{x^n} \right| < 1, \text{ тобто } |x| > 1, \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1+x^n} \cdot x^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^n}{1+x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\frac{1}{x^n} + 1} \right| = 1, \text{ то за}$$

граничною ознакою порівняння заданий ряд збіжний для  $|x| > 1$ .

Отже, область збіжності вихідного ряду — множина  $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ .

Дослідіть на рівномірну збіжність функціональні ряди.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}.$$

*Розв'язання.* Ряд визначений для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$  і є знакозмінним функціональним рядом. Покажемо, що цей ряд абсолютно і рівномірно збіжний на всій числовій прямій. Застосуємо ознаку Вейерштрасса. Збіжний

числовий ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$  є мажорантним для вихідного ряду. Справді, члени

ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^3}$ , який складений із модулів членів вихідного ряду, задово-

ляють нерівності  $\frac{|\sin nx|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$ . Отже, за ознакою Вейерштрасса ряд збігається абсолютно і рівномірно.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+|x|}.$$

*Розв'язання.* Ряд визначений для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$  і є альтерновним функціональним рядом. Оцінимо залишок  $|r_n| < |u_{n+1}| = \frac{1}{n+1+|x|} \leq \frac{1}{n+1}$ , причому ця оцінка справджується для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$ . Нехай  $\varepsilon > 0$  задано. Потрібно вказати номер  $N = N(\varepsilon)$ , залежний від  $\varepsilon$  і не залежний від  $x$ , що для всіх  $n > N$  і для всіх  $x \in D$  виконується нерівність

$$|r_n(x)| < \varepsilon.$$

Для нашого ряду нерівність  $|r_n(x)| < \varepsilon$  виконується для всіх дійсних  $x$  і  $n > N(\varepsilon)$ , де  $N(\varepsilon) = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right]$  (тут  $[a]$  — ціла частина числа  $a$ ). Тому ряд збігається рівномірно для всіх  $x \in (-\infty; \infty)$ . Проте ця збіжність не є абсолютною, бо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+|x|} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+|x|}$  є розбіжним (порівняйте його з гармонічним рядом). Отже, вихідний ряд збігається рівномірно, але не абсолютно.



*Зауваження.* Попередній приклад свідчить про те, що не кожен рівномірно збіжний на деякому проміжку ряд буде абсолютно збіжним на цьому проміжку.

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

*Розв'язання.* Для вказаних  $x$  ряд збігається як сума нескінченно спадної геометричної прогресії. Покажемо, що ця збіжність нерівномірна.

Розглянемо залишок ряду  $r_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = \frac{x^{n+1}}{1-x}$  і знайдемо границі

$$\lim_{x \rightarrow -1} |r_n(x)| = \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} |r_n(x)| = \lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = \infty.$$

Якщо задати  $0 < \varepsilon < 0,5$ , нерівність  $|r_n(x)| < \varepsilon$  для всіх  $x \in (-1; 1)$  не виконуватиметься, що суперечить означенню рівномірної збіжності. Отже, ряд збігається нерівномірно.



*Зауваження.* Якщо функціональний ряд, члени якого неперервні на відріжку  $[a; b]$  функції, збігається на цьому відріжку до розривної функції  $S(x)$ , то ряд збігається на  $[a; b]$  нерівномірно.

Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$$

*Розв'язання.* Ряд є повним степеневим рядом. Тому для нього застосовні формули (1.12), (1.13). Знайдемо радіус збіжності за формулою (1.12). Маємо

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}};$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{(-1)^{n+2}} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 3.$$

Визначаємо інтервал збіжності:  $-3 < x - 5 < 3$ ,  $2 < x < 8$ . Отже, ряд абсолютно збіжний у внутрішніх точках інтервалу (2; 8).

Залишилося дослідити поведінку ряду на кінцях інтервалу збіжності.

Нехай  $x = 2$ , вихідний ряд переходить у розбіжний числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

У точці  $x = 8$  ряд набуває вигляду  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Цей ряд збігається умовно.

Отже, область збіжності ряду — проміжок (2; 8].

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} n!(x+2)^n.$$

*Розв'язання.* За формулою (1.12) дістаємо

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n! \cdot (n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Оскільки радіус збіжності дорівнює нулю, то степеневий ряд збігається лише в одній точці —  $x = -2$ .

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n x^{2n}.$$

*Розв'язання.* Ряд є неповним, оскільки коефіцієнти цього ряду при непарних степенях  $x$  дорівнюють нулю. Позначивши  $x^2 = t \geq 0$ , дістанемо повний степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n t^n, \quad (1.19)$$

радіус збіжності якого визначаємо за формулою (1.13):

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left( \frac{n}{2n+1} \right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Отже, ряд (1.19) збігається для  $t \in (-2; 2)$ . Враховуючи обмеження  $t \geq 0$ , дістанемо  $t \in [0; 2)$ . У точці  $t = 0$  ряд (1.19) збіжний. Дослідимо цей ряд на правому кінці інтервалу збіжності. Поклавши в (1.19)  $t = 2$ , дістанемо числовий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^n.$$

Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{2n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$ , то при  $t = 2$  ряд (1.19) розбігається. Отже, ряд (1.19) збіжний на інтервалі  $t \in [0; 2)$ . Повернувшись до заміни  $x^2 = t$ , визначимо область збіжності вихідного ряду:

$$x^2 \in [0; 2), \quad |x| < \sqrt{2}, \quad -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

10.  $\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n^2} x^{n^2}.$

*Розв'язання.* Ряд є неповним, тому застосування формул (1.12), (1.13) неможливе. За радикальною ознакою Коші маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^{n^2} x^{n^2}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} (5|x|)^n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 5|x| < 1, \\ 1, & \text{якщо } 5|x| = 1, \\ \infty, & \text{якщо } 5|x| > 1. \end{cases}$$

Отже, ряд збігається на інтервалі  $\left( -\frac{1}{5}; \frac{1}{5} \right)$ . У кінцевих точках указанного інтервалу ряд розбігається (переконайтесь у цьому самостійно).

11. Знайдіть суму ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$  ( $|x| < 1$ ).

*Розв'язання.* Потрібно знайти суму

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots$$



Розглянемо геометричний ряд  $1+x+x^2+x^3+\dots+x^n+\dots$ , він збіжний для  $|x|<1$ , причому його сума  $S_1(x)=\frac{1}{1-x}$ . Скориставшись властивістю про почленне диференціювання степеневого ряду, дістанемо

$$S(x) = (S_1(x))' = \left( \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

**12.** Розкладіть у ряд Маклорена функції:

а)  $f(x) = e^x$ ; б)  $g(x) = x^2 e^{2x}$ .

*Розв'язання:* а) функція  $f(x) = e^x$  нескінченно диференційовна, причому  $e^x = (e^x)' = (e^x)'' = \dots = (e^x)^{(n)}$  для довільного  $n \in \mathbb{N}$ , звідси випливає, що  $f(0) = f(0)' = f(0)'' = \dots = f(0)^{(n)} = 1$  і

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (1.20)$$

Знайдемо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!}{n!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty,$$

тобто ряд збігається в інтервалі  $(-\infty; \infty)$ .

Залишилося довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ . Для всіх  $x \in (-r; r)$ , де  $r$  — будь-яке додатне число, виконуються нерівності

$$\left| f^{(n)}(x) \right| = e^x < e^r = M,$$

тому за теоремою 5  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ .

Отже, на будь-якому інтервалі  $(-r; r) \subset (-\infty; \infty)$ , тобто на інтервалі  $(-\infty; \infty)$ , функція  $e^x$  розкладається у ряд Маклорена за формулою (1.20);

б) щоб розкласти функцію  $g(x)$  у ряд Маклорена, достатньо замінити у формулі (1.20)  $x$  на  $2x$  і результат помножити на  $x^2$ , тоді дістанемо

$$\begin{aligned} g(x) = x^2 e^{2x} &= x^2 \left( 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= x^2 + \frac{2x^3}{1!} + \frac{2^2 x^4}{2!} + \frac{2^3 x^5}{3!} + \dots + \frac{2^n x^{n+2}}{n!} + \dots \end{aligned}$$

Цей ряд збігається до функції  $g(x)$  на всій числовій прямій.

**13.** Розкладіть у ряд Тейлора за степенями  $x-1$  функції:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{x+2}; \quad \text{б) } g(x) = \frac{1}{(x+2)^2}.$$

*Розв'язання:* а) позначимо  $x-1=t$ , тоді

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{t+1+2} = \frac{1}{3+t} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}}.$$

Скориставшись формулою 7 (табл. 1.2), записуємо розвинення

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}},$$

звідки після заміни  $t$  на  $x-1$ , дістанемо остаточну відповідь

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} - \frac{x-1}{3^2} + \frac{(x-1)^2}{3^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Ця рівність справедлива, якщо  $\frac{|x-1|}{3} < 1$ . Звідси  $-2 < x < 4$ ;

б) оскільки  $\frac{1}{(x+2)^2} = -\left(\frac{1}{x+2}\right)'$ , то, скориставшись властивістю про

почленне диференціювання степеневого ряду, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)^2} &= -\left(\frac{1}{3} - \frac{x-1}{3^2} + \frac{(x-1)^2}{3^3} - \dots + (-1)^n \frac{(x-1)^n}{3^{n+1}} + \dots\right)' = \\ &= -\left(-\frac{1}{3^2} + \frac{2(x-1)}{3^3} - \dots + (-1)^n \frac{n(x-1)^{n-1}}{3^{n+1}} + \dots\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}} n(x-1)^{n-1}, \quad x \in (-2; 4). \end{aligned}$$

**14.** Розкладіть у ряд Маклорена функцію  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

*Розв'язання.* Замінивши у формулі 7 (табл. 1.2)  $x$  на  $x^2$ , запишемо рівність

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, \quad x \in (-1; 1).$$

Скориставшись властивістю про почленне інтегрування степенового ряду, дістанемо

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x dt - \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^6 dt + \dots + (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt + \dots$$

або

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Можна довести, що ця рівність справедлива і для  $x = \pm 1$ , отже, ряд збіжний для  $x \in [-1; 1]$ .

**15.** Розкладіть у ряд Маклорена функцію  $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$ .

*Розв'язання.* Перетворимо логарифмічну функцію:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 3x + 2) &= \ln(x+2)(x+1) = \ln(x+2) + \ln(x+1) = \\ &= \ln 2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ln(1+x) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x}{2}\right) + \ln(1+x). \end{aligned}$$

Скориставшись розвиненням 4 (табл. 1.2) для логарифмічних функцій  $\ln \left(1 + \frac{x}{2}\right)$  і  $\ln(1+x)$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 3x + 2) &= \ln 2 + \left( \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n \cdot 2^n} + \dots \right) + \\ &+ \left( x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{1}{2^n} + 1\right) x^n. \end{aligned}$$

З'ясуємо область збіжності одержаного ряду. Оскільки ряд Маклорена для функції  $\ln \left(1 + \frac{x}{2}\right)$  збіжний при  $-1 < \frac{x}{2} \leq 1$ , тобто  $-2 < x \leq 2$ , а ряд для  $\ln(1+x)$  збіжний на проміжку  $-1 < x \leq 1$ , то одержане розкладання справедливе для  $-1 < x \leq 1$ , тобто для тих значень  $x$ , при яких збіжні одночасно обидва ряди.

**16.** Розкладіть у ряд Маклорена функцію  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}$ .

*Розв'язання.* Перетворимо функцію  $f(x)$  так:

$$\frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}$$

Використовуючи формулу 6 (табл. 1.2) для  $m = -0,5$ , розкладемо в ряд функцію  $\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+t}} &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)t + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}t^3 + \\ &+ \dots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}t^n + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}t^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 3!}t^3 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n \cdot n!}t^n + \dots \end{aligned}$$

Замінивши в цій рівності  $t$  на  $\frac{x^2}{9}$ , дістанемо

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}} = 1 - \frac{x^2}{18} + \frac{1 \cdot 3}{18^2 \cdot 2!}x^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{18^3 \cdot 3!}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{18^n \cdot n!}x^{2n} + \dots,$$

а тому шуканий розклад остаточно набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}} &= \frac{1}{3} \left( x^2 - \frac{x^4}{18} + \frac{1 \cdot 3}{18^2 \cdot 2!}x^6 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{18^3 \cdot 3!}x^8 + \dots + \right. \\ &\left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{18^n \cdot n!}x^{2n+2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Область збіжності ряду — проміжок  $-1 < \frac{x}{3} \leq 1$ , або  $-3 < x \leq 3$ .

**17.** Обчисліть  $\sqrt{e}$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

*Розв'язання.* Використовуючи розвинення у ряд Маклорена функції  $e^x$ , дістанемо

$$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n \cdot n!} + \dots$$

Визначимо  $n$  таким, щоб похибка наближеної рівності

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{2^n n!}$$

не перевищувала заданої точності. Для цього оцінимо залишок

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} + \frac{1}{2^{n+2}(n+2)!} + \frac{1}{2^{n+3}(n+3)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)(n+3)} + \dots \right) < \\ &< \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \left( 1 + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2^2(n+2)^2} + \frac{1}{2^3(n+2)^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2(n+2)}} = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2(n+2)}{2n+3} = \frac{n+2}{2^n(2n+3)(n+1)!}. \end{aligned}$$

Добором встановлюємо, що нерівність  $r_n < \frac{n+2}{2^n(2n+3)(n+1)!} < 0,001$  виконується, починаючи з  $n = 4$ . Отже,

$$\begin{aligned} \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} + \frac{1}{2^2 \cdot 2!} + \frac{1}{2^3 \cdot 3!} + \frac{1}{2^4 \cdot 4!} \approx \\ &\approx 1 + 0,5 + 0,125 + 0,0208 + 0,0026 = 1,6484. \end{aligned}$$

Для обчислення логарифмів використання ряду

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

є неефективним через його повільну збіжність. На практиці зручнішою є формула

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad x \in (-1; 1). \quad (1.21)$$

Похибка цієї формули оцінюється нерівністю

$$|r_n(x)| = 2 \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n+3}}{2n+3} + \dots \right| < \\ < 2 \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} (1 + x^2 + x^4 + \dots) = 2 \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

Покладемо у формулі (1.21)  $x = \frac{1}{2t+1}$ ,  $t \in N$ , дістанемо формулу для обчислення логарифмів натуральних чисел

$$\ln(t+1) = \ln t + 2 \left( \frac{1}{2t+1} + \frac{1}{3(2t+1)^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2t+1)^{2n-1}} + \dots \right), \quad (1.22)$$

причому

$$|r_n(t)| < \frac{1}{2(2n+1)t(t+1)(2t+1)^{2n-1}}.$$

**18.** Обчисліть  $\ln 2$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

*Розв'язання.* Поклавши у формулі (1.22)  $t = 1$ , дістанемо

$$\ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 3^{2n-1}} + \dots \right).$$

Шляхом добору визначимо  $n$  так, щоб виконувалась нерівність

$$r_n(1) < \frac{1}{4(2n+1) \cdot 3^{2n-1}}.$$

Маємо:  $r_2(1) < \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 3^3} = \frac{1}{180}$ ,  $r_3(1) < \frac{1}{4 \cdot 7 \cdot 3^5} = \frac{1}{6804} < 0,001$ .

Отже,  $n = 3$  і для обчислення  $\ln 2$  дістаємо наближену рівність

$$\ln 2 \approx 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} \right) \approx 2(0,3333 + 0,0123 + 0,0008) \approx 0,693.$$

**19.** Обчисліть  $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx$  з точністю  $\varepsilon = 0,001$ .

*Розв'язання.* Застосувати формулу Ньютона—Лейбніца неможливо, оскільки невизначений інтеграл  $\int e^{-x^2} dx$  не виражається через елементарні функції. Для обчислення інтеграла розкладемо підінтегральну функцію у степеневий ряд і скористаємося властивістю про почленне інтегрування степеневого ряду. Дістанемо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx = \\ &= \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!} + \dots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 2!} - \frac{1}{2^7 \cdot 7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^{2n+1} (2n+1) \cdot n!} + \dots \end{aligned}$$

Оскільки цей ряд є альтерновним і задовольняє умови теореми Лейбніца, то згідно з наслідком з цієї теореми визначаємо найменший номер  $n$ , для якого виконується нерівність

$$\frac{1}{2^{2n+1} (2n+1) \cdot n!} < 0,001, \text{ або } 2^{2n+1} (2n+1) \cdot n! > 1000.$$

Ця нерівність виконується починаючи з  $n = 3$ . Тому, взявши перші три члени ряду, дістанемо

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^5 \cdot 5 \cdot 2!} \approx 0,5 - 0,0417 + 0,0031 \approx 0,461.$$

**20.** Знайдіть наближений розв'язок задачі Коші

$$y' = x^2 + y^3, \quad y(0) = 1,$$

обмежившись чотирма ненульовими членами розвинення цього розв'язку у степеневий ряд.

*Розв'язання.* Розв'язок шукаємо у вигляді ряду Маклорена

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

З умови задачі записуємо перші два коефіцієнти

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0^2 + 1^3 = 1.$$

Диференціюємо вихідне рівняння:  $y'' = 2x + 3y^2 y'$ . Підставивши в одержане рівняння значення  $x = 0$ ,  $y(0) = 1$  та  $y'(0) = 1$ , дістанемо коефіцієнт  $y''(0) = 0 + 3 = 3$ . Тепер переходимо до рівняння  $y''' = 2 + 3(2y(y')^2 + y^2 y'')$ . Тоді  $y'''(0) = 2 + 3(2 + 3) = 17$ . Отже, наближений розв'язок задачі Коші визначається формулою

$$y \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{17}{6}x^3.$$

Ця формула тим точніша, чим ближча змінна  $x$  до нуля.

## Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть область збіжності функціональних рядів.

- |  |  |   |
|--|--|---|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^4}$ . | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sin x}}$ .              | 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}$ .                           |
| 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$ .    | 5. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n!}$ . | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3(x^2 + 2)}$ .                           |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{(1-n)x}$ .          | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} n \ln^n x$ .                         | 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{n+1}$ . |

Дослідіть на рівномірну збіжність функціональні ряди на вказаному проміжку.

- |  |   |
|--|---|
| 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n + x^2}, \quad x \in (-\infty; \infty)$ .     | 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n! + x^6}, \quad x \in (-\infty; \infty)$ . |
| 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1 + n^2 x^2}, \quad x \in (-\infty; \infty)$ . | 13. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad x \in (0; \infty)$ .                        |
| 14. $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n, \quad x \in (-1; 1)$ .                          | 15. $\sum_{n=1}^{\infty} nxe^{-nx}, \quad x \in [0; \infty)$ .                      |

Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

- |  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ .          | 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[4]{n+1}}$ . | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{(2n+1)!}$ .     | 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln(n+1)}$ . |
| 20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^{n+1}}$ . | 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n^n} (x+2)^{n+1}$ .    | 22. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+3) \cdot 5^n (x-1)^n$ .    |  |
| 23. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 5^n}$ .    | 24. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{8^n + 1}$ .    | 25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1}}{n} x^{n^2}$ . |  |



Знайдіть інтервал збіжності степеневих рядів.

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2} (x-e)^n. \quad 27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \frac{x^{2n}}{2^n}. \quad 28. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Знайдіть суму степеневих рядів.

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n. \quad 30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \quad 31. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}.$$

Розкладіть у ряд Тейлора за степенями  $x - x_0$  функції:

$$32. \frac{1}{x}, \quad x_0 = 2.$$

$$33. \frac{1}{3x+1}, \quad x_0 = -1.$$

$$34. \ln(x^2 + 2x + 2), \quad x_0 = -1.$$

$$35. \frac{1}{(x+3)^2}, \quad x_0 = -2.$$

$$36. \frac{1}{(x+3)^3}, \quad x_0 = -2.$$

$$37. xe^{2x-1}, \quad x_0 = 1.$$

Розкладіть у ряд Маклорена функції:

$$38. 2x \cos^2 x.$$

$$39. \frac{x}{1-x^3}.$$

$$40. \frac{1}{2x-3}.$$

$$41. \frac{2x+3}{x^2+3x+2}.$$

$$42. \ln(3+6x).$$

$$43. (1+x^2)e^{-x}.$$

Обчисліть значення функцій із точністю  $\varepsilon$ .

$$44. \sqrt[3]{130}, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$45. \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$46. \cos 10^\circ, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$47. \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 0,001.$$

$$48. \ln 3, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$49. \ln 0,98, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

Обчисліть визначені інтеграли із точністю  $\varepsilon$ .

$$50. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$51. \int_0^1 \cos x^2 dx, \quad \varepsilon = 0,0001.$$

$$52. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}, \quad \varepsilon = 0,001. \quad 53. \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \varepsilon = 0,001.$$

Знайдіть наближений розв'язок задачі Коші, обмежившись чотирма ненульовими членами розвинення цього розв'язку у степеневий ряд.

$$54. y' = xy + e^y, \quad y(0) = 0. \\ 55. y' = y^3 + x\sqrt{y}, \quad y(0) = 1. \\ 56. xy' = x^2y^2 - y + 1, \quad y(0) = 2. \\ 57. y'' = yy' - x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

### Відповіді

1.  $(-\infty; \infty)$ . 2.  $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ . 3.  $x \neq \pm 1$ . 4.  $(0; \infty)$ . 5.  $[-1; 1]$ . 6.  $(-\infty; \infty)$ . 7.  $(0; \infty)$ .  
8.  $(e^{-1}; e)$ . 9.  $(-\infty; 0]$ . 10. Збігається рівномірно. 11. Збігається рівномірно. 12. Збігається рівномірно. 13. Збігається нерівномірно. 14. Збігається нерівномірно. 15. Збігається нерівномірно. 16.  $[-1; 1]$ . 17.  $[-1; 1)$ . 18.  $[-1; 1]$ . 19.  $[-1; 1)$ . 20.  $[1; 5)$ . 21.  $x = -2$ .  
22.  $(-0,2; 0,2)$ . 23.  $(-5; 5)$ . 24.  $(-2; 2)$ . 25.  $[-0,5; 0,5)$ . 26.  $(0; 2e)$ . 27.  $(-\sqrt{2}e; \sqrt{2}e)$ .  
28.  $(-4; 4)$ . 29.  $x(x+1)/(1-x)^3$ ,  $|x| < 1$ . *Вказівка.* Подайте ряд у вигляді  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ , після чого розгляньте ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  і скористайтесь властивістю про почленне диференціювання цього ряду. 30.  $-\ln|1-x|$ . 31.  $xe^x$ ,  $x \in R$ .  
32.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$ ,  $x \in (0; 4)$ . 33.  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{2^{n+1}}$ ,  $x \in \left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ . 34.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^{2n}}{n}$ ,  
 $x \in [-2; 0]$ . 35.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(x+2)^{n-1}$ ,  $x \in (-3; -1)$ . 36.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n(n-1)}{2} (x+2)^{n-2}$ ,  $x \in (-3; -1)$ .  
37.  $e \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} (n+2)}{n!} (x-1)^n \right)$ ,  $x \in R$ . 38.  $2x - \frac{2^2 x^3}{2!} + \frac{2^4 x^5}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!} + \dots$   
 $\dots x \in R$ . 39.  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1}$ ,  $-1 < x < 1$ . 40.  $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{3^{n+1}}$ ,  $|x| < \frac{3}{2}$ . 41.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right) x^n$ ,  
 $-1 < x < 1$ . 42.  $\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n x^n}{n}$ ,  $x \in (-0,5; 0,5]$ . 43.  $1 - x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-2)!} \right) x^n$ ,  
 $x \in R$ . 44. 5,0658. 45. 0,716. 46. 0,9948. 47. 0,321. 48. 1,0986. 49. -0,0202. 50. 0,4931.

51. 0,9045. 52. 0,494. 53. 0,333. 54.  $y \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{11}{24}x^4$ . 55.  $y \approx 1 + x + 2x^2 + \frac{19}{6}x^3$ .  
 56.  $y \approx 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{2x^4}{15} + \frac{17x^6}{315}$ . 57.  $y \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ .

## Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Знайдіть область збіжності функціональних рядів.

2.1.1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+x^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin \frac{x}{n\sqrt{n}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^{n+1}}{4^n}$ .

2.1.2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-x}{1-2x} \right)^n$ .

2.1.3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot x^{3n} \arcsin \frac{x}{n}$ ; в)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)}{n \ln^4 n}$ .

2.1.4. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} \sin \frac{x}{3^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{1+x^{2n}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x+2)^n}{7^{n+2}}$ .

2.1.5. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(3x)$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{x \cdot n^{x+2}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1)^x}$ .

2.1.6. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n(2x-1)$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x+1}{x-2} \right)^{n+1}$ .

2.1.7. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(x+1)^{n+1}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \operatorname{tg}^n(2x)$ .

2.1.8. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (15-x^2)^n$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n (x-1)^{2n}}$ .

2.1.9. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2 + n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^{2n}$ .

2.1.10. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (8-x^2)^n$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{x \cdot n^{x+1}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$ .

$$2.1.11. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4+x^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n} x^{4n} \cdot \sin \frac{x}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln^3 n}.$$

$$2.1.12. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^{2n} x}{n^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(x-3)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x-e)}.$$

$$2.1.13. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n x}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)^{x+1}}.$$

$$2.1.14. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)e^{n \cdot x}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x^2-1)^n}.$$

$$2.1.15. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 27^n \cdot x^{3n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-1)^n}{(n+2)3^n}.$$

$$2.1.16. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} e^{-n \cdot x}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ln^n(x+4)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{tg} \frac{x^n}{n^2}.$$

$$2.1.17. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{tg}^n \frac{x}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \pi n x}{n \ln^2 n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-3)^{2x}}.$$

$$2.1.18. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(x+e)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \sin^n x; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+2)^n}{n 2^n}.$$

$$2.1.19. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n x}{\sqrt[3]{n^4}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n x}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n x} + 3}.$$

$$2.1.20. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x}{e^{n x}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n^2}.$$

$$2.1.21. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \sin^n x; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2)^n}{4^n (n^2+2)}.$$

$$2.1.22. \text{ a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sin^{3n} x}{n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{x^2}{2^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3n+1}}{27^n \cdot \sqrt{n}}.$$

2.1.23. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n+x^2}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} (5-x^2)^n$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3x-2}}$ .

2.1.24. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-x)^{1/2}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)(x-1)^n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{3^{nx}+2}$ .

2.1.25. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{2^{nx}+3}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^n x}{n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{e^{nx}}$ .

2.1.26. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+x^n}{2-x^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n(x+1)}{\sqrt[3]{n^4}}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \sin^{3n} x}{n^3}$ .

2.1.27. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^{x+1}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \operatorname{tg}^{2n} x$ .

2.1.28. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+x^2)}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n (2n-1)}$ .

2.1.29. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x^4+n)^2}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n} \cdot \operatorname{tg}^{2n} x$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2x+1}}$ .

2.1.30. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{x}+\sqrt{n}}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{nx}+1}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-1)^n}{n}$ .

2.2. Використовуючи ознаку Вейерштрасса, доведіть рівномірну збіжність функціональних рядів на вказаному проміжку.

2.2.1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^n}{4^n}$ ,  $x \in R$ .    2.2.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{e^x}{n\sqrt{n}}$ ,  $x \in R$ .

2.2.3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^4+x^4}$ ,  $x \in R$ .    2.2.4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ ,  $x \in [-1; 1]$ .

2.2.5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{-nx}}{n^2}$ ,  $x \in [0; \infty)$ .    2.2.6.  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \sin \frac{x}{n}$ ,  $x \in R$ .

2.2.7.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{x^2+n^2}$ ,  $x \in R$ .    2.2.8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{2+x^2 n^4}$ ,  $x \in R$ .

$$\begin{array}{ll}
2.2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x - \sqrt{3} \cos x)^n}{3^n}, x \in R. & 2.2.10. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5^{-nx}}{n^3 + 2}, x \in [0; \infty). \\
2.2.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n(1 + \sqrt{n})}, x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]. & 2.2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^4}{4 + x^4 n^2}, x \in R. \\
2.2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n \sqrt{1 + xn}}, x \in [0; \infty). & 2.2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(x + n)^3}, x \in [0; \infty). \\
2.2.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^2 n}, x \in [-1; 1]. & 2.2.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{-nx}}{n^2 + 3}, x \in [0; \infty). \\
2.2.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x - \cos x)^n}{2^n}, x \in R. & 2.2.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{2^n}, x \in R. \\
2.2.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{(2x + n)^4}, x \in [0; \infty). & 2.2.20. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln^3 n}, x \in [-1; 1]. \\
2.2.21. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos \frac{2^x}{n}, x \in R. & 2.2.22. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{-nx}}{2n^4 + 1}, x \in [0; \infty). \\
2.2.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{3 + |x| n^2}, x \in R. & 2.2.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^6 + n}, x \in [-1; 1]. \\
2.2.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 2}{n^4 + |x|}, x \in R. & 2.2.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\cos nx}}{x^2 + n^2}, x \in R. \\
2.2.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2x + n)^2}, x \in [0; \infty). & 2.2.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x + 1)^n}{3^n}, x \in R. \\
2.2.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{2 + \sqrt[3]{n^7}}, x \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]. & 2.2.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sin nx}}{x^4 + n^3}, x \in R.
\end{array}$$

2.3. Знайдіть область збіжності степеневих рядів.

$$\begin{array}{ll}
2.3.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n}. & 2.3.2. \sum_{n=1}^{\infty} (x+5)^n \operatorname{tg} \frac{1}{3^n}. \\
2.3.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}. & 2.3.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n}. \\
2.3.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-3)^n}{(n+1) \cdot 5^n}. & 2.3.6. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1} (x-2)^n.
\end{array}$$

$$2.3.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{(n+2)\ln(n+2)}.$$

$$2.3.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x-3)^n}{(n^4+1)^2}.$$

$$2.3.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(x+1)^n}{n^3+1}.$$

$$2.3.10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 \cdot x^n.$$

$$2.3.11. \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)!(x-1)^n.$$

$$2.3.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^{2n-1} x^n.$$

$$2.3.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left( \frac{x}{2} \right)^n.$$

$$2.3.14. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+3)^{n-1}}{3^n \ln n}.$$

$$2.3.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$2.3.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n^n}.$$

$$2.3.17. \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} \cdot x^n.$$

$$2.3.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n+1)^2} (x+1)^n.$$

$$2.3.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$$

$$2.3.20. \sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^{n+1}.$$

$$2.3.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n + n2^{n-1}}.$$

$$2.3.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot (x+5)^n}{n^n}.$$

$$2.3.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)^n (x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n^n}.$$

$$2.3.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-6)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}.$$

$$2.3.25. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}.$$

$$2.3.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2+1}.$$

$$2.3.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}.$$

$$2.3.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}.$$

$$2.3.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n.$$

$$2.3.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(4n+1)\sqrt{n+1}}.$$

2.4. Розв'яжіть функції у ряд Тейлора за степенями  $x-a$  та вкажіть область збіжності ряду.

$$2.4.1. \frac{1}{x^2-6x+5}, \quad a=3.$$

$$2.4.2. \ln(x^2+4x+5), \quad a=-2.$$

$$2.4.3. \frac{x}{x+3}, \quad a=2.$$

$$2.4.4. \sin^2 x, \quad a=\frac{\pi}{4}.$$

$$2.4.5. \frac{x+2}{x-5}, a=1.$$

$$2.4.6. e^x, a=1.$$

$$2.4.7. \ln(x^2 - 6x + 10), a=3.$$

$$2.4.8. \ln(6x + 19), a=-3.$$

$$2.4.9. \frac{1}{x^2 + 2x + 3}, a=-1.$$

$$2.4.10. \frac{1}{x^2 + 8x + 17}, a=-4.$$

$$2.4.11. e^{x^2 - 2x + 1}, a=1.$$

$$2.4.12. \cos^2 x, a = \frac{\pi}{4}.$$

$$2.4.13. \ln(3x + 7), a = -2.$$

$$2.4.14. \cos \frac{\pi x}{6}, a = 3.$$

$$2.4.15. e^{x^2 - 4x + 1}, a = 2.$$

$$2.4.16. \sin \frac{\pi x}{4}, a = 2.$$

$$2.4.17. \cos x, a = \frac{\pi}{2}.$$

$$2.4.18. e^{-x}, a = 2.$$

$$2.4.19. \frac{1}{x^2 + 3x - 4}, a = 3.$$

$$2.4.20. \frac{1}{x^2 - 9x + 20}, a = 3$$

$$2.4.21. \ln(2x - 5), a = 3.$$

$$2.4.22. \frac{2x+1}{x-3}, a = 2.$$

$$2.4.23. \frac{3x}{x+2}, a = -1.$$

$$2.4.24. \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, a = 1.$$

$$2.4.25. \frac{1}{x^2 + 4x + 6}, a = -2.$$

$$2.4.26. \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 3}, a = 4.$$

$$2.4.27. \ln(4x - 5), a = 2.$$

$$2.4.28. \frac{2x+3}{x+1}, a = 1.$$

$$2.4.29. \frac{1}{x^2 + x - 6}, a = 1.$$

$$2.4.30. \frac{3}{2-x-x^2}, a = 2.$$

2.5. Розв'яжіть функції в ряд Маклорена та вкажіть область його збіжності.

$$2.5.1. \frac{\sin^2 x}{x}.$$

$$2.5.2. \frac{x-2}{x+1}.$$

$$2.5.3. \sin^3 x.$$

$$2.5.4. \frac{1}{\sqrt[4]{16-x}}.$$

$$2.5.5. \frac{x^2}{x-1}.$$

$$2.5.6. \frac{x^3}{x+1}.$$

$$2.5.7. \frac{1}{x^2 - 1}.$$

$$2.5.8. \frac{1}{\sqrt[3]{27+x^3}}.$$

$$2.5.9. \frac{1}{x^2 + 1}.$$



<b>2.5.10.</b> $\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$ .	<b>2.5.11.</b> $\frac{\operatorname{ch} 3x - 1}{x^2}$ .	<b>2.5.12.</b> $\cos^2 x$ .
<b>2.5.13.</b> $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ .	<b>2.5.14.</b> $\ln(1 - 5x + 6x^2)$ .	<b>2.5.15.</b> $xe^{-x}$ .
<b>2.5.16.</b> $\cos^3 x$ .	<b>2.5.17.</b> $\operatorname{sh} 2x$ .	<b>2.5.18.</b> $\sqrt{4 - x^2}$ .
<b>2.5.19.</b> $\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ .	<b>2.5.20.</b> $\frac{1}{x^2 - 4}$ .	<b>2.5.21.</b> $\frac{1 - \cos 2x}{x}$ .
<b>2.5.22.</b> $\ln(1 + x - 2x^2)$ .	<b>2.5.23.</b> $(1+x)e^x$ .	<b>2.5.24.</b> $\frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ .
<b>2.5.25.</b> $\frac{x-1}{x+3}$ .	<b>2.5.26.</b> $\frac{x^2}{x-2}$ .	<b>2.5.27.</b> $\frac{2-x}{5-x}$ .
<b>2.5.28.</b> $2x \sin^2 \frac{x}{2} - x$ .	<b>2.5.29.</b> $\frac{x}{\sqrt{4-x}}$ .	<b>2.5.30.</b> $\frac{x^2}{\sqrt{2+x}}$ .

**2.6.** Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчисліть із точністю  $\varepsilon$  значення функцій.

<b>2.6.1.</b> $\sqrt[3]{30}$ , $\varepsilon = 0,001$ .	<b>2.6.2.</b> $\ln 1,1$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.3.</b> $\sin 10^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.4.</b> $e^{-0,5}$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.5.</b> $\cos 9^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.6.</b> $\sqrt[4]{85}$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.7.</b> $\sqrt{105}$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.8.</b> $\sin^2 42^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.9.</b> $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ , $\varepsilon = 0,001$ .	<b>2.6.10.</b> $\frac{1}{\sqrt[5]{40}}$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.11.</b> $\sqrt[6]{60}$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.12.</b> $\cos^2 66^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.13.</b> $\ln 1,05$ , $\varepsilon = 0,001$ .	<b>2.6.14.</b> $\sqrt[4]{266}$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.15.</b> $\operatorname{arctg}(0,1)$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.16.</b> $\sqrt[3]{130}$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.17.</b> $\frac{1}{\sqrt[4]{20}}$ , $\varepsilon = 0,001$ .	<b>2.6.18.</b> $\sqrt[6]{1,2}$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.19.</b> $\sin 15^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.20.</b> $\ln \sqrt{1,08}$ , $\varepsilon = 0,001$ .
<b>2.6.21.</b> $\sin 20^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.22.</b> $\cos 80^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.23.</b> $\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$ , $\varepsilon = 0,001$ .	<b>2.6.24.</b> $\sqrt[3]{8,4}$ , $\varepsilon = 0,0001$ .
<b>2.6.25.</b> $\cos 96^\circ$ , $\varepsilon = 0,0001$ .	<b>2.6.26.</b> $\ln \sqrt{1,04}$ , $\varepsilon = 0,001$ .

$$2.6.27. \sqrt[4]{1,1}, \varepsilon = 0,0001.$$

$$2.6.28. \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \varepsilon = 0,001.$$

$$2.6.29. \cos^2 85^\circ, \varepsilon = 0,0001.$$

$$2.6.30. \operatorname{arctg}(0,2), \varepsilon = 0,0001.$$

2.7. Обчисліть із точністю  $\varepsilon$  інтеграли, використовуючи розкладання підінтегральної функції у степеневий ряд.

$$2.7.1. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.2. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.3. \int_0^{0,25} \frac{dx}{1+x^3}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.4. \int_0^{0,5} \frac{\sin x}{x} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.5. \int_0^{1/3} \cos x^2 dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.6. \int_0^{1/3} \sin x^2 dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.7. \int_0^{0,5} \cos \sqrt{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.8. \int_0^{1/4} \sin \sqrt{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.9. \int_0^1 e^{-x^2} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.10. \int_0^1 \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.11. \int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^5}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.12. \int_0^{0,5} \ln(1+x^4) dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.13. \int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x^2} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.14. \int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.15. \int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.16. \int_0^{0,5} \frac{e^{-x}-1}{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.17. \int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.18. \int_0^1 x e^{-x^4} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.19. \int_0^1 x^4 \cos x^2 dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.20. \int_0^{0,5} \frac{e^{-x^2}-1}{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.21. \int_0^{0,5} \frac{\sin^2 x}{x} dx, \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.22. \int_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^2} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.23. \int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.24. \int_0^{0,5} \sqrt{1-x^3} dx, \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.25. \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^6}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.26. \int_0^{0.5} \sqrt[4]{1+x^3} dx, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.27. \int_0^{0.5} \cos x^3 dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.28. \int_0^{0.5} \sin x^3 dx, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$2.7.29. \int_0^{0.5} \frac{dx}{8+x^3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$2.7.30. \int_0^1 \frac{dx}{16+x^4}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

**2.8.** Знайдіть наближений розв'язок задачі Коші, обмежившись чотирма ненульовими членами розвинення цього розв'язку у степеневий ряд.

$$2.8.1. y' = x^3 + y^3, \quad y(0) = 1.$$

$$2.8.2. y' = xy^2 + y^4, \quad y(0) = 2.$$

$$2.8.3. y' = x^2y + y^4, \quad y(0) = -1.$$

$$2.8.4. y'' - xy' + y + e^x = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$2.8.5. y'' + 2xy' + y^2 - x^3 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$2.8.6. y'' - yy' + xy + x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

$$2.8.7. y'' + yy' + y + x^3 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$$

$$2.8.8. y' + x^2y^2 = xy, \quad y(2) = 1.$$

$$2.8.9. xy' = y^2 - e^x, \quad y(0) = -2.$$

$$2.8.10. yy' + y^3 = x^2, \quad y(1) = 1.$$

$$2.8.11. x^2y' = y^2 - 2x^2, \quad y(0) = 1.$$

$$2.8.12. xy' + y^3 = e^x x, \quad y(0) = 1.$$

$$2.8.13. y'' + yy' - xy + x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$2.8.14. y'' + xy' + xy^2 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

$$2.8.15. y' = 4 + y/x + (y/x)^2, \quad y(1) = 2.$$

$$2.8.16. y'' + xy^2 = y, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

$$2.8.17. y'' + 4xy' - 2y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

$$2.8.18. y'' + 2y' + y^4 = x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$$

$$2.8.19. y'' + 4yy' - 3x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$2.8.20. y'' + (y-2x)y' - x^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

- 2.8.21.  $xy' - y(y+x) = x^4$ ,  $y(1) = -1$ .
- 2.8.22.  $(y-x)y' = y^2 - 3xy$ ,  $y(1) = 1$ .
- 2.8.23.  $yy' = xy + \sqrt{x}$ ,  $y(1) = 1$ .
- 2.8.24.  $y'' + ye^x + e^y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 2.8.25.  $y' + 3x^2y = x^5y^3$ ,  $y(0) = 3$ .
- 2.8.26.  $y'(x+2y) = x^3y$ ,  $y(0) = 2$ .
- 2.8.27.  $y'' + x^3 + 3y^2 = 0$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 1$ .
- 2.8.28.  $x^2y' - y^2 = x^3$ ,  $y(1) = 0$ .
- 2.8.29.  $y'(x+y) = ye^{2x}$ ,  $y(0) = -1$ .
- 2.8.30.  $yy' + xe^y = e^x$ ,  $y(0) = -2$ .

### Тема 3. РЯДИ ФУР'Є

Гармонічні коливання. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є. Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій. Ряд Фур'є для  $2\pi$  та  $2l$  — періодичних функцій. Ряди Фур'є для функцій, заданих на відрізку  $[0; l]$  або на довільному відрізку  $[a; b]$ . Комплексна форма ряду Фур'є.



**Література:** [3, розділ 5, п. 5.6], [9, розділ 9, §3], [14, розділ 3, §3], [15, розділ 13, п. 13.4], [16, розділ 17, §1—6], [17, розділ 6, §20—21].

## T.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 3.1. Періодичні функції і процеси

У природі та техніці поширені процеси, які повторюються через певні проміжки часу. Такі процеси називають *періодичними*. Наприклад, механічні та електромагнітні коливання, періодичні рухи в акустиці, теорії пружності, радіотехніці, електротехніці тощо.

Періодичні процеси описують за допомогою періодичних функцій.

Функцію  $f(x)$ , визначену на множині  $D$ , називають періодичною з періодом  $T$ , якщо для кожного  $x \in D$  значення  $x+T$  також належить  $D$  і виконується рівність  $f(x+T) = f(x)$ .

Найпростішими періодичними функціями є тригонометричні функції  $\sin x$  та  $\cos x$ , основний період цих функцій  $T = 2\pi$ .

Найпростішим періодичним процесом (рухом) є просте гармонічне коливання, яке задається функцією

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad t \geq 0, \quad (1.23)$$

де  $A$  — амплітуда коливання,  $\omega$  — циклічна частота,  $\varphi_0$  — початкова фаза. Функцію такого вигляду і її графік називають *простою гармонікою*. Осно-

вний період функції (1.23) — число  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Це означає, що одне повне ко-

ливання відбувається за проміжок часу  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Частота  $\omega$  показує, скільки коливань здійснює точка протягом  $2\pi$  одиниць часу.

Просту гармоніку зображає також функція

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t.$$

Справді, використовуючи метод введення допоміжного кута, дістанемо

$$\begin{aligned} y &= A \sin \omega t + B \cos \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \omega t \right) = \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \varphi_0 \sin \omega t + \sin \varphi_0 \cos \omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

$$\text{де } \cos \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Колівання, утворені внаслідок накладання скінченного (або нескінченного) числа простих гармонік, називають *складними гармонічними коливаннями*. Так, функція

$$\varphi(t) = A_1 \sin(t + \varphi_1) + A_2 \sin(2t + \varphi_2) + \dots + A_n \sin(nt + \varphi_n)$$

задає складне гармонічне коливання. Цю функцію можна подати ще у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= a_1 \cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt = \\ &= \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt). \end{aligned}$$

Оскільки перша гармоніка має період  $T_1 = 2\pi$ , друга —  $T_2 = \pi$ , третя —  $T_3 = \frac{2\pi}{3}$ , ...,  $n$ -а —  $T_n = \frac{2\pi}{n}$ , то загальний період  $T$  функції  $\varphi(t)$  дорівнює найменшому спільному кратному періодів  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , тобто  $T = 2\pi$ .

Отже, при накладанні простих гармонік дістають періодичну функцію, що описує складне періодичне коливання.

Природно виникає питання: чи можна періодичний рух, заданий деякою періодичною функцією, подати як суму простих гармонік? Якщо так, то як знайти невідомі коефіцієнти кожної з цих гармонік? Відповідь на перше питання у загальному випадку негативна, якщо обмежитися скінченною кількістю гармонік. Якщо ж увести до розгляду нескінченні суми гармонік (тригонометричні ряди), то широкий клас періодичних функцій можна розкласти на прості гармоніки.

### 3.2. Тригонометричний ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \dots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.24)$$

називають *тригонометричним рядом*. Сталі числа  $a_0, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n, \dots$  називають коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Вільний член ряду для зручності записують у вигляді  $\frac{a_0}{2}$ .

Розглянемо задачу. За яких умов і як для  $2\pi$ -періодичної функції  $f(x)$  можна знайти збіжний до цієї функції тригонометричний ряд вигляду (1.24)?

Припустимо, що періодичну з періодом  $2\pi$  функцію  $f(x)$  можна розкласти у тригонометричний ряд, який збігається до функції  $f(x)$  на відрізку  $[-\pi, \pi]$ , тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.25)$$

Вважатимемо, що ряд, складений із коефіцієнтів тригонометричного ряду, абсолютно збіжний, тобто збігається ряд

$$\left| \frac{a_0}{2} \right| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots$$

Тоді ряд (1.25) за ознакою Вейерштрасса є рівномірно й абсолютно збіжним на  $R$ , і цей ряд можна почленно інтегрувати.

Наведемо формули, які використовуватимемо для обчислення коефіцієнтів ряду (1.25).

Нехай  $m$  і  $n$  — натуральні числа. Тоді:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \neq 0, \\ 2\pi, & \text{якщо } n = 0; \end{cases} \quad (1.26)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0; \quad (1.27)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq n, \\ \pi, & \text{якщо } m = n; \end{cases} \quad (1.28)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nxdx = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq n, \\ \pi, & \text{якщо } m = n; \end{cases} \quad (1.29)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nxdx = 0. \quad (1.30)$$

Для обчислення інтегралів (1.28) — (1.30) слід скористатись формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.



*Зауваження.* Послідовність функцій  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$  називають ортогональною на відріжку  $[a; b]$ , якщо виконуються рівності

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0 \quad (i \neq j).$$

Якщо  $i = j$ , то  $\int_a^b \varphi_i^2(x)dx = \lambda_i > 0$ .

Приклади ортогональних систем функцій:

1) система функцій

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

ортогональна на відріжку  $[-\pi; \pi]$ ;

2) системи функцій

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \dots$$

та

$$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx, \dots$$

ортогональні на відріжку  $[0; \pi]$ ;

3) система функцій

$$1, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

ортогональна на відрізку  $[-l; l]$ ;

4) системи функцій

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

та

$$\sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$$

ортогональні на відрізку  $[0; l]$ .

Обчислимо коефіцієнти тригонометричного ряду (1.25). Проінтегруємо обидві частини рівності (1.25) в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nxdx \right),$$

звідси з урахуванням формул (1.26), (1.27) дістанемо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx. \quad (1.31)$$

Тепер помножимо обидві частини рівності (1.25) на  $\cos kx$  і проінтегруємо одержаний ряд почленно на відрізку  $[-\pi; \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \cos kxdx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx \cos kxdx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx \cos kxdx \right).$$

Враховуючи рівності (1.28) — (1.30), дістанемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx = \int_{-\pi}^{\pi} a_k \cos^2 kxdx = a_k \pi = a_n \pi,$$

звідси

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx. \quad (1.32)$$



Аналогічно, помноживши рівність (1.25) на  $\sin kx$  і проінтегрувавши почленно на відрізьку  $[-\pi; \pi]$  утворений ряд, дістанемо

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx. \quad (1.33)$$

Числа  $a_0, a_n, b_n$ , які визначаються формулами (1.31) – (1.33), називають *коефіцієнтами Фур'є* функції  $f(x)$ , а тригонометричний ряд (1.25), коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції  $f(x)$ , називають рядом Фур'є функції  $f(x)$ .

Для інтегрованої на відрізьку  $[-\pi; \pi]$  функції  $f(x)$  пишуть:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \quad (1.34)$$

Знак відповідності ( $\sim$ ) означає, що інтегрованої на відрізьку  $[-\pi; \pi]$  функції  $f(x)$  поставлено у відповідність її ряд Фур'є.

З'ясуємо умови, за яких знак відповідності у формулі (1.34) можна замінити знаком рівності, тобто умови, за яких ряд Фур'є збігається і має своєю сумою функцію  $f(x)$ .

Сформулюємо теорему, яка дає достатні умови подання функції  $f(x)$  через її ряд Фур'є.

### Теорема

(Діріхле). Нехай  $2\pi$  — періодична функція  $f(x)$  на відрізьку  $[-\pi; \pi]$  задовольняє умови (Діріхле):

- 1)  $f(x)$  кусково-неперервна, тобто неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду;
- 2)  $f(x)$  кусково-монотонна, тобто монотонна на всьому відрізьку або цей відрізок можна розбити на скінченне число інтервалів так, що на кожному з них функція монотонна.

Тоді ряд Фур'є функції  $f(x)$  є збіжним на всій числовій прямій і сума  $S(x)$  ряду Фур'є задовольняє рівності:

- 1) у точках неперервності функції  $f(x)$   $S(x) = f(x)$ , тобто

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

2) якщо  $x_0$  — точка розриву (першого роду) функції  $f(x)$ , то

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

тобто сума ряду Фур'є в точці розриву  $x_0$  дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції  $f(x)$  у цій точці;

3) в кінцевих точках  $x = -\pi$ ,  $x = \pi$  відрізка  $[-\pi; \pi]$  сума ряду Фур'є набуває значень

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$



*Зауваження.*

1. Для довільної інтегрованої  $2\pi$ -періодичної функції  $\varphi(x)$  виконується рівність

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_a^{a+2\pi} \varphi(x) dx.$$

Тому коефіцієнти Фур'є можна обчислювати за формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos nxdx,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin nxdx,$$

де  $a$  — довільне дійсне число.

2. Якщо функція  $f(x)$  розкладається в ряд Фур'є, то частинні суми  $S_n(x)$  цього ряду (многочлени Фур'є) дають змогу знайти наближення цієї функції

$$f(x) \approx S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Похибка цієї формули зменшується із збільшенням числа  $n$ .

3. Оскільки  $a_n \cos nx + b_n \sin nx = A_n \sin(nx + \varphi_n)$ , то ряд Фур'є функції  $f(x)$  можна подати у вигляді

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n).$$

Числа  $\omega_n = 0, 1, 2, \dots$ , утворюють *дискретний спектр* функції  $f(x)$ ; числа  $A_0 = \frac{a_0}{2}$ ,  $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) — *амплітудний спектр*, а числа

$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{b_n}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) — фазовий спектр функції  $f(x)$ . Період першої гармоніки  $A_1 \sin(x + \varphi_1)$  в акустиці називають *основним тоном*, він збігається з періодом функції  $f(x)$ . Частоти решти гармонік, що називаються *обертонами* і створюють тембр звуку, кратні основній частоті.

4. При обчисленні коефіцієнтів Фур'є корисно пам'ятати формули

$$\sin n\pi = 0, \quad \cos n\pi = (-1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

### 3.3. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій

Обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є спрощується, якщо функція  $f(x)$  є парною або непарною. При цьому вигляд ряду Фур'є також спрощується, він стає неповним (див. табл.3).

Таблиця 3

Властивість функції $f(x)$	$f(x)$ — парна функція	$f(x)$ — непарна функція
Ряд Фур'є	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$
Коефіцієнти Фур'є	$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$ $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx$	$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$ $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx$

### 3.4. Ряд Фур'є для $2l$ - періодичних функцій

Розкласти в ряд Фур'є можна також періодичні функції з періодом, відмінним від  $2\pi$ .

Нехай функція  $f(x)$  визначена на відрізку  $[-l; l]$ , має період  $2l$  ( $l$  — довільне додатне число) і задовольняє на цьому відрізку умови Діріхле. У цьому разі ряд Фур'є функції  $f(x)$  має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi nx}{l} + b_n \sin \frac{\pi nx}{l} \right), \quad (1.35)$$

де коефіцієнти Фур'є визначають за формулами

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \\
 b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx.
 \end{aligned}
 \tag{1.36}$$

Формули (1.35), (1.36) можна дістати з формул (1.25), (1.31)—(1.33) для функції  $\varphi(t)$ , пов'язаної з функцією  $f(x)$  формулами:

$$x = \frac{lt}{\pi}, \quad \varphi(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right), \quad t \in [-\pi; \pi].$$



*Зауваження.* Усі теореми, які справджуються для рядів Фур'є  $2\pi$ -періодичних функцій, зберігаються і для рядів Фур'є  $2l$ -періодичних функцій.

Для парних і непарних функцій, заданих на відрізку  $[-l; l]$ , вигляд ряду Фур'є та формули для обчислення його коефіцієнтів вміщені у табл. 4.

Таблиця 4

Властивість функції $f(x)$	$f(x)$ — парна функція	$f(x)$ — непарна функція
Ряд Фур'є	$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n x}{l}$	$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}$
Коефіцієнти Фур'є	$b_n = 0, \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx,$ $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx$	$a_0 = 0, \quad a_n = 0,$ $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$

### 3.5. Ряди Фур'є для функцій, заданих на відрізку $[0; l]$ або на довільному відрізку $[a; b]$

Нехай функцію задано на відрізку  $[0; l]$ . Довизначимо цю функцію на інтервалі  $(-l; 0)$  довільно (зберігаючи виконання умов теореми Діріхле) і продовжимо цю функцію з періодом  $2l$  на всю числову пряму. Утворену функцію можна розкласти у ряд Фур'є за формулами (1.35), (1.36) багатьма способами, залежно від вибору функції на інтервалі  $(-l; 0)$ . Ці розклади дають ряд Фур'є на всій прямій, отже, і на проміжку  $[0; l]$ .

Найважливішими для застосування є такі два випадки:

1. Довизначимо функцію  $f(x)$ , задану на відрізку  $[0; l]$ , на інтервал  $(-l; 0)$  парним чином, тобто  $f(x) = f(-x)$  для  $x \in (-l; 0)$  (рис. 1.5, а). Тоді функцію  $f(x)$  на проміжку  $(-l; l)$  можна вважати парною і її ряд Фур'є містить тільки косинуси (див. формули у табл. 4).

2. Довизначимо тепер функцію  $f(x)$  на інтервал  $(-l; 0)$  непарним чином, тобто  $f(x) = -f(-x)$  для  $x \in (-l; 0)$  (рис. 1.5, б). Тоді функцію  $f(x)$  на проміжку  $(-l; l)$  можна вважати непарною і її ряд Фур'є містить тільки синуси (табл. 4).

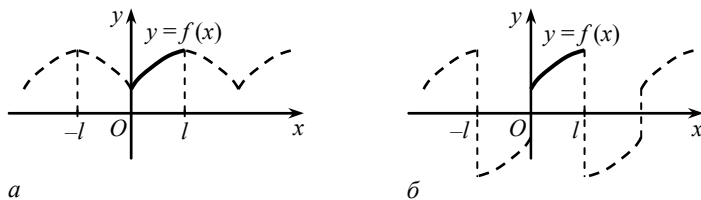


Рис. 1.5

Нехай кусково-монотонну функцію  $f(x)$  задано на відрізку  $[a; b]$ , де  $a < b$ . Розглянемо періодичне продовження заданої функції на всю числову пряму з періодом  $T = b - a$ , тобто утворимо функцію  $f_1(x)$  таку, що  $f_1(x) = f(x)$  для  $x \in (a; b)$  і  $f_1(x + T) = f_1(x)$ . Позначимо  $2l = T = b - a$ , тобто  $l = \frac{b - a}{2}$ . Оскільки функція  $f_1(x)$  задовольняє рівності

$$\int_{-l}^l f_1(x) dx = \int_a^{a+2l} f_1(x) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

ТО МАЄМО

$$f_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

де коефіцієнти Фур'є визначають за формулами

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_a^b f(x) dx, & a_n &= \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx & (l &= \frac{b - a}{2}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Враховуючи, що  $f_1(x) = f(x)$  для  $x \in (a; b)$ , то в точках неперервності відрізка  $[a; b]$  сума ряду Фур'є дорівнює  $f(x)$ .

Звичайно, функцію  $f(x)$ , задану на довільному скінченному відрізку  $[a; b]$ , можна розкласти у ряд Фур'є й іншими способами.

### 3.6. Комплексна форма ряду Фур'є

Ряди Фур'є часто застосовують у комплексній формі. Використовуючи формули Ейлера

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i},$$

ряд Фур'є для  $2\pi$ -періодичної функції  $f(x)$  можна подати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{inx}, \quad (1.38)$$

коефіцієнти якого мають вигляд

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (1.39)$$

Рівність (1.38) називають *комплексною формою ряду Фур'є* функції  $f(x)$ , а числа  $c_n$ , які визначаються формулою (1.39), — *комплексними коефіцієнтами ряду Фур'є*.

## Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розкладіть у ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in (0; \pi), \\ 2, & \text{якщо } x \in [-\pi; 0], \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \text{ (рис. 1.6, а)}.$$

Побудуйте графік суми ряду Фур'є.

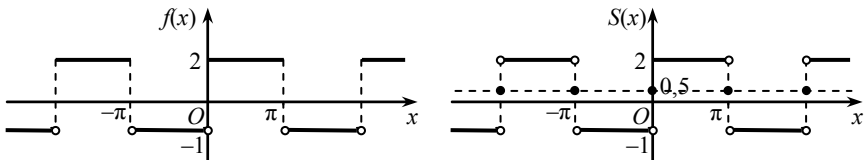


Рис. 1.6

*Розв'язання.* Задана функція задовольняє умови теореми Діріхле, тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Обчислимо коефіцієнти Фур'є за формулами (1.31) — (1.33). Маємо

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} 2 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( -x \Big|_{-\pi}^0 + 2x \Big|_0^{\pi} \right) = 1;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\cos nx dx + \int_0^{\pi} 2 \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{2 \sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 -\sin nx dx + \int_0^{\pi} 2 \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi n} (\cos 0 - \cos(-\pi) - 2 \cos \pi + 2 \cos 0) = \frac{3(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

Підставивши значення коефіцієнтів  $a_0$ ,  $a_n$ ,  $b_n$  у формулу (1.25), дістаємо

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1 - (-1)^n)}{\pi n} \sin nx.$$

Оскільки

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ \frac{6}{\pi(2k-1)}, & \text{якщо } n = 2k-1, \end{cases}$$

то розвинення у ряд Фур'є набуває вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}.$$

Ця рівність виконується для всіх точок неперервності заданої функції, тобто для  $x \neq \pi n$ ,  $n \in Z$ . У точках  $x = \pi n$  сума ряду дорівнює півсумі односторонніх границь у цих точках, тобто  $S(\pi n) = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2}$ . Графік суми ряду Фур'є зображено на рис. 1.6, б.



*Зауваження.* Якщо  $f(x) = g(x) + C$ , де  $g(x)$  — непарна  $2\pi$ -періодична функція, а  $C$  — стала, то ряд Фур'є для функції  $f(x)$  має вигляд

$$f(x) = C + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Обгрунтуйте це самостійно.

2. Розкладіть у ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ x, & \text{якщо } x \in [0; \pi], \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (\text{рис. 1.7}).$$

*Розв'язання.* Задана функція є кусково-монотонною, тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Знаходимо коефіцієнти Фур'є функції  $f(x)$ :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \cdot \cos nxdx + \int_0^{\pi} x \cos nxdx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nxdx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos nxdx \\ du = dx, \quad v = \frac{\sin nx}{n} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left( x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \\ &= \frac{\cos nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 0 \cdot \sin nxdx + \int_0^{\pi} x \sin nxdx \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nxdx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin nxdx \\ du = dx, \quad v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left( -x \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{(-1)^{n+1} \pi}{n} + \frac{\sin nx}{\pi n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx,$$

або

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right) + \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{3} + \frac{\sin 3x}{5} - \dots \right).$$



В усіх точках, крім  $x = -\pi + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , сума ряду дорівнює значенню функції  $f(x)$ . У точках  $x = -\pi + 2\pi k$ ,  $k \in Z$  сума ряду дорівнює  $\frac{\pi}{2}$ .

Оскільки  $x = 0$  — точка неперервності функції  $f(x)$ , то справджується рівність

$$f(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

але за умовою  $f(0) = 0$ , отже,

$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right),$$

звідси

$$\boxed{\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}}.$$



**Висновок.** За допомогою рядів Фур'є можна знаходити суми числових рядів.

### 3. Розкладіть у ряд Фур'є $2\pi$ -періодичну функцію

$$f(x) = |x|, \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (\text{рис. 1.8}).$$

*Розв'язання.* Задана функція задовольняє умови Діріхле, парна, тому ряд Фур'є для цієї функції має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є  $a_0$  та  $a_n$  (див. табл. 3):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \pi; \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left( x \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right).
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

Оскільки задана функція  $f(x)$  неперервна на всій числовій прямій, то формула (1.40) справджується для будь-якого  $x \in \mathbb{R}$ .

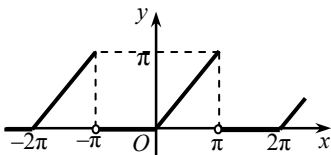


Рис. 1.7

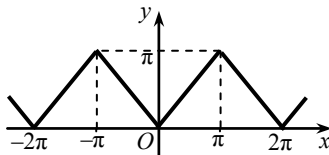


Рис. 1.8

4. Розкладіть у ряд Фур'є за синусами функцію  $f(x) = x^2$ ,  $x \in [0; \pi]$ .

*Розв'язання.* Продовжимо функцію  $f(x)$  непарним способом на проміжок  $[-\pi; 0)$ , а потім продовжимо періодично з періодом  $2\pi$  на всю числову пряму (рис. 1.9). На відрізку  $[-\pi; \pi]$  функція непарна, і тому

$$a_0 = a_n = 0. \text{ Коефіцієнт } b_n \text{ знайдемо за формулою } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \left[ x^2 \cdot \frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cos nx dx \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ -\pi^2 \cdot \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{2}{n} \left( x \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) \right] = \\
 &= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi^2}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} \cos nx \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1].
 \end{aligned}$$

Отже,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} \sin nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3} [(-1)^n - 1] \sin nx.$$

При парних  $n$  виконується рівність  $(-1)^n - 1 = 0$ , тому остаточно маємо

$$f(x) = 2\pi \left( \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right) - \frac{8}{\pi} \left( \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right).$$

Ця рівність справедлива в усіх точках  $x \in [0; \pi]$ , крім точки  $x = \pi$ , в якій сума ряду дорівнює 0, а значення функції  $f(\pi) = \pi^2$ .

5. Розкладіть у ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \in (-1; 0], \\ 2x, & \text{якщо } x \in (0; 1), \end{cases} \quad f(x+2) = f(x) \quad (\text{рис. 1.10}).$$

*Розв'язання.* Функція  $f(x)$  кусково-монотонна, періодична з періодом  $2l = 2$ , тому її можна розкласти в ряд Фур'є. Коефіцієнти Фур'є визначаємо за формулами (1.37):

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^1 2x dx = -x \Big|_{-1}^0 + x^2 \Big|_0^1 = -1 + 1 = 0; \\ a_n &= \int_{-1}^0 (-1) \cos n\pi x dx + \int_0^1 2x \cos n\pi x dx = -\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^0 + \\ &+ 2x \cdot \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \sin n\pi x dx = \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{n^2 \pi^2} (\cos n\pi - 1) = \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2k, \\ -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}, & \text{якщо } n = 2k-1; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^0 (-1) \sin n\pi x dx + \int_0^1 2x \sin n\pi x dx = \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_{-1}^0 + \\ &+ 2x \cdot \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 2 \cdot \frac{-\cos n\pi x}{n\pi} dx = \frac{1}{n\pi} (1 - (-1)^n) - \frac{2}{n\pi} \cos n\pi + 0 + \\ &+ 2 \cdot \frac{\sin n\pi x}{n^2 \pi^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi} (1 - 3(-1)^n) = \begin{cases} -\frac{1}{k\pi}, & \text{якщо } n = 2k, \\ \frac{4}{(2k-1)\pi}, & \text{якщо } n = 2k-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{(2k-1)^2 \pi^2} \cos(2k-1)\pi x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin 2k\pi x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)\pi x.$$

Сума ряду Фур'є  $S(x)$  задовольняє рівності

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \in (-1+2k; 2k) \cup (2k; 1+2k), \\ -0,5, & \text{якщо } x = 2k, \\ 0,5, & \text{якщо } x = -1+2k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

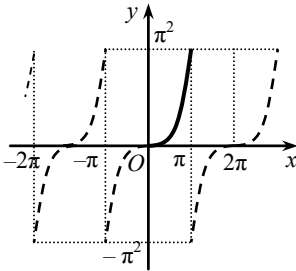


Рис. 1.9

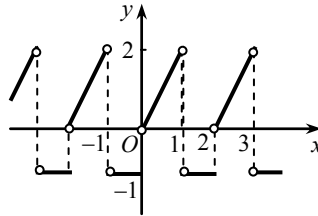


Рис. 1.10

**6.** На відрізку  $[1; 4]$  розкладіть у ряд Фур'є функцію, графік якої зображено на рис. 1.11, а.

*Розв'язання.* Запишемо задану функцію в аналітичній формі:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [1; 3), \\ 4-x, & \text{якщо } x \in [3; 4]. \end{cases}$$

Далі можна продовжити цю функцію періодично з періодом  $T = 2l = 3$  на всю числову пряму і скористатися для знаходження коефіцієнтів Фур'є формулами (3.15). Оскільки  $l = \frac{3}{2}$ , що є не досить зручно, виконаємо такі дії. Введемо функцію  $f_1(x)$ , задану на відрізку  $[0; 4]$  формулою

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [0; 3), \\ 4-x, & \text{якщо } x \in [3; 4] \end{cases} \quad (\text{рис.1.11, б}).$$

Зрозуміло, що на відрізку  $[1; 4]$  функції  $f_1(x)$  та  $f(x)$  збігаються.

Продовжимо функцію  $f_1(x)$  на проміжок  $[-4; 0)$  непарним способом (рис. 1.11, б). На відрізку  $[-4; 4]$  утворена функція непарна, і тому її ряд Фур'є не містить косинусів:  $a_0 = a_n = 0$ , тобто  $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{4}$ ,  $l = 4$ .

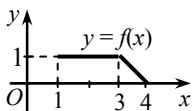
Знайдемо коефіцієнт  $b_n$ :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^4 f_1(x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^3 \sin \frac{\pi n x}{4} dx + \int_3^4 (4-x) \sin \frac{\pi n x}{4} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{4 \cos \frac{\pi n x}{4}}{\pi n} \Big|_0^3 + (4-x) \frac{-4 \cos \frac{\pi n x}{4}}{\pi n} \Big|_3^4 - \frac{4}{\pi n} \int_3^4 \cos \frac{\pi n x}{4} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{\pi n} \left( \cos \frac{3\pi n}{4} - 1 \right) + \frac{4}{\pi n} \cos \frac{3\pi n}{4} - \frac{16}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{4} \Big|_3^4 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{4}{\pi n} \left( \cos \frac{3\pi n}{4} - 1 \right) + \frac{4}{\pi n} \cos \frac{3\pi n}{4} + \frac{16}{\pi^2 n^2} \sin \frac{3\pi n}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4}{\pi n} + \frac{16}{\pi^2 n^2} \sin \frac{3\pi n}{4} \right). \end{aligned}$$

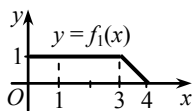
Записуємо ряд Фур'є функції  $f_1(x)$ :

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{\pi n} + \frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \frac{3\pi n}{4} \right) \sin \frac{\pi n x}{4}. \quad (*)$$

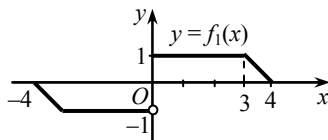
Ця рівність справджується для всіх  $x \in [-4; 0) \cup (0; 4]$ , отже, і на відрізку  $[1; 4]$ , на якому виконується рівність  $f_1(x) = f(x)$ . Отже, розвинення (\*) є рядом Фур'є функції  $f(x)$  на заданому проміжку.



а



б



в

Рис. 1.11

### Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розкладіть у ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичні функції, задані на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ .

1.  $f(x) = x$ . 2.  $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ . 3.  $f(x) = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$

Розкладіть у ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію

4.  $f(x) = x$ ,  $x \in (0; 2\pi]$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ .

Розкладіть у ряд Фур'є за косинусами функції, задані на інтервалі  $(0; \pi)$ :

5.  $f(x) = x^2$ . 6.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (0; \pi/2), \\ 0, & \text{якщо } x \in [\pi/2; \pi). \end{cases}$

7. Розкладіть у ряд Фур'є за синусами функцію  $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  на проміжку  $(0; \pi)$ .

Розкладіть у ряд Фур'є функції.

8.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in [-1; 0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0; 1). \end{cases}$  9.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in [-3; 1), \\ x, & \text{якщо } x \in [1; 3]. \end{cases}$

10. Розкладіть у ряд Фур'є за косинусами функцію  $f(x) = 2x$ , задану на півперіоді  $(0; 2)$ .

### Відповіді

1.  $2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k}$ . 2.  $1 + \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots$ . 3.  $1 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$ .

4.  $\pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ . 5.  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}$ . 6.  $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$ . 7.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kx}{2k}$ .

8.  $-\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\pi x}{2k-1}$ . 9.  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{\pi n} \sin \frac{\pi n}{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2} \left( (-1)^n - \cos \frac{\pi n}{3} \right) \right) \cos \frac{\pi n x}{3} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \times$

$\times \left( \frac{3}{\pi n} \left( 3(-1)^{n+1} + \cos \frac{\pi n}{3} \right) + \frac{9}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{3} \right) \sin \frac{\pi n x}{3}$ . 10.  $4 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi(2k-1)x}{2}}{(2k-1)^2}$ .

### Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Розкладіть у ряд Фур'є  $2\pi$ -періодичну функцію  $f(x)$ , задану на інтервалі  $(-\pi; \pi)$ . Побудуйте графік суми ряду Фур'є.

$$3.1.1. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ x-1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.2. f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.3. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ x+2, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.4. f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.5. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ x/2, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.6. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 2x+3, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.7. f(x) = \begin{cases} 3-x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.8. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ x-2, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.9. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 4x-3, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.10. f(x) = \begin{cases} 4-x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ -1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.11. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 2x-5, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.12. f(x) = \begin{cases} 3-2x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.13. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ \pi-2x, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.14. f(x) = \begin{cases} 5x+1, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.15. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 1-2x, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.16. f(x) = \begin{cases} 3x+2, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.17. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 4-2x, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.18. f(x) = \begin{cases} x+\pi, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.19. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 6x-5, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.20. f(x) = \begin{cases} \pi-2x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.21. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ \frac{\pi}{4}-x, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.22. f(x) = \begin{cases} \pi+x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.23. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 2x-3, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.24. f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}-2x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.25. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ \frac{\pi}{4}+2x, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.26. f(x) = \begin{cases} 1-\frac{x}{2}, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$



$$3.1.27. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ \frac{x}{3} - 1, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.28. f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.29. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 3x - 5, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

$$3.1.30. f(x) = \begin{cases} 1 - 3x, & \text{якщо } x \in (-\pi; 0), \\ 0, & \text{якщо } x \in [0; \pi). \end{cases}$$

3.2. Функцію  $f(x)$ , задану на відрізку  $[0; l]$ , розкладіть у ряд Фур'є:  
а) за синусами; б) за косинусами.

$$3.2.1. f(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 2 & \text{для } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$3.2.2. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [0; 2), \\ 3 - x & \text{для } x \in [2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.3. f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{для } x \in [0; 2), \\ 1 & \text{для } x \in [2; 4]. \end{cases}$$

$$3.2.4. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ 2 - x & \text{для } x \in [1; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.5. f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{для } x \in [0; 1), \\ x - 1 & \text{для } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$3.2.6. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{для } x \in [0; 2), \\ -1 & \text{для } x \in [2; 5]. \end{cases}$$

$$3.2.7. f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{для } x \in [0; 2), \\ 0 & \text{для } x \in [2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.8. f(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 2 - x & \text{для } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$3.2.9. f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ 0 & \text{для } x \in [1; 4]. \end{cases}$$

$$3.2.10. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in [0; 2), \\ 2 - x & \text{для } x \in [2; 4]. \end{cases}$$

$$3.2.11. f(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 1 & \text{для } x \in [1; 2], \\ 2 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.12. f(x) = \begin{cases} -x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 1 & \text{для } x \in [1; 2], \\ -1 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.13. f(x) = 2 - x \text{ для } x \in [0; 4].$$

$$3.2.14. f(x) = x \text{ для } x \in [0; 6].$$

$$3.2.15. f(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 1 & \text{для } x \in [1; 2], \\ 3 - x & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.16. f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 0 & \text{для } x \in [1; 2], \\ x - 2 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases}$$

$$3.2.17. f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 1 & \text{для } x \in [1; 4]. \end{cases}$$

$$3.2.18. f(x) = \begin{cases} -x & \text{для } x \in [0; 1), \\ x - 2 & \text{для } x \in [1; 2]. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3.2.19. f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in [0; 1), \\ x-2 & \text{для } x \in [1; 2], \\ 3-x & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases} & 3.2.20. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ 2-x & \text{для } x \in [1; 2], \\ 0 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases} \\
3.2.21. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ x-2 & \text{для } x \in [1; 2]. \end{cases} & 3.2.22. f(x) = \begin{cases} -2 & \text{для } x \in [0; 2), \\ 1 & \text{для } x \in [2; 4]. \end{cases} \\
3.2.23. f(x) = \begin{cases} 2 & \text{для } x \in [0; 1), \\ 1 & \text{для } x \in [1; 2], \\ 0 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases} & 3.2.24. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ 0 & \text{для } x \in [1; 3], \\ 2 & \text{для } x \in (3; 4]. \end{cases} \\
3.2.25. f(x) = \begin{cases} -1 & \text{для } x \in [0; 1), \\ x & \text{для } x \in [1; 2], \\ 2 & \text{для } x \in (2; 3]. \end{cases} & 3.2.26. f(x) = \begin{cases} -x & \text{для } x \in [0; 1), \\ 0 & \text{для } x \in [1; 3], \\ x & \text{для } x \in (3; 4]. \end{cases} \\
3.2.27. f(x) = x-3 & \text{для } x \in [0; 6]. & 3.2.28. f(x) = -x & \text{для } x \in [0; 4]. \\
3.2.29. f(x) = \begin{cases} -2 & \text{для } x \in [0; 2), \\ 3 & \text{для } x \in [2; 3]. \end{cases} & 3.2.30. f(x) = \begin{cases} -3 & \text{для } x \in [0; 3), \\ 1 & \text{для } x \in [3; 5]. \end{cases}
\end{array}$$

#### Тема 4. ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Косинус- та синус-перетворення Фур'є. Спектральна щільність, амплітудний та фазовий спектри.



**Література:** [9, розділ 9, §4], [14, розділ 3, §5], [15, розділ 13, п. 13.5], [16, розділ 17, §12—14], [17, розділ 6, §22].

### Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 4.1. Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Як відомо (див. тему 3), будь-яку кусково-монотонну функцію, визначену на скінченному проміжку, можна розкласти в ряд Фур'є, тобто зобразити нескінченною сумою простих гармонік. Для функцій, заданих на нескінченному проміжку  $(-\infty; \infty)$ , аналогом ряду Фур'є є інтеграл Фур'є.

Нехай неперіодична функція  $f(x)$  визначена на нескінченному проміжку  $(-\infty; \infty)$ , на будь-якому скінченному проміжку  $[-l; l]$  задовольняє умови Діріхле і є абсолютно інтегрованою, тобто збігається невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Тоді на проміжку  $[-l; l]$  цю функцію можна розкласти в ряд Фур'є (1.35). Підставивши в цей ряд значення коефіцієнтів  $a_0, a_n, b_n$  із формул (1.36), дістанемо

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) (\cos \omega_n t \cos \omega_n x + \sin \omega_n t \sin \omega_n x) dt = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n (t-x) dt. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Тут  $\omega_n = \frac{\pi n}{l}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — хвильові числа функції  $f(x)$ . Позначимо

$$\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{l} = \Delta \omega_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Тоді формула (1.41) набере вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n (t-x) dt \cdot \frac{\pi}{l},$$

або

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n (t-x) dt \right) \cdot \Delta \omega_n.$$

Перейдемо до границі при  $l \rightarrow \infty$ . Перший доданок у правій частині останньої формули прямує до нуля. Справді,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt < \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{M}{2l} = 0.$$

Введемо позначення

$$\varphi(\omega_n) = \int_{-l}^l f(t) \cos \omega_n (t-x) dt.$$

Тоді

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\omega_n) \Delta \omega_n. \quad (1.42)$$

Права частина формули (1.42) нагадує інтегральну суму (можна довести, що так і є насправді) для функції

$$\varphi(\omega) = \int_{-l}^l f(t) \cos \omega(t-x) dt, \quad \omega \in (0; \infty).$$

При  $l \rightarrow \infty$   $\Delta\omega_n \rightarrow 0$ , тобто хвильові числа  $\omega_n$  набувають усіх можливих значень від 0 до  $+\infty$ ; дискретний спектр хвильових чисел стає неперервним. Остаточно формула (1.42) набирає вигляду

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \varphi(\omega) d\omega$$

або

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \right) d\omega. \quad (1.43)$$

Формула (1.43) називається *формулою Фур'є*, а інтеграл у правій частині — *інтегралом Фур'є* для функції  $f(x)$ . Ця формула справджується для всіх точок  $x$ , в яких функція  $f(x)$  неперервна. Якщо  $x_0$  — точка розриву, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega(t-x) dt \right) d\omega = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Запишемо інтеграл Фур'є в іншому вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t - \omega x) dt \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t \cos \omega x + \sin \omega t \sin \omega x) dt \right) d\omega = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \right) \cos \omega x d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \right) \sin \omega x d\omega. \end{aligned}$$

Введемо позначення

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt, \quad (1.44)$$

тоді

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\omega) \cos \omega x + b(\omega) \sin \omega x) d\omega. \quad (1.45)$$

Порівнюючи формули (1.25), (1.31)—(1.33) та (1.44), (1.45), помітимо аналогію між рядом Фур'є і інтегралом Фур'є: знаку суми ряду Фур'є відповідає знак інтегрування, коефіцієнти  $a_n, b_n$  ряду замінено функціями  $a(\omega), b(\omega)$ . За аналогією з рядом Фур'є кажуть, що формула (1.45) дає розклад функції  $f(x)$  на гармоніки з частотами  $\omega$ , що неперервно змінюються від 0 до  $+\infty$ . Закон зміни амплітуд залежить від  $\omega$  і визначається формулами (1.44).



*Зуваження.* Не всі функції можна розкласти в інтеграл Фур'є. Так, найпростіші функції  $\sin x, \cos x, x^n$  не абсолютно інтегровні (невласний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  розбіжний), тому не розкладаються в інтеграл Фур'є.

#### 4.2. Інтеграл Фур'є для парних і непарних функцій

Нехай  $f(x)$  — парна функція, тоді  $f(t) \cos \omega t$  також парна, а функція  $f(t) \sin \omega t$  непарна. Для непарної функції  $f(x)$  добуток  $f(t) \cos \omega t$  є непарною функцією,  $f(t) \sin \omega t$  — парною. У цих випадках формули (1.44), (1.45) набувають простішого вигляду (табл. 5)

Таблиця 5

Властивість функції $f(x)$	$f(x)$ — парна функція	$f(x)$ — непарна функція
Інтеграл Фур'є	$f(x) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos \omega x d\omega$	$f(x) = \int_0^{\infty} b(\omega) \sin \omega x d\omega$
Коефіцієнти інтеграла Фур'є	$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt,$ $b(\omega) = 0$	$a(\omega) = 0,$ $b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$

#### 4.3. Інтеграл Фур'є в комплексній формі. Перетворення Фур'є

Нехай функція  $f(x)$  зображується інтегралом Фур'є за формулою (1.45). Скориставшись формулами

$$\cos \omega x = \frac{e^{i\omega x} + e^{-i\omega x}}{2}, \quad \sin \omega x = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i},$$

інтеграл Фур'є можна звести до вигляду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega, \quad (1.46)$$

де

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.47)$$

Із формул (1.46) та (1.47) випливає, що

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega x} d\omega. \quad (1.48)$$

Праву частину формули (1.48) називають *інтегралом Фур'є в комплексній формі* для функції  $f(x)$ .

Функцію  $F(\omega)$ , яка визначається формулою (1.47), називають *перетворенням Фур'є* функції  $f(x)$ . Формула (1.46) дає *обернене перетворення Фур'є* для функції  $F(\omega)$ .

Функцію  $f(t)$  ще називають *оригіналом*, а функцію  $F(\omega)$  — її зображенням або *Фур'є-образом*.

Формулу Фур'є (1.45) можна подати у симетричному вигляді:

1) якщо функція  $f(x)$  парна (або задана на проміжку  $(0; \infty)$  і продовжена на всю числову пряму парним способом), то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(\omega) \cos \omega x d\omega,$$

де

$$F_C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt;$$

2) якщо функція  $f(x)$  непарна (або задана на проміжку  $(0; \infty)$  і продовжена на всю числову пряму непарним способом), то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(\omega) \sin \omega x d\omega,$$

де

$$F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Функцію  $F_C(\omega)$  називають *косинус-перетворенням* Фур'є, а  $F_S(\omega)$  — *синус-перетворенням* Фур'є для функції  $f(x)$ .

Функції  $F(\omega)$ ,  $F_C(\omega)$ ,  $F_S(\omega)$  називають також *спектральною щільністю* функції  $f(x)$ .

Комплексну функцію  $F(\omega)$  можна записати у вигляді

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{i\varphi(\omega)}, \quad -\infty < \omega < \infty.$$

Модуль спектральної щільності  $A(\omega) = |F(\omega)|$  називають *амплітудним спектром*, а аргумент спряженої функції  $\varphi(\omega) = \arg \overline{F(\omega)}$  — *фазовим спектром* функції  $f(x)$ . Вони визначають відповідно амплітуду і фазу коливання з частотою  $\omega$ .

Перетворення Фур'є широко використовується для розв'язання багатьох практичних задач математичної фізики, електротехніки, цифрової обробки сигналів тощо.

#### **Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ**

Подайте функцію  $f(x)$  у вигляді інтеграла Фур'є, знайдіть спектральну щільність, амплітудний та фазовий частотні спектри. Побудуйте графіки функції  $f(x)$ , амплітудного та фазового частотних спектрів.

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Графік функції  $f(x)$  зображено на рис. 1.12. Переконаємось спочатку, що ця функція абсолютно інтегровна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{\infty} e^{-2x} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-2x}}{-2} \right|_0^A = \frac{1}{2} < \infty.$$

За формулою (1.47) знайдемо спектральну щільність

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\omega)t} dt = \\
 &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{e^{-(2+i\omega)t}}{-(2+i\omega)} \Big|_0^A = \frac{1}{2+i\omega} = \frac{2-i\omega}{4+\omega^2}.
 \end{aligned}$$

Підставивши значення спектральної щільності у формулу (1.46), дістанемо розклад заданої функції в інтеграл Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega.$$

Ця рівність справджується для всіх дійсних  $x$ , крім  $x=0$ , для якого має місце формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2}.$$

Знайдемо амплітудний та фазовий частотні спектри:

$$F(\omega) = |F(\omega)| \cdot e^{\arg F(\omega)}, \quad |F(\omega)| = \left| \frac{2-i\omega}{4+\omega^2} \right| = \frac{|2-i\omega|}{4+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}},$$

$$\arg F(\omega) = \arctg \frac{-\omega/(4+\omega^2)}{2/(4+\omega^2)} = -\arctg \frac{\omega}{2}, \quad F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} e^{-i \arctg \frac{\omega}{2}},$$

$$A(\omega) = |F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}} \quad \text{— амплітудний частотний спектр (рис.1.13),}$$

$$\varphi(\omega) = \arg \overline{F(\omega)} = \arctg \frac{\omega}{2} \quad \text{— фазовий частотний спектр (рис.1.14)}$$

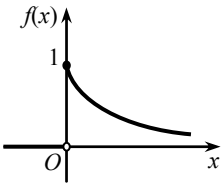


Рис. 1.12

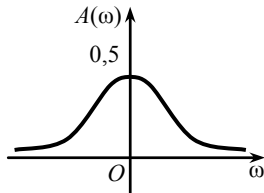


Рис. 1.13

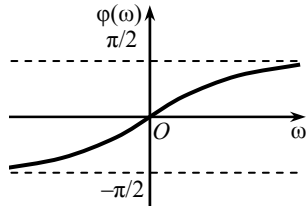


Рис. 1.14



$$2. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \pi. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Задана функція абсолютно інтегровна, обмежена, кусково-монотонна на кожному скінченному інтервалі (рис. 1.15). Отже, її можна подати у вигляді інтеграла Фур'є. Оскільки функція  $f(x)$  непарна, то знаходимо її синус-перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} F_S(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t dt = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (\cos(1-\omega)t - \cos(1+\omega)t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(1-\omega)t}{1-\omega} - \frac{\sin(1+\omega)t}{1+\omega} \right) \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin(1-\omega)\pi}{1-\omega} - \frac{\sin(1+\omega)\pi}{1+\omega} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega} + \frac{\sin \omega\pi}{1+\omega} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2}, \end{aligned}$$

де  $\omega \neq 1$ .

Для  $\omega = 1$  маємо

$$F_S(1) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Крім того,

$$\lim_{\omega \rightarrow 1} F_S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\sin \omega\pi}{1-\omega^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \lim_{\omega \rightarrow 1} \frac{\pi \cos \omega\pi}{-2\omega} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{-\pi}{-2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Отже, синус-перетворення Фур'є  $F_S(\omega)$  на проміжку  $[0; \infty)$  — неперервна функція (рис. 1.16).

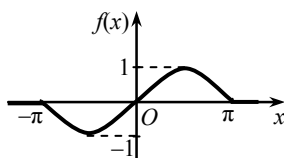


Рис. 1.15

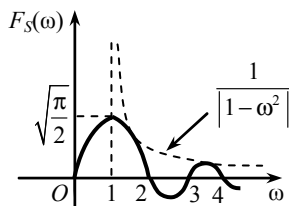


Рис. 1.16

Зображення функції  $f(x)$  інтегралом Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \sin \omega x d\omega.$$

Ця рівність виконується для всіх значень  $x$ .  
Знайдемо амплітудний та фазовий частотні спектри:

$$A(\omega) = |F_S(\omega)| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left| \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} \right|, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} > 0, \\ \pi, & \text{якщо } \frac{\sin \omega \pi}{1 - \omega^2} < 0. \end{cases}$$

Будуємо графіки функцій  $A(\omega)$ ,  $\varphi(\omega)$  (рис. 1.17 та 1.18).

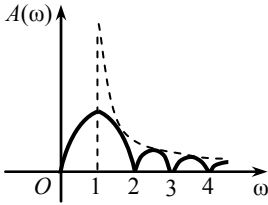


Рис. 1.17

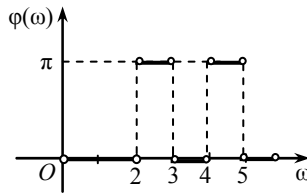


Рис. 1.18

### Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Подайте функцію  $f(x)$  у вигляді інтеграла Фур'є, знайдіть спектральну щільність, амплітудний та фазовий частотні спектри. Побудуйте графіки функції  $f(x)$ , амплітудного та фазового частотних спектрів.

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 1. \end{cases} \quad 2. f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{якщо } |x| \leq 0,5, \\ 0, & \text{якщо } |x| > 0,5. \end{cases}$$

3. Знайдіть амплітудний та фазовий спектри функції

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x < 1 \text{ або } x > 2. \end{cases}$$

4. Знайдіть перетворення Фур'є функції

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x/2), & \text{якщо } |x| \leq \pi, \\ 0, & \text{якщо } |x| > \pi. \end{cases}$$

5. Зобразіть інтегралом Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{якщо } 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

### Відповіді

1.  $f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2} \cos \omega x d\omega, x \in R, F_C(\omega) = A(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}}{\omega^2}, \varphi(\omega) = 0.$  2.  $f(x) =$

$$= 2 \int_0^{\infty} \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2} \cos \omega x d\omega, x \in R, F_C(\omega) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2}, & \text{якщо } \omega \neq \pi, \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi}}, & \text{якщо } \omega = \pi, \end{cases} A(\omega) = \sqrt{2\pi} \left| \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2} \right|,$$

$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2} \geq 0, \\ \pi, & \text{якщо } \frac{\cos \frac{\omega}{2}}{\pi^2 - \omega^2} < 0. \end{cases}$  3.  $A(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega}{2}, \varphi(\omega) = \frac{3\omega}{2}.$  4.  $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4 \cos \pi \omega}{1 - 4\omega^2}.$

5.  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin \omega}{\omega^2} - \frac{\cos 2\omega}{\omega} \right) \sin \omega x d\omega.$

### Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Зобразіть інтегралом Фур'є функції  $f(x)$ .

1.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \sin x, & \text{якщо } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{якщо } x \geq \pi. \end{cases}$  2.  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{якщо } -1 < x < 0, \\ 1-x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| \geq 1. \end{cases}$

3.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \cos, & \text{якщо } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{якщо } x \geq \pi. \end{cases}$  4.  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < -1, \\ 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

$$5. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 < x < 3, \\ 1, & \text{якщо } x = 3, \\ 0, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 4, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ 2, & \text{якщо } x = 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1-x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ \pi x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 6, & \text{якщо } 0 < x < 4, \\ 3, & \text{якщо } x = 4, \\ 0, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

Знайдіть синус-перетворення Фур'є функції  $f(x)$ .

$$11. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Знайдіть косинус-перетворення Фур'є функції  $f(x)$ .

$$17. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{якщо } x > \pi. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 3-x, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ 0, & \text{якщо } x \geq 2. \end{cases}$$

Знайдіть амплітудний і фазовий спектри функції  $f(x)$ .

$$25. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ 2, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } 1 < x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 1, \\ 2, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 2, \\ 1, & \text{якщо } 2 \leq x \leq 3, \\ 0, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 4, \\ 3, & \text{якщо } 4 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{якщо } x > 5. \end{cases}$$

**Загальна характеристика розділу.** У розділі вивчаються подальші узагальнення поняття «Визначений інтеграл» на області інтегрування більш складного вигляду й іншої розмірності. Розглядаються застосування до задач геометрії, механіки та фізики.

### СТРУКТУРА МОДУЛЯ

- Тема 1. Подвійні інтеграли.
- Тема 2. Потрійні інтеграли.
- Тема 3. Криволінійні інтеграли.
- Тема 4. Поверхневі інтеграли.
- Тема 5. Елементи теорії поля.

**Базисні поняття.** 1. Інтегральна сума по плоскій і просторовій області. 2. Криволінійний і поверхневий інтеграли 1-го і 2-го роду. 3. Скалярне і векторне поля. 4. Похідна за напрямом. 5. Градієнт. 6. Оператор Гамільтона. 7. Дивергенція. 8. Ротор. 9. Потік векторного поля. 10. Циркуляція. 11. Потенціал.

**Основні задачі.** 1. Обчислення інтегралів. 2. Відшукування довжин, площ, об'ємів, мас тощо дуг, поверхонь плоских і просторових областей. 3. Визначення роботи силового поля. 4. Відшукування характеристик скалярного і векторного полів. 5. Визначення типу векторного поля (потенціальне, соленоїдальне, гармонічне) за його диференціальними характеристиками. 6. Відшукування інтегральних характеристик векторного поля (потік, робота, циркуляція, потенціал).

### ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

#### 1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

- 1.1. Означення подвійного інтеграла, властивості, геометричний зміст, обчислення.
- 1.2. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат.
- 1.3. Застосування подвійного інтеграла.

- 1.4. Означення потрійного інтеграла, властивості, геометричний зміст, обчислення.
- 1.5. Заміна змінних у потрійному інтегралі. Перехід до циліндричних і сферичних координат.
- 1.6. Застосування потрійних інтегралів.
- 1.7. Криволінійні інтеграли першого і другого роду. Означення, властивості, обчислення, застосування.
- 1.8. Формула Гріна.
- 1.9. Умова незалежності криволінійного інтеграла другого роду від форми шляху інтегрування.
- 1.10. Обчислення роботи силового поля за допомогою криволінійного інтеграла другого роду.
- 1.11. Поверхневі інтеграли першого і другого роду. Означення, властивості, зведення до подвійного інтеграла. Застосування.
- 1.12. Формула Остроградського—Гаусса.
- 1.13. Скалярне і векторне поля; їх опис за допомогою скалярних і векторних функцій.
- 1.14. Приклади фізичних скалярних і векторних полів.

Геометричні характеристики поля.

- 1.15. Лінії і поверхні рівня скалярного поля.
- 1.16. Векторні лінії векторного поля.

Диференціальні характеристики поля.

- 1.17. Похідна за напрямом скалярного поля. Градієнт.
- 1.18. Дивергенція, ротор векторного поля.
- 1.19. Класифікація векторних полів.
- 1.20. Оператор Гамільтона.

Інтегральні характеристики поля.

- 1.21. Потік векторного поля через поверхню.
- 1.22. Циркуляція векторного поля.
- 1.23. Формула Остроградського—Гаусса; її векторний запис; фізичний зміст.
- 1.24. Формула Стокса; її векторний запис; фізичний зміст.
- 1.25. Потенціал потенціального поля; його відшукання за допомогою криволінійного інтеграла.

## **2. Знання на рівні доведень та виведень**

- 2.1. Правило зведення криволінійного інтеграла першого та другого роду до звичайного визначеного інтеграла.
- 2.2. Правило зведення подвійного інтеграла до повторного.
- 2.3. Правило зведення поверхневого інтеграла до подвійного.
- 2.4. Формула Гріна.

- 2.5. Необхідні й достатні умови рівності нулю криволінійного інтеграла по замкненому контуру.
- 2.6. Формула Остроградського—Гаусса.
- 2.7. Формула для похідної за напрямом; її вираз через градієнт.
- 2.8. Властивості градієнта.

### 3. Уміння в розв'язанні задач

- 3.1. Зводити подвійний, потрійний, криволінійний і поверхневий інтеграли до визначених інтегралів і обчислювати їх.
- 3.2. Використовувати при обчисленні кратних інтегралів полярні, циліндричні і сферичні координати.
- 3.3. Знаходити похідну за напрямом, градієнт, дивергенцію, ротор.
- 3.4. Визначати тип векторного поля.
- 3.5. Знаходити потік, роботу, циркуляцію, потенціал.

## Тема 1. ПОДВІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Основні поняття та означення. Умови існування та властивості. Обчислення. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Застосування.



**Література:** [3, розділ 2, п. 2.3], [9, розділ 10, §1], [15, розділ 12, п. 12.1], [16, розділ 14, §1—10], [17, розділ 2, §7].

### Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 1.1. Задача про об'єм циліндричного тіла

Нехай потрібно обчислити об'єм тіла, обмеженого зверху поверхнею  $z = f(x, y)$ , знизу — замкненою обмеженою областю  $D$ , що лежить у площині  $Oxy$ , з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області  $D$ , а твірні паралельні осі  $Oz$  (рис. 2.1). Таке тіло називають *циліндричним*. Розіб'ємо область  $D$  на  $n$  довільних частин  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), площі яких позначимо через  $\Delta S_i$ . Через межу кожної області  $D_i$  проведемо прямі, паралельні осі  $Oz$ . У результаті тіло поділиться на  $n$  частин, його об'єм  $V$  дорівнюватиме сумі об'ємів утворених циліндричних стовпців, тобто  $V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$ , де  $V_i$  — об'єм  $i$ -го стовпця, обмеженого знизу основою  $D_i$ , зверху — поверхнею  $z = f(x, y)$ , з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області  $D_i$ , а



твірні паралельні осі  $Oz$ . Візьмемо в кожній області  $D_i$  довільну точку  $M_i(x_i, y_i)$ , обчислимо значення функції  $f(x_i, y_i)$  і розглянемо добуток  $f(x_i, y_i)\Delta S_i$ . Цей добуток визначає об'єм циліндричного стовпчика з основою  $D_i$  і висотою  $f(x_i, y_i)$ , який наближено дорівнює об'єму  $V_i$ .

Отже, справедлива наближена формула

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Із збільшення числа  $n$  областей  $D_i$  і одночасним зменшенням розміру кожної області  $D_i$  наближення стає точнішим. Нехай  $\lambda = \max_i d_i$  — найбільший з діаметрів областей  $D_i$  (діаметр — найбільша відстань між точками області) прямує до нуля. У цьому разі число областей  $D_i$ , кожна з яких стягується у точку, необмежено зростає. Тоді об'єм даного тіла визначається граничною формулою

$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta S_i. \quad (2.1)$$

## 1.2. Означення подвійного інтеграла

Нехай функція  $z = f(x, y)$  визначена і неперервна в замкненій обмеженій області  $D$  площини  $Oxy$  (рис. 2.2). Розіб'ємо область  $D$  на  $n$  довільних частин  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), площі яких позначимо через  $\Delta S_i$ . Візьмемо в кожній області  $D_i$  довільну точку  $M_i(x_i, y_i)$ , обчислимо значення функції  $f(x_i, y_i)$  й утворимо суму

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i)\Delta S_i, \quad (2.2)$$

яку назвемо інтегральною сумою функції  $z = f(x, y)$  по області  $D$ . Нехай  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$  — найбільший з діаметрів областей  $D_i$ .

Розглянемо границю інтегральної суми (2.2), коли  $n \rightarrow \infty$  і  $\lambda \rightarrow 0$  (за такої умови кожна область  $D_i$  стягується у точку і її площа  $\Delta S_i$  прямує до нуля). Якщо ця границя існує і не залежить ні від способу розбиття області  $D$  на частинні області  $D_i$ , ні від вибору точок  $M_i$  в них, то її називають *подвійним інтегралом* від функції  $f(x, y)$  по області  $D$  і позначають

$$\iint_D f(x, y) dx dy \quad (\text{або} \quad \iint_D f(x, y) dS).$$

Отже, за означенням

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i.$$

У цьому разі функцію  $f(x, y)$  називають *інтегрованою* в області  $D$ ;  $D$  — областю інтегрування;  $x, y$  — змінними інтегрування;  $dx dy$  (або  $dS$ ) — елементом площі.

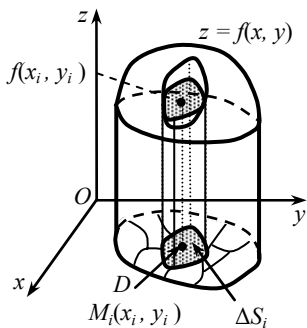


Рис. 2.1

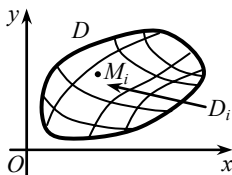


Рис. 2.2

**Теорема**

(достатня умова інтегровності функції). Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в замкненій обмеженій області  $D$ , то вона інтегровна в цій області.

**1.3. Геометричний зміст подвійного інтеграла**

Порівнюючи означення подвійного інтеграла із формулою (2.1) для обчислення об'єму циліндричного тіла, доходимо висновку, що геометрично подвійний інтеграл виражає об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею  $z = f(x, y)$ , де  $f(x, y) \geq 0$ , знизу — замкненою обмеженою областю  $D$ , з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області  $D$ , а твірні паралельні осі  $Oz$ .

Отже, об'єм циліндричного тіла обчислюють за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Якщо для всіх точок області  $D$  функція  $f(x, y) \equiv 1$ , то об'єм циліндричного тіла чисельно дорівнює площі основи  $D$ , тобто

$$S = \iint_D dx dy.$$

#### 1.4. Властивості подвійного інтеграла

Порівнюючи означення подвійного та визначеного інтегралів, дійдемо висновку, що ці інтеграли будуються за однаковою схемою. Звідси випливає, що і властивості подвійного інтеграла аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Сформулюємо ці властивості без доведення.

Нехай підінтегральні функції наступних інтегралів інтегровні.

1) сталий множник можна винести за знак подвійного інтеграла:

$$\iint_D C f(x, y) dx dy = C \iint_D f(x, y) dx dy, \quad C — \text{стала};$$

2) подвійний інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) подвійних інтегралів від цих функцій:

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy;$$

3) якщо в області  $D$   $f(x, y) \geq 0$ , то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0;$$

4) якщо  $f(x, y) \leq g(x, y)$  для всіх точок області  $D$ , тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy;$$

5) якщо область  $D$  розбити на дві частини  $D_1$  та  $D_2$ , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy;$$

6) (про оцінку подвійного інтеграла). Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в області  $D$ ,  $S$  — площа області  $D$ ,  $m$  і  $M$  — відповідно найменше і найбільше значення функції  $f(x, y)$  в області  $D$ , то

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS;$$

7) (Про середнє значення функції). Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна в замкненій обмеженій області  $D$  з площею  $S$ , то в цій області існує точка  $(x_0, y_0)$  така, що

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) S.$$

При цьому величину

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dx dy$$

називають *середнім значенням* функції  $f(x, y)$  в області  $D$ .

### 1.5. Обчислення подвійного інтеграла

Розглянемо спочатку випадок обчислення подвійного інтеграла в прямокутних декартових координатах. Покажемо, що його обчислення зводиться до послідовного обчислення двох визначених інтегралів.

Нехай потрібно обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy,$$

де  $f(x, y)$  — невід’ємна і неперервна в області  $D$  функція. Згідно з геометричним змістом подвійного інтеграла значення цього інтеграла чисельно дорівнює об’єму циліндричного тіла з основою  $D$ , обмеженого зверху поверхнею  $z = f(x, y)$  (рис. 2.3). Обчислимо об’єм, використовуючи метод паралельних перерізів. За цим методом об’єм тіла обчислюють за формулою

$$V = \int_a^b S(x) dx, \quad (2.3)$$

де  $S(x)$  — площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі  $Ox$ ,  $x = a$  та  $x = b$  — рівняння площин, які обмежують дане тіло.

Накладемо на форму області  $D$  деякі обмеження. Нехай область інтегрування  $D$  обмежена неперервними кривими  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  та прямими  $x = a$  та  $x = b$ , причому  $a < b$ ,  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$  для всіх  $x \in [a; b]$  (рис. 2.4). У цьому разі будь-яка пряма, яка паралельна осі  $Oy$  і проходить через точку  $(x; 0)$ , де  $x \in (a; b)$ , перетинає межу області  $D$  не більше ніж у двох точках. Таку область називають *правильною у напрямку осі  $Oy$* .

Проведемо площину  $x = \text{const}$ , де  $x \in (a; b)$ , перпендикулярну до осі  $Ox$ . Переріз цієї площини з циліндричним тілом — криволінійна трапеція  $ABCK$ , обмежена кривою  $z = f(x, y)$ ,  $x = \text{const}$ , прямими —  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$  та  $z = 0$ . Площу трапеції визначаємо за формулою

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Після цього формула (2.3) набирає вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.4)$$

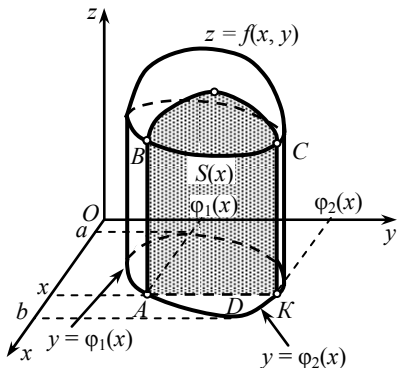


Рис. 2.3'

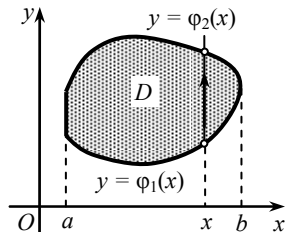


Рис. 2.4

Схематично обчислення подвійного інтеграла відбувається у такій послідовності:

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_a^b F(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b (F(x, \varphi_2(x)) - F(x, \varphi_1(x))) dx = \int_a^b g(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a) = \text{const}, \end{aligned}$$

де  $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = f(x, y)$ ,  $G'(x) = g(x)$ .

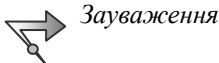
У повторному інтегралі (2.4) інтегрування спочатку виконується за змінною  $y$  (внутрішній інтеграл, при цьому змінна  $x$  вважається сталою). У результаті обчислення внутрішнього інтеграла (в межах від  $\varphi_1(x)$  до  $\varphi_2(x)$ ) одержуємо певну функцію від однієї змінної  $x$ . Інтегруючи цю функцію від  $a$  до  $b$  (зовнішній інтеграл), дістаємо певне число — значення подвійного інтеграла.

Нехай тепер область інтегрування  $D$  задана рівняннями  $x = \psi_1(y)$ ,  $x = \psi_2(y)$ ,  $y = c$  та  $y = d$ , де  $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ ,  $c \leq y \leq d$  (рис. 2.5). Ця область є правильною у напрямку осі  $Ox$ , тобто будь-яка пряма, яка паралельна осі  $Ox$  і проходить через точку  $(0; y)$ , де  $y \in (c; d)$ , перетинає межу області  $D$  не більше ніж у двох точках.

У цьому разі подвійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx, \quad (2.5)$$

в якій внутрішній інтеграл обчислюється за змінною  $x$  ( $y$  — стала), а зовнішній — за змінною  $y$ .



*Зауваження*

1. Якщо область інтегрування правильна і в напрямку осі  $Oy$ , і в напрямку осі  $Ox$  (таку область називатимемо *правильною*), тоді інтегрування можна проводити як за формулою (2.4), так і за формулою (2.5). На вибір порядку інтегрування впливає форма області  $D$ , яка визначається рівняннями межі цієї області.

2. Якщо область  $D$  правильна, наприклад у напрямку осі  $Oy$ , а межа цієї області задається кривими  $y = \varphi_1(x)$ ,  $y = \varphi_2(x)$ ,  $y = \varphi_3(x)$  та прямими  $x = a$ ,  $x = b$  (рис. 2.6), то в цьому разі подвійний інтеграл дорівнює сумі двох повторних інтегралів

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} f(x, y) dy.$$

Тут  $c$  — абсциса точки перетину кривих  $y = \varphi_2(x)$  та  $y = \varphi_3(x)$ , тобто є розв'язком рівняння  $\varphi_2(x) = \varphi_3(x)$ ,  $x \in (a, b)$ .

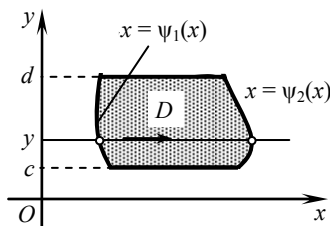


Рис. 2.5

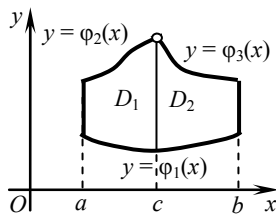


Рис. 2.6

3. У разі, коли область інтегрування є прямокутником, який обмежений прямими  $x = a$  та  $x = b$ ,  $y = c$  та  $y = d$  (рис. 2.7), формули (2.4) та (2.5) набувають найпростішого вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Зазначимо, що прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, — єдиний випадок області інтегрування, коли у повторному інтегралі внутрішні межі інтегрування є сталими. У всіх інших випадках хоча б одна внутрішня межа інтегрування є функцією змінної, за якою відбувається внутрішнє інтегрування.

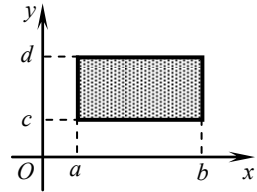


Рис. 2.7

4. Якщо область  $D$  не є правильною ні в напрямі осі абсцис, ні в напрямі осі ординат (рис. 2.8, а), то для обчислення подвійного інтеграла таку область необхідно розбити на частини, кожна з яких правильна хоча б в одному напрямі. Так, розбиття області  $D$ , зображене на рис. 2.8, б, дає можливість скористатися формулою (2.4), а на рис. 2.8, в — формулою (2.5).

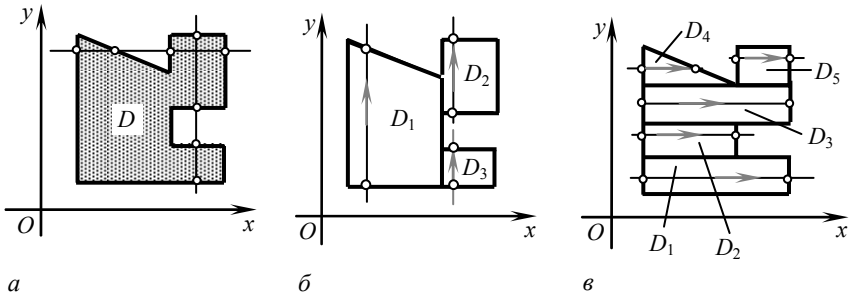


Рис. 2.8

### 1.6. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Подвійний інтеграл у полярних координатах

Для спрощення обчислень подвійного інтеграла  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , де  $f(x, y)$  — неперервна в області  $D$ , інколи переходять від прямокутних декартових координат  $x$  і  $y$  до нових криволінійних координат  $u$  і  $v$ . Нехай нові змінні  $u$  і  $v$  пов'язані з прямокутними координатами  $x$  і  $y$  співвідношеннями  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$ , де функції  $x(u, v)$  та  $y(u, v)$ , які неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку, встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками області  $D$  площини  $Oxy$  і точками області  $D'$  площини  $O'uv$  (рис. 2.9) і, крім того, визначник перетворення (визначник Якобі або якобіан) в області  $D'$  не обертається у нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді справедлива формула заміни змінних у подвійному інтегралі:

$$\boxed{\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.} \quad (2.6)$$

Розглянемо частинний випадок заміни змінних, а саме перехід у подвійному інтегралі до полярних координат.

Вважатимемо за нові змінні полярні координати  $\rho$  і  $\varphi$ , які пов'язані з декартовими координатами  $x$  та  $y$  формулами  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$  (рис. 2.10). Тоді

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho.$$

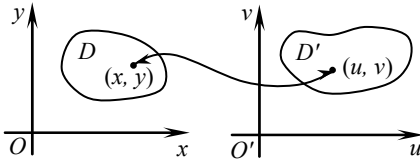


Рис. 2.9

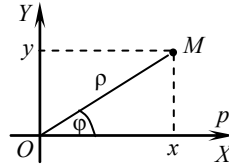


Рис. 2.10

Подвійний інтеграл (2.6) у полярній системі координат набуває вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (2.7)$$

де  $D_1$  — область, яка відповідає області  $D$  у полярній системі координат.

У полярній системі координат за незалежну змінну вибирають  $\varphi$ , а  $\rho$  розглядають як функцію від  $\varphi$ , тобто  $\rho = \rho(\varphi)$  ( $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ).

Подальше зведення подвійного інтеграла до повторного інтеграла залежить від області інтегрування. Розглянемо найтипівші випадки:

**1.** Нехай область  $D$  обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути  $\alpha$  та  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ), і кривою  $\rho = \rho(\varphi)$  (рис. 2.11, а). Тоді полярні координати області  $D_1$  змінюються в межах  $0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  і формулу (2.7) можна записати у вигляді



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (2.8)$$

2. Нехай область  $D$  обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути  $\alpha$  та  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ), і кривими  $\rho = \rho_1(\varphi)$  та  $\rho = \rho_2(\varphi)$  ( $\rho_1 \leq \rho_2$ ) (рис. 2.11, б). Тоді полярні координати області  $D_1$  змінюються в межах  $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$ ,  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$  і формулу (2.7) можна записати у вигляді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (2.9)$$

3. Нехай область  $D$ , межа якої задана полярним рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$ , охоплює початок координат, тобто точка  $O(0; 0)$  є внутрішньою точкою області  $D$  (рис. 2.11, в), тоді виконується формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (2.10)$$

Зокрема, якщо межа області  $D$  — коло  $x^2 + y^2 = R^2$ , або  $\rho = R$ , тоді формула (2.10) набуває найпростішого вигляду

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

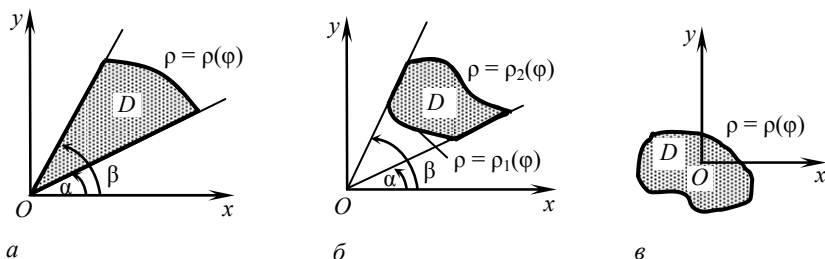


Рис. 2.11

 **Зуваження.**

1. Оскільки в полярних координатах вираз  $x^2 + y^2$  має досить простий вигляд  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , а рівняння кола  $x^2 + y^2 = R^2$  —  $\rho = R$ , то до полярних координат найчастіше переходять тоді, коли область  $D$  — круг, кільце,

сектор тощо, при цьому підінтегральна функція часто має вигляд  $f(x, y) = g(x^2 + y^2)$ .

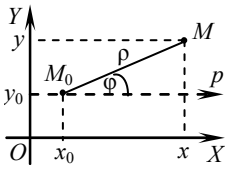


Рис. 2.12

2. У деяких випадках, наприклад, коли область  $D$  обмежена колом  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ , доцільно перейти до полярних координат із полюсом у точці  $M_0(x_0, y_0)$  і полярною віссю, напрям якої збігається з додатним напрямом осі абсцис. У цьому разі перехід від прямокутних декартових координат  $(x, y)$  до полярних координат  $(\rho, \varphi)$  (рис. 2.12) здійснюється за формулами  $x - x_0 = \rho \cos \varphi$ ,  $y - y_0 = \rho \sin \varphi$ ,

при цьому якобіан залишається незмінним:  $J = \rho$ .

### 1.6. Деякі застосування подвійного інтеграла

1. Площу  $S$  плоскої області  $D$  обчислюють за формулою

$$S = \iint_D dx dy. \quad (2.11)$$

У полярних координатах ця формула має вигляд

$$S = \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi.$$

2. Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху неперервною поверхнею  $z = f(x, y)$ , де  $f(x, y) \geq 0$ , знизу — замкненою обмеженою областю  $D$ , з боків — циліндричною поверхнею, напрямна якої збігається з межею області  $D$ , а твірні паралельні осі  $Oz$ , визначають за формулою

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (2.12)$$

3. Площу  $S_\sigma$  гладкої поверхні  $\sigma$ , заданої рівнянням  $z = f(x, y)$ , обчислюють за формулою

$$S_\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + (f'_x(x, y))^2 + (f'_y(x, y))^2} dx dy, \quad (2.13)$$

де  $D_{xy}$  — проекція поверхні на площину  $Oxy$ .

4. Масу  $m$  плоскої пластини, яка має форму обмеженої замкненої області  $D$ , в кожній точці якої задано густину  $\gamma(x, y)$ , обчислюють за формулою

$$m = \iint_D \gamma(x, y) dx dy. \quad (2.14)$$

5. Координати  $x_c, y_c$  центра маси пластини визначають за формулами

$$x_c = \frac{1}{m} \iint_D x \gamma(x, y) dx dy, \quad y_c = \frac{1}{m} \iint_D y \gamma(x, y) dx dy. \quad (2.15)$$



*Зауваження.* Величини

$$M_y = \iint_D x \gamma(x, y) dx dy, \quad M_x = \iint_D y \gamma(x, y) dx dy$$

називаються *статичними моментами пластини* відносно осей  $Oy$  та  $Ox$  відповідно. Тоді координати центра маси пластини можна записати у вигляді

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \quad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

6. Моменти інерції пластини відносно координатних осей обчислюють за формулами

$$I_x = \iint_D y^2 \gamma(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \gamma(x, y) dx dy,$$

а відносно початку координат — за формулою

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \gamma(x, y) dx dy.$$

## **Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ**

1. У подвійному інтегралі  $\iint_D f(x, y) dx dy$  розставте межі інтегрування (двома способами) по області  $D$ , межа якої задана такими рівняннями:

а)  $x = 1, x = 4, y = 1, y = 3$ ;

б)  $y = x - 1, x = 3, y = -1$ ;

в)  $y = 2x, x + y = 3, y = 0$ ;

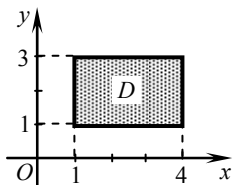


Рис. 2.13

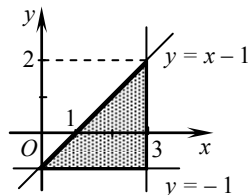


Рис. 2.14

г)  $y = 2x - 2$ ,  $y = 2x - 8$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$ ;

д)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 2$ ,  $x = 0$ ;

е)  $y = 0$ ,  $y = 3$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $x = \sqrt{2y - y^2}$ .

*Розв'язання:* а) Маємо найпростіший випадок. Область інтегрування — прямокутник, зображений на рис. 2.13. Ця область правильна і в напрямку осі  $Ox$ , і в напрямку осі  $Oy$ . Проекція області на вісь  $Ox$  — відрізок  $[1; 4]$ , а на вісь  $Oy$  — відрізок  $[1; 3]$ . Оскільки сторони прямокутника паралельні осям координат, то подвійний інтеграл зводиться до повторного інтеграла за формулами

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^4 dx \int_1^3 f(x, y) dy$$

або

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^3 dy \int_1^4 f(x, y) dx.$$

б) Область інтегрування — трикутник (рис. 2.14). Ця область є правильною. Як і в попередньому випадку розбивати область інтегрування на частини не потрібно. Далі міркуємо так. Область інтегрування лежить між прямими  $x = 0$  та  $x = 3$ , її нижня межа  $y = -1$ , а верхня —  $y = x - 1$ , тому за формулою (2.4) маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^3 dx \int_{-1}^{x-1} f(x, y) dy.$$

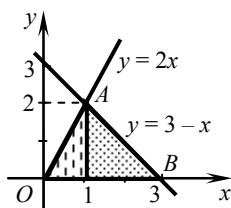
Спроекуємо тепер область  $D$  на вісь  $Oy$ . У результаті дістанемо відрізок  $[-1; 2]$ . Область  $D$  розміщена між прямими  $y = -1$  та  $y = 2$ , причому ліва межа має рівняння  $x = y + 1$ , а права —  $x = 3$ . Отже, якщо  $-1 \leq y \leq 2$ , то  $y + 1 \leq x \leq 3$ , тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-1}^2 dy \int_{y+1}^3 f(x, y) dx.$$

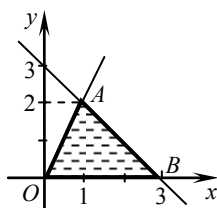
в) Область інтегрування — трикутник (рис. 2.15). Ця область також правильна в обох напрямках, але на відміну від попередніх випадків існує суттєва відмінність. Спроекуємо область  $D$  на вісь  $Ox$ , дістанемо відрізок  $[0; 3]$ , точка перетину прямих  $y = 2x$  та  $y = 3 - x$  проєкується у точку, абсциса якої  $x = 1$ . Нижня межа області  $D$  на всьому проміжку  $[0; 3]$

задається одним рівнянням  $y = 0$ , тоді як верхня межа складається з двох частин, їхні рівняння:  $y = 2x$ , якщо  $x \in [0; 1]$ , та  $y = 3 - x$ , якщо  $x \in [1; 3]$  (рис. 2.15, *a*). Як наслідок, щоб звести подвійний інтеграл до повторного, де внутрішнє інтегрування відбувається за змінною  $y$ , область інтегрування потрібно розбити на дві частини: якщо  $0 \leq x \leq 1$ , то  $0 \leq y \leq 2x$ ; якщо  $1 \leq x \leq 3$ , то  $0 \leq y \leq 3 - x$ , тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} f(x, y) dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$$



*a*



*б*

Рис. 2.15

Розставимо межі інтегрування іншим способом. Для цього спроектуємо область  $D$  на вісь  $Oy$ . У результаті дістанемо відрізок  $[0; 2]$ . Область  $D$  розміщена між прямими  $y = 0$  та  $y = 2$ , як видно з рис. 2.15, *б*, у цьому випадку розбивати область  $D$  на окремі частини вже не потрібно. Якщо  $0 \leq y \leq 2$ , то  $\frac{y}{2} \leq x \leq 3 - x$ . Отже,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y) dx.$$

г) Область інтегрування — паралелограм (рис. 2.16, *a*), розміщений у смугі між прямими  $y = 0$  та  $y = 2$  і обмежений зліва прямою  $x = \frac{y}{2} + 1$  (тут  $x$  виражений через  $y$  з рівняння  $y = 2x - 2$ ) та  $x = \frac{y}{2} + 4$ , тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}+1}^{\frac{y}{2}+4} f(x, y) dx.$$

Для того, щоб розставити межі в іншому порядку, розбиваємо область  $D$  на три частини (див. рис. 2.16, б):

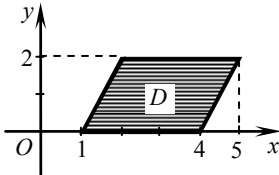
$$D_1: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x-2;$$

$$D_2: 2 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2;$$

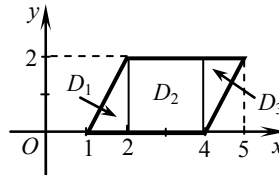
$$D_3: 4 \leq x \leq 5, 2x-8 \leq y \leq 2.$$

Межі інтегрування розставляємо так:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_1^2 dx \int_0^{2x-2} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_0^2 f(x, y) dy + \int_4^5 dx \int_{2x-8}^2 f(x, y) dy.$$



а



б

Рис. 2.16

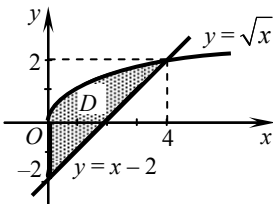


Рис. 2.17

д) Область інтегрування обмежена верхньою віткою параболи  $y^2 = x$ , прямими  $x=0$  та  $y=x-2$  (рис. 2.17). Область  $D$  розміщена у смугі між прямими  $x=0$  та  $x=4$ , рівняння нижньої межі  $y=x-2$ , а верхньої —  $y=\sqrt{x}$ . Тому

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

Проекція області  $D$  на вісь  $Oy$  — відрізок  $[-2; 2]$ . Ліва межа області  $D$  складається з двох частин — відрізка та дуги параболи. Тому область інтегрування розбиваємо на дві частини:

$$D_1: -2 \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 2+y;$$

$$D_2: 0 \leq y \leq 2, y^2 \leq x \leq 2+y.$$

У результаті маємо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{-2}^0 dy \int_0^{y+2} f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$$

е) Область інтегрування (див. 2.18, а), обмежена прямими  $y=0$ ,  $y=3$ ,  $x=0$ ,  $x=2$  та правою частиною кола  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  (рівняння  $x = \sqrt{2y - y^2}$  рівносильне рівнянню  $x^2 = 2y - y^2$ , або  $x^2 + (y^2 - 2y + 1) = 1$  за умови  $x \geq 0$ ). З рівняння кола визначаємо  $y = 1 \pm \sqrt{1 - x^2}$ , причому рівняння  $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$  визначає верхнє півколо, а рівняння  $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$  — нижнє півколо. У напрямку осі ординат область  $D$  не є правильною, тому розбиваємо її на три правильні області, а саме (див. рис. 2.18, б):

$$D_1: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - \sqrt{1 - x^2};$$

$$D_2: 0 \leq x \leq 1, 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 3;$$

$$D_3: 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3.$$

Тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1 - \sqrt{1 - x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{1 + \sqrt{1 - x^2}}^3 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^3 f(x, y) dy.$$

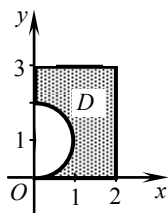
Для того, щоб розставити межі в іншому порядку, розбиваємо область  $D$  на дві частини прямою  $y=2$  (див. рис. 2.18, в):

$$D_1: 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{2y - y^2};$$

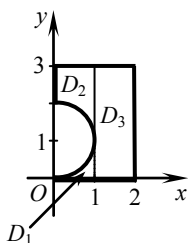
$$D_2: 2 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq 2.$$

Тоді

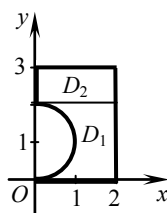
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y - y^2}} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_0^2 f(x, y) dx.$$



а



б



в

Рис. 2.18

2. Змініть порядок інтегрування у подвійному інтегралі та накресліть область інтегрування.

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{5-x^2} f(x, y) dy.$$

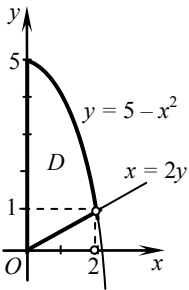


Рис. 2.19

*Розв'язання.* З вигляду меж інтегрування випливає, що область інтегрування розміщена у смужці між прямими  $x=0$  та  $x=2$ , знизу область  $D$  обмежена прямою  $y=\frac{x}{2}$ , а зверху — правою віткою параболи  $y=5-x^2$ . Побудувавши графіки цих рівнянь, дістанемо область  $D$  (див. рис. 2.19).

Для зміни порядку інтегрування спроектуємо область  $D$  на вісь  $Oy$ , дістанемо відрізок  $[0; 5]$ . Оскільки права межа області складається з двох різних ліній, то цю область розбиваємо на дві частини прямою  $y=1$ , на якій

лежить точка перетину цих ліній. Виразивши з рівнянь  $y=\frac{x}{2}$  та  $y=5-x^2$  змінну  $x$  через  $y$ , у результаті дістанемо

$$\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{5-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx + \int_1^5 dy \int_0^{\sqrt{5-y}} f(x, y) dx.$$



*Зауваження.* Зверніть увагу на те, що якщо у повторному інтегралі внутрішнє інтегрування проводиться за деякою змінною, то ця змінна як у нижній так і у верхній межах внутрішнього інтеграла не фігурує.

3. Обчисліть подвійний інтеграл

$$I = \iint_D (x+2y) dx dy,$$

якщо область  $D$  обмежена прямою  $y=2-x$  та параболою  $y=x^2$ .

*Розв'язання.* Побудувавши графіки заданих рівнянь, дістанемо область інтегрування  $D$  (див. рис. 2.20). Ця область правильна як у напрямку осі ординат, так і в напрямку осі абсцис. Тому інтегрування можна проводити як за формулою (2.4), так і за формулою (2.5). На наш погляд, інтегрування зручніше проводити за формулою (2.4). Знайдемо абсциси точок перетину параболи з прямою:  $x^2=2-x$ ,  $x^2+x-2=0$ ,  $x_1=-2$ ,  $x_2=1$ . Тоді



$$\begin{aligned}
 I &= \iint_D (x+2y) dx dy = \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+2y) dy = \int_{-2}^1 dx (xy + y^2) \Big|_{x^2}^{2-x} = \\
 &= \int_{-2}^1 \left( x(2-x) + (2-x)^2 - x^3 - x^4 \right) dx = \int_{-2}^1 \left( 4 - 2x - x^3 - x^4 \right) dx = \\
 &= \left( 4x - x^2 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-2}^1 = 4 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \left( -8 - 4 - 4 + \frac{32}{5} \right) = 12,15.
 \end{aligned}$$

#### 4. Обчисліть подвійний інтеграл

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

якщо область  $D$  обмежена колом  $x^2 + y^2 = 1$ .

*Розв'язання.* Область інтегрування  $D$  — круг радіуса  $R=1$  з центром у початку координат (рис. 2.21). У полярних координатах рівняння кола — межі області  $D$  — має вигляд  $\rho = 1$ . Враховуючи форму області  $D$ , подвійний інтеграл обчислюватимемо в полярній системі координат (див. рис. 2.10).

$$\begin{aligned}
 \iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} \rho d\rho = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2} d(1-\rho^2) = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left. \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

#### 5. Обчисліть площу області, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 4x$ , $y = x$ , $y = 0$ .

*Розв'язання.* Зобразимо цю фігуру на рисунку. Рівняння  $x^2 + y^2 = 4x$  визначає коло радіуса два з центром у точці  $A(2; 0)$ . Справді, виділивши повний квадрат за змінною  $x$ , дістанемо:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Графіки рівнянь  $y = x$  та  $y = 0$  — прямі лінії, які разом із дугою кола визначають область інтегрування  $D$ , яка являє собою криволінійний сектор з вершиною у початку координат (рис. 2.22).

Враховуючи форму області  $D$ , подвійний інтеграл обчислюватимемо в полярній системі координат.

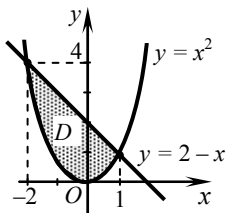


Рис. 2.20

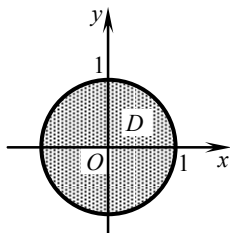


Рис. 2.21

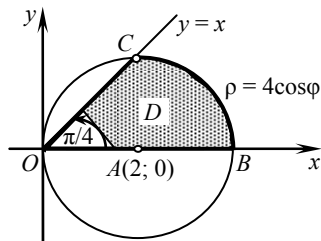


Рис. 2.22

У полярних координатах рівняння кола має вигляд

$$\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 4\rho \cos \rho, \quad \rho^2 = 4\rho \cos \rho, \quad \rho = 4 \cos \varphi,$$

прямі  $y = 0$  та  $y = x$  у полярних координатах набирають вигляду  $\varphi = 0$  та  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  відповідно. Отже, полярні координати  $\varphi$  і  $\rho$  точок, які належать

області інтегрування, змінюються у межах:  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi$ .

За формулою (2.11) маємо

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \iint_{D_1} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{4 \cos \varphi} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{4 \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 4 \left( \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \pi + 2. \end{aligned}$$

**6.** Використовуючи геометричний зміст подвійного інтеграла, обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $z = 4 - 2y^2$ ,  $z = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$  та  $x + 2y = 2$ .

*Розв'язання.* Задане тіло обмежене зверху параболічним циліндром  $z = 4 - 2y^2$ , знизу — координатною площиною  $Oxy$ , з боків — паралельними осі  $Oz$  площинами  $Oxz$ ,  $Oyz$  та  $x + 2y = 2$ . Отже, задано циліндричне тіло (рис. 2.23), об'єм якого обчислимо за формулою (2.12). Область інтегрування  $D$  — трикутник  $OAB$ :  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 2 - 2y$ . Використовуючи формулу (2.5), дістанемо

$$V = \iint_D (4 - 2y^2) dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{2-2y} (4 - 2y^2) dx = \int_0^1 (4 - 2y^2) x \Big|_0^{2-2y} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 (4 - 2y^2)(1 - y) dy = 2 \int_0^1 (4 - 2y^2 - 4y + 2y^3) dy = \\
&= 2 \left( 4y - \frac{2y^3}{3} - 2y^2 + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( 4 - \frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{19}{6}.
\end{aligned}$$

**7.** Визначте координати центра мас пластини  $D$ , обмеженої параболою  $y^2 = x$  та прямими  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ),  $x = 4$  (рис. 2.24), якщо густина пластини в кожній точці  $(x, y) \in D$  дорівнює  $\gamma(x, y) = y$ .

*Розв'язання.* Обчислимо масу пластини та статичні моменти (див. формули (2.14), (2.15)):

$$m = \iint_D y dx dy = \int_0^2 dy \int_{y^2}^4 y dx = \int_0^2 yx \Big|_{y^2}^4 dy = \int_0^2 y(4 - y^2) dy = \left( 2y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 4,$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \iint_D xy dx dy = \int_0^2 y dy \int_{y^2}^4 x dx = \int_0^2 y \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^4 dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y(16 - y^4) dy = \\
&= \frac{1}{2} \left( 8y^2 - \frac{y^6}{6} \right) \Big|_0^2 = \frac{32}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \iint_D y^2 dx dy = \int_0^2 y^2 dy \int_{y^2}^4 dx = \int_0^2 y^2 x \Big|_{y^2}^4 dy = \int_0^2 y^2(4 - y^2) dy = \\
&= \left( \frac{4}{3} y^3 - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{64}{15}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{32}{3}}{4} = \frac{8}{3}, \quad y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{64}{15}}{4} = \frac{16}{15}.$$

**8.** Обчисліть площу частини параболоїда обертання  $2z = x^2 + y^2$  ( $x \geq 0$ ), відсіченої площинами  $x = 0$  та  $z = 8$  (рис. 2.25).

*Розв'язання.* Задана поверхня проєктується на площину  $Oxy$  у напівкруг радіуса  $R = 4$  з центром у початку координат:  $x^2 + y^2 = 16$ ,  $x \geq 0$ .

Оскільки

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y,$$

то за формулою (2.13) дістанемо

$$S_{\sigma} = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy .$$

Обчислення проведемо у полярних координатах:

$$\begin{aligned} S_{\sigma} &= \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1+\rho^2} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 \sqrt{1+\rho^2} d(1+\rho^2) = \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\rho^2)^{3/2} \Big|_0^4 d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (17\sqrt{17}-1) d\varphi = \frac{(17\sqrt{17}-1)\pi}{3} . \end{aligned}$$

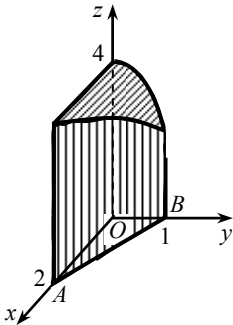


Рис. 2.23

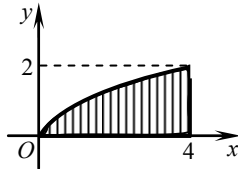


Рис. 2.24

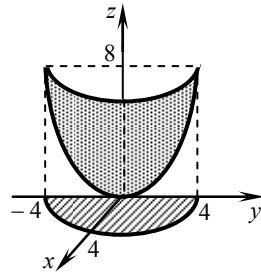


Рис. 2.25

### Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розставте межі інтегрування у подвійному інтегралі  $\iint_D f(x, y) dx dy$  по області  $D$ , якщо:

1.  $D$  — трикутник  $ABC$  з вершинами  $A(0; 0)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(4; 4)$ .

2.  $D$  — чотирикутник  $ABCD$  з вершинами  $A(-1; 1)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(1; 6)$  та  $D(4; 6)$ .

Змініть порядок інтегрування, попередньо накресливши область інтегрування.

3.  $\int_0^3 dx \int_{3-x}^4 f(x, y) dy.$

4.  $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+3} f(x, y) dx.$

$$5. \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. \quad 6. \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y) dy.$$

$$7. \int_0^2 dx \int_{-1}^{x^2} f(x, y) dy + \int_2^4 dx \int_{-1}^{8-2x} f(x, y) dy.$$

Обчисліть подвійні інтеграли

$$8. \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y^2) dy. \quad 9. \int_1^e dx \int_0^x \frac{dy}{(x+y)^2}.$$

Обчисліть подвійні інтеграли.

10.  $\iint_D (x^3 + 4y) dx dy$ , якщо  $D$  — квадрат, обмежений прямими  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  та  $y = 1$ .

11.  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена прямими  $x = 2$ ,  $y = x$  та гіперболою  $xy = 1$ .

12.  $\iint_D y dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена параболою  $y = \sqrt{x}$  та прямими  $y = 0$ ,  $y + x = 2$ .

Обчисліть подвійні інтеграли в полярній системі координат.

13.  $\iint_D \sqrt{25 - x^2 - y^2} dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена колом  $x^2 + y^2 = 9$ .

14.  $\iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy$ , якщо область  $D$  — кільце  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ .

15.  $\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена колом  $x^2 + y^2 = 4$  та прямими  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$  ( $x > 0$ ,  $y > 0$ ).

16.  $\iint_D y dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена прямими  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x = \sqrt{3}y$  та колами  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $x^2 + y^2 = 8x$ .

Обчисліть площу фігури, обмежену лініями.

17.  $x^2 = 4y + 4$ ,  $x^2 = -2y + 4$ .

18.  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $y^2 = 3x$  ( $x \geq 0$ ).

Використавши геометричний зміст подвійного інтеграла, обчисліть об'єм циліндричного тіла, обмеженого заданими поверхнями.

19.  $x^2 + y^2 + z = 4, z = 0.$

20.  $z = x^2 + y^2, x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0.$

21.  $z = 0, y + z = 2, y = x^2.$

22. Обчисліть об'єм тіла, вирізаного циліндром  $x^2 + y^2 = Rx$  із сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$

23. Обчисліть масу пластини, обмеженої лініями  $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 16$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), якщо густина пластини в кожній точці  $(x, y) \in D$  дорівнює

$$\gamma(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Знайдіть координати центра маси однорідної пластини, обмеженої лініями

24.  $y = x^2 + 1, x - y + 3 = 0.$

25.  $x^2 + y^2 = 4, x = y, y = \sqrt{3}x$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

### Відповіді

1.  $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{4}}^x f(x, y) dy$  або  $\int_0^4 dy \int_y^{4y} f(x, y) dx + \int_3^4 dy \int_y^4 f(x, y) dx.$  2.  $\int_{-1}^1 dx \int_{x+2}^{x+5} f(x, y) dy +$

$\int_1^4 dx \int_{x+2}^6 f(x, y) dy$  або  $\int_1^4 dy \int_{-1}^{y-2} f(x, y) dx + \int_4^6 dy \int_{y-5}^{y-2} f(x, y) dx.$  3.  $\int_0^3 dy \int_{3-y}^3 f(x, y) dx +$

$\int_3^4 dy \int_0^3 f(x, y) dx.$  4.  $\int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_3^4 dx \int_{\sqrt{x-3}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^7 dx \int_{\sqrt{x-3}}^2 f(x, y) dy.$

5.  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$  6.  $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin x} f(x, y) dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos x} f(x, y) dx.$  7.  $\int_{-1}^0 dy \int_0^4 f(x, y) dx +$

$\int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^{\frac{y}{2}} f(x, y) dx.$  8.  $\frac{10}{3}.$  9.  $0,5.$  10.  $\frac{9}{4}.$  11.  $\frac{9}{4}.$  12.  $\frac{5}{12}.$  13.  $\frac{122}{3}\pi.$  14.  $21\pi.$  15.  $\frac{2\pi}{9}.$  16.  $\frac{56}{3}.$

17. 8. 18.  $(4\pi + \sqrt{3})/3$ . 19.  $8\pi$ . 20.  $\frac{16}{3}$ . 21.  $\frac{32\sqrt{2}}{15}$ . 22.  $\frac{2(3\pi - 4)}{9}R^3$ . 23. 6. 24.  $(0, 5; 2, 6)$ .
25.  $\left(\frac{8}{\pi}(\sqrt{3} - \sqrt{2}); \frac{8}{\pi}(\sqrt{2} - 1)\right)$ .

## Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

**1.1.** Накресліть область інтегрування та змініть порядок інтегрування у подвійному інтегралі.

1.1.1. а)  $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{x+1} f(x, y) dy;$  б)  $\int_2^4 dx \int_{-2-\sqrt{4x-x^2}}^0 f(x, y) dy .$

1.1.2. а)  $\int_0^2 dx \int_x^{x+2} f(x, y) dy;$  б)  $\int_0^1 dx \int_0^{5+\sqrt{9-8x-x^2}} f(x, y) dy .$

1.1.3. а)  $\int_0^1 dx \int_{-1}^{2x+1} f(x, y) dy;$  б)  $\int_{-1}^3 dx \int_{3+\sqrt{3+2x-x^2}}^6 f(x, y) dy .$

1.1.4. а)  $\int_{-1}^2 dx \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy;$  б)  $\int_2^4 dx \int_{-x}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy .$

1.1.5. а)  $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^3 f(x, y) dy;$  б)  $\int_{-1}^3 dx \int_0^{4-\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y) dy .$

1.1.6. а)  $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy;$  б)  $\int_2^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^x f(x, y) dy .$

1.1.7. а)  $\int_0^1 dx \int_{-x}^{x+2} f(x, y) dy;$  б)  $\int_0^4 dx \int_{-2-\sqrt{4x-x^2}}^{x-2} f(x, y) dy .$

1.1.8. а)  $\int_{-2}^2 dx \int_x^{\sqrt{x+2}} f(x, y) dy;$  б)  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{9-8x-x^2}}^1 f(x, y) dy .$

1.1.9. а)  $\int_0^1 dx \int_1^{4-x^2} f(x, y) dy;$  б)  $\int_{-6}^0 dx \int_{-1}^{-1+\sqrt{-6x-x^2}} f(x, y) dy .$

1.1.10. а)  $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2-3}^0 f(x, y) dy;$  б)  $\int_{-2}^0 dx \int_0^{3+\sqrt{-2x-x^2}} f(x, y) dy .$

1.1.11. a) $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x, y) dy;$	б) $\int_1^5 dx \int_{-2}^{\sqrt{6x-x^2-5}} f(x, y) dy .$
1.1.12. a) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{3x} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{10x-x^2}}^x f(x, y) dy .$
1.1.13. a) $\int_0^1 dx \int_x^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^6 dx \int_2^{2+\sqrt{6x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.14. a) $\int_0^4 dx \int_{-x}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^2 dx \int_x^{2+\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.15. a) $\int_{-3}^1 dx \int_{2x-3}^{-x^2} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{36-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.16. a) $\int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} f(x, y) dy;$	б) $\int_{-3}^{-1} dx \int_0^{1+\sqrt{6x+x^2-5}} f(x, y) dy .$
1.1.17. a) $\int_1^3 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy;$	б) $\int_0^5 dx \int_0^{1+\sqrt{10x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.18. a) $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} f(x, y) dx;$	б) $\int_1^2 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^4 f(x, y) dy .$
1.1.19. a) $\int_1^2 dy \int_{\frac{2}{y}}^{2y} f(x, y) dx;$	б) $\int_{-1}^0 dx \int_0^{3-\sqrt{-2x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.20. a) $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{1+\sqrt{x}} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{9+8x-x^2}}^0 f(x, y) dy .$
1.1.21. a) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy;$	б) $\int_3^5 dx \int_{-\sqrt{6x-x^2-5}}^1 f(x, y) dy .$
1.1.22. a) $\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x, y) dy;$	б) $\int_0^2 dx \int_0^{2-\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy .$



1.1.23. a) $\int_{-1}^1 dx \int_{x-1}^{x^2} f(x, y) dy;$	б) $\int_{-4}^0 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{x+4} f(x, y) dy .$
1.1.24. a) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{3x-2} f(x, y) dy;$	б) $\int_{-5}^{-3} dx \int_{-\sqrt{6x+x^2-5}}^2 f(x, y) dy .$
1.1.25. a) $\int_0^1 dy \int_{-y^2}^{y^2+1} f(x, y) dx;$	б) $\int_1^3 dx \int_0^{3+\sqrt{3+2x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.26. a) $\int_0^1 dy \int_{-y}^{y+1} f(x, y) dx;$	б) $\int_1^3 dx \int_0^{2+\sqrt{6x-x^2-5}} f(x, y) dy .$
1.1.27. a) $\int_0^2 dx \int_{x^2-1}^{2x} f(x, y) dy;$	б) $\int_{-2}^{-1} dx \int_{2-\sqrt{-2x-x^2}}^3 f(x, y) dy .$
1.1.28. a) $\int_{-1}^0 dx \int_1^{x^2+2} f(x, y) dy;$	б) $\int_{-3}^0 dx \int_0^{1+\sqrt{-6x-x^2}} f(x, y) dy .$
1.1.29. a) $\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy;$	б) $\int_1^5 dx \int_{-\sqrt{10x-x^2}}^0 f(x, y) dy .$
1.1.30. a) $\int_1^4 dx \int_{\sqrt{x}}^3 f(x, y) dy;$	б) $\int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{9+8x-x^2}}^2 f(x, y) dy .$

1.2. Обчисліть подвійний інтеграл  $\iint_D f(x, y) dx dy$  по області  $D$ .

1.2.1.  $\iint_D (x+2y+1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = x^2, y = 1.$$

1.2.2.  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = x-1, y = 3-x, x = 0.$$

1.2.3.  $\iint_D (9-y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = 4-2x, y = 2x, y = 0.$$

- 1.2.4.  $\iint_D (x - y + 3) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = x$ ,  $y = (x - 2)^2$ ,  $y = 0$ .
- 1.2.5.  $\iint_D (2x + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 4$ ,  $y^2 = x$ .
- 1.2.6.  $\iint_D (x - 4y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = x - 2$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ .
- 1.2.7.  $\iint_D (x^2 - 2y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
- 1.2.8.  $\iint_D (x^2 + 4y) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $2y = x$ .
- 1.2.9.  $\iint_D (2x - 3y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $2y = x$ .
- 1.2.10.  $\iint_D (x + 2y - 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $x + y = 0$ .
- 1.2.11.  $\iint_D 2xy dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 2$ ,  $y = 1 - x$ ,  $y = x - 1$ .
- 1.2.12.  $\iint_D (2y - x + 2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 1$ ,  $y = 2 - x^2$ .
- 1.2.13.  $\iint_D (y - 2x + 6) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 0$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2 - x$ .
- 1.2.14.  $\iint_D (3x^2 - y^2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = x + 1$ ,  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ .
- 1.2.15.  $\iint_D (2x + 3) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 0$ ,  $y = 1 - x^2$ ,  $y = -1 - x$ ,  $x \geq 0$ .

- 1.2.16.  $\iint_D (x+3y^2)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = x+1, x = -1, y = x, x = 1$ .
- 1.2.17.  $\iint_D (2x+y+2)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 0, y = 0, y = x^2 + 1, x = 1$ .
- 1.2.18.  $\iint_D (\sqrt{x}+2y)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = \sqrt{x}+1, x = 0, y = 0, x = 1$ .
- 1.2.19.  $\iint_D (x-\sqrt{y})dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 2, y = 1, y = 0, y = -x$ .
- 1.2.20.  $\iint_D (2xy-1)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = x+1, y = 1, y = 0, x = 1$ .
- 1.2.21.  $\iint_D (4x-y+1)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = -x^2, x = 0, y = 1, x = -1$ .
- 1.2.22.  $\iint_D (3\sqrt{x}+4y)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = -2, y = x, y = -x$ .
- 1.2.23.  $\iint_D (x-2y+5)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 0, y = 1, y = \sqrt{-x}, x = 2$ .
- 1.2.24.  $\iint_D (x+1)y dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 0, y = x, y = x-1, x = 2$ .
- 1.2.25.  $\iint_D (3x+y+2)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $x = 1, y = 2x, y = -\sqrt{x}$ .
- 1.2.26.  $\iint_D (x+3y^2+1)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 3, y = x^2 - 1$ .
- 1.2.27.  $\iint_D (x^2+2xy+2)dxdy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:  
 $y = 0, y = 2-x, y = 1, x = 0$ .

1.2.28.  $\iint_D (4x - 2y + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = 0, y = x^2, x = -2.$$

1.2.29.  $\iint_D (xy + 1) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = \frac{1}{x}, y = 1, y = 2, x = -1.$$

1.2.30.  $\iint_D (x + 4y + 2) dx dy$ , якщо область  $D$  обмежена лініями:

$$y = \frac{1}{x}, y = 2, y = x.$$

1.3. Обчисліть площу області  $D$ , задану системою нерівностей. Обчислення проведіть у полярній системі координат.

1.3.1.  $x^2 + y^2 + 6x \leq 0, y \geq \sqrt{3}x, y \leq 0.$

1.3.2.  $x^2 + y^2 + 4y \leq 0, y \leq \sqrt{3}x, x \leq 0.$

1.3.3.  $x^2 + y^2 - 6x \leq 0, y \leq \sqrt{3}x, y \geq -x.$

1.3.4.  $x^2 + y^2 - 4y \leq 0, y \geq \sqrt{3}x, x \geq 0.$

1.3.5.  $y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 10x.$

1.3.6.  $x^2 + y^2 \leq 8y, \sqrt{3}y \geq x, y \leq \sqrt{3}x.$

1.3.7.  $y \geq -x, y \leq -\sqrt{3}x, x^2 + y^2 - 4y \leq 0.$

1.3.8.  $x^2 + y^2 + 10x \leq 0, \sqrt{3}y \leq x, y \geq x.$

1.3.9.  $y \geq 0, y \leq x, x^2 + y^2 - 6x \leq 0.$

1.3.10.  $x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq x, \sqrt{3}y \geq x.$

1.3.11.  $\sqrt{3}y \geq x, y \leq -x, x^2 + y^2 + 4x \leq 0.$

1.3.12.  $x^2 + y^2 + 10x \leq 0, y \geq x, y \leq 0.$

1.3.13.  $y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 4x.$

1.3.14.  $x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq \sqrt{3}x, y \leq -x.$

1.3.15.  $x^2 + y^2 + 4x \leq 0, \sqrt{3}y \geq -x, y \leq -\sqrt{3}x.$

1.3.16.  $x^2 + y^2 + 16y \leq 0, y \leq \sqrt{3}x.$

1.3.17.  $y \leq x, \sqrt{3}y \geq x, y^2 \leq x(6 - x).$

1.3.18.  $x \geq 0, y \geq \sqrt{3}x, x^2 + y^2 \leq 8y.$

- 1.3.19.  $x^2 + y^2 + 4x \leq 0$ ,  $\sqrt{3}y \leq -x$ ,  $y \geq 0$ .
- 1.3.20.  $x^2 + y^2 + 10y \leq 0$ ,  $y \geq x$ .
- 1.3.21.  $\sqrt{3}y \geq -x$ ,  $y \leq 0$ ,  $y^2 \leq x(8-x)$ .
- 1.3.22.  $\sqrt{3}y \leq -x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 8y$ .
- 1.3.23.  $x^2 + y^2 + 12y \leq 0$ ,  $y \geq \sqrt{3}x$ ,  $\sqrt{3}y \leq x$ .
- 1.3.24.  $x^2 + y^2 + 2y \leq 0$ ,  $y \leq -x$ ,  $y \leq \sqrt{3}x$ .
- 1.3.25.  $y \geq \sqrt{3}x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 6x$ .
- 1.3.26.  $y \leq -x$ ,  $\sqrt{3}y \geq -x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 8y$ .
- 1.3.27.  $x^2 + y^2 + 4x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ ,  $\sqrt{3}y \geq x$ .
- 1.3.28.  $y \geq -x$ ,  $y \leq -\sqrt{3}x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 8y$ .
- 1.3.29.  $x^2 + y^2 + 4x \leq 0$ ,  $\sqrt{3}y \leq x$ ,  $y \geq x$ .
- 1.3.30.  $x^2 + y^2 + 16y \leq 0$ ,  $\sqrt{3}y \leq -x$ ,  $y \leq \sqrt{3}x$ .

1.4. Використовуючи геометричний зміст подвійного інтеграла, обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

- 1.4.1.  $x = \sqrt{y}$ ,  $y = 4$ ,  $x = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + z = 6$ .
- 1.4.2.  $z = 4 - x^2$ ,  $x + y - 2 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.3.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.4.  $x + y = 2$ ,  $x = 0$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $x = \sqrt{y}$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.5.  $z = 1 + x^2$ ,  $x + y - 2 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.6.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x + y = 2$ ,  $z = 0$ ,  $z + y = 3$ .
- 1.4.7.  $z = x^2$ ,  $x + y - 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.8.  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 2$ ,  $z = 6 - y^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.9.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 4$ ,  $x + 2y = 0$ ,  $z - x = 2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.10.  $z = 1 + x^2$ ,  $x = 2$ ,  $x + y - 4 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.11.  $x = y$ ,  $2y + x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.12.  $y = 2x$ ,  $y + 2x = 4$ ,  $y = 0$ ,  $z = x^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.13.  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = y^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.14.  $y = 2x$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ,  $z = y^2$ ,  $z = 0$ .
- 1.4.15.  $x - 2y = 0$ ,  $z = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

- 1.4.16.  $z = y^2, x + y = 6, y = x, z = 0.$
- 1.4.17.  $z = 4 - x^2, x + y - 4 = 0, y = x, x = 0, z = 0.$
- 1.4.18.  $z = 4 + y^2, x + y - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0.$
- 1.4.19.  $z = 4 - y^2, x + y - 4 = 0, y = x, y = 0, z = 0.$
- 1.4.20.  $z = y^2, x + y - 6 = 0, y = x, z = 0.$
- 1.4.21.  $y = \sqrt{x}, y + x = 0, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$
- 1.4.22.  $y = \sqrt{x}, x = 0, y = 2, z = x^2 + 1, z = 0.$
- 1.4.23.  $y = x^2, y = 4, x = 1, z = 2 + x, z = 0.$
- 1.4.24.  $y = x + 1, x = 1, y = 0, z = 1 + y^2, z = 0.$
- 1.4.25.  $y = x, y = x + 1, x = 0, x = 2, z = x^2 + y^2, z = 0.$
- 1.4.26.  $z = 2 + x^2, x + y - 1 = 0, x = 0, x - y = 1, z = 0.$
- 1.4.27.  $y = x^2, y + x = 0, x = 1, z = 0, z + x = 3.$
- 1.4.28.  $y = 4 - x^2, y = 0, z = y, z = 0.$
- 1.4.29.  $x = 1 - y^2, z = \sqrt{x}, z = 0.$
- 1.4.30.  $x = 2, z = \sqrt{y}, y = x, z = 0.$

## Тема 2. ПОТРІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Основні поняття та означення. Умови існування та властивості. Обчислення. Циліндрична і сферична системи координат. Заміна змінних. Застосування.



**Література:** [3, розділ 2, п. 2.3], [9, розділ 10, §2], [15, розділ 12, п. 12.2], [16, розділ 14, §11—14], [17, розділ 2, §8].

### Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 2.1. Означення потрійного інтеграла

Поняття потрійного інтеграла вводиться аналогічно поняттям визначеного і подвійного інтегралів як границя певної інтегральної суми і є узагальненням цих понять на випадок функції трьох змінних.

Нехай функція трьох змінних  $u = f(x, y, z)$  визначена в обмеженій замкненій тривимірній області  $G$ . Розіб'ємо цю область сіткою поверхонь

на  $n$  довільних частинних областей  $G_i$  з об'ємами  $\Delta V_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ).  
Виберемо в кожній частинній області  $G_i$  довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  
обчислимо значення функції  $f(x_i, y_i, z_i)$  й утворимо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \quad (2.16)$$

для функції  $f(x, y, z)$  по області  $G$ . Позначимо через  $\lambda$  найбільший з діаметрів частинних областей  $G_i$ .

Якщо інтегральна сума (2.16) при  $\lambda \rightarrow 0$  має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття області  $G$  на частини, ні від вибору точок  $M_i$ , то цю границю називають *потрійним інтегралом* функції  $f(x, y, z)$  по області  $G$  і позначають

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{або} \quad \iiint_G f(x, y, z) dV.$$

При цьому функцію  $f(x, y, z)$  називають інтегрованою в області  $G$ .  
Таким чином, за означенням

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Тут  $dV = dx dy dz$  — елемент об'єму.

### Теорема

Якщо функція  $u = f(x, y, z)$  неперервна в обмеженій замкненій області  $G$ , то вона інтегровна в цій області.

## 2.2. Властивості потрійного інтеграла

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям визначеного та подвійного інтегралів. Сформулюємо їх.

Нехай підінтегральні функції наступних інтегралів інтегровні в області  $G$ .

1. Сталий множник можна винести за знак потрійного інтеграла

$$\iiint_G C f(x, y, z) dV = C \iiint_G f(x, y, z) dV, \quad C — \text{стала.}$$

2. Потрійний інтеграл від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) потрійних інтегралів від цих функцій.

$$\iiint_G (f(x, y, z) \pm g(x, y, z)) dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G g(x, y, z) dV.$$

3. Якщо в області  $G$   $f(x, y, z) \geq 0$ , то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \geq 0.$$

4. Якщо  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  для всіх точок області  $G$ , тоді

$$\iiint_G f(x, y, z) dV \leq \iiint_G g(x, y, z) dV.$$

5. Якщо область  $G$  розбити на дві частини —  $G_1$  та  $G_2$ , які не мають спільних внутрішніх точок, то

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV.$$

6. (про оцінку потрійного інтеграла). Якщо функція  $f(x, y, z)$  неперервна в області  $G$ ,  $V$  — об'єм області  $G$ ,  $m$  і  $M$  — відповідно найменше і найбільше значення функції  $f(x, y, z)$  в області  $G$ , то

$$mV \leq \iiint_G f(x, y, z) dV \leq MV.$$

7. (про середнє значення функції). Якщо функція  $f(x, y, z)$  неперервна в замкненій обмеженій області  $G$ , яка має об'єм  $V$ , то в цій області існує точка  $(x_0, y_0, z_0)$  така, що

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0)V.$$

Величину

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_G f(x, y, z) dV$$

називають *середнім значенням* функції  $f(x, y, z)$  в області  $G$ .

### 2.3. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводять до послідовного обчислення трьох визначених інтегралів.

Нехай областю інтегрування  $G$  є тіло, обмежене знизу поверхнею  $z = z_1(x, y)$ , зверху — поверхнею  $z = z_2(x, y)$ , з боків — циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі  $Oz$  (циліндрична поверхня може вироджуватися в замкнену лінію). Проекцію області  $G$  на площину  $Oxy$  позначимо через  $D$ . Вважатимемо область  $D$  правильною. Описана область  $G$  є правильною в напрямку осі  $Oz$ , тобто будь-яка пряма, яка паралельна



осі  $Oz$ , перетинає область  $G$  не більше двох разів. Нехай пряма, яка проходить через внутрішню точку проекції  $D$ , перетинає область  $G$  знизу в точці  $M_1$  і зверху в точці  $M_2$  (рис. 2.26). Тоді для будь-якої неперервної в області  $G$  функції  $f(x, y, z)$  справджується формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

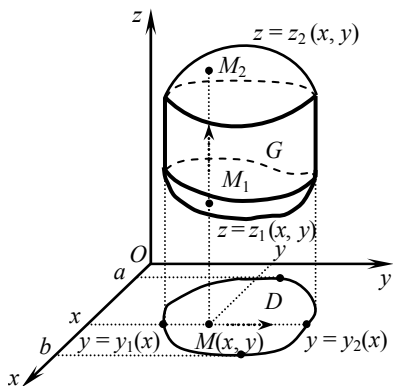


Рис. 2.26

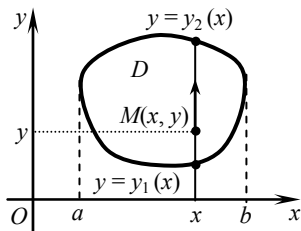


Рис. 2.27

Цю формулу слід розуміти так. Щоб обчислити потрійний інтеграл по області  $G$ , яка правильна у напрямку осі  $Oz$ , спочатку обчислюють внутрішній інтеграл за змінною  $z$ , вважаючи змінні  $x$  та  $y$  сталими:


$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dV &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \\ &= \iint_D \left( F(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \right) dx dy = \iint_D F_1(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

У результаті приходять до подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла проводять за уже відомими з попередньої теми правилами. Нехай область  $D$  обмежена неперервними кривими  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$  та прямими  $x = a$  та  $x = b$ , де  $a < b$ ,  $y_1(x) \leq y_2(x)$  для всіх  $x \in [a; b]$  (рис. 2.27). У цьому разі координати всіх точок  $M(x, y, z)$  області  $G$  змінюються в таких межах:

$$z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.17)$$

Звівши подвійний інтеграл до повторного, дістанемо остаточно формулу для обчислення потрійного інтеграла по області  $G$ , яка визначається нерівностями (2.17):

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.18)$$

 *Зауваження.*

1. Порядок інтегрування може бути іншим, ніж у формулі (2.18). Так, якщо область  $G$  правильна у напрямку осі  $Oz$  і задається нерівностями

$$y_1(x, z) \leq y \leq y_2(x, z), \quad x_1(z) \leq x \leq x_2(z), \quad c \leq z \leq d,$$

тоді

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_c^d dz \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} dx \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x, y, z) dy.$$

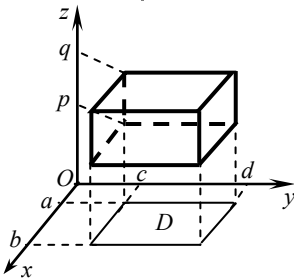


Рис. 2.28

2. Якщо область інтегрування не є правильною в жодному напрямку, потрібно цю область розбити на частини, кожна з яких є правильною у певному напрямку.

3. У найпростішому випадку, коли областю інтегрування є паралелепіпед (рис. 2.28):

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q,$$

інтегрування можна проводити у будь-якому порядку, зокрема, справджується формула

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_p^q f(x, y, z) dz. \quad (2.19)$$

#### 2.4. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричній та сферичній системах координат

Для обчислення потрійного інтеграла, як і подвійного, часто використовують метод заміни змінної. Нехай нові змінні  $u$ ,  $v$  і  $w$  пов'язані з прямокутними координатами  $x$ ,  $y$  і  $z$  співвідношеннями  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$ , де функції  $x(u, v, w)$ ,  $y(u, v, w)$  та  $z(u, v, w)$ , які неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку,

встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками просторової області  $G$  і точками області  $G'$  і в області  $G'$  визначник (якобіан) не обертається в нуль:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Заміну змінних у потрійному інтегралі здійснюють за формулою

$$\boxed{\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G'} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J| du dv dw.} \quad (2.20)$$

На практиці для обчислення потрійного інтеграла часто використовують циліндричні або сферичні координати.

У *циліндричній системі координат* положення точки  $M$  у просторі визначається трьома величинами —  $\rho, \varphi, z$ , де  $\rho$  і  $\varphi$  — полярні координати точки  $M'$  — проекції точки  $M$  на площину  $Oxy$ , а  $z$  — апліката точки  $M$ , (рис. 2.29). Зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами точки  $M$  виражається формулами

$$\boxed{x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,}$$

де  $\rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$ .

Якобіан перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Отже,

$$\boxed{|J| = \rho.}$$

Тоді формула заміни змінних (2.20) (переходу до циліндричних координат) набуває вигляду

$$\iiint_G f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{G'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$



*Зауваження.* До циліндричних координат найчастіше переходять тоді, коли область інтегрування  $G$  утворена циліндричною поверхнею, проекцією якої на відповідну площину є область  $D$  у формі круга, кільця, сектора тощо. Підінтегральну функцію часто задають у вигляді  $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2, z)$ .

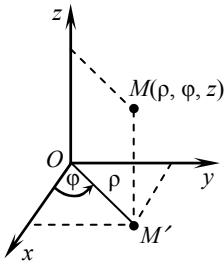


Рис. 2.29

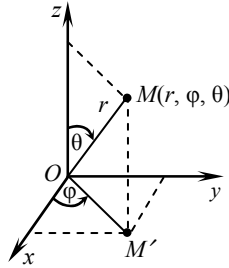


Рис. 2.30

У сферичній системі координат положення точки  $M$  у просторі визначається трьома величинами —  $r, \varphi, \theta$ , де  $r$  — відстань від точки  $M$  до початку координат,  $\varphi$  — кут між віссю  $Ox$  та променем  $OM'$  — проекцією променя  $OM$  на площину  $Oxy$ ,  $\theta$  — кут між віссю  $Oz$  та променем  $OM$  (рис. 2.30). Залежність між прямокутними і сферичними координатами точки  $M$  пов'язана формулами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

де  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Якобін перетворення

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{vmatrix} = -r^2 \sin \theta,$$


Отже,

$$|J| = r^2 \sin \theta.$$

Тоді формула заміни змінних (2.20) (переходу до сферичних координат) набирає вигляду

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_{G'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Тут  $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  — елемент об'єму в сферичних координатах.

 *Зауваження.* Рівняння сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  у сферичних координатах спрощується до вигляду  $r = R$ . Тому до сферичних координат найчастіше переходять тоді, коли область інтегрування  $G$  є куля, її частина — кульовий сектор тощо. Підінтегральна функція часто має вигляд  $f(x, y, z) = g(x^2 + y^2 + z^2)$ . Наприклад, якщо область  $G$  — куля, обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , то виконується формула

$$\iiint_G f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^R f(r^2) r^2 dr.$$

## 2.5. Деякі застосування потрійного інтеграла

1. Об'єм області  $G$  обчислюють за формулою

$$V = \iiint_G dx dy dz.$$

У циліндричних координатах ця формула має вигляд

$$V = \iiint_{G_1} \rho d\rho d\varphi dz,$$

а у сферичних координатах —

$$V = \iiint_{G_2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

2. Масу  $m$  тіла, обмеженого поверхнею  $G$  і заданою об'ємною густиною  $\gamma(x, y, z)$ , обчислюють за формулою

$$m = \iiint_G \gamma(x, y, z) dx dy dz.$$

3. Координати  $x_c$ ,  $y_c$ ,  $z_c$  центра маси тіла визначаються за формулами

$$x_c = \frac{\iiint_G x\gamma \, dx dy dz}{m}, \quad y_c = \frac{\iiint_G y\gamma \, dx dy dz}{m}, \quad z_c = \frac{\iiint_G z\gamma \, dx dy dz}{m}.$$

4. Моменти інерції тіла відносно координатних осей обчислюють за формулами

$$I_x = \iiint_G (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) \, dx dy dz, \quad I_y = \iiint_G (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_G (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Моменти інерції тіла відносно координатних площин визначають за формулами

$$I_{xy} = \iiint_G z^2\gamma(x, y, z) \, dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_G y^2\gamma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

$$I_{yz} = \iiint_G x^2\gamma(x, y, z) \, dx dy dz,$$

а відносно початку координат — за формулою

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z) \, dx dy dz.$$

## T.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть потрійний інтеграл

$$\iiint_G (x + y + 2z) \, dx dy dz,$$

якщо область  $G$  обмежена площинами  $x=1$ ,  $x=3$ ,  $y=0$ ,  $y=4$ ,  $z=0$ ,  $z=1$ .

*Розв'язання.* Область інтегрування  $G$  — паралелепіпед (рис. 2.31), грані якого паралельні відповідним координатним площинам, тому обчислення потрійного інтеграла проводимо за формулою (2.19). Маємо

$$\begin{aligned} \iiint_G (x + y + 2z) \, dx dy dz &= \int_1^3 dx \int_0^4 dy \int_0^1 (x + y + 2z) dz = \\ &= \int_1^3 dx \int_0^4 \left( (x + y)z + z^2 \right) \Big|_0^1 dy = \int_1^3 dx \int_0^4 (x + y + 1) dy = \int_1^3 \left( (x + 1)y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^4 dx = \\ &= \int_1^3 (4x + 12) dx = \left( 2x^2 + 12x \right) \Big|_1^3 = 18 + 36 - 2 - 12 = 40. \end{aligned}$$

## 2. Обчисліть потрібний інтеграл

$$\iiint_G \frac{xdxdydz}{(1+2y+z)^3},$$

якщо область  $G$  обмежена площинами  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $x+y+z=1$ .

*Розв'язання.* Область  $G$  — прямокутна трикутна піраміда, обмежена координатними площинами і похилою площиною  $x+y+z=1$  (рис. 2.32). Ця область правильна у напрямку будь-якої осі координат. Розставимо межі інтегрування у потрібному інтегралі. Спроектуємо область  $G$  на площину  $Oxy$ , дістанемо область  $D$  — трикутник  $OAB$  (рис. 2.33), межі якого визначаються рівняннями  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $x+y=1$  (у площині  $Oxy$   $z=0$ ). Для точок області  $D$  змінна  $x$  змінюється від нуля до одиниці, тобто  $x \in [0; 1]$ . Для будь-якого фіксованого  $x$  із цього проміжку  $y$  змінюватиметься так:  $0 \leq y \leq 1-x$ . Нарешті, для будь-яких фіксованих  $x$  та  $y$  з області  $D$  змінна  $z$  набиратиме значень від  $z_1=0$  до  $z_2=1-x-y$ , тобто  $z$  змінюється від нижньої межі — площини  $z=0$  до верхньої межі — площини  $x+y+z=1$ . Далі маємо

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{xdxdydz}{(1+2y+z)^3} &= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+2y+z)^3} = \\ &= \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{-2(1+2y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} \left( \frac{1}{(2-x+y)^2} - \frac{1}{(1+2y)^2} \right) dy = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 x \left( -\frac{1}{2-x+y} + \frac{1}{2(1+2y)} \right) \Big|_0^{1-x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x \left( \frac{1}{2(2x-3)} - \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{3}{2x-3} \right) - 1 - \frac{2}{x-2} - \frac{x}{2} \right) dx = -\frac{1}{2} \left( -\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} \ln |2x-3| - \right. \\ &\quad \left. -2 \ln |x-2| - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \ln 2 + \frac{3}{16} \ln 3. \end{aligned}$$

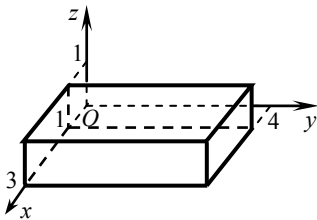


Рис. 2.31

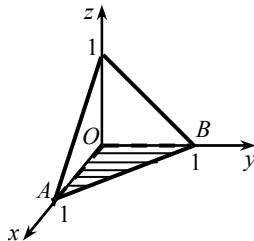


Рис. 2.32

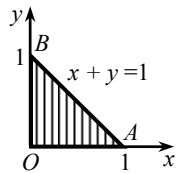


Рис. 2.33

### 3. Обчисліть потрійний інтеграл

$$\iiint_G \frac{yz}{1-x^2} dx dy dz,$$

де область  $G$  обмежена поверхнями  $z = 1 - x^2$ ,  $x + y - 2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

*Розв'язання.* Побудуємо область  $G$ . Поверхня  $z = 1 - x^2$  є параболічний циліндр, напрямна якого — парабола  $z = 1 - x^2$ , розміщена у площині  $Oxz$ , а твірні паралельні осі  $Oy$ . Циліндр перетинає площину  $Oxy$  ( $z = 0$ ) по прямих  $x = 1$  та  $x = -1$ . Площина  $x + y - 2 = 0$  паралельна осі  $Oz$  і перетинає площину  $Oxy$  по прямій  $x + y - 2 = 0$ . Побудувавши перетин цих поверхонь, дістанемо область  $G$  (рис. 2.34). Проекція області  $G$  на площину  $Oxy$  (область  $D$ ) має форму трапеції. При обчисленні подвійного інтеграла по області  $D$  доцільно використати формулу (2.4). При такому виборі порядку інтегрування  $x$  змінюється від  $-1$  до  $1$ , а  $y$  — від прямої  $y = 0$  (вісь  $Ox$ ) до прямої  $y = 2 - x$ . При обранні іншого порядку інтегрування область  $D$  необхідно розбити на дві частини.

Отже, за формулою (2.18) маємо

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{yz}{1-x^2} dx dy dz &= \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} \int_0^{2-x} y dy \int_0^{1-x^2} z dz = \int_{-1}^1 \frac{dx}{1-x^2} \int_0^{2-x} y \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x^2} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \int_0^{2-x} y dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^{2-x} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (1-x^2)(2-x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (4 - 4x - 3x^2 + 4x^3 - x^4) dx = \frac{1}{4} \left( 4x - 2x^2 - x^3 + x^4 - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1 = 1,4. \end{aligned}$$

### 4. Обчисліть потрійний інтеграл

$$\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

якщо область  $G$  обмежена площиною  $z = 3$  і круговим параболоїдом  $x^2 + y^2 = 3z$ .

*Розв'язання.* Область інтегрування  $G$  (рис. 2.35) обмежена знизу параболоїдом  $x^2 + y^2 = 3z$ , а зверху — площиною  $z = 3$ . Проекція цієї області на площину  $Oxy$  — круг, обмежений колом  $x^2 + y^2 = 9$  (це рівняння є результатом виключення змінної  $z$  із системи рівнянь  $x^2 + y^2 = 3z$  та  $z = 3$ ). Введемо циліндричні координати

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$



Рівняння параболоїда набирає вигляду  $z = \frac{\rho^2}{3}$ , а рівняння площини не змінюється. Визначаємо межі зміни циліндричних координат в області  $G$ :

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 3, \quad \frac{\rho^2}{3} \leq z \leq 3.$$

Тепер обчислюємо потрібний інтеграл

$$\begin{aligned} \iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^3 \rho^2 \cdot \rho dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 z \Big|_{\frac{\rho^2}{3}}^3 d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho^3 \left(3 - \frac{\rho^2}{3}\right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \left(3\rho^3 - \frac{\rho^5}{3}\right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{18}\right) \Big|_0^3 d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{3^5}{4} - \frac{3^5}{6}\right) d\varphi = \frac{243}{12} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{81}{4} \cdot 2\pi = \frac{81\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. Обчисліть потрібний інтеграл

$$\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz,$$

якщо область  $G$  обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ .

*Розв'язання.* Виділивши повний квадрат за змінною  $z$ , запишемо рівняння сфери у вигляді  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ . Отже, центр сфери лежить у точці  $(0; 0; 1)$ , а радіус дорівнює одиниці (див. рис. 2.36). Форма області  $G$ , а також вираз підінтегральної функції вказують на доцільність проведення обчислення потрібного інтеграла у сферичній системі координат. Враховуючи, що у сферичних координатах  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , рівняння сфери набере вигляду  $r^2 = 2r \cos \theta$ , або  $r = 2 \cos \theta$ . Визначаємо межі зміни сферичних координат:  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $0 \leq r \leq 2 \cos \theta$ . Крім того,

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r, \quad J = r^2 \sin \theta.$$

Використовуючи формулу (2.21), дістанемо

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r \cdot r^2 \sin \theta dr =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^3 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \frac{r^4}{4} \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = \\
&= -4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d(\cos \theta) = -\frac{4}{5} \int_0^{2\pi} \cos^5 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{4}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{5} \cdot 2\pi = \frac{8\pi}{5}.
\end{aligned}$$

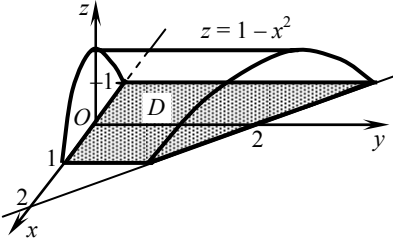


Рис. 2.34

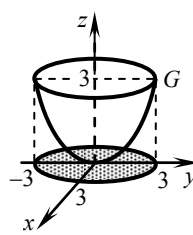


Рис. 2.35

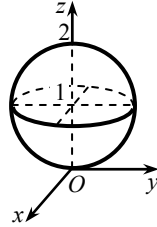


Рис. 2.36

## 6. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями

$$y = x, \quad x + y - 4 = 0, \quad x + z - 2 = 0, \quad x = 0, \quad z = 0.$$

*Розв'язання.* Побудуємо задане тіло. Площина  $y = x$  проходить через вісь  $Oz$  і перетинає площину  $Oxy$  по прямій  $y = x$ . Площина  $x + y - 4 = 0$  паралельна осі  $Oz$  і перетинається з площиною  $Oxy$  по прямій  $x + y - 4 = 0$ , а площина  $x + z - 2 = 0$  паралельна осі  $Oy$  і перетинає площину  $Oxz$  по прямій  $x + z - 2 = 0$ . Побудувавши перетин цих поверхонь, дістанемо тіло  $G$  (рис. 2.37), проекцією якого на площину  $Oxy$  є область  $D$  — трикутник  $OMK$ . Прямі  $x + y = 4$  та  $y = x$  перетинаються в точці  $M(2; 2)$ , отже, область  $D$  проектується на вісь  $Ox$  у відрізок  $[0; 2]$ , тобто  $x$  змінюється від 0 до 2,  $y$  — від прямої  $y = x$  до прямої  $y = 4 - x$ , а  $z$  — від площини  $z = 0$  до площини  $z = 2 - x$ . Для обчислення об'єму використовуємо формулу (2.18):

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_G dx dy dz = \int_0^2 dx \int_x^{4-x} dy \int_0^{2-x} dz = \int_0^2 dx \int_x^{4-x} z \Big|_0^{2-x} dy = \int_0^2 (2-x) dx \int_x^{4-x} dy = \\
&= \int_0^2 (2-x) y \Big|_x^{4-x} dx = \int_0^2 (2-x)(4-2x) dx = 2 \int_0^2 (4-4x+x^2) dx = \\
&= 2 \left( 4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.
\end{aligned}$$

7. Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = y^2$ ,  $z = 0$ .

*Розв'язання.* Побудуємо тіло. Поверхня  $x^2 + y^2 = 4$  — нескінченний круговий циліндр, що перетинає площину  $Oxy$  по колу  $x^2 + y^2 = 4$  з центром у початку координат і радіусом  $R = 2$ , його твірні паралельні осі  $Oz$ . Поверхня  $z = y^2$  — нескінченний параболічний циліндр, що перетинає площину  $Oyz$  по параболі  $z = y^2$ , його твірні паралельні осі  $Ox$ . Площина  $z = 0$  — координатна площина  $Oxy$ . Утворене тіло (рис. 2.38) проєктується на площину  $Oxy$  у круг  $D$ . Тому обчислення проведемо у циліндричних координатах. Оскільки полюс  $O$  міститься всередині області  $D$ , то при розстановці меж у подвійному інтегралі використаємо формулу (2.10).

Введемо циліндричні координати за формулами

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

Рівняння параболічного циліндра набирає вигляду  $z = \rho^2 \sin^2 \varphi$ , а рівняння кола  $x^2 + y^2 = 4$  спрощується до вигляду  $\rho = 2$ .

Визначаємо межі зміни циліндричних координат в області  $G$ :

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq z \leq \rho^2 \sin^2 \varphi.$$

Тепер обчислюємо об'єм заданого тіла

$$\begin{aligned} V &= \iiint_G dx dy dz = \iint_D \rho d\rho d\varphi \int_0^{\rho^2 \sin^2 \varphi} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^3 d\rho = \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 d\varphi = 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi = 2 \left( \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = 4\pi. \end{aligned}$$

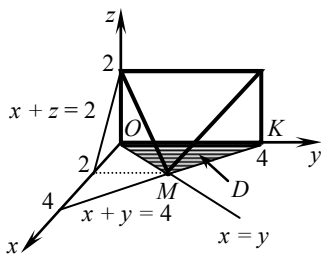


Рис. 2.37

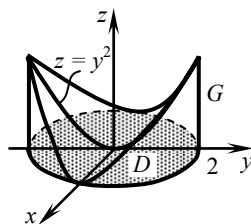


Рис. 2.38

**Т.2**   **ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ  
І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

Розставте межі інтегрування у потрійному інтегралі  $\iiint_G f(x, y, z) dV$  по області  $G$ , обмеженій поверхнями:

1.  $x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 6y + 4z - 24 = 0$ .
2.  $x = 0, y = 0, x = 2, y = 3, z = 0, z = 3 - y$ .
3.  $x^2 + y^2 = 4, z = -1, z = 4$ .

Обчисліть інтеграли.

$$4. \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + 2y + 4z) dz . \qquad 5. \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(3x + 2y + z - 4)^4} .$$

$$6. \int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y} dx \int_0^1 (x^2 + y) z dz .$$

Обчисліть потрійні інтеграли в декартовій системі координат.

7.  $\iiint_G x^2 yz dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена площинами  $x = 0, y = 0, z = 0$  та  $x + y + z = 2$ .
8.  $\iiint_G (x + y + z) dx dy dz$ , область  $G$  обмежена площинами  $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ .
9.  $\iiint_G x^2 dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена циліндром  $x^2 + y^2 = 1$  та площинами  $z = 0$  і  $z = 3$ .

Обчисліть потрійні інтеграли, використавши перехід до циліндричних координат.

10.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена круговим циліндром  $x^2 + y^2 = 4$  та площинами  $z = 0, z = 1$ .
11.  $\iiint_G z dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена конусом  $z^2 = x^2 + y^2$  та площиною  $z = 2$ .

12.  $\iiint_G (x + y^2 + z^2)^3 dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена параболоїдом  $x = y^2 + z^2$  та площиною  $x = 1$ .

Обчисліть потрійні інтеграли, використавши перехід до сферичних координат.

13.  $\iiint_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , якщо область  $G$  обмежена сферою  $x^2 + y^2 + z^2 = y$ .

14.  $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$ , якщо область  $G$  визначається нерівностями  $z \geq 0$  та  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ .

15.  $\iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$ , якщо  $G$  — куля  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

Обчисліть об'єм тіла, обмеженого поверхнями.

16.  $z = 4 - x^2$ ,  $z = x^2 + 2$ ,  $y = -1$ ,  $y = 2$ .

17.  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ .

18.  $z = 2 - x^2 - y^2$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (конус).

19.  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ .

Обчисліть масу тіла, обмеженого заданими поверхнями з густиною  $\gamma(x, y, z)$ .

20.  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 4$ ,  $\gamma(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z)^2$ .

21.  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ,  $\gamma(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^3$ .

### Відповіді

$$\begin{aligned}
 & 1. \int_0^8 dx \int_0^{4-\frac{x}{2}} dy \int_0^{\frac{24-3x-6y}{4}} f(x, y, z) dz. \quad 2. \int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^{3+y} f(x, y, z) dz. \quad 3. \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \times \\
 & \times \int_{-1}^4 f(x, y, z) dz. \quad 4. 11. \quad 5. \frac{1}{144}. \quad 6. \frac{27}{42}. \quad 7. \frac{16}{315}. \quad 8. \frac{3}{2}. \quad 9. \frac{3}{4}\pi. \quad 10. \frac{28\pi}{3}. \quad 11. 4\pi. \quad 12. \frac{\pi}{2}. \\
 & 13. \frac{\pi}{10}. \quad 14. \frac{4}{15}\pi. \quad 15. \frac{4\pi R^7}{7}. \quad 16. 8. \quad 17. \frac{\pi}{2}. \quad 18. \frac{5\pi}{6}. \quad 19. \frac{19(2-\sqrt{2})\pi}{3}. \quad 20. \frac{448\pi}{3}. \quad 21. \frac{4\pi R^9}{9}.
 \end{aligned}$$

## Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Обчисліть потрійний інтеграл  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ . Підінтегральна функція  $f(x, y, z)$  та поверхні, що обмежують область  $V$ , вказані в таблиці 1.

Таблиця 1

№	$f(x, y, z)$	Область $V$
1	$5y - 4$	$x = 0, y = 0, z = 0, x + y + 2z - 6 = 0.$
2	$6y + 2z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + y + z - 9 = 0.$
3	$5 + y + 2x$	$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 3y + z - 2 = 0.$
4	$4x - y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 4x + y + 2z - 1 = 0.$
5	$3 + 4z$	$x = 0, y = 0, z = 0, x + 4y + z - 4 = 0.$
6	$7y - 2z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + y + 3z - 6 = 0.$
7	$xy + 1$	$x = 0, y = 0, z = 0, 6x + 2y + z - 8 = 0.$
8	$3y - 2z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 7x + y + z - 3 = 0.$
9	$2x + z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 4x + 2y + 4z - 1 = 0.$
10	$3 + 4z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 8x + 2y + 2z - 3 = 0.$
11	$4y + 5$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + y + z - 6 = 0.$
12	$3x + 2$	$x = 0, y = 0, z = 0, 7x + y + 7z - 14 = 0.$
13	$3xy$	$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 4y + z - 8 = 0.$
14	$8y - 2z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 5x + y + 10z - 10 = 0.$
15	$5x + z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 2y + 6z - 6 = 0.$
16	$7 - 4z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 4x + y + 2z - 8 = 0.$
17	$3x + 2y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 6x + 3y + z - 18 = 0.$
18	$3xy + 2$	$x = 0, y = 0, z = 0, 5x + 15y + z - 15 = 0.$
19	$6z + 3$	$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y + 5z - 10 = 0.$
20	$4x + y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 4y + z - 12 = 0.$
21	$xy$	$x = 0, y = 0, z = 0, 4x + 2y + 3z - 12 = 0.$
22	$5 - 8z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 5x + 3y + 15z - 15 = 0.$
23	$y + 2$	$x = 0, y = 0, z = 0, x + 5y + 3z - 15 = 0.$
24	$y - 6z$	$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 5y + z - 10 = 0.$
25	$2x - y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 3x + 6y + 2z - 12 = 0.$

№	$f(x, y, z)$	Область $V$
26	$3 - 2z$	$x = 0, y = 0, z = 0, x + 2y + 4z - 8 = 0.$
27	$x + 3y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 8x + y + 2z - 8 = 0.$
28	$2z + 1$	$x = 0, y = 0, z = 0, 4x + 6y + 3z - 12 = 0.$
29	$2x + y$	$x = 0, y = 0, z = 0, 2x + 9y + 2z - 18 = 0.$
30	$y + 4z$	$x = 0, y = 0, z = 0, x + 5y + 4z - 20 = 0.$

**2.2.** Знайдіть об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Обчислення проведіть у циліндричній або сферичній системі координат.

**2.2.1.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{x^2 + y^2}$  (конус).

**2.2.2.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ).

**2.2.3.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**2.2.4.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 16, y = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

**2.2.5.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ .

**2.2.6.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \sqrt{3}z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**2.2.7.**  $z = x^2 + y^2, z = 8 - x^2 - y^2$  (круговий параболоїд).

**2.2.8.**  $x = y^2 + z^2, x = 18 - y^2 - z^2$ .

**2.2.9.**  $z = 2(x^2 + y^2), z = 12 - x^2 - y^2$ .

**2.2.10.**  $2z = x^2 + y^2, z = 6 - x^2 - y^2$ .

**2.2.11.**  $z = x^2 + y^2, z = 16 - 3(x^2 + y^2)$ .

**2.2.12.**  $y = x^2 + z^2, y = 3 - 2(x^2 + z^2)$ .

**2.2.13.**  $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 5 - 2(x^2 + y^2)$ .

**2.2.14.**  $x = \sqrt{y^2 + z^2}, 3x = 18 - y^2 - z^2$ .

**2.2.15.**  $z = 6 - \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2$ .

**2.2.16.**  $y = 4 - 3\sqrt{x^2 + z^2}$  (конус),  $y = x^2 + z^2$ .

**2.2.17.**  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $x \geq 0$ ).

$$2.2.18. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}.$$

$$2.2.19. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad \sqrt{3}y = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

$$2.2.20. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad \sqrt{3}y = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

$$2.2.21. \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 1, \quad z = x + 2y + 6.$$

$$2.2.22. \quad x^2 + y^2 = 9, \quad z = x^2 + y^2 + 4, \quad z = 0.$$

$$2.2.23. \quad x^2 + z^2 = 1, \quad y = -1, \quad y = 10 - x^2 - z^2.$$

$$2.2.24. \quad x^2 + y^2 = 2x, \quad z = 0, \quad z = x + y + 5.$$

$$2.2.25. \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = 0, \quad z = 2x + y + 6.$$

$$2.2.26. \quad z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad (\text{і âĳăĳăĳăĳăĳă}), \quad y = -x, \quad y = \sqrt{3}x \quad (y \geq 0).$$

$$2.2.27. \quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{3}x - y = 0, \quad x - \sqrt{3}y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$2.2.28. \quad z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad y = x, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$2.2.29. \quad z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad \sqrt{3}x - y = 0, \quad y = x \quad (x \geq 0, y \geq 0).$$

$$2.2.30. \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4z \quad (\text{сфера}).$$

### Тема 3. КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

Криволінійні інтеграли першого та другого роду. Властивості та обчислення. Формула Гріна. Умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування. Інтегрування повних диференціалів. Застосування.



**Література:** [3, розділ 2, п. 2.4], [9, розділ 10, §3], [15, розділ 12, п. 12.3], [16, розділ 15, §1–4], [17, розділ 3, §9–10].

## T.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 3.1. Криволінійні інтеграли першого роду. Основні поняття

Криволінійний інтеграл є узагальненням визначеного інтеграла на випадок, коли областю інтегрування є деяка крива.

Нехай у площині  $Oxy$  задано гладку або кусково-гладку криву  $L$ , обмежену точками  $A$  і  $B$  (рис. 2.39), і на цій кривій визначено неперервну



функцію  $z = f(x, y)$ . Нагадаємо, що неперервну криву  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  називають *гладкою* на деякому проміжку, якщо функції  $x(t)$  та  $y(t)$  мають на цьому проміжку неперервні похідні  $x'(t)$  та  $y'(t)$ , одночасно не рівні нулю. Неперервну криву, яка складається із скінченного числа гладких кривих, називають *кусково-гладкою*. Розіб'ємо дугу  $AB$  на  $n$  довільних частин точками  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ , позначимо через  $\Delta l_k$  довжину дуги  $A_{k-1}A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). На кожній дузі  $A_{k-1}A_k$  виберемо довільну точку  $M_k(x_k, y_k)$  й утворимо суму  $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta l_k$ , яку називають *інтегральною сумою* для функції  $f(x, y)$  по дузі  $AB$ . Нехай  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta l_k$  — найбільша з довжин елементарних дуг  $A_{k-1}A_k$ .

Якщо при  $\lambda \rightarrow 0$  інтегральна сума  $S_n$  має скінченну границю, яка не залежить ні від способу розбиття кривої  $AB$  точками  $A_k$  на частини, ні від вибору точок  $M_k$ , то цю границю називають *криволінійним інтегралом першого роду* (або криволінійним інтегралом по довжині дуги кривої) від функції  $f(x, y)$  по кривій  $AB$  і позначають  $\int_{AB} f(x, y) dl$ .

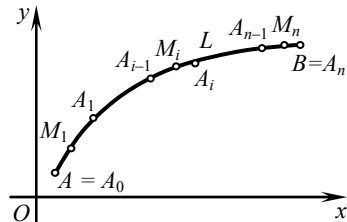


Рис. 2.39

Отже, за означенням

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta l_k. \quad (2.22)$$

Якщо границя (2.22) існує, то функцію  $f(x, y)$  називають *інтегрованою* вздовж кривої  $AB$ , криву  $AB$  — контуром інтегрування,  $A$  — початковою, а  $B$  — кінцевою точками інтегрування.

**Теорема 1** Якщо функція  $f(x, y)$  неперервна вздовж гладкої кривої  $AB$ , то існує криволінійний інтеграл першого роду  $\int_{AB} f(x, y) dl$ .

Властивості криволінійного інтеграла першого роду аналогічні відповідним властивостям визначеного інтеграла (сформулюйте їх самостійно). Проте є одна властивість, яка суттєво відрізняється від відповідної властивості визначеного інтеграла.

Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку проходження дуги  $AB$ , тобто

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl,$$

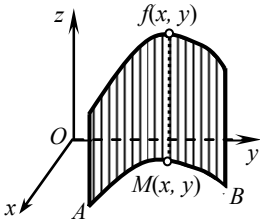


Рис. 2.40

тоді як

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

Межі інтегрування у криволінійному інтегралі першого роду завжди треба брати від меншої до більшої.

*Геометричний зміст криволінійного інтеграла першого роду.*

Криволінійний інтеграл першого роду  $\int_{AB} f(x, y) dl$ , де  $f(x, y) \geq 0$ , чисельно дорівнює площі частини циліндричної поверхні, у якій напрямна  $AB$  лежить у площині  $Oxy$ , а твірні паралельні осі  $Oz$ , причому зверху циліндрична поверхня обмежена поверхнею  $z = f(x, y)$ , а знизу — площиною  $Oxy$  (рис. 2.40).

### 3.2. Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Обчислення криволінійного інтеграла першого роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Сформулюємо правила обчислення у випадках, коли крива інтегрування задана явно, параметрично й у полярних координатах.

І. Якщо криву  $AB$  задано рівнянням  $y = y(x)$ ,  $x \in [a; b]$  ( $a$  — абсциса точки  $A$ ,  $b$  — абсциса точки  $B$ ), де функції  $y(x)$  та  $y'(x)$  неперервні на відріжку  $[a; b]$ , а функція  $f(x, y)$  неперервна у кожній точці  $AB$ , тоді

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (2.23)$$

Якщо криву  $AB$  задано рівнянням  $x = x(y)$ ,  $y \in [c; d]$  ( $c$  — ордината точки  $A$ ,  $d$  — ордината точки  $B$ ), де функції  $x(y)$  та  $x'(y)$  неперервні на відріжку  $[c; d]$ , а функція  $f(x, y)$  неперервна у кожній точці  $AB$ , тоді

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + (x'(y))^2} dy. \quad (2.24)$$

II. Якщо криву  $AB$  задано параметрично рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  і функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $x'(t)$  та  $y'(t)$  неперервні на  $[\alpha, \beta]$ , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \quad (2.25)$$

де значення параметра  $\alpha$  відповідає точці  $A$ , а  $\beta$  — точці  $B$  і функція  $f(x, y)$  неперервна вздовж кривої  $AB$ .



*Зауваження.* Криволінійний інтеграл першого роду від функції  $f(x, y, z)$  уздовж просторової кривої  $AB$  означають так само, як і криволінійний інтеграл першого роду від функції  $f(x, y)$ .

Нехай функція  $f(x, y, z)$  визначена і неперервна на просторовій кусково-гладкій кривій  $AB$ , заданій рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ . Тоді існує криволінійний інтеграл  $\int_{AB} f(x, y, z) dl$ , який обчислюють за формулою

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

III. Якщо плоску криву  $AB$  задано рівнянням  $\rho = \rho(\varphi)$  ( $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ) в полярних координатах, то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

### 3.3. Криволінійні інтеграли другого роду. Основні поняття

Нехай функції двох змінних  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  визначені й неперервні в точках дуги  $AB$  гладкої кривої  $L$ . На відміну від інтегралів першого роду вважатимемо криву напрямною лінією, у якій точки  $A$  та  $B$  є відповідно початковою та кінцевою точками дуги  $AB$ . Розіб'ємо дугу  $AB$  точками  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n = B$  довільним чином на  $n$  частин, на кожній частинній дузі  $A_{i-1}A_i$  візьмемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), обчислимо

значення функцій  $P(M_i)$  і  $Q(M_i)$  в цих точках і складемо інтегральну суму

$$\sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i), \quad (2.26)$$

де  $\Delta x_i$  та  $\Delta y_i$  — проєкції вектора  $\overline{A_{i-1}A_i}$  ( $i$ -го частинного відрізка  $A_{i-1}A_i$ ) на осі  $Ox$  та  $Oy$  відповідно (див. рис. 2.41).

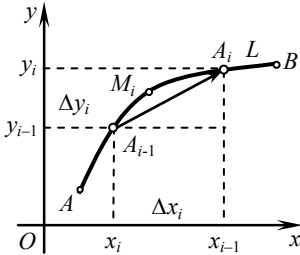


Рис. 2.41

Нехай  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} (|\Delta x_i|, |\Delta y_i|)$  — найбільша з

довжин проєкцій  $\Delta x_i$  та  $\Delta y_i$ .

Якщо при  $\lambda \rightarrow 0$  існує скінченна границя інтегральної суми (2.26), яка не залежить ні від способу розбиття кривої  $AB$ , ні від вибору точок  $M_i$  на кожній частинній дузі, то цю границю називають *криволінійним інтегралом другого роду* від функцій  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  по координатах  $x$  і  $y$  вздовж напрямленої кривої  $AB$  і позначають

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{або} \quad \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Отже, за означенням

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i).$$



**Зауваження.** Криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

вздовж просторової кривої  $L$  означають аналогічно.

**Теорема 2**

Якщо крива  $AB$  гладка, а функції  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  неперервні вздовж кривої  $AB$ , то криволінійний інтеграл другого

роду  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  існує.

Функціям  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  можна надати різного *механічного змісту*.

Зокрема, якщо координати вектора змінної сили  $\vec{F} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ , під дією якої матеріальна точка рухається вздовж кривої  $L$ , то криво-

лінійний інтеграл  $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  виражає роботу, яка здійснюється силою  $\vec{F}$  при переміщенні по кривій  $L$  із точки  $A$  в точку  $B$ .

### 3.4. Обчислення та властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. Нехай крива  $L$  задана рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , тоді  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$  і криволінійний інтеграл зводиться до визначеного інтеграла

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt. \quad (2.27)$$

2. Нехай крива  $L$  задана рівнянням  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ . У цьому разі  $dy = f'(x) dx$  і криволінійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b (P(x, f(x)) + Q(x, f(x))f'(x)) dx. \quad (2.28)$$

Аналогічно, якщо крива  $AB$  задана рівнянням  $x = g(y)$ ,  $c \leq y \leq d$ , то криволінійний інтеграл обчислюють за формулою

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d (P(g(y), y)g'(y) + Q(g(y), y)) dy.$$

3. Нехай функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  та  $R(x, y, z)$  визначені й неперервні на просторовій кривій  $AB$ , яку задано рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , де функції  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  разом із похідними  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ ,  $z'(t)$  неперервні на проміжку  $[\alpha, \beta]$ . Тоді існує криволінійний інтеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

який визначають за формулою

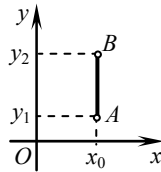
$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)) dt.$$

4. Нехай контур інтегрування – відрізок, паралельний осі  $Oy$  (рис. 2.42, а), його рівняння  $x = x_0$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$ , тоді  $dx = 0$  й інтеграл набуває вигляду

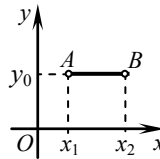
$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{y_1}^{y_2} Q(x_0, y)dy. \quad (2.29)$$

Аналогічно, якщо лінія інтегрування паралельна осі  $Ox$  (рис. 2.42, б), то  $y = y_0$ ,  $dy = 0$ , тому

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_0) dx.$$



а



б

Рис. 2.42

Якщо контур інтегрування складається з кількох частин, що мають різні рівняння, то інтеграл дорівнює сумі інтегралів, обчислених за окремими частинами.

Із формул (2.27) — (2.28) випливає, що криволінійний інтеграл другого роду має властивості, аналогічні властивостям визначеного інтеграла. Зокрема, акцентуємо на тому, що при зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл другого роду змінює свій знак:

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

тоді як криволінійний інтеграл першого роду не залежить від напрямку інтегрування. Справді, зі зміною напрямку інтегрування проєкції вектора  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$  на осі  $Ox$  та  $Oy$  змінюють знаки (рис. 2.41).

Якщо крива інтегрування  $L$  замкнена (рис. 2.43), то дістаємо криволінійний інтеграл по замкнутому контуру або контурний інтеграл, який часто позначають так:

$$\oint_L Pdx + Qdy.$$

При цьому замкнений контур  $L$  вважають додатно орієнтованим, якщо обхід контура відбувається проти годинникової стрілки, і від'ємно орієнтованим — у протилежному разі.

### 3.5. Формула Гріна

Формула Гріна встановлює зв'язок між криволінійним інтегралом уздовж замкнутого контуру  $L$  і подвійним інтегралом по області  $D$ , який обмежений цим контуром.

#### Теорема 3

Нехай функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області  $D$ , тоді криволінійний інтеграл по замкнутому контуру  $L$ , який обмежує область  $D$  (рис. 2.43), пов'язаний з подвійним інтегралом по області  $D$  формулою Гріна

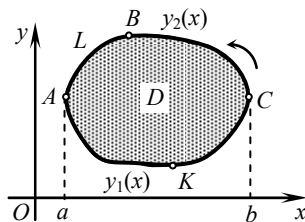


Рис. 2.43

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.30)$$

причому інтегрування по контуру  $L$  здійснюється в додатному напрямку (проти годинникової стрілки).

*Доведення.* Нехай правильна область  $D$  (рис. 2.43) обмежена додатно орієнтовним контуром  $L$ . Покажемо, що  $-\oint_L Pdx = \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ . Маємо

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b P(x, y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b (P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))) dx = \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \\ &\quad - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{ABC} P(x, y) dx - \int_{AKC} P(x, y) dx = \\ &= - \int_{CBA} P(x, y) dx - \int_{AKC} P(x, y) dx = - \int_{AKCBA} P(x, y) dx = - \int_L P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що  $\oint_L Qdy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$ . Тоді з огляду на лінійність криволінійного інтеграла другого роду впливає твердження теореми.



*Зауваження.* Формула Гріна має місце і для довільної області, яку можна розбити на скінченне число правильних областей.

### 3.6. Незалежність криволінійного інтеграла від контуру інтегрування

Якщо значення криволінійного інтеграла другого роду залишається незмінним по всіх можливих кривих, що сполучають початкову й кінцеву точки інтегрування, то кажуть, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

Для формулювання теореми нагадаємо поняття однозв'язної області.

*Однозв'язною* називають область, межа якої складається з однієї замкненої без точок самоперетину неперервної кусково-гладкої кривої. Так, на рис. 2.44 показано: *a* — однозв'язну область; *б* — двозв'язну область; *в* — тривзв'язну область.

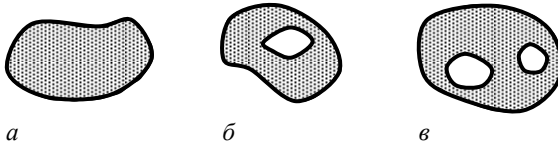


Рис. 2.44

**Теорема 4** Криволінійний інтеграл  $\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ , де контур  $L$

повністю лежить всередині деякої однозв'язної області  $D$ , в якій функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$  неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку, не залежить від форми кривої інтегрування тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.31)$$

У цьому разі виконуються такі твердження:

а) підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції  $u(x, y)$ , тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y);$$



$$\text{б) } \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(x_B, y_B) - u(x_A, y_A),$$

де  $A(x_A, y_A)$  і  $B(x_B, y_B)$  — відповідно початкова і кінцева точки шляху інтегрування;

в) криволінійний інтеграл по довільній замкненій кривій  $L$ , що належить області  $D$ , дорівнює нулю:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Можна довести, що твердження теореми 4 і твердження а) — в) рівносильні, тобто виконання однієї з них тягне виконання трьох інших.

Нехай, наприклад, виконується умова  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , тоді, скориставшись формулою Гріна (2.30), дістанемо

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

отже, з теореми випливає виконання умови в).

Припустимо, що виконується умова б), тобто підінтегральний вираз є повним диференціалом функції  $u(x, y)$ :

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y),$$

з іншого боку, за означенням диференціала

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Отже,  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ . Тоді за теоремою про мішані похідні виконуються рівності  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , звідки  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Якщо криволінійний інтеграл  $\int_L P(x, y)dx +$

$+Q(x, y)dy$  не залежить від кривої інтегрування, то його значення визначається початковою та кінцевою точками інтегрування. У цьому разі обчислення можна проводити кількома способами, наприклад, відновити функцію  $u(x, y)$ , використовуючи той самий підхід, що й при розв'язанні диференціальних

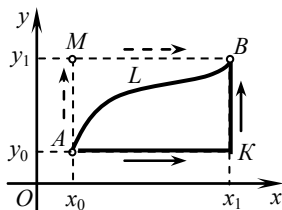


Рис. 2.45

рівнянь у повних диференціалах. Найпростіше провести інтегрування по ламаній лінії (рис. 2.45), ланки якої паралельні осям координат. Так,

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AKB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{AK} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{KB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\ &= \int_{x_0}^{x_1} P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1, y) dy. \end{aligned}$$

**Теорема 5** Криволінійний інтеграл

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz ,$$

де контур  $L$  повністю лежить всередині деякої однозв'язної просторової області, в якій функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  та  $R(x, y, z)$  неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку, не залежить від форми шляху інтегрування тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

У цьому разі підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції  $u(x, y, z)$ , тобто

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = du(x, y, z)$$

і

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \\ = u(x_B, y_B, z_B) - u(x_A, y_A, z_A), \end{aligned}$$

де  $A(x_A, y_A, z_A)$  і  $B(x_B, y_B, z_B)$  — відповідно початкова і кінцева точки кривої інтегрування.

### 3.7. Застосування криволінійних інтегралів

1. Довжину  $L$  дуги  $AB$  плоскої або просторової кривої обчислюють за формулою

$$L = \int_{AB} dl.$$

Зокрема:

а) якщо просторова крива задана рівняннями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$ , то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt;$$

б) якщо плоска крива задана рівнянням  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , тоді

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (2.32)$$

2. Площу  $P$  циліндричної поверхні, визначеної невід'ємною функцією  $z = f(x, y)$ , напрямною  $AB$  у площині  $Oxy$ , а твірні поверхні паралельні осі  $Oz$ , визначають за формулою

$$P = \int_{AB} f(x, y) dl. \quad (2.33)$$

3. Масу  $m$  кривої  $L$  обчислюють за формулою

$$m = \int_L \gamma(x, y) dl,$$

де  $\gamma(x, y)$  — лінійна густина матеріальної кривої у точці  $M(x, y)$ .

4. Координати  $x_c$ ,  $y_c$  центра маси кривої  $L$  знаходять за формулами

$$x_c = \frac{\int x\gamma(x, y) dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int y\gamma(x, y) dl}{m}. \quad (2.34)$$

5. Площу  $S$  плоскої фігури, розміщеної у площині  $Oxy$  і обмеженої замкненим контуром  $L$ , обчислюють за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \quad (2.35)$$

6. Роботу сили  $\vec{F} = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$  (функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  неперервні на просторовій кривій  $L$ ) при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої  $L$  визначають за формулою

$$A = \int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Зокрема, якщо крива  $L$  лежить у площині  $Oxy$ , тоді сила  $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$  при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої  $L$  виконує роботу

$$A = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (2.36)$$

### Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть криволінійні інтеграли першого роду:

а)  $\int_{AB} xdl$ , де  $AB$  — дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $A(0; 0)$  до точки  $B(1; 1)$  (рис. 2.47);

б)  $\int_L x^2 y dl$ , де  $L$  — дуга кола  $x^2 + y^2 = 1$ , розміщена у першій чверті (рис. 2.48).

*Розв'язання:* а) Знаходимо  $y' = 2x$  і за формулою (2.23) дістаємо

$$\begin{aligned} \int_{AB} xdl &= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{1+4x^2} d(1+4x^2) = \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{(1+4x^2)^3} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

б) Параметризуємо дугу  $L$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тоді за формулою (2.25) маємо

$$\int_L x^2 y dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d(\cos t) = -\frac{\cos^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

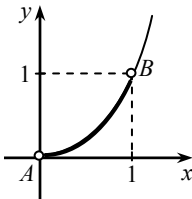


Рис. 2.47

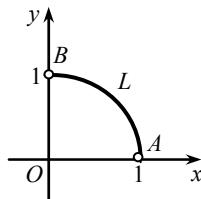


Рис. 2.48

2. Визначте масу гвинтової лінії  $x=3\cos t$ ,  $y=3\sin t$ ,  $z=4t$ ,  $0\leq t\leq 2\pi$  (рис. 2.49), якщо густина в кожній її точці  $(x, y, z)$  визначається за формулою  $\gamma(x, y, z) = 2z$ .

*Розв'язання.* Масу заданої просторової кривої визначимо за формулою

$$m = \int_a^b \gamma(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Оскільки  $\gamma(x, y, z) = 2z = 2 \cdot 4t = 8t$ ,  $x'(t) = -3\sin t$ ,  $z'(t) = 4$ ,  $y'(t) = 3\cos t$ , то

$$m = \int_0^{2\pi} 8t \sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} dt = 20t^2 \Big|_0^{2\pi} = 80\pi^2.$$

3. Знайдіть координати центра маси однорідної дуги ланцюгової лінії  $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $0 \leq x \leq \ln 2$  (рис. 2.50).

*Розв'язання.* Оскільки центр маси однорідної дуги не залежить від значення густини, то вважатимемо її рівною одиниці. Тоді маса дуги чисельно дорівнюватиме довжині цієї дуги. Враховуючи, що

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

за формулою (2.32) дістаємо

$$L = m = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x}) dx = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{4}.$$

Тепер за формулами (2.34) знаходимо

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{4}{3} \int_0^{\ln 2} x \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\ln 2} (x(e^x + e^{-x})) dx = \frac{2}{3} x(e^x - e^{-x}) \Big|_0^{\ln 2} - \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{-x}) dx = \ln 2 - \frac{2}{3} (e^x + e^{-x}) \Big|_0^{\ln 2} = \ln 2 - \frac{1}{3}; \\ y_c &= \frac{4}{3} \int_0^{\ln 2} y \sqrt{1+(y'(x))^2} dx = \frac{4}{3} \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \end{aligned}$$

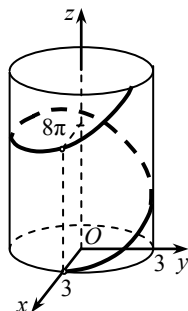


Рис. 2.49

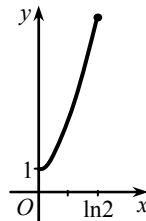


Рис. 2.50

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int_0^{\ln 2} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) dx = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^{\ln 2} = \\
 &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \ln 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24} (16 \ln 2 + 15).
 \end{aligned}$$

4. Обчисліть криволінійний інтеграл першого роду  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , де  $L$  — верхня половина кардіоїди  $\rho = 1 + \cos \varphi$  (рис. 2.51).

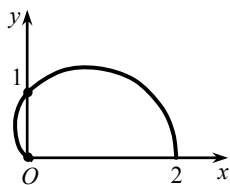


Рис. 2.51

*Розв'язання.* Перейдемо до полярних координат за формулами  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , тоді  $\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$ . Оскільки

$$\rho' = -\sin \varphi,$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = (1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi = 2 + 2 \cos \varphi = 4 \cos^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} = 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| = 2 \cos \frac{\varphi}{2} \text{ для } \varphi \in [0; \pi],$$

то

$$\begin{aligned}
 \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl &= \int_0^\pi \rho \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \int_0^\pi (1 + \cos \varphi) \cdot 2 \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
 &= \int_0^\pi 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 4 \cos \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 8 \int_0^\pi \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) d \sin \frac{\varphi}{2} = \\
 &= 8 \left( \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^\pi = 8 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3}.
 \end{aligned}$$

5. Обчисліть площу бічної поверхні кругового циліндра  $x^2 + y^2 = 4$ , зрізаного знизу площиною  $Oxy$ , а зверху — гіперболічним параболоїдом  $z = xy$  (рис. 2.52).

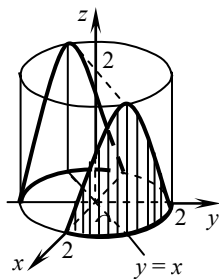


Рис. 2.52

*Розв'язання.* Виходячи з геометричного змісту криволінійного інтеграла першого роду, задачу зводимо до обчислення криволінійного інтеграла від функції  $f(x, y) = xy$  ( $f(x, y) \geq 0$ ) вздовж кола  $x^2 + y^2 = 4$  (формула (2.33)). Оскільки  $f(x, y) \geq 0$  при  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  і  $x \leq 0$ ,  $y \leq 0$ , а поверхня  $z = xy$  симетрична

відносно площини  $y = x$ , то можна обмежитися обчисленням інтеграла лише вздовж четвертої частини кола, що міститься у першій чверті площини  $Oxy$ , і результат подвоїти. Дістанемо

$$y = \sqrt{4-x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$1+(y')^2 = \frac{4}{4-x^2}, \quad dl = \sqrt{1+(y')^2} dx = \frac{2dx}{\sqrt{4-x^2}},$$

$$P = \int_L f(x, y)dl = 2 \int_0^2 x\sqrt{4-x^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \cdot x^2 \Big|_0^2 = 8.$$

**6.** Обчисліть криволінійні інтеграли другого роду:

а)  $\int_{AB} x^2 dx + xy dy$ , якщо  $AB$  — відрізок, що з'єднує точки  $A(1; 1)$  і  $B(2; 3)$  (рис. 2.53);

б)  $\int_L (x-y)dx + (x+y)dy$ , якщо  $L$  — ламана  $OAB$ , де  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 0)$ ,  $B(2; 3)$  (рис. 2.54);

в)  $\int_{AB} x dx + y^2 dy$ , якщо  $AB$  — дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $A(0; 0)$  до точки  $B(2; 4)$  (рис. 2.55);

г)  $\int_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x}$ , якщо  $L$  — перша чверть кола  $x^2 + y^2 = 4$  (обхід здійснюється за годинниковою стрілкою).

*Розв'язання:* а) Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки  $A(1; 1)$  і  $B(2; 3)$ :  $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1}$ , тобто  $y = 2x - 1$ . Рівняння відрізка  $AB$ :  $y = 2x - 1, 1 \leq x \leq 2$ . Тепер за формулою (2.28) дістаємо

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_1^2 (x^2 + x(2x-1) \cdot 2) dx = \int_1^2 (5x^2 - 2x) dx = \frac{26}{3}.$$

б) Запишемо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, перший з яких візьмемо вздовж відрізка  $OA$ , а другий — вздовж відрізка  $AB$ . На відрізку  $OA$   $y = 0, dy = 0, 0 \leq x \leq 2$ , тому

$$\int_{OA} (x-y)dx + (x+y)dy = \int_0^2 xdx = 2.$$

На відрізку  $AB$   $x = 2$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 3$ , значить,

$$\int_{AB} (x-y)dx + (x+y)dy = \int_0^3 (2+y)dy = \left(2y + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^3 = 6 + \frac{9}{2} = 10,5.$$

Отже,

$$\int_L (x-y)dx + (x+y)dy = 2 + 10,5 = 12,5.$$

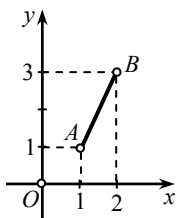


Рис. 2.53

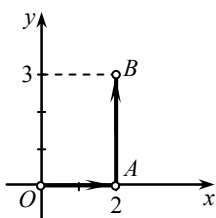


Рис. 2.54

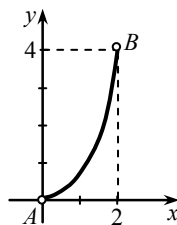


Рис. 2.55

в) Маємо (див. рис. 2.55):

$$\int_{AB} xdx + y^2 dy = \int_{AB} xdx + \int_{AB} y^2 dy = \int_0^2 xdx + \int_0^4 y^2 dy = \frac{70}{3}.$$

г) Запишемо рівняння заданої дуги кола у параметричній формі:  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тоді  $x'(t) = -2 \sin t$ ,  $y'(t) = 2 \cos t$  і за формулою (2.27) дістаємо

$$\int_L \frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left( -\frac{2 \sin t}{2 \sin t} - \frac{2 \cos t}{2 \cos t} \right) dt = -2 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$

7. Обчисліть площу області, обмеженої еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

*Розв'язання.* Запишемо рівняння еліпса у параметричному вигляді:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ . Для обчислення площі застосуємо формулу (2.35). Тоді



$$S = \frac{1}{2} \oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot a \sin t) dt = \\ = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

8. Обчисліть криволінійний інтеграл  $I = \oint_L (x^2 + y^2) dx + xdy$  за формулою Гріна, якщо  $L$  — трикутник з вершинами  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$  (рис. 2.56).

*Розв'язання.* Маємо  $P = x^2 + y^2$ ,  $Q = x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} =$   
 $= 1 - 2y$ . За формулою (2.30) дістаємо

$$\oint_L (x^2 + y^2) dx + xdy = \iint_D (1 - 2y) dx dy,$$

де область  $D$  — трикутник  $OAB$ . Оскільки рівняння сторони  $AB$  має вигляд  $x + y = 1$ , то

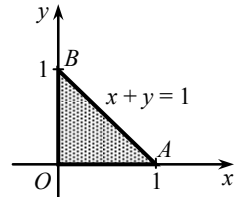


Рис. 2.56

$$I = \iint_D (1 - 2y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1 - 2y) dy = \int_0^1 (y - y^2) \Big|_0^{1-x} dx = \\ = \int_0^1 (1 - x - (1 - x)^2) dx = \left( -\frac{(1-x)^2}{2} + \frac{(1-x)^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

9. Обчисліть  $I = \int_{(0;0)}^{(1;2)} (x^2 + y) dx + (x + 2y) dy$ .

*Розв'язання.* Перевіримо умову незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування:  $P = x^2 + y$ ,  $Q = x + 2y$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} = 1$ .

Отже, умова (2.31) виконується, тому значення інтеграла не залежить від шляху інтегрування. Будемо рухатись від точки  $(0; 0)$  до точки  $(1; 2)$  вздовж ламаної  $OAB$  (рис. 2.57). Маємо на  $OA$ :  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; на  $AB$ :  $x = 1$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Отже,

$$I = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^2 (1 + 2y) dy = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + (y + y^2) \Big|_0^2 = \frac{19}{3} = 6 \frac{1}{3}.$$

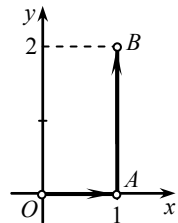


Рис. 2.57

**10.** Обчисліть роботу, яку виконує сила  $\vec{F} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$  при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої, що сполучає точки  $A(1; 2)$  та  $B(2; 4)$ .

*Розв'язання.* Потрібно обчислити криволінійний інтеграл другого роду від функцій  $P = y^2$  і  $Q = x$  вздовж відрізка  $AB$ . Складемо рівняння відрізка

$AB$ :  $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2}$ , звідси  $y = 2x$ . За формулою (2.36) маємо

$$\begin{aligned} A &= \int_{AB} y^2 dx + x dy = \int_{AB} y^2 dx + \int_{AB} x dy = \int_1^2 4x^2 dx + \int_2^4 \frac{y}{2} dy = \\ &= \frac{4}{3} x^3 \Big|_1^2 + \frac{y^2}{4} \Big|_2^4 = \frac{4}{3} (8-1) + \frac{1}{4} (16-4) = \frac{37}{3}. \end{aligned}$$

**11.** Обчисліть криволінійний інтеграл

$$\oint_L (x^3 + 2xy) dx + (x^2 - \cos y) dy,$$

якщо  $L$  — еліпс  $x^2 + 4y^2 = 4$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^3 + 2xy)}{\partial y} = 2x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 - \cos y)}{\partial x} = 2x$ , то

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  і криволінійний інтеграл по замкнутому контуру  $L$  дорівнює нулю.

**12.** Обчисліть криволінійний інтеграл

$$I = \oint_L (x^2 + 2z) dx + (x - y) dy + (x + 2z) dz,$$

якщо  $L$  — відрізок, що сполучає точки  $A(2; 0; -1)$  та  $B(4; 1; 2)$ .

*Розв'язання.* Складемо параметричні рівняння прямої  $AB$ :

$$\frac{x-2}{4-2} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z+1}{2+1}, \quad \frac{x-2}{2} = y = \frac{z+1}{3} = t,$$

$x = 2t + 2$ ,  $y = t$ ,  $z = 3t - 1$  — параметричні рівняння прямої  $AB$ .

Точку  $A$  дістаємо з параметричних рівнянь при  $t = 0$ ; точці  $B$  відповідає значення  $t = 1$ . Отже, на відрізку  $AB$   $t \in [0; 1]$ .

Враховуючи, що  $dx = 2dt$ ,  $dy = dt$ ,  $dz = 3dt$ , обчислюємо криволінійний інтеграл

$$I = \int_0^1 \left( (2t+2)^2 + 2(3t-1) \right) \cdot 2 + (2t+2-t) + (2t+2+2(3t-1)) \cdot 3 \, dt =$$

$$= \int_0^1 (8t^2 + 53t + 6) dt = \left( \frac{8}{3}t^3 + \frac{53}{2}t^2 + 6t \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{53}{2} + 6 = 35\frac{1}{6}.$$

### Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть криволінійні інтеграли першого роду.

1.  $\int_L \sin^3 x \cos x dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in [\pi/6; \pi/2]$ .
2.  $\int_L y^2 dl$ , якщо  $L$  — арка циклоїди  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
3.  $\int_L \frac{dl}{x-y}$ , якщо  $L$  — відрізок, що сполучає точки  $A(-2; 0)$  та  $B(4; 0)$ .
4.  $\int_L xy^{-4} dl$ , якщо  $L$  — дуга гіперболи  $xy = 1$  між точками  $A(1; 1)$  та  $B(2; 1/2)$ .
5.  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 2x$ .
6.  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dl$ , якщо  $L$  — дуга спіралі Архімеда  $\rho = \varphi$  між точками  $A(0; 0)$  та  $B(1; 1)$ .
7.  $\int_L xy^2 dl$ , якщо  $L$  — дуга кола  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi/2$ ).
8.  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , якщо  $L$  — дуга гвинтової лінії  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  
 $z = bt$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
9.  $\int_L (2x - 3y + z + 4) dl$ , якщо  $L$  — відрізок, що сполучає точки  $A(1; 3; -1)$   
та  $B(2; 0; 3)$ .

Обчисліть криволінійні інтеграли другого роду.

10.  $\int_L \sqrt{x^2 + 8y} dx - (xy + 1) dy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = x^2$  між точками  $A(0; 0)$  та  $B(2; 4)$ .

11.  $\int_L xdy - ydx$ , якщо  $L$  — дуга астроїди  $x = 2\cos^3 t$ ,  $y = 2\sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/2$ .

12.  $\int_L y \cos^3 x dx + y^{-2} dy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ .

13.  $\int_L y^2 dx + x^2 dy$ , якщо  $L$  — перша арка циклоїди  $x = a(t - \sin t)$ ,

$y = a(1 - \cos t)$ .

14.  $\int_L xy dx + zdy + (x^2 + y^2) dz$ , якщо  $L$  — дуга гвинтової лінії  $x = a \cos t$ ,

$y = a \sin t$ ,  $z = bt$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ).

15.  $\int_L (x-1)dx + (x-y)dy + (2z-x)dz$ , якщо  $L$  — відрізок, що сполучає точки  $A(0; 0; 0)$  та  $B(1; 2; 3)$ .

16.  $\int_L (x^2 - y)dx + (y^2 + 2x)dy$ , якщо  $L$  — ламана, що послідовно сполучає точки  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(1; 0)$  та  $D(3; 0)$ .

Обчисліть криволінійні інтеграли другого роду, використовуючи формулу Гріна.

17.  $\oint_L 2xdy - ydx$ , якщо  $L$  — замкнений контур, утворений частинами параболи  $y = x^2$  та прямої  $y = x$ .

18.  $\oint_L (1 - x^2)ydx + (1 + y^2)x dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = R^2$ .

19.  $\oint_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 2x$ .

20.  $\oint_L xy dx + (x^2 + y^2) dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами в точках  $A(1; 0)$ ,  $B(2; 1)$  та  $C(1; 2)$ .

21. Визначте координати центра маси однорідної дуги циклоїди  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

22. Обчисліть роботу сили  $\vec{F} = \{x; y\}$  при переміщенні матеріальної точки вздовж кривої  $y = t \cos t - \sin t$ ,  $x = t \sin t + \cos t$ ,  $t \in [0; \pi/2]$ .

23. Обчисліть роботу сили  $\vec{F} = \{yx; yz; xz\}$  при переміщенні матеріальної точки по відрізку, що сполучає точки  $A(0; 1; 1)$  та  $B(2; -1; 3)$ .

Обчисліть криволінійні інтеграли, попередньо впевнившись, що вони не залежать від форми шляху інтегрування.

$$24. \int_{(1;1)}^{(2;0)} (2y^2 - 3x^2 y)dx + (4xy - x^3)dy .$$

$$25. \int_{(1;0;0)}^{(0;2;3)} (2x - y^3)dx + (z^2 - 3xy^2)dy + 2yzdz .$$

26. Обчисліть площу астроїди  $x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ , використовуючи криволінійний інтеграл.

27. Обчисліть масу кривої  $x^2 + y^2 = R^2$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ) з лінійною густиною  $\gamma(x; y) = x$ .

### Відповіді

1.  $7/24$ . 2.  $256/15$ . 3.  $\sqrt{5} \ln 2$ . 4.  $(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2})/6$ . 5. 8. 6.  $4/3$ . 7.  $R^4/3$ .  
 8.  $\frac{2\pi}{3}\sqrt{1+b^2}(3+4\pi^2b^2)$ . 9.  $\frac{7}{2}\sqrt{26}$ . 10.  $-\frac{54}{5}$ . 11.  $-\frac{3\pi}{4}$ . 12.  $\frac{23+2\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{24}$ . 13.  $\pi a^3(5-2\pi)$ .  
 14.  $\pi a^2 b - 2$ . 15. 6. 16.  $7,5$ . 17.  $0,5$ . 18.  $\frac{\pi R^4}{2}$ . 19.  $-\pi$ . 20.  $\frac{4}{3}$ . 21.  $(\pi; 4a/3)$ . 22.  $\pi^2/8$ .  
 23.  $14/3$ . 24.  $-1$ . 25. 17. 26.  $\frac{3\pi a^2}{8}$ . 27.  $R^2$ .

### Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Обчисліть криволінійні інтеграли першого роду.

3.1.1.  $\int_L z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  
 $z = 4t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

3.1.2.  $\int_L x^2 y dl$ , якщо  $L$  — чверть кола  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

3.1.3.  $\int_L xyz dl$ , де  $L$  — дуга кривої  $x = t$ ,  $y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$ ,  $z = \frac{1}{2}t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

3.1.4.  $\int_L 2z dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = e^t \cos t$ ,  $y = e^t \sin t$ ,  $z = e^t$ ,  
 $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.1.5.**  $\int_L \frac{z^3}{x^2 + y^2} dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.1.6.**  $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ .

**3.1.7.**  $\int_L \frac{1}{(x^2 - y^2)^2} dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ .

**3.1.8.**  $\int_L (2x + 3y - z) dl$ , де  $L$  — відрізок прямої між точками  $A(3; -1; 6)$  і  $B(1; 0; 4)$ .

**3.1.9.**  $\int_L dl$ , де  $L$  — дуга кривої  $x = 16t$ ,  $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}t^3$ ,  $z = \frac{1}{5}t^5$ ,  $t \in [0; 2]$ .

**3.1.10.**  $\int_L y dl$ , де  $L$  — дуга параболи  $y^2 = 4x$ , яка міститься всередині параболи  $x^2 = 4y$ .

**3.1.11.**  $\int_L dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

**3.1.12.**  $\int_L (x^2 + y^2) dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.1.13.**  $\int_L y dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.1.14.**  $\int_L y dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $\begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

**3.1.15.**  $\int_L x^2 dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = \ln x$  від точки  $x_1 = \sqrt{3}$  до точки  $x_2 = 2\sqrt{2}$ .

**3.1.16.**  $\int_L xy^2 dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ .

**3.1.17.**  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**3.1.18.**  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , якщо  $L$  — дуга кола  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ .

$$3.1.19. \int_L (x^2 + y^2) dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$3.1.20. \int_L y dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } \begin{cases} x = \cos t - t \sin t, \\ y = \sin t + t \cos t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

$$3.1.21. \int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } x^2 + y^2 = 9, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$$

$$3.1.22. \int_L x^2 dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } x^2 + y^2 = 25, \quad x \leq 0, \quad y \geq 0.$$

$$3.1.23. \text{ Обчисліть } \int_L (x^2 + yz) dl, \text{ де } L \text{ — відрізок, що сполучає точки}$$

$A(1; -2; 3)$  і  $B(5; 0; 2)$ .

$$3.1.24. \int_L x dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$3.1.25. \int_L x dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3.1.26. \int_L -y dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга астроїди } x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$3.1.27. \int_L xyz dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$3.1.28. \int_L xyz dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 3t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$3.1.29. \int_L y dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга астроїди } x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$3.1.30. \int_L xyz dl, \text{ якщо } L \text{ — дуга кола } x = 6 \cos t, \quad y = 6 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

3.2. Обчисліть криволінійні інтеграли другого роду (інтегрування проведіть у додатному напрямку).

3.2.1.  $\int_L 2y dx - (3y + x^2) dy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = x^2 - 4x$ , розміщеної під віссю  $Ox$ .

$$3.2.2. \int_L x^2 y dx + x^3 dy, \text{ якщо } L \text{ — дуга кривої } y^2 = x, \quad 0 \leq x \leq 4, \quad y \geq 0.$$

**3.2.3.**  $\int_L xydx + yzdy + z^2xdz$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 1$ ,

$$z = 2 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

**3.2.4.**  $\int_L x^4 ydy - y^4 xdx$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = \sqrt{\cos t}$ ,  $y = \sqrt{\sin t}$ ,

$$t \in [0; \pi/2].$$

**3.2.5.**  $\int_L (x^2 - y^2)dy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = 2x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

**3.2.6.**  $\int_L (x^2 + y^2)dx$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = 2x^2$ ,  $2 \leq x \leq 4$ .

**3.2.7.**  $\int_L x^2 dx + \sqrt{x} ydy$ , якщо  $L$  — чверть кола  $x^2 + y^2 = 25$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,

що пробігається проти годинникової стрілки.

**3.2.8.**  $\int_L (x - y)dx + (x + y)dy$ , де  $L$  — дуга кубічної параболи  $y = 2x^3$ ,

$$0 \leq x \leq 1.$$

**3.2.9.**  $\int_{AB} (x - y)dx + (x + y)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(2; 3)$  і  $B(3; 5)$ .

**3.2.10.**  $\int_L (x^2 - y^3)dx + (x + y)dy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $x = y^2 - 1$ ,

$$0 \leq y \leq 1.$$

**3.2.11.**  $\int_L x^{1/3} ydy - y^{1/3} xdx$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ ,

$$t \in [0; \pi/2].$$

**3.2.12.**  $\int_L (6xy - 1)dx + 2y^2 xdy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $x = 3y^2$ ,  $y \in [0; 1]$ .

**3.2.13.**  $\int_L (2x^2 y - y^2)dx + 6xydy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = 2x^3$ ,

$$0 \leq x \leq 1.$$

**3.2.14.**  $\int_L 2ydx - (y - x^2)dy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = x - x^2$ ,  $x \in [0; 1]$ .

**3.2.15.**  $\int_{AB} 2xydx + 3xy^2 dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(1; 1)$  і  $B(2; 4)$ .

**3.2.16.**  $\int_{AB} (x - y^2)dx + (x + y)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(0; 0)$  і  $B(1; 2)$ .



**3.2.17.**  $\int_{AB} (6xy^2 + 4x^3)dx + (6x^2y + 3y^2)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(2; 3)$  і  $B(3; 4)$ .

**3.2.18.**  $\int_{AB} (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(0; 0)$  і  $B(2; 2)$ .

**3.2.19.**  $\int_{AB} \frac{xdx + (2x + y)dy}{(x + y)^2}$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(1; 1)$  і  $B(3; 2)$ .

**3.2.20.**  $\int_{AB} (2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 3y^2)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(1; 2)$  і  $B(2; 1)$ .

**3.2.21.**  $\int_{AB} \frac{-y^2dx + x^2dy}{(x - y)^2}$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(2; 1)$  і  $B(5; 3)$ .

**3.2.22.**  $\int_L ydx - (x^2 + y)dy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = 2x - x^2$ , розміщеної над віссю  $Ox$ .

**3.2.23.**  $\int_{AB} (3y^2 + 4y)dx + (6xy + 4x - 4y)dy$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(0; 1)$  і  $B(2; 5)$ .

**3.2.24.**  $\int_L (5x - 2y)dx + x^2ydy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = \frac{1}{3}x^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

**3.2.25.**  $\int_L (4xy - y^2)dx + 2xydy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = 2x^2 - 4x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .

**3.2.26.**  $\int_L 3x^3ydx + xydy$ , якщо  $L$  — дуга кривої  $y = 2x^2 + 6x$ ,  $0 \leq x \leq 3$ .

**3.2.27.**  $\int_{AB} 4xydx + 3xydy + zdz$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(0; 1; 5)$  і  $B(2; 1; 3)$ .

**3.2.28.**  $\int_{AB} (2zy - 3y^2)dx + 6ydy + xdz$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(1; -1; 0)$  і  $B(2; 3; 7)$ .

**3.2.29.**  $\int_L (x^2y + 2y^2)dx - 2xydy$ , якщо  $L$  — дуга параболи  $y = (x - 1)^3$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

**3.2.30.**  $\int_{AB} (2x^2 - 6z)dx + x^2ydy + (2z - 1)dz$ , якщо  $AB$  — відрізок прямої, що сполучає точки  $A(-1; 0; 4)$  і  $B(1; 4; 2)$ .

**3.3.** Обчисліть криволінійний інтеграл  $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  по замкнутому контуру  $L$ , використовуючи формулу Гріна. Обхід контура відбувається проти годинникової стрілки.

**3.3.1.**  $\int_L (2x + y) dx - (3y + 2x) dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(2; 5)$ .

**3.3.2.**  $\oint_L (x + y^2) dx + 4xy dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $1 \leq x \leq 3$ ,  $0 \leq y \leq 4$ .

**3.3.3.**  $\oint_L y dx + x^2 dy$ , якщо  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2$  і прямою  $y = 2x + 3$ .

**3.3.4.**  $\oint_L y^2 dx + xy dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 3$ .

**3.3.5.**  $\int_L x^2 y^2 dx + xy dy$ , якщо  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2$  і  $y^2 = x$ .

**3.3.6.**  $\oint_L y^2 dx + x^2 y dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $-1 \leq x \leq 4$ ,  $1 \leq y \leq 3$ .

**3.3.7.**  $\oint_L x^3 dx + (x + 2y) dy$ , якщо  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2$  і прямою  $y = 3x + 4$ .

**3.3.8.**  $\int_L (2x - y) dx + (4y + x) dy$ , де  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(0; 4)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(2; -2)$ .

**3.3.9.**  $\oint_L (x^2 + y) dx + (3x - y) dy$ , де  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2 - 1$  і прямою  $y = 2x + 2$ .

**3.3.10.**  $\int_L (2x - y^2) dx + (y + x^2) dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $0 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 4$ .

**3.3.11.**  $\int_L (x - y) dx + (y + x) dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(0; 4)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(2; -2)$ .

**3.3.12.**  $\oint_L x^2 y dx - xy^2 dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 4$ .

**3.3.13.**  $\oint_L (xy - x^2) dx + x dy$ , якщо  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2$  і прямою  $y = x + 2$ .

**3.3.14.**  $\oint_L y dx + (x^2 + y^2) dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $0 \leq x \leq 4$ ,  $1 \leq y \leq 2$ .

**3.3.15.**  $\int_L (2x + y) dx + 2y dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(2; 1)$ .

**3.3.16.**  $\oint_L (x^2 + 2y) dx + y dy$ , якщо  $L$  — контур, утворений параболою  $y = 2x - x^2$  та  $y = x^2 + x - 1$ .

**3.3.17.**  $\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 9$ .

**3.3.18.**  $\oint_L (x^2 - y) dx + (x - y) dy$ , якщо  $L$  — контур, утворений параболою  $y = 6x - x^2$  та прямою  $y = 5$ .

**3.3.19.**  $\oint_L (x^2 + 2y^2) dx + 2y dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $-2 \leq x \leq 0$ ,  $1 \leq y \leq 2$ .

**3.3.20.**  $\oint_L (y^2 - x^2) dx + x^2 dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 2$ .

**3.3.21.**  $\oint_L y^2 dx - xy dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(2; 5)$ .

**3.3.22.**  $\oint_L y^2 dx + x^2 dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ .

**3.3.23.**  $\int_L 3y dx - (2y + x^2) dy$ , якщо  $L$  — контур, утворений параболою  $y = 4x - x^2$  та прямою  $y = 3$ .

**3.3.24.**  $\oint_L xy dx + x^2 dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 25$ .

**3.3.25.**  $\int_L (x+4y)dx - ydy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(2; 5)$ .

**3.3.26.**  $\int_L (2x+y^2)dx + (y-x)dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(-3; 1)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(2; 3)$ .

**3.3.27.**  $\oint_L (x+y)dx + x^2dy$ , якщо  $L$  — контур, обмежений параболою  $y = x^2$  та  $y = 2 - x^2$ .

**3.3.28.**  $\oint_L (x+3y)dx + x^3dy$ , якщо  $L$  — контур прямокутника  $-3 \leq x \leq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 0$ .

**3.3.29.**  $\oint_L xydx + (x+1)dy$ , якщо  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = 16$ .

**3.3.30.**  $\int_L (2x+y)dx + (y-3x)dy$ , якщо  $L$  — контур трикутника з вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(2; 1)$ .

**3.4.** Перевірте, що криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування, та обчисліть його.

**3.4.1.**  $\int_{(1;1)}^{(3;4)} (y^4 + 2xy)dx + (4xy^3 + x^2 - 3y^2)dy$ .

**3.4.2.**  $\int_{(1;0)}^{(2;3)} (2xy + 3y - 8x)dx + (x^2 + 3x)dy$ .

**3.4.3.**  $\int_{(0;0;1)}^{(1;0;4)} x(y^2 + z^2)dx + y(x^2 + z^2)dy + z(x^2 + y^2)dz$ .

**3.4.4.**  $\int_{(-4;0)}^{(2;4)} (3x^2y^4 - 4)dx + (4x^3y^3 + 3y^2)dy$ .

**3.4.5.**  $\int_{(0;0;0)}^{(3;2;0)} (y^2z^3 + 2)dx + (2xyz^3 + 1)dy + (3xy^2z^2 + 2z)dz$ .

**3.4.6.**  $\int_{(-1;0)}^{(1;3)} (y^3 + 2y - 3x^2)dx + (3xy^2 + 2x)dy$ .

**3.4.7.**  $\int_{(0;5)}^{(3;-1)} (2xy^6 - 6x)dx + (6x^2y^5 + 4y)dy$ .

- 3.4.8.  $\int_{(-3; -1)}^{(0; 3)} (4x^3y^3 + 1)dx + (3x^4y^2 - 4y^3)dy .$
- 3.4.9.  $\int_{(1; 0; 0)}^{(0; 3; 2)} (y + z + yz)dx + (x - z + xz)dy + (x - y + xy)dz .$
- 3.4.10.  $\int_{(0; 0)}^{(3; 5)} (5x^4y^3 + 9x^2)dx + (3x^5y^2 + 2y)dy .$
- 3.4.11.  $\int_{(0; 1; 2)}^{(3; 3; 3)} (3x^2y^2z - 1)dx + (2x^3yz - 2)dy + (x^3y^2 - 3)dz .$
- 3.4.12.  $\int_{(-2; -1)}^{(1; 3)} (3x^2y + y^2 + 2x)dx + (x^3 + 2xy)dy .$
- 3.4.13.  $\int_{(0; 2; 0)}^{(1; 0; 4)} (yz + 2xy^2z^2)dx + (xz + 2yx^2z^2)dy + (xy + 2zx^2y^2)dz .$
- 3.4.14.  $\int_{(1; 0; 0)}^{(3; 3; 5)} (x - yz)dx + (2y - xz)dy + (2z - xy)dz .$
- 3.4.15.  $\int_{(0; -2)}^{(3; 4)} (3x^2y + 2xy^4 + 2x)dx + (x^3 + 4x^2y^3)dy .$
- 3.4.16.  $\int_{(0; 0; 0)}^{(1; 4; 2)} (yz^2 + 1)dx + (xz^2 + 2y)dy + (2xyz + 3z^2)dz .$
- 3.4.17.  $\int_{(0; 0)}^{(1; 4)} (4x^3y^2 + 3x^2y + 2x)dx + (2x^4y + x^3 + 2y)dy .$
- 3.4.18.  $\int_{(0; 0; 0)}^{(1; 2; 3)} (2xy + z^2 + 3)dx + (x^2 + 2yz - 2y)dy + (2xz + y^2)dz .$
- 3.4.19.  $\int_{(1; 1)}^{(2; 4)} (2x^3 - 3y^2 + 4y)dx + (4x - 6xy - 2y)dy .$
- 3.4.20.  $\int_{(0; 0)}^{(2; 1)} (3x^2y^2 + y^3 + 4x)dx + (2x^3y + 3xy^2)dy .$

- 3.4.21.  $\int_{(-2;0)}^{(3;3)} (4x^3y^2 + 2xy^3)dx + (2yx^4 + 3x^2y^2 + 4y^3)dy.$
- 3.4.22.  $\int_{(2;0)}^{(4;5)} (4x^3y^2 + y^2)dx + (2x^4y + 2xy + 10y - 1)dy.$
- 3.4.23.  $\int_{(0;1;1)}^{(2;0;2)} (y + 2z + 4)dx + (x + 3z - 2)dy + (2x + 3y + 1)dz .$
- 3.4.24.  $\int_{(1;0)}^{(3;1)} (y^2 + 6y)dx + (2xy + 6x - 10y)dy .$
- 3.4.25.  $\int_{(-1;0)}^{(1;2)} (2xy^2 + y + 4)dx + (2x^2y + x)dy .$
- 3.4.26.  $\int_{(1;2)}^{(4;4)} (x^{-1} + 2xy^2)dx + (y^{-1} + 2x^2y)dy = 0 .$
- 3.4.27.  $\int_{(0;2)}^{(1;4)} (3y^2 + 5y)dx + (6xy + 5x - 2y)dy.$
- 3.4.28.  $\int_{(0;1;2)}^{(1;4;0)} (y^3 - z^2 + 2x)dx + (3xy^2 + z)dy + (y - 2xz)dz.$
- 3.4.29.  $\int_{(0;1)}^{(2;5)} (4xy - 15x^2y)dx + (2x^2 - 5x^3 + 4)dy.$
- 3.4.30.  $\int_{(0;1)}^{(2;3)} (4x^3y^3 + 3x^2y^2 + 2xy)dx + (3x^4y^2 + 2x^3y + x^2)dy.$

#### Тема 4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

|| Поверхневі інтеграли першого та другого роду. Властивості та обчислення. Формула Остроградського—Гаусса. Формула Стокса.



**Література:** [9, розділ 10, §4], [15, розділ 12, п. 12.4], [16, розділ 15, §5–8], [17, розділ 3, §11–12].

## Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 4.1. Поверхневі інтеграли першого роду. Основні поняття

Нехай на гладкій поверхні  $\sigma$  задано неперервну функцію  $u = f(x, y, z)$ . (Поверхню називають *гладкою*, якщо в кожній її точці існує дотична площина, яка змінює своє положення неперервно при переході від точки до точки.) Розіб'ємо поверхню  $\sigma$  сіткою довільно проведених кривих на  $n$  елементарних частин  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), виберемо на кожній частині  $\sigma_k$  довільну точку  $M_k(x_k, y_k, z_k)$ , обчислимо значення функції у цій точці і складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k, \quad (2.37)$$

де  $\Delta\sigma_k$  — площа  $k$ -го елемента поверхні  $\sigma_k$  (див. рис. 2.58). Позначимо через  $d_k$  діаметр елементарної області поверхні  $\sigma_k$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$  — найбільший з діаметрів  $d_k$ .

Якщо при  $\lambda \rightarrow 0$  існує скінченна границя інтегральної суми (2.37), яка не залежить ні від способу розбиття поверхні  $\sigma$  на елементарні частини  $\sigma_k$ , ні від вибору на  $\sigma_k$  точок  $M_k(x_k, y_k, z_k)$ , то цю границю називають *поверхневим інтегралом першого роду* від функції  $f(x, y, z)$  по поверхні  $\sigma$  і позначають  $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma$ .

Отже, за означенням

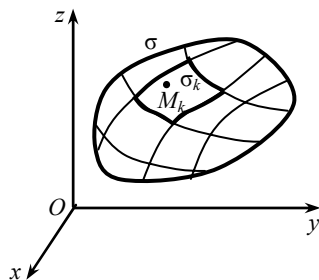


Рис. 2.58

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta\sigma_k.$$

Значення цього інтеграла не залежить від вибору сторони поверхні  $\sigma$ , по якій виконується інтегрування.

#### Теорема 1

Якщо на гладкій поверхні  $\sigma$  визначено неперервну функцію  $f(x, y, z)$ , то поверхневий інтеграл першого роду існує.

## 4.2. Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

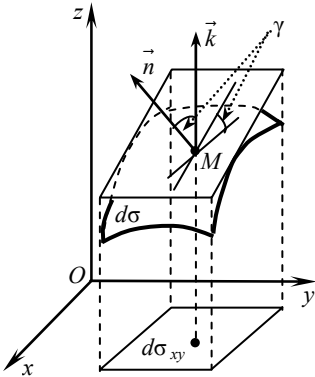


Рис. 2.59

Нехай гладка поверхня  $\sigma$  задана рівнянням  $z = z(x, y)$ . Припустимо, що ця поверхня однозначно проектується в область  $D$  площини  $Oxy$  і функції  $z(x, y)$ ,  $z'_x(x, y)$ ,  $z'_y(x, y)$  неперервні в області  $D$ . Тоді між елементом поверхні  $d\sigma$  і елементом площі  $dxdy$  існує зв'язок (рис. 2.59) у вигляді формули:

$$d\sigma = \frac{d\sigma_{xy}}{|\cos \gamma(M(x, y, z))|} = \frac{dxdy}{|\cos \gamma(M(x, y, z))|},$$

де  $\gamma(M)$  — кут між нормаллю  $\vec{n}$  до поверхні у точці  $M(x, y, z)$  та віссю  $Oz$ .

У нашому випадку можна вважати, що  $\vec{n} = \{z'_x(x, y), z'_y(x, y), -1\}$ ,

$$\text{тоді } |\cos \gamma(M(x, y, z))| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{|z'_x \cdot 0 + z'_y \cdot 0 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \cdot 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}}$$

і поверхневий інтеграл першого роду обчислюється за формулою

$$\boxed{\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy.} \quad (2.38)$$

Якщо, наприклад, гладка поверхня задана рівнянням  $x = x(y, z)$ , проектується в область  $D_{yz}$  площини  $Oyz$ , тоді поверхневий інтеграл першого роду обчислюють за формулою

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + (x'_y)^2 + (x'_z)^2} dy dz.$$

## 4.3. Поверхневі інтеграли другого роду. Основні поняття

Розглянемо поняття двосторонньої поверхні. Візьмемо на гладкій поверхні  $\sigma$  довільну точку  $M$  і проведемо в цій точці нормаль  $\vec{n}$ . Перемістимо точку  $M$  вздовж довільного замкненого контура  $L$  разом із



вектором  $\vec{n}$ , який весь час залишається нормальним до поверхні  $\sigma$ . Якщо після обходу контура  $L$  нормаль не змінює свого напрямку, то таку поверхню називають *двосторонньою* (рис. 2.60), а якщо нормаль змінює напрям на протилежний, то — *односторонньою*). Прикладами двосторонніх поверхонь є площина, сфера, параболоїд тощо. Взагалі, будь-яка поверхня, задана рівнянням  $z = f(x, y)$ , де  $f(x, y)$ ,  $f'_x(x, y)$ ,  $f'_y(x, y)$  — неперервні функції в області  $D$  площини  $Oxy$ , є двосторонньою. Прикладом односторонньої поверхні є так званий лист Мебіуса, який є результатом склеювання сторін  $AB$  і  $CD$  прямокутника  $ABCD$  (рис. 2.61, а) так, що точку  $A$  суміщають із точкою  $C$ , а точку  $B$  — із точкою  $D$  (рис. 2.61, б)

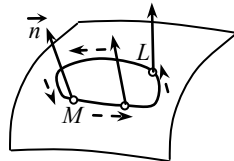


Рис. 2.60

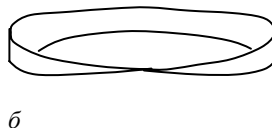
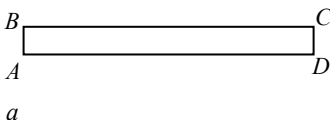


Рис. 2.61

Нехай у точках двосторонньої поверхні  $\sigma$  задано неперервну функцію  $R(x, y, z)$ . Оберемо певну сторону цієї поверхні (у цьому випадку кажуть, що поверхня *орієнтовна*). Так, якщо нормаль до обраної сторони утворює з віссю  $Oz$  гострий кут ( $\cos \gamma > 0$ ), то обрану сторону називають *верхньою* (рис. 2.62, а), а якщо тупий кут ( $\cos \gamma < 0$ ), то обрано *нижню* сторону поверхні (рис. 2.62, б). Розіб'ємо поверхню  $\sigma$  сіткою довільно проведених кривих на  $n$  елементарних частин  $\sigma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), візьмемо довільно на кожній частині  $\sigma_k$  точку  $M_k(x_k, y_k, z_k)$ , обчислимо значення функції у цій точці. Позначимо через  $D_k$  проекцію області  $\sigma_k$  на координатну площину  $Oxy$ . Нехай  $S(D_k)$  — площа проекції  $D_k$ . Позначимо  $\Delta S_k = S(D_k)$ , якщо обрана верхня сторона поверхні, і  $\Delta S_k = -S(D_k)$ , якщо обрана нижня сторона поверхні. Складемо інтегральну суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k \quad (2.39)$$

і позначимо через  $d_k$  діаметр елементарної області поверхні  $\sigma_k$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$  — найбільший з діаметрів  $d_k$ .

Якщо при  $\lambda \rightarrow 0$  існує скінченна границя інтегральної суми (2.39), яка не залежить ні від способу розбиття поверхні  $\sigma$  на елементарні частини

$\sigma_k$ , ні від вибору на  $\sigma_k$  точок  $M_k(x_k, y_k, z_k)$ , то цю границю називають *поверхневим інтегралом другого роду* і позначають  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ .

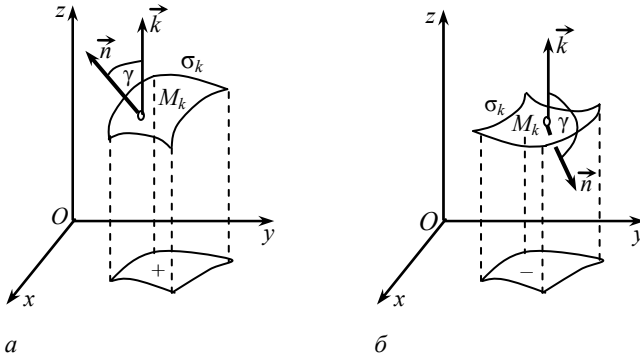


Рис. 2.62

Отже, за означенням

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n R(x_k, y_k, z_k) \Delta S_k.$$

Поверхню  $\sigma$  можна проектувати також на координатні площини  $Oxz$  та  $Oyz$ . Тоді для функцій  $P(x, y, z)$  та  $Q(x, y, z)$ , визначених і неперервних у точках двосторонньої поверхні  $\sigma$ , дістають ще два поверхневі інтеграли другого роду  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$  та  $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz$ .

У загальному випадку поверхневий інтеграл має вигляд

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy,$$

де  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  — неперервні функції, визначені в точках двосторонньої поверхні  $\sigma$ .



*Зауваження.*

1. Якщо поверхня  $\sigma$  замкнена, то поверхневий інтеграл другого роду по зовнішній стороні позначають символом  $\oiint_{\sigma}$ .

2. При переході до іншої сторони поверхневий інтеграл другого роду змінює знак.

3. Якщо, наприклад,  $\sigma$  — циліндрична поверхня, твірні якої паралельні осі  $Oz$ , то  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = 0$  (у цьому разі поверхня  $\sigma$  проектується на площину  $Oxy$  у лінію, яка не має площі).

4. Між інтегралами першого і другого роду існує зв'язок у вигляді формули

$$\iint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

де  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  — напрямні косинуси нормалі до обраної сторони поверхні.

5. Якщо поверхню  $\sigma$  розбити на частини  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , то поверхневий інтеграл по поверхні  $\sigma$  дорівнює сумі двох інтегралів по її частинах  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ .

#### 4.4. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай функція  $R(x, y, z)$  неперервна в усіх точках поверхні  $\sigma$ , заданої рівнянням  $z = f(x, y)$ , де  $z(x, y)$  — неперервна функція в замкненій області  $D_{xy}$  — проекції поверхні  $\sigma$  на площину  $Oxy$ . У разі, коли обрано верхню сторону поверхні  $\sigma$ , тобто нормаль  $\vec{n}$  до обраної сторони утворює з віссю  $Oz$  гострий кут, поверхневий інтеграл  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$  зводиться до подвійного інтеграла за формулою

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Якщо ж інтегрування проводиться по нижній стороні поверхні  $\sigma$  (нормаль  $\vec{n}$  до обраної сторони утворює з віссю  $Oz$  тупий кут), то подвійний інтеграл беруть зі знаком « $\rightarrow$ », тобто

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Отже,

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Аналогічно дістаємо ще дві формули:

1) якщо функція  $Q(x, y, z)$  неперервна в усіх точках поверхні  $\sigma$ , заданої рівнянням  $y = y(x, z)$ , де  $y(x, z)$  — неперервна функція в замкненій області  $D_{xz}$  — проекції поверхні  $\sigma$  на площину  $Oxz$ , то

$$\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz,$$

причому, якщо  $\beta$  — гострий кут між нормаллю  $\vec{n}$  та віссю  $Oy$ , то беремо знак «+», якщо  $\beta$  — тупий кут, то беремо знак «-»;

2) якщо функція  $P(x, y, z)$  неперервна в усіх точках поверхні  $\sigma$ , заданої рівнянням  $x = x(y, z)$ , де  $x(y, z)$  — неперервна функція в замкненій області  $D_{yz}$  — проекції поверхні  $\sigma$  на площину  $Oyz$ , то

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

де перед подвійним інтегралом беремо знак  $\cos \alpha$  ( $\alpha$  — кут між нормаллю  $\vec{n}$  та віссю  $Ox$ ).

У загальному випадку, щоб обчислити поверхневий інтеграл

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dx dz + R(x, y, z) dx dy,$$

потрібно обчислити три інтеграли  $\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz$ ,  $\iint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz$  та  $\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy$ , проєктуючи послідовно поверхню  $\sigma$  на координатні площини  $Oyz$ ,  $Oxz$  та  $Oxy$  відповідно, після чого результати скласти.

#### 4.5. Формула Остроградського—Гаусса

Формула Остроградського—Гаусса встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по просторовій області, яка обмежена цією поверхнею.

**Теорема 2** Якщо функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  — неперервні функції разом із своїми частинними похідними першого порядку в просторовій області  $G$ , то справджується формула Остроградського—Гаусса

$$\boxed{\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\sigma} P dy dz + Q dx dz + R dx dy,}$$

де  $\sigma$  — межа області  $G$  й інтегрування по  $\sigma$  проводиться по її зовнішній стороні.

*Доведення.* Нехай область  $G$  обмежена замкненою поверхнею  $\sigma$ , причому знизу ця область обмежена поверхнею  $\sigma_1$ , заданою рівнянням  $z = z_1(x, y)$ , зверху — поверхнею  $\sigma_2$ , рівняння якої  $z = z_2(x, y)$  ( $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ ), з боків — циліндричною поверхнею  $\sigma_3$ , твірні якої паралельні осі  $Oz$ . Функції  $z_1(x, y)$ ,  $z_2(x, y)$  неперервні в замкненій області  $D$  — проекції області  $G$  на площину  $Oxy$  (рис. 2.63).

Розглянемо потрібний інтеграл

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_D R(x, y, z) \Big|_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dx dy = \\ &= \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \iint_D R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Подвійні інтеграли у правій частині рівності замінимо поверхневими інтегралами другого роду по зовнішній стороні поверхонь  $\sigma_2$  та  $\sigma_1$  відповідно, враховуючи при цьому кути між нормаллю  $\vec{n}$  та віссю  $Oz$ . Дістанемо

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy.$$

Оскільки по стороні  $\sigma_3$ , яка перпендикулярна площині  $Oxy$ , виконується рівність  $\iint_{\sigma_3} R dx dy = 0$ , то

$$\begin{aligned} \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\sigma_2} R(x, y, z) dx dy + \iint_{\sigma_1} R(x, y, z) dx dy + \\ &+ \iint_{\sigma_3} R(x, y, z) dx dy = \oint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \end{aligned}$$

Отже,

$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy. \quad (2.40)$$

Аналогічно доводять формули

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz, \quad (2.41)$$

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{\sigma} Q(x, y, z) dx dz. \quad (2.42)$$

Додавши почленно рівності (2.40) — (2.42), дістанемо формулу Остроградського—Гаусса.



*Зауваження.*

1. Формулу Остроградського—Гаусса зручно використовувати для обчислення поверхневих інтегралів по замкнених поверхнях.
2. Формула Остроградського—Гаусса справджується і для випадку, коли область  $G$  можна розбити на скінченну кількість областей розглянутого вигляду.

#### 4.6. Формула Стокса

Формула Стокса встановлює зв'язок між поверхневим і криволінійним інтегралами.

##### Теорема 3

Якщо функції  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в точках орієнтовної поверхні  $\sigma$ , то справджується формула Стокса

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz = \\ = \oint_L P dx + Q dy + R dz, \end{aligned} \quad (2.42')$$

де  $L$  — межа поверхні  $\sigma$  й інтегрування вздовж кривої  $L$  проводиться у додатному напрямку стосовно обраної сторони поверхні  $\sigma$ , тобто зі сторони нормалі, що відповідає обраній стороні, обхід контуру  $L$  відбувається проти годинникової стрілки (рис. 2.64).



*Зауваження.*

1. Формула Стокса дає змогу обчислювати криволінійні інтеграли другого роду по замкнених контурах за допомогою поверхневих інтегралів.
2. Із формули Стокса випливає, що якщо виконуються рівності

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

то криволінійний інтеграл по довільному замкненому контуру  $L$  дорівнює нулю:

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

У цьому разі криволінійний інтеграл не залежить від форми шляху інтегрування.

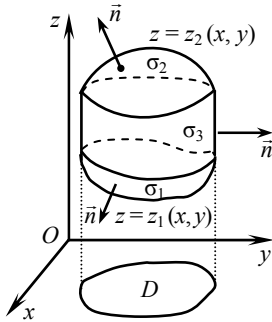


Рис. 2.63

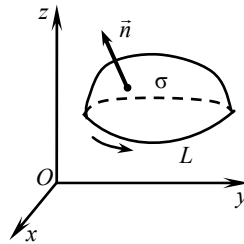


Рис. 2.64

#### 4.7. Деякі застосування поверхневих інтегралів

1. Площу  $S_\sigma$  поверхні  $\sigma$  обчислюють за формулою

$$S_\sigma = \iint_\sigma d\sigma.$$

Порівняйте цю формулу з формулою (2.13).

2. Масу  $m$  поверхні  $\sigma$ , у кожній точці якої задано поверхневу густину  $\gamma(x, y, z)$ , обчислюють за формулою

$$m = \iint_\sigma \gamma(x, y, z) d\sigma.$$

5. Координати  $x_c, y_c, z_c$  центра маси поверхні  $\sigma$  визначають за формулами

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{m} \iint_\sigma x \gamma(x, y, z) d\sigma, & y_c &= \frac{1}{m} \iint_\sigma y \gamma(x, y, z) d\sigma, \\ z_c &= \frac{1}{m} \iint_\sigma z \gamma(x, y, z) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.43)$$

## Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду  $I = \iint_{\sigma} (x - 2z) d\sigma$  по частині площини  $x + y + z = 1$ , розміщеній у першому октанті (рис. 2.65).

*Розв'язання.* Поверхню  $\sigma$  задано рівнянням  $z = 1 - x - y$ , де функція  $z$  і її частинні похідні  $z'_x = -1$ ,  $z'_y = -1$  неперервні в обмеженій замкненій області  $D$  — проекції поверхні  $\sigma$  на площину  $Oxy$ . Тому заданий інтеграл існує. Обчислимо його за формулою (2.38):

$$\begin{aligned} I &= \iint_D (x - 2(1 - x - y)) \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \iint_D (-2 + 3x + 2y) dx dy = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-2 + 3x + 2y) dy = \sqrt{3} \int_0^1 (-2y + 3xy + y^2) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \sqrt{3} \int_0^1 (5x - 2 - 3x^2 + (1-x)^2) dx = \sqrt{3} \left( \frac{5}{2} x^2 - 2x - x^3 - \frac{1}{3} (1-x)^3 \right) \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

2. Обчисліть поверхневий інтеграл першого роду  $I = \iint_{\sigma} z(x + 2y) d\sigma$ , де  $\sigma$  — частина поверхні  $z = \sqrt{1 - x^2}$ , яка обмежена площинами  $y = 0$  та  $y = 3$  (рис. 2.66).

*Розв'язання.* Проекція заданої поверхні на площину  $Oxy$  — прямокутник:  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 3$  (рис. 2.67). Знайдемо частинні похідні

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad z'_y = 0,$$

тоді

$$d\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx dy = \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Тепер обчислимо поверхневий інтеграл

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} z(x + 2y) d\sigma = \iint_D \sqrt{1-x^2} (x + 2y) \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2}} = \iint_D (x + 2y) dx dy = \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_0^3 (x + 2y) dy = \int_{-1}^1 (xy + y^2) \Big|_0^3 dx = \int_{-1}^1 (3x + 9) dx = \left( \frac{3}{2} x^2 + 9x \right) \Big|_{-1}^1 = 18. \end{aligned}$$



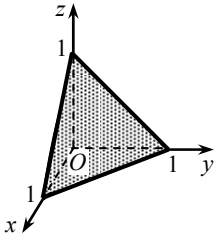


Рис. 2.65

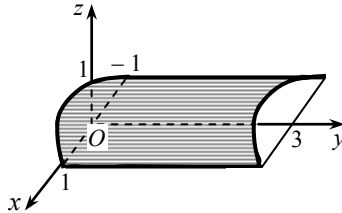


Рис. 2.66

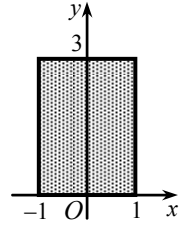


Рис. 2.67

3. Обчисліть координати центра маси півсфери  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  (рис. 2.68), якщо в кожній її точці поверхнева густина чисельно дорівнює відстані цієї точки до осі  $Oz$ .

*Розв'язання.* За умовою задачі поверхнева густина в точці  $(x, y, z)$  задається формулою  $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Із симетричності півсфери відносно осі  $Oz$  та функції  $\gamma(x, y)$  відносно точки  $(0, 0)$  випливає, що центр маси лежить на осі  $Oz$ . Отже,  $x_c = y_c = 0$ . Координату  $z_c$  визначимо за формулою (2.43).

Перетворимо елемент  $d\sigma$ . Оскільки

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

то

$$1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}$$

і

$$d\sigma = \frac{R dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Враховуючи, що проекція поверхні на площину  $Oxy$  є круг радіуса  $R$ , обмежений колом  $x^2 + y^2 = R^2$ , обчислення проводимо в полярній системі координат. Маємо

$$\begin{aligned} m &= R \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho = 2\pi R \int_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \rho = R \sin t, \\ d\rho = R \cos t dt, \\ 0 \leq t \leq \pi/2 \end{array} \right| = 2\pi R \int_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t \cdot R \cos t dt}{R \cos t} = 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \end{aligned}$$

$$= \pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \pi R^3 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 R^3}{2};$$

$$\iint_{\sigma} z \gamma d\sigma = R \iint_{D_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{2\pi R^4}{3}.$$

Отже,

$$z_c = \frac{\frac{2\pi R^4}{3}}{\frac{\pi^2 R^3}{2}} = \frac{4R}{3\pi}.$$

4. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} xdydz + zdx dz + 3dxdy$ , де  $\sigma$  — верхня сторона частини площини  $2x - 3y + 3z - 6 = 0$  ( $x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0$ ).

*Розв'язання.* На рис. 2.69 зображено задану поверхню  $\sigma$  — частину площини. Нормаль  $\vec{n}$ , що відповідає верхній стороні поверхні, утворює з осями  $Ox$  та  $Oz$  гострі кути, а з віссю  $Oy$  — тупий кут. Справді, нормаль  $\vec{n} = \{2; -3; 3\}$  має такі напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{22}} > 0, \quad \cos \beta = \frac{-3}{\sqrt{22}} < 0, \quad \cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{22}} > 0.$$

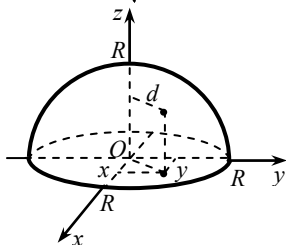


Рис. 2.68

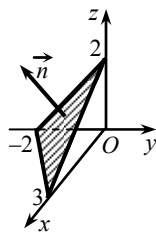


Рис. 2.69

Тому поверхневий інтеграл зводимо до суми трьох подвійних інтегралів по областях, зображених на рис. 2.70, перший і третій з яких беремо зі знаком «+», а другий — зі знаком «-».

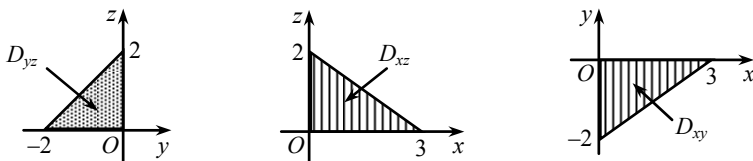


Рис. 2.70

Отже, маємо

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\sigma} xdydz + zdx dz + 3dxdy = \iint_{D_{yz}} xdydz - \iint_{D_{xz}} zdx dz + \iint_{D_{xy}} 3dxdy = \\
 &= \int_{-2}^0 dy \int_0^{y+2} \frac{6+3y-3z}{2} dz - \int_0^3 dx \int_0^{\frac{6-2x}{3}} z dz + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \\
 &= \int_{-2}^0 \left( 3y+3+\frac{3}{4}y^2 \right) dy - \int_0^3 \frac{(6-2x)^2}{18} dx + 9 = -4-2+9 = 3.
 \end{aligned}$$

5. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду  $\iint_{\sigma} z dxdy$ , якщо  $\sigma$  — зовнішня сторона сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  (рис. 2.71).

*Розв'язання.* Верхня і нижня півсфери проектується на площину  $Oxy$  в одну й ту саму область — круг, обмежений колом  $x^2 + y^2 = R^2$ . Тому розіб'ємо поверхню  $\sigma$  на частини  $\sigma_1$  та  $\sigma_2$ , де  $\sigma_1$  — верхня півсфера  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , а  $\sigma_2$  — нижня півсфера  $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

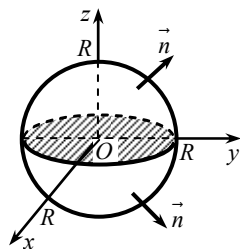


Рис. 2.71

Отже,  $\iint_{\sigma} z dxdy = \iint_{\sigma_1} z dxdy + \iint_{\sigma_2} z dxdy$ . Зведемо

кожен з інтегралів до подвійного, враховуючи, що нормальний вектор по обраній стороні верхньої півсфери утворює з віссю  $Oz$  гострий кут, а з нижньою півсферою — тупий кут. Отже,

$$\begin{aligned}
 \iint_{\sigma_1} z dxdy &= + \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy, \\
 \iint_{\sigma_2} z dxdy &= - \iint_{D_{xy}} -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy.
 \end{aligned}$$


Тоді

$$\iint_{\sigma} z dxdy = 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = I.$$

Тепер перейдемо до полярних координат, дістанемо

$$I = \iint_{\sigma} z dx dy = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - \rho^2} \frac{d(R^2 - \rho^2)}{-2} = -\frac{4}{3} \pi \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} \Big|_0^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

 **Зауваження.** Звичайно цей приклад простіше розв'язати за формулою Остроградського—Гаусса, дістанемо

$$\iint_{\sigma} z dx dy = \iiint_V dx dy dz = V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

**6.** Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду  $\iint_{\sigma} 2x dy dz - y dx dz$ , де  $\sigma$  — зовнішня сторона частини поверхні циліндра  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  (рис. 2.72).

**Розв'язання.** Розглянемо заданий інтеграл як суму двох інтегралів  $I = I_1 + I_2$ . Для обчислення поверхневого інтеграла  $I_1 = \iint_{\sigma} 2x dy dz$  спроекуємо поверхню  $\sigma$  на площину  $Oyz$ . Дістанемо прямокутник  $\sigma_{yz} : 0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  (рис. 2.73). Тепер рівняння циліндра розв'яжемо відносно  $x$ :  $x = \sqrt{1 - y^2}$  (тут враховано умову  $x \geq 0$ ). Оскільки вектор нормалі  $\vec{n}$  у довільній точці обраної сторони поверхні  $\sigma$  утворює з віссю  $Ox$  гострий кут, то відповідний подвійний інтеграл беремо зі знаком плюс. Маємо

$$I_1 = \iint_{\sigma} 2x dy dz = \iint_{\sigma_{yz}} 2\sqrt{1 - y^2} dy dz = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy \int_0^1 dz = 2 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sin t, \\ dy = \cos t dt, \\ 0 \leq t \leq \pi/2 \end{array} \right| = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \left( t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

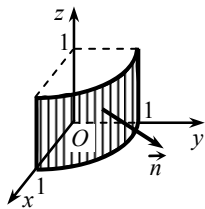


Рис. 2.72

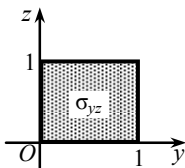


Рис. 2.73

Аналогічно обчислюємо інтеграл  $I_2 = -\iint_{\sigma} y dx dz$ . Для цього поверхню  $\sigma$  проєктуємо на площину  $Oxz$ , рівняння поверхні розв'язуємо відносно  $y$ :  $y = \sqrt{1-x^2}$  і переходимо до подвійного інтеграла (знак перед подвійним інтегралом той самий, що й перед поверхневим). Тоді

$$I_2 = -\iint_{\sigma} y dx dz = -\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_0^1 dz = -\frac{\pi}{4},$$

і остаточно дістаємо  $I = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ .

7. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint_{\sigma} x^2 dx dz + x dx dz + x z dx dy,$$

де  $\sigma$  — верхня сторона тієї частини поверхні  $y = x^2 + z^2$ , що лежить у першому октанті між площинами  $y = 0$  і  $y = 1$ .

*Розв'язання.* Зобразимо поверхню  $\sigma$ . Рівняння  $y = x^2 + z^2$  визначає параболоїд обертання навколо осі ординат. Та його частина, що лежить у першому октанті, перетинає координатну площину  $Oyz$  по параболі  $y = z^2$ , а площину  $Oxy$  — по параболі  $y = x^2$ . Із площиною  $y = 1$  параболоїд перетинається по колу  $x^2 + z^2 = 1$ , у першому октанті лежить чверть цього кола. Нарешті, якщо  $y = 0$ , то  $x^2 + z^2 = 0$  і це рівняння задовольняє тільки одна точка — початок координат. У результаті проведеного аналізу будуємо поверхню  $\sigma$  (рис. 2.74).

Зауважимо, що вектор нормалі  $\vec{n}$  у довільній точці обраної сторони поверхні  $\sigma$  утворює з осями  $Ox$  та  $Oz$  гострі кути, а з віссю  $Oy$  — тупий кут.

Обчислимо послідовно три інтеграли.

$$1) I_1 = \iint_{\sigma} x^2 dy dz.$$

З рівняння поверхні  $y = x^2 + z^2$  знаходимо  $x^2 = y - z^2$  і переходимо до подвійного інтеграла за проєкцією  $\sigma_{yz}$ . Оскільки нормальний вектор  $\vec{n}$  утворює з віссю  $Ox$  гострий кут (див. рис. 2.74), то перед подвійним інтегралом ставимо знак плюс:

$$I_1 = \iint_{\sigma_{yz}} (y - z^2) dy dz = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} (y - z^2) dz = \int_0^1 \left( yz - \frac{z^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{y}} dy =$$

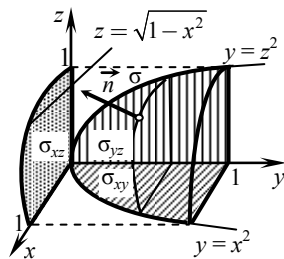


Рис. 2.74

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

$$2) I_2 = \iint_{\sigma} x dx dz.$$

У підінтегральний вираз змінна  $y$  не входить, тому переходимо безпосередньо до подвійного інтеграла за проекцією  $\sigma_{xz}$ . З рис. 2.74 видно, що нормаль  $\vec{n}$ , яка відповідає верхній стороні поверхні  $\sigma$ , утворює тупий кут з віссю  $Oy$ , тому подвійний інтеграл беремо зі знаком мінус:

$$\begin{aligned} I_2 &= - \iint_{\sigma_{xz}} x dx dz = - \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz = - \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(1-x^2)^3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$3) I_3 = \iint_{\sigma_{xy}} xz dx dy.$$

З рівняння поверхні знаходимо  $z = \pm \sqrt{y-x^2}$ , але перед коренем беремо знак плюс, тому що в першому октанті  $z \geq 0$ , і переходимо до подвійного інтеграла за проекцією  $\sigma_{xy}$ , взявши інтеграл зі знаком плюс (нормаль  $\vec{n}$  утворює гострий кут з віссю  $Oz$ ):

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\sigma_{xy}} x \sqrt{y-x^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} x \sqrt{y-x^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} \sqrt{y-x^2} d(y-x^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} \sqrt{(y-x^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{y^3} dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{15} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15} = \frac{1}{15}.$$

**8.** Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \oiint_{\sigma} x dy dz + z dx dz + 3 dx dy,$$

де  $\sigma$  — зовнішня сторона піраміди, обмеженої площинами  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$  та  $2x-3y+3z-6=0$  (рис. 2.69).

*Розв'язання.* Оскільки поверхня замкнена, то застосуємо формулу Остроградського—Гаусса. Маємо

$$P = x, \quad Q = z, \quad R = 3; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Тоді

$$I = \iiint_G (1+0+0) dx dy dz = V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

9. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду

$$I = \iint_{\sigma} (x + 3z) dy dz - 2y dx dz + (z - y) dx dy,$$

де  $\sigma$  — зовнішня сторона частини конуса  $x^2 + y^2 = z^2$ , розміщеної між площинами  $z = 0$  та  $z = 1$  (рис. 2.75).

*Розв'язання.* Безпосередньо застосувати формулу Остроградського—Гаусса до даного інтеграла не можна. З іншого боку, обчислення інтеграла за допомогою проектування поверхні на координатні площини призводить до досить громіздких обчислень. Застосуємо такий прийом. Замкнемо поверхню  $\sigma$  кругом  $\sigma_1$  (частиною площини  $z = 1$ , розміщеної всередині конуса). Тоді

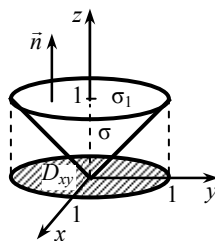


Рис. 2.75

$$I = I_1 - I_2,$$

де

$$I_1 = \iint_{\sigma + \sigma_1} (x + 3z) dy dz - 2y dx dz + (z - y) dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{\sigma_1} (x + 3z) dy dz - 2y dx dz + (z - y) dx dy.$$

Оскільки

$$P = x + 3z, \quad Q = -2y, \quad R = z - y; \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1 - 2 + 1 = 0,$$

то  $I_1 = 0$  і тому  $I = -I_2$ , тобто шуканий інтеграл зводиться до поверхневого інтеграла по кругу  $\sigma_1$ . Оскільки проекції цього круга на координатні площини  $Oxz$  та  $Oyz$  відрізки, то  $\iint_{\sigma_1} (x + 3z) dy dz = 0$  та  $I_2 = \iint_{\sigma_1} 2y dx dz = 0$ .

Отже,

$$I = -I_2 = -\iint_{\sigma_1} (z - y) dx dy = -\iint_{D_{xy}} (1 - y) dx dy.$$

Знак перед подвійним інтегралом не змінено, оскільки кут між нормальним вектором  $\vec{n}$  та віссю  $Oz$  дорівнює нулю ( $\cos \gamma = 1 > 0$ ).

Перейшовши у подвійному інтегралі до полярних координат, дістанемо

$$I = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1 - \rho \sin \varphi) \rho d\rho = - \int_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^1 d\varphi =$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \sin \varphi \right) d\varphi = - \left( \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{3} \cos \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -\pi.$$

#### Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть поверхневі інтеграли першого роду по вказаній поверхні.

1.  $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$ , якщо  $\sigma$  — напівсфера  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ .

2.  $\iint_{\sigma} (x^2 + 3y^2 + z^2 + 5) d\sigma$ , якщо  $\sigma$  — частина конуса, розміщена між площинами  $y = 0$  та  $y = 2$ .

3.  $\iint_{\sigma} (x^2 + (y^2 + z^2)^2) d\sigma$ , якщо  $\sigma$  — частина площини  $x + y + z = 2$ , вирізана циліндром  $y^2 + z^2 = 1$ .

4.  $\iint_{\sigma} (2x + 3y + 5z) d\sigma$ , якщо  $\sigma$  — частина площини  $2x + 3y + 5z = 30$ , розміщена у першому октанті.

Обчисліть поверхневі інтеграли другого роду по вказаній поверхні.

5.  $\iint_{\sigma} (y^2 + z^2) dx dy$ , якщо  $\sigma$  — зовнішня сторона частини циліндра  $z = \sqrt{9 - x^2}$ , розміщеної між площинами  $y = 0$  та  $y = 2$ .

6.  $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy$ , якщо  $\sigma$  — зовнішня сторона частини напівсфери  $y = \sqrt{1 - x^2 - z^2}$ , вирізаної конусом  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$ .

7.  $\iint_{\sigma} x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$ , якщо  $\sigma$  — зовнішня сторона частини сфери, розміщеної у першому октанті.



8.  $\iint_{\sigma} z dx dy - y dy dz$ , якщо  $\sigma$  — трикутник, утворений перетином площини  $6x - 3y + 2z = 6$  з координатними площинами, причому нормаль до обраної сторони утворює з віссю  $Oz$  гострий кут.

9.  $\iint_{\sigma} x dy dz + y dx dz + z dx dy$ , якщо  $\sigma$  — зовнішня сторона сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ .

10. Обчисліть координати центра маси однорідної поверхні  $2z = 4 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ).

### Відповіді

1.  $2\pi R^4$ . 2.  $52\sqrt{2}\pi$ . 3.  $29\sqrt{3}\pi/6$ . 4.  $450\sqrt{14}$ . 5. 88. 6.  $\pi/2$ . 7.  $3\pi R^4/8$ . 8. 3. 9.  $4\pi R^3$ . 10.  $(0; 0; (307 - 15\sqrt{5})/310)$ .

### Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Обчисліть поверхневі інтеграли першого роду по поверхні  $G$ .

№	Інтеграл	Рівняння поверхні $G$	Додаткові умови
4.1.1	$\iint_G (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$	Поверхня $G$ обмежена площинами $z = 0$ , $z = 2$
4.1.2	$\iint_G y dq$	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	
4.1.3	$\iint_G xyz dq$	$x + y + z = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.4	$\iint_G (3z + 6x + 4y) dq$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.5	$\iint_G \sqrt{16 - x^2 - y^2} dq$	$z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$	
4.1.6	$\iint_G (x^2 + y^2) dq$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4$	$z \geq 0$
4.1.7	$\iint_G x^2 z^2 dq$	$y = \sqrt{25 - x^2 - z^2}$	
4.1.8	$\iint_G \sqrt{y^2 + z^2} dq$	$\frac{z^2}{16} + \frac{y^2}{9} - x^2 = 0$	Поверхня $G$ обмежена площинами $x = 0$ , $x = 1$

№	Інтеграл	Рівняння поверхні $G$	Додаткові умови
4.1.9	$\iint_G \frac{dq}{x^2 + y^2 + z^2}$	$x^2 + z^2 = 16$	Поверхня $G$ обмежена площинами $y = 0$ , $y = 2$
4.1.10	$\iint_G (x^2 + z^2) dq$	$y = 1 - x^2 - z^2$	$y \geq 0$
4.1.11	$\iint_G (x^2 + y^2 + z^2) dq$	$y = \sqrt{x^2 + z^2}$	Поверхня $G$ обмежена площинами $y = 0$ , $y = 4$
4.1.12	$\iint_G x dq$	$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$	
4.1.13	$\iint_G y^2 z dq$	$x + 2y + z = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.14	$\iint_G (z + 2x + 3y) dq$	$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.15	$\iint_G \sqrt{25 - x^2 - z^2} dq$	$y = -\sqrt{25 - x^2 - z^2}$	
4.1.16	$\iint_G (y^2 + z^2) dq$	$x^2 + y^2 + z^2 = 36$	$x \geq 0$
4.1.17	$\iint_G x^2 y^2 dq$	$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$	
4.1.18	$\iint_G \sqrt{x^2 + y^2} dq$	$x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 0$	Поверхня $G$ обмежена площинами $z = 0$ , $z = 1$
4.1.19	$\iint_G \frac{dq}{x^2 + y^2 + z^2}$	$y^2 + z^2 = 36$	Поверхня $G$ обмежена площинами $x = 0$ , $x = 1$
4.1.20	$\iint_G (x^2 + y^2) dq$	$z = 1 - x^2 - y^2$	$z \geq 0$
4.1.21	$\iint_G (x^2 + y^2 + z^2) dq$	$x = \sqrt{y^2 + z^2}$	Поверхня $G$ обмежена площинами $x = 0$ , $x = 3$
4.1.22	$\iint_G y dq$	$x^2 + y^2 + z^2 = 25$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.23	$\iint_G x^2 z dq$	$2x + 3y + z = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті

№	Інтеграл	Рівняння поверхні $G$	Додаткові умови
4.1.24	$\iint_G (z + 3x + 2y) dq$	$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$	Поверхня $G$ лежить у першому октанті
4.1.25	$\iint_G \sqrt{4 - y^2 - z^2} dq$	$x = -\sqrt{4 - y^2 - z^2}$	
4.1.26	$\iint_G (x^2 + z^2) dq$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16$	$y \geq 0$
4.1.27	$\iint_G y^2 z^2 dq$	$x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$	
4.1.28	$\iint_G \sqrt{x^2 + z^2} dq$	$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 0$	Поверхня $G$ обмежена площинами $y = 0$ , $y = 2$
4.1.29	$\iint_G \frac{dq}{x^2 + y^2 + z^2}$	$x^2 + y^2 = 25$	Поверхня $G$ обмежена площинами $z = 0$ , $z = 3$
4.1.30	$\iint_G (y^2 + z^2) dq$	$x = 1 - y^2 - z^2$	$x \geq 0$

4.2. Обчисліть поверхневий інтеграл другого роду  $I = \iint_{\sigma} Pdydz + Qdxz + Rxdy$ , де  $\sigma$  — верхня сторона частини площини  $\alpha$  (трикутника), яка обмежена координатними площинами.

№	$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$	Рівняння площини $\alpha$
4.2.1	$P = x - y, Q = 2, R = 0$	$2x + y + 2z = 2$
4.2.2	$P = 2x + 1, Q = 0, R = z$	$2x - 6y + 3z = 6$
4.2.3	$P = 0, Q = y + x, R = 3z$	$2x + 2y - z = 2$
4.2.4	$P = 1 + 2y, Q = x, R = z$	$3x - 6y + 2z = 6$
4.2.5	$P = x, Q = y, R = z$	$2x + 2y - z = 2$
4.2.6	$P = -x, Q = 4, R = 2z$	$3x - 2y + 6z = 6$
4.2.7	$P = x + 2z, Q = 1, R = z - y$	$2x + y - 4z = 4$

№	$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$	Рівняння площини $\alpha$
4.2.8	$P = x - 2y, Q = 0, R = z + 1$	$3x + 2y - 6z = 6$
4.2.9	$P = 2, Q = y, R = z + 3$	$6x - 4y + 3z = 12$
4.2.10	$P = x, Q = y + 1, R = -2$	$6x + 3y + 4z = 12$
4.2.11	$P = 2x - y, Q = 3, R = 0$	$4x - 6y + 3z = 12$
4.2.12	$P = z - y, Q = 2y, R = 3z - 1$	$6x - 4y - 3z = 12$
4.2.13	$P = x - z, Q = y, R = 3$	$10x - 4y + 5z = 20$
4.2.14	$P = 2x + 1, Q = y - 2, R = 1$	$12x - 20y + 15z = 60$
4.2.15	$P = 0, Q = y + 3, R = z$	$3x + 4y + 6z = 12$
4.2.16	$P = x + 2y, Q = z, R = x$	$15x - 10y + 6z = 30$
4.2.17	$P = 2x - 1, Q = 5, R = z$	$10x - 4y - 5z = 20$
4.2.18	$P = 0, Q = y + x, R = 1$	$6x - 4y - 3z = 12$
4.2.19	$P = x + 2, Q = y - 1, R = 0$	$4x - 6y + 3z = 12$
4.2.20	$P = -x - y, Q = 1, R = z$	$20x + 12y - 15z = 60$
4.2.21	$P = 2, Q = y, R = -z$	$15x - 6y + 10z = 30$
4.2.22	$P = x, Q = y, R = 1$	$6x + 4y - 3z = 12$
4.2.23	$P = 1 - y, Q = x, R = z$	$10x + 5y + 4z = 20$
4.2.24	$P = z, Q = x, R = y + z$	$20x + 4y - 5z = 20$
4.2.25	$P = y, Q = x, R = z$	$2x - 4y - z = 4$
4.2.26	$P = 3x - y, Q = 0, R = y$	$5x - 2y - 10z = 10$
4.2.27	$P = 0, Q = y + z, R = 2$	$2x - 4y + z = 4$
4.2.28	$P = x - z, Q = 4y, R = 0$	$15x + 3y + 5z = 15$
4.2.29	$P = x + 2, Q = -1, R = y$	$2x - 3y - 6z = 6$
4.2.30	$P = 1, Q = y, R = z - x$	$15x + 10y - 6z = 30$

## Тема 5. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

Скалярні та векторні поля. Градієнт скалярного поля. Похідна за напрямом. Потік, циркуляція, дивергенція, ротор векторного поля. Формула Остроградського—Гаусса. Формула Стокса. Оператор Гамільтона. Безвихрове, потенціальне, соленоїдальне поля. Диференціальні операції першого та другого порядків.



**Література:** [2], [15, розділ 12, п. 12.5], [16, розділ 15, §9], [17, розділ 7, §23–27].

### Т.5 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 5.1. Основні поняття теорії поля

Полеом називають область  $G$  простору, в кожній точці якої визначено значення деякої величини. Якщо кожній точці  $M$  цієї області поставлено у відповідність скалярну величину  $u = f(M)$ , то кажуть, що в області  $G$  задано *скалярне* поле. Іншими словами, скалярне поле — це скалярна функція  $u = f(M)$  разом з її областю визначення. Якщо кожній точці  $M$  області простору відповідає деякий вектор  $\vec{F}(M)$ , то кажуть, що в області  $G$  задано *векторне* поле.

Задання скалярного поля в декартовій системі координат рівносильне заданню функції трьох змінних  $f(M) = f(x, y, z)$ , а векторного поля — трьох функцій трьох змінних:

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де  $P$ ,  $Q$  і  $R$  — проекції вектора  $\vec{F}$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно.

Приклади скалярних полів: температури тіла, атмосферного тиску, електричного потенціала тощо.

Приклади векторних полів: сили тяжіння, швидкостей часток рухомої рідини, щільності електричного струму тощо.

Якщо скалярна функція  $u(M)$  залежить лише від двох змінних, наприклад  $x$  та  $y$ , то відповідне скалярне поле  $u(x, y)$  називають *плоским*.

Якщо в обраній системі координат одна з проекцій вектора  $\vec{F}$  дорівнює нулю, а дві інші — функції двох змінних, то векторне поле називають *плоским*.

Векторне поле називають *однорідним*, якщо  $\vec{F}(M)$  — сталий вектор. Наприклад, поле тяжіння є однорідним:  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = -mg$  — сталі ( $g$  — прискорення сили тяжіння,  $m$  — маса точки).

Якщо функція  $u(M)$  (або вектор  $\vec{F}(M)$ ) не залежить від часу, то скалярне (векторне) поле називають *стаціонарним*. Поле, яке змінюється з плином часу, називають *нестационарним*. Наприклад, поле температури при охолодженні тіла.

Далі розглядатимемо лише стаціонарні поля. Причому вважатимемо, що функції  $u(x, y, z)$ ,  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  — неперервні разом із своїми частинними похідними в точках області  $G$ .

*Поверхнею рівня* скалярного поля називають множину всіх точок, в яких функція  $u(x, y, z)$  набуває сталого значення, тобто

$$u(x, y, z) = C \quad (C \text{ — стала}).$$

Наприклад, для скалярного поля, утвореного функцією  $u = x^2 + y^2 + z^2$ , поверхні рівня — концентричні сфери радіуса  $R = \sqrt{C}$  з центром у початку координат:  $x^2 + y^2 + z^2 = C$ , якщо  $C > 0$ , і точка  $(0; 0; 0)$ , якщо  $C = 0$ .

Зазначимо, що через кожну точку поля проходить тільки одна поверхня рівня.

Якщо скалярне поле є плоским, то рівність  $u(x, y) = C$  визначає *лінію рівня* скалярного поля, в точках якої функція  $u(x, y)$  зберігає стале значення.

## 5.2. Скалярне поле

### 5.2.1. Похідна за напрямом

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля  $u(M)$  в заданому напрямку.

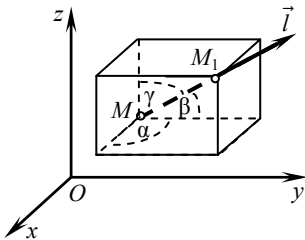


Рис. 2.76

Поняття похідної функції  $u = f(x, y, z)$  за напрямом розглянуто в [8] при вивченні функцій кількох змінних. Нагадаємо деякі означення. Нехай  $M(x, y, z)$  — точка простору, де задано скалярне поле  $u = u(x, y, z)$ , і  $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — одиничний вектор, який визначає певний напрям (тут  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — кути, які утворює вектор  $\vec{l}$  з осями координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  відповідно). Візьмемо

на прямій, яка проходить через точку  $M$  у напрямку вектора  $\vec{l}$ , точку  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$  (рис. 2.76). Позначимо довжину  $MM_1$  через  $\Delta l$ . Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Похідною функції  $u(x, y, z)$  за напрямом вектора  $\vec{l}$  називають границю відношення  $\frac{\Delta u}{\Delta l}$  при  $\Delta l \rightarrow 0$ , якщо вона існує, і позначають  $\frac{\partial u}{\partial l}$ , тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}.$$

Похідну функції  $u(x, y, z)$  у напрямку вектора  $\vec{l}$  обчислюють за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.44)$$

Нагадаємо, що напрямні косинуси довільного вектора  $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$  визначають за формулами

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

де  $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$  — довжина вектора  $\vec{a}$ .

У випадку плоского поля  $u = u(x, y)$  похідну за напрямом вектора  $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta\}$  ( $\alpha + \beta = 90^\circ$ ) обчислюють за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta. \quad (2.45)$$

Похідна за напрямом характеризує швидкість зміни скалярного поля  $u(M)$  в заданому напрямку. Якщо  $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$ , то функція  $u(x, y, z)$  зростає у напрямку  $\vec{l}$ , якщо  $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$ , то функція  $u(x, y, z)$  у напрямку  $\vec{l}$  спадає.

Величина  $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$  являє собою миттєву швидкість зміни функції  $u(x, y, z)$  у напрямку  $\vec{l}$ . Чим більше значення  $\left| \frac{\partial u}{\partial l} \right|$ , тим швидше змінюється функція  $u(x, y, z)$  у точці  $(x, y, z)$ .

## 5.2.2. Градієнт скалярного поля та його властивості

Градієнтом функції  $u = f(x, y, z)$  у точці  $M(x, y, z)$  називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції  $u(x, y, z)$ , обчислені в точці  $M$ , тобто

$$\text{grad } u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z} \vec{k},$$

або

$$\text{grad } u(M) = \left\{ \frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z} \right\}. \quad (2.46)$$

Оскільки  $\text{grad } u(M)$  є вектор, то кажуть, що скалярне поле  $u(M)$  породжує векторне поле його градієнта.

Між градієнтом і похідною за напрямом існує зв'язок у вигляді формули

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \text{grad } u \cdot \vec{l} = |\text{grad } u| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \varphi,$$

де  $\varphi$  — кут між градієнтом функції  $u(x, y, z)$  і напрямним вектором  $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  (рис. 2.77). З цієї формули випливає, що похідна

$\frac{\partial u}{\partial l}$  набуває найбільшого значення тоді, коли  $\cos \varphi = 1$ , тобто тоді, коли напрям вектора  $\vec{l}$  збігається з напрямом градієнта, при цьому найбільше значення похідної  $\frac{\partial u}{\partial l}$  дорівнює

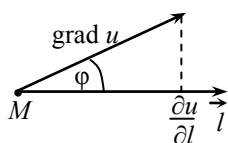


Рис. 2.77

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}. \quad (2.47)$$

Іншими словами, градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції, найбільша швидкість зміни функції  $u(x, y, z)$  визначається формулою (2.47).

У цьому полягає фізичний зміст градієнта.

Сформулюємо основні властивості градієнта функції.

1. Градієнт скалярного поля перпендикулярний до поверхні рівня (чи лінії рівня, якщо поле плоске), яка проходить через дану точку.



Справді, по довільному напрямку вздовж поверхні рівня  $u(x, y, z) = C$  виконується рівність  $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$  (у цьому разі приріст функції дорівнює нулю).

Тоді  $|\text{grad } u| \cdot |\vec{l}| \cdot \cos \varphi = 0$ , звідки  $\cos \varphi = 0$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

2.  $\text{grad}(u + v) = \text{grad } u + \text{grad } v$ .

3.  $\text{grad}(Cu) = C \text{grad } u$ .

4.  $\text{grad}(uv) = u \text{grad } v + v \text{grad } u$ .

5.  $\text{grad}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \text{grad } u - u \text{grad } v}{v^2}$ .

6.  $\text{grad } f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad } u$ .

### 5.3. Векторне поле

Нехай векторне поле утворене вектором

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Основними характеристиками векторного поля слугують такі поняття: векторні лінії, потік вектора, дивергенція поля, циркуляція поля, ротор поля тощо.

#### 5.3.1. Векторні лінії

Для геометричної характеристики векторного поля використовують векторні лінії.

*Векторною лінією* поля  $\vec{F}(M)$  називають лінію, дотична до якої в кожній точці  $M$  має той самий напрям, що й вектор поля  $\vec{F}$  у цій точці (рис. 2.78).

Для конкретних полів це поняття має певний зміст. Так, у полі швидкостей рухомої рідини векторні лінії — це лінії, вздовж яких рухаються частинки рідини (лінії течії).

Сукупність усіх векторних ліній поля, які проходять через деяку замкнену криву, називають *векторною трубкою*.

Векторні лінії поля

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

визначають із системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}. \quad (2.48)$$

Справді, нехай  $AB$  — векторна лінія поля,  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  — радіус-вектор точки  $M$  (рис. 2.79). Тоді вектор  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  напрямлений вздовж дотичної до лінії  $AB$  у точці  $M$ . Оскільки вектори  $\vec{F}(M)$  та  $d\vec{r}$  колінеарні, то їхні координати пропорційні, тобто виконується умова (2.48).



Рис. 2.78

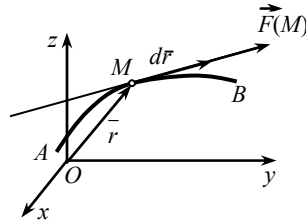


Рис. 2.79

### 5.3.2. Потік вектора через поверхню

Розглянемо поле швидкостей  $\vec{v}$  течії рідини. Виділимо в цьому полі деяку поверхню  $\sigma$ .

*Потоком рідини через поверхню  $\sigma$  називають кількість рідини, яка протікає через поверхню  $\sigma$  за одиницю часу.*

Припустимо, що швидкість течії стала, а поверхня  $\sigma$  — плоска. У цьому разі потік рідини дорівнює об'єму циліндричного тіла (на рис. 2.80 — похилої призми), тобто

$$\Pi = Sh,$$

де  $S$  — площа основи (поверхні  $\sigma$ ),  $h$  — висота похилої призми.

Нехай за одиницю часу кожна частинка переміщується на вектор  $\vec{v}$ . Тоді висота призми чисельно дорівнює проекції вектора швидкості  $\vec{v}$  на одиничний вектор нормалі  $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  до поверхні  $\sigma$ :

$$h = \text{пр}_{\vec{n}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} = \vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Отже,

$$\Pi = (\vec{v} \cdot \vec{n})S.$$

Нехай тепер швидкість  $\vec{v}$  змінюється неперервно, а  $\sigma$  — гладка поверхня. Оберемо певну сторону цієї поверхні. Нехай  $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  — одиничний вектор нормалі до розглядуваної сторони поверхні  $\sigma$ .

Розіб'ємо поверхню  $\sigma$  на елементарні частини  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$  з площами  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  відповідно. Візьмемо на кожній поверхні  $\sigma_k$  точку  $M_k$  і обчислимо значення вектора швидкості  $\vec{v}$  у цій точці ( $k=1, 2, \dots, n$ ). Вважатимемо кожен елементарну поверхню  $\sigma_k$  плоскою, а вектор швидкості сталим і рівним  $\vec{v}(M_k)$  (рис. 2.81). При таких припущеннях потік рідини через поверхню  $\sigma_k$  виражається наближеною формулою

$$\Pi_k \approx (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \Delta\sigma_k.$$

Тоді

$$\Pi \approx \sum_{k=1}^n (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \Delta\sigma_k \quad (2.49)$$

загальна кількість рідини, яка протікає через всю поверхню  $\sigma$  за одиницю часу.

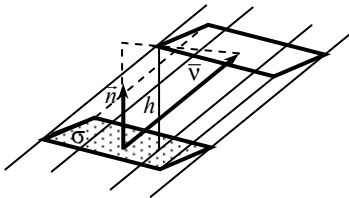


Рис. 2.80

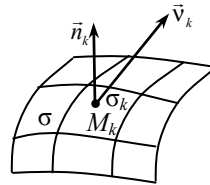


Рис. 2.81

Точне значення шуканої кількості рідини дістанемо, взявши границю суми (2.49) за умови стягування кожної елементарної поверхні у точку, тобто при  $\lambda \rightarrow 0$ , де  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$  — найбільший з діаметрів  $d_k$  елементарних областей  $\sigma_k$  поверхні  $\sigma$ :

$$\Pi = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (\vec{v}(M_k) \cdot \vec{n}(M_k)) \Delta\sigma_k = \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma. \quad (2.50)$$

Незалежно від фізичного змісту векторного поля  $\vec{F}(M)$  одержаний за формулою (2.50) інтеграл називають *потокм векторного поля*.

Потоком вектора  $\vec{F}(M)$  через поверхню  $\sigma$  називають інтеграл по поверхні від скалярного добутку вектора поля на одиничний вектор нормалі до поверхні, тобто

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

Інші форми запису потоку векторного поля.

1. Враховуючи форми запису скалярного добутку:

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = |\vec{n}| \cdot \text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} = \text{пр}_{\vec{n}} \vec{F} = F_n,$$

формулу (2.50) ще записують у вигляді

$$\dot{I} = \iint_{\sigma} F_n d\sigma.$$

2. Оскільки  $\vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ ,  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ , де  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$  і  $R(x, y, z)$  — проекції вектора  $\vec{F}$  на координатні осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$  відповідно, то потік вектора  $\vec{F}$  можна подати у вигляді

$$\Pi = \iint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma,$$

або

$$\dot{I} = \iint_{\sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy. \quad (2.51)$$

Найбільш цікавим є випадок, коли поверхня  $\sigma$  замкнена і обмежує деякий об'єм  $V$ . Тоді потік записують у вигляді

$$\Pi = \oint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma. \quad (2.52)$$

При цьому за напрям вектора  $\vec{n}$  беруть напрям зовнішньої нормалі. Якщо векторне поле  $\vec{F}$  є поле швидкостей рухомої рідини, то величина потоку через замкнену поверхню дорівнює різниці між кількістю рідини, яка витікає з області  $V$ , та кількістю рідини, яка втікає в цю область за одиницю часу (в точках поверхні  $\sigma$ , де векторні лінії виходять з об'єму  $V$ , зовнішня нормаль утворює з вектором  $\vec{F}$  гострий кут, отже,  $\vec{F} \cdot \vec{n} > 0$ ; в точках поверхні  $\sigma$ , де векторні лінії входять в об'єм  $V$ , зовнішня нормаль утворює з вектором  $\vec{F}$  тупий кут і  $\vec{F} \cdot \vec{n} < 0$ ).

Якщо  $\Pi > 0$ , то з області  $V$  витікає більше рідини, ніж в неї втікає. У цьому разі всередині області є додаткові джерела.

Якщо  $\Pi < 0$ , то в область  $V$  втікає більше рідини, ніж з неї витікає. У цьому разі всередині області є стоки, які поглинають надлишки рідини.

Якщо  $\Pi = 0$ , то з області  $V$  витікає стільки ж рідини, скільки в неї втікає. У цьому разі або всередині області немає ні джерел, ні стоків, або вони компенсують одне одного.

### 5.3.3. Дивергенція поля. Формула Остроградського—Гаусса у векторній формі

Дивергенція векторного поля характеризує розподіл і інтенсивність джерел і стоків поля.

Нехай задано векторне поле

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k},$$

де  $P, Q$  і  $R$  — неперервно диференційовні функції у відповідних областях.

Дивергенцією (або розходженням) векторного поля  $\vec{F}(M)$  називають число

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}, \quad (2.53)$$

де частинні похідні обчислені в точці  $M$ .

Властивості дивергенції.

1. Якщо  $\vec{F}$  сталий вектор, то  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ .

2.  $\operatorname{div}(C\vec{F}) = C \operatorname{div} \vec{F}$ .

3.  $\operatorname{div}(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) = \operatorname{div} \vec{F}_1 + \operatorname{div} \vec{F}_2$ .

4. Якщо  $u$  — скалярна функція, то  $\operatorname{div}(u\vec{F}) = u \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \operatorname{grad} u$ .

Використовуючи поняття потоку і дивергенції векторного поля, формулу Остроградського—Гаусса у векторній формі записують так:

$$\boxed{\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dv}. \quad (2.54)$$

Формула Остроградського—Гаусса означає, що потік вектора  $\vec{F}$  через замкнену поверхню  $\sigma$  (в напрямку зовнішньої нормалі) дорівнює потрійному інтегралу від дивергенції вектора  $\vec{F}$  по об'єму  $V$ , обмеженому цією поверхнею.

Дамо інше означення дивергенції, яке рівносильне означенню (2.53). За теоремою про середнє значення для потрійного інтеграла в області  $V$  існує точка  $M_0$  така, що виконується рівність

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \cdot dv = V \cdot \operatorname{div} \vec{F}(M_0).$$

Тоді рівність (2.54) можна записати у вигляді

$$\iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = V \cdot \operatorname{div} \vec{F}(M_0),$$

звідки

$$\operatorname{div} \vec{F}(M_0) = \frac{1}{V} \oiint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

Нехай поверхня  $\sigma$  стягується у точку, тоді  $M_0 \rightarrow M$ ,  $V \rightarrow 0$  і

$$\operatorname{div} \vec{F}(M) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oiint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma.$$

*Дивергенцією (або розходженням) векторного поля  $\vec{F}$  у точці  $M$  називають границю відношення потоку поля через замкнену поверхню  $\sigma$ , яка охоплює точку  $M$ , за умови, що вся поверхня стягується у точку.*

Якщо  $\operatorname{div} \vec{F}(M) > 0$ , то точка  $M$  є джерелом, звідки рідина витікає; якщо  $\operatorname{div} \vec{F}(M) < 0$ , то точка  $M$  поглинає рідину; якщо всередині об'єму  $V$  немає ні джерел, ні стоків, то  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ .

Якщо  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , то векторне поле називають *соленоїдальним*, або *трубчастим*.

### 5.3.4. Циркуляція векторного поля. Ротор вектора. Формула Стокса у векторній формі

Нехай у деякій області  $G$  задано неперервне векторне поле

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

і замкнений орієнтовний контур  $L$ .

Нехай  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  — радіус-вектор точки  $M$ , яка належить контуру  $L$ . Відомо, що напрям вектора  $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$  збігається з напрямом дотичної  $\tau$  в додатному напрямку обходу контура  $L$  (рис. 2.82), причому  $|d\vec{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ .

Циркуляцією векторного поля  $\vec{F}(M)$  вздовж замкненої орієнтовної кривої  $L$  називають криволінійний інтеграл другого роду

$$\Pi = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (2.55)$$

*Фізичний зміст циркуляції.* Якщо замкнений контур  $L$  розміщений у силовому полі  $\vec{F}$ , то циркуляція — це робота сили  $\vec{F}(M)$  при переміщенні матеріальної точки вздовж контура  $L$ .

*Роторм* (або *вихором*) векторного поля

$$\vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

називають вектор

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.56)$$

Для запам'ятовування зручною є символічна форма формули (2.56)

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Формула Стокса у векторній формі має вигляд

$$\oint_L \vec{F} d\vec{r} = \iint_{\sigma} \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{F} d\sigma, \quad (2.57)$$

тобто циркуляція вектора вздовж замкненої орієнтовної кривої  $L$ , який обмежує деяку поверхню  $\sigma$ , дорівнює потоку вихора через цю поверхню (рис. 2.83) (інтегрування вздовж кривої  $L$  проводиться у додатному напрямку стосовно обраної сторони поверхні  $\sigma$ , тобто зі сторони нормалі, що відповідає обраній стороні, обхід контуру  $L$  відбувається проти годинникової стрілки).

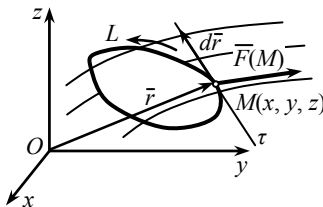


Рис. 2.82

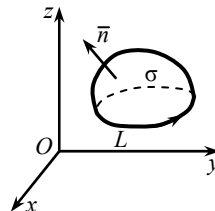


Рис. 2.83

З'ясуємо фізичний зміст ротора.

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі  $l$ , яка збігається з віссю  $Oz$ , з кутовою швидкістю  $\omega$  і  $M(r)$  — точка тіла, де

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Вектор кутової швидкості дорівнює  $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ , обчислимо вектор  $\vec{v}$  лінійної швидкості точки  $M$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{i} + x\omega\vec{j}.$$

Звідси

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

Отже, ротор поля швидкостей твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, однаковий у всіх точках поля, паралельний осі обертання і дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання.

### 5.3.5. Оператор Гамільтона. Диференціальні операції першого та другого порядків

Усі операції векторного аналізу можна виразити за допомогою оператора Гамільтона — символічного вектора  $\nabla$  (читається — набла), який визначається формулою

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Застосовуючи відомі операції множення вектора на скаляр, скалярного та векторного добутоків двох векторів, дістанемо диференціальні операції *першого порядку*:

- $\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} = \text{grad } u.$
- $\nabla \vec{F} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot (P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div } \vec{F}.$



$$3. \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot } \vec{F}.$$

Використовуючи відомі правила векторної алгебри і правила диференціювання, можна дістати інші формули, які використовують у теорії поля. Зокрема, похідну за напрямом вектора  $\vec{l} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  можна записати так:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \nabla u \cdot \vec{l} = (\vec{l} \cdot \nabla) u = (\vec{l} \cdot \nabla) \cdot u.$$

Диференціальні операції *другого порядку* дістають у результаті дворового застосування оператора Гамільтона.

Нехай задано скалярне поле  $u = u(x, y, z)$ . У цьому полі оператор  $\nabla$  породжує векторне поле

$$\nabla u = \text{grad } u.$$

У векторному полі визначені дві операції:

а)  $\nabla \cdot \nabla u = \text{div grad } u$  . б)  $\nabla \times \nabla u = \text{rot grad } u$  .

Причому перша операція призводить до скалярного поля, а друга — до векторного поля.



*Зауваження.* Визначені операції аналогічні операціям скалярного і векторного добутків, які можна утворити з двох векторів.

Нехай задано векторне поле  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ . Тоді оператор  $\nabla$  породжує :

а) скалярне поле  $\text{div } \vec{F}$ , в якому оператор  $\nabla$  породжує векторне поле  $\nabla(\text{div } \vec{F}) = \text{grad div } \vec{F}$ ;

б) векторне поле  $\text{rot } \vec{F}$ , від якого за допомогою оператора  $\nabla$  можна утворити:

$$\text{скалярне поле } \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = \text{div rot } \vec{F};$$

$$\text{векторне поле } \nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \text{rot rot } \vec{F}.$$

Отже, існує п'ять диференціальних операцій другого порядку:

$\text{div grad } u, \text{ rot grad } u, \text{ grad div } \vec{F}, \text{ div rot } \vec{F}, \text{ rot rot } \vec{F}$
--

Розглянемо ці операції.

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{div} \operatorname{grad} u &= \nabla(\nabla u) = (\nabla \cdot \nabla)u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \cdot u = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \end{aligned}$$

Тут  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа.

Оператор  $\Delta$  (дельта) відіграє важливу роль у математичній фізиці. Рівняння  $\Delta u = 0$  називають рівнянням Лапласа.

Скалярне поле  $u = u(x, y, z)$ , яке задовольняє рівняння Лапласа, називають *гармонічним*.

2.  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times (\nabla u) = (\nabla \times \nabla)u = 0$ , оскільки векторний добуток двох однакових (чи колінеарних) векторів дорівнює нулю (нуль-вектор).

Отже, поле градієнта є безвихровим.

3.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ , оскільки мішаний добуток трьох векторів, серед яких є два однакові, дорівнює нулю. Отже, *поле вихора* — *соленоїдальне*.

Операції  $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{F}$  та  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{F}$  застосовують рідко, тому їх не розглядаємо.

### 5.3.6. Деякі властивості векторних полів

#### Соленоїдальне поле

Векторне поле  $\vec{F}$  називають *соленоїдальним*, якщо в усіх його точках дивергенція дорівнює нулю, тобто  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ .

Властивості соленоїдального поля.

1. У соленоїдальному полі  $\vec{F}$  потік вектора через будь-яку замкнену поверхню дорівнює нулю. Отже, соленоїдальне поле не має ні джерел, ні стоків.

2. Соленоїдальне поле є полем ротора деякого векторного поля, тобто якщо  $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ , то існує таке поле  $\vec{B}$ , що  $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{F} = 0$ . Вектор  $\vec{B}$  називають векторним потенціалом поля  $\vec{F}$ .

3. У соленоїдальному полі  $\vec{F}$  потік вектора через поперечний переріз векторної трубки (сукупність векторних ліній, які проходять через межу  $L$ ) зберігає сталі значення.

## Потенціальне поле

Векторне поле  $\vec{F}$  називають *потенціальним*, якщо існує функція  $u(M)$  така, що

$$\text{grad } u = \vec{F}, \quad (2.58)$$

тобто векторне поле є градієнтом деякого скалярного поля.

Векторна рівність (2.58) рівносильна трьом скалярним рівностям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Існує інше рівносильне означення потенціального поля.

Векторне поле  $\vec{F}$  називають *потенціальним*, якщо для всіх точок поля

$$\boxed{\text{rot } \vec{F} = 0.}$$

Покажемо, що якщо векторне поле є градієнтом деякого скалярного поля, тобто  $\text{grad } u = \vec{F}$ , то  $\text{rot } \vec{F} = 0$ . Маємо

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = \text{rot grad } u &= \text{rot} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \right) \vec{i} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \vec{k} = 0. \end{aligned}$$

Сформулюємо властивості потенціального поля.

**1.** Циркуляція потенціального поля  $\vec{F}$  вздовж будь-якого замкненого контура в цьому полі дорівнює нулю.

**2.** У потенціальному полі  $\vec{F}$  криволінійний інтеграл  $\int_L P dx + Q dy + R dz$  вздовж довільної кривої  $L$  не залежить від форми кривої, а тільки від початкової та кінцевої точок кривої  $L$ .

Потенціал векторного поля можна визначити за формулою

$$u(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z Q(x, y, z) dz, \quad (2.59)$$

де  $(x_0, y_0, z_0)$  — координати фіксованої точки,  $(x, y, z)$  — координати довільної точки. При цьому зазначимо, що потенціал визначається з точністю до сталої, бо  $\text{grad}(u + C) = \text{grad } u$ .

### Гармонічне поле

Векторне поле  $\vec{F}$  називають *гармонічним*, або *лапласовим*, якщо воно одночасно є потенціальним і соленоїдальним, тобто якщо

$$\text{rot } \vec{F} = 0 \text{ і } \text{div } \vec{F} = 0.$$

Прикладом гармонічного поля є поле лінійних швидкостей стаціонарного безвихрового потоку рідини за відсутності у ньому джерел і стоків.

З умови потенціальності поля випливає, що його можна подати у вигляді  $\vec{F} = \text{grad } u$ , де  $u(x, y, z)$  — потенціал поля. Водночас поле є соленоїдальним, тому  $\text{div } \vec{F} = \text{div } \text{grad } u = \Delta u = 0$ , іншими словами, потенціал лапласового поля є гармонічною функцією, тобто є розв'язком рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

## Т.5 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Визначте найбільшу швидкість зростання скалярного поля  $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}$  у точці  $M(-1; 2; 2)$ .

*Розв'язання.* Величина найшвидшого зростання скалярного поля  $u$  у заданій точці дорівнює модулю градієнта поля, обчисленого в цій точці (див. (2.47)). Маємо

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}} \Big|_M = -\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}} \Big|_M = \frac{4}{5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{4z}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + 4z^2}} \Big|_M = \frac{8}{5},$$

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{1}{5} \sqrt{1+16+64} = \frac{9}{5}.$$

2. Знайдіть дивергенцію і ротор векторного поля

$$\vec{F} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} - z^2 \vec{k}.$$

*Розв'язання.* Маємо

$$P = x^2, \quad Q = y^2, \quad R = -z^2; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = -2z.$$

Тоді за формулою (2.53) дістаємо

$$\text{div } \vec{F} = 2x + 2y - 2z = 2(x + y - z).$$

Оскільки  $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ , то згідно з формулою (2.56)

$\text{rot } \vec{F} = 0$ , тобто задане поле є безвихровим.

3. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  через частину сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , розміщеної у першому октанті, в напрямку зовнішньої нормалі (рис. 2.84).

*Розв'язання. Перший спосіб.* Оскільки потік векторного поля через задану поверхню виражається поверхневим інтегралом (2.51), де  $P = x$ ,  $Q = y$  і  $R = z$ , то потрібно обчислити інтеграл  $\iint_{\sigma} xdydz + ydzdx + zdx dy$ .

Розглянемо його як суму трьох інтегралів  $I = I_1 + I_2 + I_3$ . Для обчислення  $I_1$  спроекуємо задану поверхню на площину  $Oxy$ . Дістанемо чверть круга  $D_{yz} : y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ . Рівняння сфери розв'яжемо відносно змінної  $x : x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}$ . Враховуючи, що нормаль  $\vec{n}$  до вказаної поверхні утворює з віссю  $Ox$  гострий кут, дістанемо

$$I_1 = \iint_{\sigma} xdydz = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 - y^2 - z^2} dydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{6}.$$

З огляду на симетрію векторного поля і поверхні  $\sigma$  доходимо висновку, що  $I_2 = I_3 = I_1 = \frac{\pi}{6}$ , тому  $\Pi = I_1 + I_2 + I_3 = 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ .

*Другий спосіб.* Оскільки  $\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  — одиничний вектор нормалі до сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (покажіть це самостійно), то

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x^2 + y^2 + z^2,$$

і тому

$$\Pi = \iint_{\sigma} (\vec{F} \cdot \vec{n}) d\sigma = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma.$$

Отже, потік поля  $\vec{F}$  дорівнює площі заданої поверхні — восьмій частини сфери  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , тобто  $\Pi = \frac{1}{8} \cdot 4\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$ .

**4.** Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + \vec{k}$  через повну поверхню конуса  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ , обмеженого знизу площиною  $z = 0$  (рис. 2.85), користуючись формулою Остроградського—Гаусса.

*Розв'язання.* Знайдемо дивергенцію векторного поля:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 2(x + y).$$

Використовуючи формули (2.52) — (2.54), обчислюємо потік заданого поля:

$$\begin{aligned} \Pi &= \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = 2 \iiint_G (x + y) dx dy dz = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi) dz = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\cos \varphi + \sin \varphi) \rho^2 \cdot z \Big|_0^{1-\rho} d\rho = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_0^1 \rho^2 (1-\rho) d\rho = 2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) \left( \frac{\rho^3}{3} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 d\varphi = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 0. \end{aligned}$$

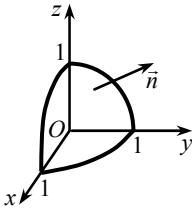


Рис. 2.84

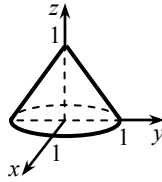


Рис. 2.85

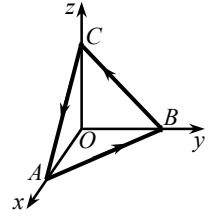


Рис. 2.86

5. Обчисліть циркуляцію векторного поля  $\vec{F} = xz\vec{i} + yx\vec{j} + zy\vec{k}$  вздовж лінії перетину площини  $x + y + z = 3$  з координатними площинами, використовуючи безпосереднє обчислення та формулу Стокса.

*Розв'язання. Перший спосіб* (безпосереднє обчислення).

$$\mathcal{C} = \oint_L xzdx + yx dy + zydz = I_1 + I_2 + I_3,$$

де  $I_1, I_2, I_3$  — інтеграли вздовж відрізків  $AB, BC$  і  $CA$  відповідно (рис. 2.86). Обчислимо інтеграл  $I_1$ . Під час руху вздовж відрізка  $AB$  від точки  $A$  до точки  $B$  змінна  $x$  змінюється від 3 до 0,  $y = 3 - x$ , а  $z = 0$ . Тоді

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{AB} xzdx + yx dy + zydz = \int_3^0 (3-x)xd(3-x) = \\ &= \int_0^3 (3-x)xdx = \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 4,5. \end{aligned}$$

Із симетричності умови задачі відносно змінних  $x, y$  та  $z$  випливає, що  $I_2 = I_3 = I_1 = 4,5$ , тому  $\mathcal{C} = 3 \cdot 4,5 = 13,5$ .

*Другий спосіб.* Обчислимо циркуляцію векторного поля за формулою Стокса. Для цього розглянемо верхню сторону площини  $\sigma$  (трикутник  $ABC$ ) і відповідний цій стороні додатний напрям  $ABCA$ . Маємо

$$P = xz, \quad Q = yx, \quad R = zy, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = z, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

Підставляючи ці значення у формулу Стокса (2.42') і користуючись формулою (2.55), дістаємо

$$\mathcal{C} = \oint_L xzdx + yx dy + zydz = \iint_{\sigma} ydx dy + zdz dy + xdz dx.$$

Виразимо поверхневий інтеграл через подвійні інтеграли по областях, які є проєкціями  $\Pi$  на координатні площини:

$$\Pi = \iint_{\Delta ABO} y dx dy + \iint_{\Delta BCO} z dy dz + \iint_{\Delta AOC} x dz dx,$$

де  $\Delta ABO, \Delta BCO, \Delta AOC$  — проєкції заданої площини відповідно на координатні площини  $Oxy, Oyz, Oxz$ . Маємо

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta ABO} y dx dy &= \int_0^3 y dy \int_0^{3-y} dx = \int_0^3 yx \Big|_0^{3-y} dy = \\ &= \int_0^3 (3y - y^2) dy = \left( \frac{3}{2} y^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 4,5. \end{aligned}$$

Аналогічно  $\iint_{\Delta BCO} z dy dz = \iint_{\Delta AOC} x dz dx = 4,5$ . Отже,  $\Pi = 3 \cdot 4,5 = 13,5$ .

**6.** Обчисліть циркуляцію вектора  $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$  вздовж кола  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$  в додатному напрямі.

*Розв'язання. Перший спосіб* (безпосереднє обчислення). Запишемо рівняння заданого кола  $L$  у параметричному вигляді:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} P &= -y = -\sin t, \quad Q = x = \cos t, \quad R = 1, \\ dx &= -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt, \quad dz = 0, \end{aligned}$$

то за означенням циркуляції (див. формулу (2.55)) дістаємо

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \oint_L (-y) dx + x dy + dz = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

*Другий спосіб* (за формулою Стокса). Поверхня  $\sigma$ , обмежена заданим колом, — круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , вона лежить у площині  $Oxy$ , отже, одночасно є проєкцією  $D$  поверхні на цю площину. За формулами (2.55) і (2.42') маємо:

$$\Pi = \iint_{\sigma} (1 - (-1)) dx dy = 2 \iint_D dx dy = 2S_{\text{круга}} = 2\pi.$$

**7.** Доведіть, що векторне поле

$$\vec{F} = (3x^2 y^2 + 2xz^3) \vec{i} + (2yx^3 - z^2) \vec{j} + (3x^2 z^2 - 2yz + 4z^3) \vec{k}$$

є потенціальним, і знайдіть його потенціал.



*Розв'язання.* Для доведення потенціальності поля достатньо показати, що  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ . Маємо

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2 + 2xz^3 & 2yx^3 - z^2 & 3x^2z^2 - 2yz + 4z^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2z - (-2z))\vec{i} - (6xz^2 - 6xz^2)\vec{j} + (6yx^2 - 6yx^2)\vec{k} = \vec{0}.$$

Отже, поле вектора  $\vec{F}$  потенціальне.

Визначимо потенціал  $u(x, y, z)$  за формулою (2.59), обираючи як фіксовану точку початок координат, тобто  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ .

$$u(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_0^x 0 \cdot dx +$$

$$+ \int_0^y 2yx^3 dy + \int_0^z (3x^2z^2 - 2yz + 4z^3) dz + C = y^2x^3 + x^2z^3 - yz^2 + z^4 + C.$$

### Т.5 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайдіть поверхні рівня скалярного поля  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .
2. Обчисліть похідну скалярного поля  $u = x^2y + 2y^2z - z^2x + 1$  у точці  $M_0(0; 2; 1)$  у напрямку до точки  $M_1(2; 4; 0)$ .
3. Обчисліть похідну скалярного поля  $u = z\sqrt{x^2 + y^2}$  у точці  $M(3; 4; 1)$  у напрямку вектора, що утворює з координатними осями  $Ox$  і  $Oy$  кути  $\alpha = 45^\circ$  та  $\beta = 60^\circ$  відповідно.
4. Обчисліть похідну скалярного поля  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  у точці  $M(6; -2; 3)$  у напрямку її градієнта, обчисленого в цій точці.
5. Обчисліть похідну поля  $u = \ln(x^2 + y^2 - z)$  у точці  $M(1; \sqrt{3}; 3)$  кола  $x = 2 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = 3$  у додатному напрямку цього кола.
6. Знайдіть градієнт скалярного поля  $u = 2x^3y - 3yz^2 + zx - 2y + 3$  у точці  $M(1; 0; -2)$ .

7. Знайдіть кут між градієнтами скалярного поля  $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ , обчисленими в точках  $M_1(1; 0)$  та  $M_2(-1; 1)$ .

8. Знайдіть точки, в яких градієнт скалярного поля  $u = \ln(x - y^{-1})$  дорівнює  $\vec{i} + \vec{j}$ .

9. Знайдіть векторні лінії поля  $\vec{F} = (z - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y - z)\vec{k}$ .

10. Знайдіть векторну лінію поля  $\vec{F} = \vec{i} - y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ , що проходить через точку  $M(1; 2; 3)$ .

11. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = (x + 3y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$  через верхню частину круга, що вирізається конусом  $x^2 + y^2 = z^2$  із площини  $z = 1$ .

12. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = x\vec{i} + z\vec{k}$  через бічну поверхню кругового циліндра  $x^2 + y^2 = 4$ , обмеженого площинами  $z = 0$  та  $z = 1$ .

13. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + yz\vec{j} + (x - z)\vec{k}$  через замкнену поверхню, обмежену параболоїдом  $z = 1 - x^2 - y^2$  та площиною  $z = 0$ .

14. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$  через замкнену поверхню, обмежену напівсферою  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  та площиною  $z = 0$ .

15. Обчисліть потік векторного поля  $\vec{F} = (3x - 2)\vec{i} - 5y\vec{j} + (2z + 1)\vec{k}$  через зовнішню сторону конуса  $x^2 + y^2 = z^2$  ( $0 \leq z \leq 3$ ), використовуючи для цього метод побудови даної поверхні до замкненої поверхні і подальшого використання формули Остроградського—Гаусса.

Обчисліть циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  вздовж замкненого контура  $L$ .

16.  $\vec{F} = z\vec{i} - x\vec{j} + y\vec{k}$ ,  $L$  — коло  $z = x^2 + y^2 - 10$ ,  $z = -1$ .

17.  $\vec{F} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + xz\vec{k}$ ,  $L$  — еліпс  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + y + z = 1$ .

18.  $\vec{F} = y^2\vec{i} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ ,  $L$  — замкнений контур  $ABCA$ , утворений перетином площини  $x + y + z = 3$  з координатними площинами.

Обчисліть циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  вздовж замкненого контуру  $L$ , використовуючи: а) безпосереднє інтегрування; б) формулу Стокса.

19.  $\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ ,  $L$  — коло  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = 0$ .

20.  $\vec{F} = z\vec{i} - y\vec{k}$ ,  $L$  — еліпс  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x + 2z = 5$ .

21.  $\vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$ ,  $L$  — коло  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ ,  $z = 1$ .

22. Знайдіть дивергенцію і ротор векторного поля радіус-вектора  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

Знайдіть ротор векторного поля  $\vec{F}$  у точці  $M$ .

23.  $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ ,  $M(-1; 2; 0)$ .

24.  $\vec{F} = (2x^2y - z)\vec{i} + (3xz^2 + 1)\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$ .

25. Доведіть, що векторне поле

$$\vec{F} = (4x^3z + y^2 - 3)\vec{i} + (2xy + z^2 + 1)\vec{j} + (x^4 + 2yz)\vec{k}$$

є потенціальним, і знайдіть його потенціал.

### Відповіді

1.  $z = C \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$  — конуси з вершиною у початку координат;  $Oz$  — вісь симетрії. 2. 2.  
 3.  $(29 + 3\sqrt{2})/10$ ;  $(3\sqrt{2} - 21)/10$ . 4. 1. 5.  $4\sqrt{3}$ . 6.  $\text{grad} u = -2\vec{i} - 12\vec{j} + \vec{k}$ . 7.  $\frac{3\pi}{4}$ . 8.  $(2; 1)$ ,  
 $(0; -1)$ . 9.  $x + y + z = C_1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = C_1$ . 10.  $x + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}$ ,  $x + \frac{1}{z} = \frac{4}{3}$ . 11.  $\pi$ . 12.  $4\pi$ . 13.  $\frac{\pi}{6}$ .  
 14.  $\frac{\pi R^4}{2}$ . 15.  $-36\pi$ . 16.  $-9\pi$ . 17.  $-\pi$ . 18.  $-27$ . 19.  $-\frac{\pi R^6}{8}$ . 20.  $-2\pi$ . 21. 0. 22.  $\text{div} \vec{r} = 3$ ,  $\text{rot} \vec{r} = 0$ .  
 23.  $2\vec{j} - 4\vec{k}$ . 24.  $2\vec{i} - 5\vec{j} - 8\vec{k}$ . 25.  $u = x^4y + xy^2 + yz^2 - 3x + y + C$ .

## Т.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

5.1. Обчисліть потік вектора  $\vec{F}(x, y, z)$  через зовнішню поверхню піраміди, що обмежена координатними площинами  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  та похилою площиною  $\alpha$ , користуючись формулою Остроградського—Гауса.

№	$\vec{F}(x, y, z)$	Рівняння площини $\alpha$
5.1.1	$\vec{F} = xy\vec{i} + (x^4 - y)\vec{j} + (z - 2y)\vec{k}$	$2x + y + 2z = 2$
5.1.2	$\vec{F} = x\vec{i} + (2 - z)\vec{j} + (z^2 + 2x)\vec{k}$	$2x - 6y + 3z = 6$
5.1.3	$\vec{F} = xz\vec{i} + (2x^3 + y)\vec{j} + (z - 3y)\vec{k}$	$2x + 2y - z = 2$

№	$\vec{F}(x, y, z)$	Рівняння площини $\alpha$
5.1.4	$\vec{F} = (z-x)\vec{i} + (z+y^2)\vec{j} + (x^2+2y)\vec{k}$	$3x-6y+2z=6$
5.1.5	$\vec{F} = (x+2)\vec{i} + (z-2y)\vec{j} + z^2\vec{k}$	$2x+2y-z=2$
5.1.6	$\vec{F} = x^2\vec{i} + (2-z)\vec{j} + (z+2x)\vec{k}$	$3x-2y+6z=6$
5.1.7	$\vec{F} = (yx+1)\vec{i} + (2z-x)\vec{j} + z\vec{k}$	$2x+y-4z=4$
5.1.8	$\vec{F} = (x+z)\vec{i} + (xy-2)\vec{j} + (3x+y)\vec{k}$	$3x+2y-6z=6$
5.1.9	$\vec{F} = (2x+yz)\vec{i} + (2y-x)\vec{j} + z^2\vec{k}$	$6x-4y+3z=12$
5.1.10	$\vec{F} = (x^2-1)\vec{i} + (x-zy)\vec{j} + (x+yz)\vec{k}$	$6x+3y+4z=12$
5.1.11	$\vec{F} = (xy+1)\vec{i} + (2z-3y)\vec{j} + 3z\vec{k}$	$4x-6y+3z=12$
5.1.12	$\vec{F} = (x+2yz)\vec{i} + (3y-x)\vec{j} + (y-2z)\vec{k}$	$6x-4y-3z=12$
5.1.13	$\vec{F} = (xz-3)\vec{i} + (x^3+2y)\vec{j} + (z-3y)\vec{k}$	$10x-4y+5z=20$
5.1.14	$\vec{F} = (z-x)\vec{i} + (2+y^2)\vec{j} + (x+2y)\vec{k}$	$12x-20y+15z=60$
5.1.15	$\vec{F} = (xy-2)\vec{i} + (z-2y)\vec{j} + 2z\vec{k}$	$3x+4y+6z=12$
5.1.16	$\vec{F} = (x-y)\vec{i} + (4-zy)\vec{j} + (z+2x)\vec{k}$	$15x-10y+6z=30$
5.1.17	$\vec{F} = (x^2+1)\vec{i} + (2z-y)\vec{j} + (z+2)\vec{k}$	$10x-4y-5z=20$
5.1.18	$\vec{F} = (x^2+z)\vec{i} + xy\vec{j} + (3x+y)\vec{k}$	$6x-4y-3z=12$
5.1.19	$\vec{F} = (2x+yz)\vec{i} + (3y-x)\vec{j} + (z-y)\vec{k}$	$4x-6y+3z=12$
5.1.20	$\vec{F} = x\vec{i} + (x-z)\vec{j} + (x+yz)\vec{k}$	$20x+12y-15z=60$
5.1.21	$\vec{F} = (2x-y)\vec{i} + (1-2zy)\vec{j} + z^2\vec{k}$	$15x-6y+10z=30$
5.1.22	$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (1+y)\vec{j} + (z+4x)\vec{k}$	$6x+4y-3z=12$
5.1.23	$\vec{F} = x^2\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + (z-3y)\vec{k}$	$10x+5y+4z=20$
5.1.24	$\vec{F} = (z-x)\vec{i} + (z+3y^2)\vec{j} + (x+2y)\vec{k}$	$20x+4y-5z=20$
5.1.25	$\vec{F} = (x+y)\vec{i} + (z-2y)\vec{j} + zx\vec{k}$	$2x-4y-z=4$

№	$\vec{F}(x, y, z)$	Рівняння площини $\alpha$
5.1.26	$\vec{F} = xy\vec{i} + (2 - zy)\vec{j} + (y + 2x)\vec{k}$	$5x - 2y - 10z = 10$
5.1.27	$\vec{F} = x\vec{i} + (2z - x)\vec{j} + zy\vec{k}$	$2x - 4y + z = 4$
5.1.28	$\vec{F} = (x^2 + z)\vec{i} + x\vec{j} + (3x + y)\vec{k}$	$15x + 3y + 5z = 15$
5.1.29	$\vec{F} = (2x + yz)\vec{i} + (2y - x)\vec{j} + zy\vec{k}$	$2x - 3y - 6z = 6$
5.1.30	$\vec{F} = xy\vec{i} + (x - zy)\vec{j} + (x + yz)\vec{k}$	$15x + 10y - 6z = 30$

5.2. Обчисліть циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  вздовж лінії перетину площини  $\alpha$  з координатними площинами, використовуючи безпосереднє обчислення та формулу Стокса (напрямок руху вздовж кривої відбувається проти годинникової стрілки, якщо дивитися з початку координат).

- 5.2.1.  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + x^2y\vec{j} + zy\vec{k}$ ,  $\alpha: x + y + z = 2$ .
- 5.2.2.  $\vec{F} = xz\vec{i} + (y - z)\vec{j} + z^2\vec{k}$ ,  $\alpha: x - y + z = 1$ .
- 5.2.3.  $\vec{F} = xz\vec{i} + (x + y)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$ ,  $\alpha: x + 2y + z = 2$ .
- 5.2.4.  $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (z + y)\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\alpha: x - 3y + z = 3$ .
- 5.2.5.  $\vec{F} = xy\vec{i} + zy\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$ ,  $\alpha: x + y - 5z = 5$ .
- 5.2.6.  $\vec{F} = (x + 2)\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (z + x)\vec{k}$ ,  $\alpha: 2x + 3y + z = 6$ .
- 5.2.7.  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z + 2x)\vec{k}$ ,  $\alpha: 2x + y + z = 2$ .
- 5.2.8.  $\vec{F} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + y\vec{k}$ ,  $\alpha: 3x + y - z = 3$ .
- 5.2.9.  $\vec{F} = (x + 3z)\vec{i} + 2\vec{j} + (z^2 + 1)\vec{k}$ ,  $\alpha: 6x + 2y + 3z = 6$ .
- 5.2.10.  $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + zy\vec{j} + xz\vec{k}$ ,  $\alpha: x - y - z = 1$ .
- 5.2.11.  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + zy\vec{j} + 2\vec{k}$ ,  $\alpha: x + y + 4z = 4$ .
- 5.2.12.  $\vec{F} = (x + 1)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $\alpha: x + 2y + 3z = 6$ .
- 5.2.13.  $\vec{F} = xz\vec{i} + (2y + 1)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$ ,  $\alpha: 2x + 4y + z = 8$ .
- 5.2.14.  $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ ,  $\alpha: 5x + y + z = 5$ .
- 5.2.15.  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (z + y)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$ ,  $\alpha: 3x + 2y + 2z = 6$ .

Обчисліть циркуляцію векторного поля  $\vec{F}$  вздовж замкненої лінії  $L$  двома способами (безпосередньо та за формулою Стокса).

$$5.2.16. \vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + 4z\vec{j} + (z+x)\vec{k}, \quad L: x^2 + y^2 = 4, z = 2.$$

$$5.2.17. \vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + zy\vec{j} + 3z\vec{k}, \quad L: z = x^2 + y^2, z = 4.$$

$$5.2.18. \vec{F} = (x+z)\vec{i} + 4z\vec{j} + (z^2 - x)\vec{k}, \quad L: x^2 + y^2 + z^2 = 10, x = 1.$$

$$5.2.19. \vec{F} = 2xy\vec{i} + (y^2 + 2z)\vec{j} - 2z\vec{k}, \quad L: x^2 + z^2 = 1, y = 0.$$

$$5.2.20. \vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z^2 + y^2)\vec{k}, \quad L: y = x^2 + z^2, z = 1.$$

$$5.2.21. \vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j} + (z^2 - y^2)\vec{k}, \quad L: x^2 + y^2 + z^2 = 5, z = 1.$$

$$5.2.22. \vec{F} = (x+y)\vec{i} + (z+y)\vec{j} + (z+x)\vec{k}, \quad L: z^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

$$5.2.23. \vec{F} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z\vec{k}, \quad L: x = z^2 + y^2, x = 9.$$

$$5.2.24. \vec{F} = (z+x)\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}, \quad L: x^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1.$$

$$5.2.25. \vec{F} = (x^2 + y)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} + z\vec{k}, \quad L: x^2 + y^2 = 1, z = 4.$$

$$5.2.26. \vec{F} = xy\vec{i} + zy\vec{j} + yz\vec{k}, \quad L: z = x^2 + y^2 - 3, z = 1.$$

$$5.2.27. \vec{F} = x\vec{i} + zx\vec{j} + (z+y)\vec{k}, \quad L: x^2 + y^2 = 4, x + z = 0.$$

$$5.2.28. \vec{F} = (x^2 + z^2)\vec{i} + 3z\vec{j} + z\vec{k}, \quad L: x^2 + z^2 = 9, y = 2.$$

$$5.2.29. \vec{F} = (x-y)\vec{i} + (y-z)\vec{j} + (z-x)\vec{k}, \quad L: x = y^2 + z^2 + 2, z = 6.$$

$$5.2.30. \vec{F} = 2\vec{i} + y^2x\vec{j} + z\vec{k}, \quad L: x^2 + z^2 = 4, y + z = 0.$$

5.3. Доведіть, що векторне поле  $\vec{F}$  є потенціальним, і знайдіть його потенціал.

$$5.3.1. \vec{F} = (3x^2 + y^2)\vec{i} + (2xy + z)\vec{j} + (y + 3z^2)\vec{k}.$$

$$5.3.2. \vec{F} = (2x + y + z)\vec{i} + (x + 2y + z)\vec{j} + (x + y + 2z)\vec{k}.$$

$$5.3.3. \vec{F} = (4x^3 + yz)\vec{i} + (4y^3 + xz)\vec{j} + (xy + 4z^3)\vec{k}.$$

$$5.3.4. \vec{F} = (3x^2 + y^2z^3)\vec{i} + (-3y^2 + 2xyz^3)\vec{j} + 3z^2(xy^2 - 1)\vec{k}.$$

$$5.3.5. \vec{F} = (y^2z^2 + 2xy)\vec{i} + (2xyz^2 + x^2)\vec{j} + 2xy^2z^2\vec{k}.$$

$$5.3.6. \vec{F} = (2xyz^3 - 1)\vec{i} + (x^2z^3 + 2)\vec{j} + (3x^2yz^2 + 3)\vec{k}.$$

$$5.3.7. \vec{F} = (x + y + 2z)\vec{i} + (x + y + 3z)\vec{j} + (2x + 3y + z)\vec{k}.$$

$$5.3.8. \vec{F} = (2x + 2)\vec{i} + (2y - 3)\vec{j} + (2z + 4)\vec{k}.$$

$$5.3.9. \vec{F} = (x + y - z)\vec{i} + (x - y + z)\vec{j} + (z + y - x)\vec{k}.$$

- 5.3.10.  $\vec{F} = (2x - z^3)\vec{i} + 2(y + z)\vec{j} + (2y - 3xz^2)\vec{k}$ .
- 5.3.11.  $\vec{F} = (4x^3y^2z - 1)\vec{i} + 2x^4yz\vec{j} + (x^4y^2 + 2z)\vec{k}$ .
- 5.3.12.  $\vec{F} = (2xy^4z^4 + y)\vec{i} + (4x^2y^3z^4 + x)\vec{j} + (4x^2y^4z^3 - 1)\vec{k}$ .
- 5.3.13.  $\vec{F} = (3x^2 + 3z + 2)\vec{i} + (3y^2 - 1)\vec{j} + 3(x + z^2)\vec{k}$ .
- 5.3.14.  $\vec{F} = (3x^2y^2z + yz^2)\vec{i} + (2x^3yz + xz^2)\vec{j} + (x^3y^2 + 2xy)\vec{k}$ .
- 5.3.15.  $\vec{F} = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} - \frac{yz}{x^2}\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} - \frac{xz}{y^2}\right)\vec{j} + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - \frac{xy}{z^2}\right)\vec{k}$ .
- 5.3.16.  $\vec{F} = (x + 2y - z)\vec{i} + (2x - y + 3z)\vec{j} + (z + 3y - x)\vec{k}$ .
- 5.3.17.  $\vec{F} = (3z^2 + y^2x^3)\vec{i} + (-3y^2 + 2zyx^3)\vec{j} + 3x^2(z y^2 - 1)\vec{k}$ .
- 5.3.18.  $\vec{F} = (2xyz^3 - 1)\vec{i} + (y^2z^3 + 2)\vec{j} + 3(y^2xz^2 + 1)\vec{k}$ .
- 5.3.19.  $\vec{F} = (y^2z^2 + 2xz)\vec{i} + (2xzy^2 + x^2)\vec{j} + 2xz^2y^2\vec{k}$ .
- 5.3.20.  $\vec{F} = (2y - z^3)\vec{i} + 2(x + z)\vec{j} + (2x - 3yz^2)\vec{k}$ .
- 5.3.21.  $\vec{F} = (4z^3y^2x - 1)\vec{i} + 2z^4yx\vec{j} + (z^4y^2 + 2x)\vec{k}$ .
- 5.3.22.  $\vec{F} = (2yx^4z^4 + x)\vec{i} + (4y^2x^3z^4 + y)\vec{j} + (4y^2x^4z^3 - 1)\vec{k}$ .
- 5.3.23.  $\vec{F} = (3x^2 + 3y + 2)\vec{i} + (3z^2 - 1)\vec{j} + 3(x + y^2)\vec{k}$ .
- 5.3.24.  $\vec{F} = (3z^2y^2x + yx^2)\vec{i} + (2z^3yx + zx^2)\vec{j} + (z^3y^2 + 2zy)\vec{k}$ .
- 5.3.25.  $\vec{F} = (2xz^4 - 4)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (4x^2z^3 + y^2)\vec{k}$ .
- 5.3.26.  $\vec{F} = (2xz + y^3)\vec{i} + 3xy^2\vec{j} + (x^2 - 3z^2)\vec{k}$ .
- 5.3.27.  $\vec{F} = (2xy^4z - y^2)\vec{i} + (4x^2y^3z - 2xy)\vec{j} + (x^2y^4 + 2)\vec{k}$ .
- 5.3.28.  $\vec{F} = (\ln y + zx^{-1})\vec{i} + (\ln z + xy^{-1})\vec{j} + (\ln x + yz^{-1})\vec{k}$ .
- 5.3.29.  $\vec{F} = (2e^{2x}y - e^z)\vec{i} + (e^{2x} + e^y z^2)\vec{j} + (2ze^y - xe^z)\vec{k}$ .
- 5.3.30.  $\vec{F} = (\sin y - 2z \cos 2x)\vec{i} + (x \cos y + \cos z)\vec{j} - (y \sin z + \sin 2x)\vec{k}$ .

# Модуль 3

## ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

**Загальна характеристика розділу.** Теорія функцій комплексної змінної є однією з найважливіших областей математичного аналізу. Її використовують при розв'язуванні різних задач фізики, електротехніки тощо.

### СТРУКТУРА МОДУЛЯ

- Тема 1.** Комплексні числа (огляд). Функція комплексної змінної. Ряди з комплексними членами. Основні елементарні функції.
- Тема 2.** Диференціювання та інтегрування функції комплексної змінної.
- Тема 3.** Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки, їх класифікація. Лишки та їх застосування.

**Базисні поняття.** 1. Комплексне число. 2. Функція комплексної змінної. 3. Умови Коші—Рімана. 4. Формула Коші. 5. Ряд Тейлора. 6. Ряд Лорана. 7. Ізольована точка. 8. Лишки.

**Основні задачі.** 1. Дії з комплексними числами. 2. Відшукування дійсної й уявної частини функції комплексної змінної. 3. Диференціювання функції комплексної змінної. 4. Відновлення аналітичної функції за однією з частин. 5. Інтегрування функції комплексної змінної. 6. Розкладання функції у ряд. 7. Класифікація ізольованих точок. 8. Застосування лишків до відшукування інтегралів.

### ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

#### 1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

- 1.1. Комплексні числа та дії над ними (повторення).
- 1.2. Поняття функції комплексної змінної, границя та неперервність.
- 1.3. Ряди з комплексними членами, дослідження на збіжність.
- 1.4. Основні елементарні функції та їхні властивості.
- 1.5. Диференціювання функцій комплексної змінної. Умови Коші—Рімана. Аналітичні функції.



- 1.6. Гармонічні функції. Відновлення аналітичної функції за її дійсною або уявною частинами.
- 1.7. Інтеграл від функції комплексної змінної.
- 1.8. Інтегральна теорема Коші та формула Коші.
- 1.9. Ряди Тейлора і Лорана.
- 1.10. Ізольовані точки та їх класифікація.
- 1.11. Лишки. Обчислення інтегралів за допомогою лишків.

## **2. Знання на рівні доведень та виведень**

- 2.1. Умови Коші–Рімана.
- 2.2. Інтегральна формула Коші.
- 2.3. Формули для обчислення лишків.
- 2.4. Основна теорема про лишки.

## **3. Уміння в розв'язанні задач**

- 3.1. Проводити дії з комплексними числами.
- 3.2. Уміти виділяти дійсну й уявну частини функції.
- 3.3. Уміти проводити диференціювання та інтегрування функції.
- 3.4. Уміти застосовувати формулу Коші для обчислення інтегралів по замкнутому контуру.
- 3.5. Розкласти функції у ряд Лорана.
- 3.6. Знаходити ізольовані точки та здійснювати їх класифікацію.
- 3.7. Знаходити лишки функції.
- 3.8. Обчислювати інтеграли за допомогою лишків.

### **Тема 1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА (ОГЛЯД). ФУНКЦІЯ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. РЯДИ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧЛЕНАМИ. ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ**

Комплексні числа; алгебраїчна, тригонометрична, показникова форми запису; геометрична інтерпретація. Дії з комплексними числами. Формули Ейлера, Муавра. Поняття функції комплексної змінної, границя, неперервність. Ряди з комплексними членами. Ознаки збіжності. Теорема Абеля. Основні елементарні функції та їхні властивості.



**Література:** [4, розділ 1, pp.1.1–1.3], [5, гл.1, pp.1.1–1.3], [12, розділ 30, §1–2], [13, розділ 1, §1–2], [15, розділ 15, п. 15.1], [17, розділ 8, §28].

## Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1. Комплексні числа та дії над ними

Вираз

$$z = x + iy,$$

де  $x$  і  $y$  — дійсні числа,  $i = \sqrt{-1}$  — уявна одиниця ( $i^2 = -1$ ), називають комплексним числом. Таку форму запису комплексного числа називають *алгебраїчною*.

Число  $x$  називають *дійсною частиною* числа  $z$  і позначають  $x = \operatorname{Re} z$ ;  $y$  — *уявною частиною*  $z$  і позначають  $y = \operatorname{Im} z$ .

Два комплексні числа  $z_1$  і  $z_2$  рівні тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ і } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Якщо  $y = 0$ , то комплексне число  $z = x + 0 \cdot i = x \in \mathbb{R}$  є дійсним числом; якщо  $x = 0$  і  $y \neq 0$ , то  $z = iy$  — суто уявне число.

Число  $z = x + iy$  дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли  $x = 0$  і  $y = 0$ .

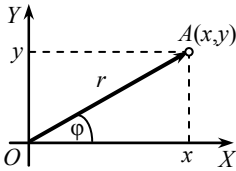


Рис. 3.1

Геометрично комплексне число  $z = x + iy$  зображають у площині  $Oxy$  точкою з координатами  $x$  та  $y$  (рис. 3.1), причому між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини існує взаємно однозначна відповідність.

Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають *комплексною площиною*  $Z$ . При цьому дійсним числам відповідають точки, розміщені на осі абсцис (осі  $Ox$ ); суто уявним числам — точки, розміщені на осі ординат (осі  $Oy$ ). Тому вісь  $Ox$  називають *дійсною віссю*, вісь  $Oy$  — *уявною віссю*.

Комплексне число  $z = x + iy$  можна також зображати вектором, початок якого міститься у точці  $O(0; 0)$ , а кінець — у точці  $A(x, y)$ .

*Модулем* комплексного числа  $z = x + iy$  (позначення  $|z|$ ) називають довжину вектора  $\overline{OA}$ , тобто

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.1)$$

Очевидно, що  $0 \leq |z| < +\infty$ .

Два комплексні числа  $z = x + iy$  та  $\bar{z} = x - iy$ , які відрізняються лише знаком уявної частини, називають *спряженими*.

Добуток спряжених чисел  $z$  і  $\bar{z}$  дорівнює квадрату модуля кожного з них:  $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$ .

Аргументом числа  $z$  (позначення  $\text{Arg } z$ ) називають кут  $\varphi$ , на який треба повернути навколо початку координат додатну частину дійсної осі до збігу з вектором  $\overline{OA}$ :  $\varphi = \text{Arg } z$ . При цьому кут  $\varphi$  вважають додатним, якщо обертання додатної частини дійсної осі відбувається проти ходу годинникової стрілки, і від'ємним — у протилежному напрямі.

Аргумент числа  $z = 0$  не визначений. Якщо  $z \neq 0$ , то  $\text{Arg } z$  визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданка  $2\pi k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ ). Одні і тільки одні значення  $\varphi$  аргументу  $z$  належить проміжку  $(-\pi; \pi]$ , його називають *головним значенням* і позначають  $\text{arg } z$ .

Отже,

$$\text{Arg } z = \text{arg } z + 2\pi k,$$

де  $-\pi < \text{arg } z \leq \pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Для обчислення головного значення аргументу комплексного числа  $z = x + iy$  використовують рівності:

$$\text{arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{якщо } x > 0, & \text{(I та IV чверті)} \\ \arctg \frac{y}{x} + \pi, & \text{якщо } x < 0, y \geq 0, & \text{(II чверть)} \\ \arctg \frac{y}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0, y < 0, & \text{(III чверть)} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{якщо } x = 0, y < 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

Справджуються формули:

$$\text{Re } z = |z| \cos(\text{arg } z) = |z| \cos \varphi, \quad \text{Im } z = |z| \sin(\text{arg } z) = |z| \sin \varphi.$$

Тоді комплексне число  $z = x + iy$  можна подати у вигляді

$$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Праву частину цієї формули називають *тригонометричною формою* комплексного числа  $z$ .

Оскільки за формулою Ейлера  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , то

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Таку форму запису комплексного числа  $z$  називають *показниковою*.

Дії над комплексними числами  $z_1 = x_1 + iy_1$  та  $z_2 = x_2 + iy_2$  виконують за такими правилами:

1) додавання:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$$

2) віднімання:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2);$$

3) множення:

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

4) ділення ( $z_2 \neq 0$ ):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

У тригонометричній формі

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Якщо  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z \neq 0$ , то за правилом множення чисел дістанемо

$$\boxed{z^n = (|z| (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}, \quad (3.3)$$

тобто  $|z^n| = |z|^n$ ,  $\text{Arg } z^n = n \text{Arg } z$  ( $n$  — натуральне число).

Рівність (3.3) називають *формулою Муавра*.

*Коренем  $n$ -го степеня* з комплексного числа  $z$  називається комплексне число  $\omega$ , яке задовольняє рівняння  $\omega^n = z$  ( $n$  — натуральне число). Для  $z \neq 0$  існує  $n$  різних комплексних чисел  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$  таких, що  $\omega^k = z$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Ці числа позначають символом  $\sqrt[n]{z}$  і обчислюють за формулою

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)},$$

де  $\varphi = \arg z$ ,  $\sqrt[n]{|z|}$  — арифметичне значення кореня,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Геометрично ці  $n$  значень виразу  $\sqrt[n]{z}$  зображаються вершинами деякого правильного  $n$ -кутника, вписаного в коло з радіусом  $\sqrt[n]{|z|}$  з центром у початку координат.

## 1.2. Поняття функції комплексної змінної. Границя та неперервність

Нехай  $D$  — множина комплексних чисел.

Якщо кожному  $z \in D$  поставлено у відповідність за певним законом одне або кілька комплексних чисел  $w$ , то кажуть, що на множині  $D$  визначено *функцію комплексної змінної*, і пишуть  $w = f(z)$ . Множину  $D$  при цьому називають *областю визначення*, або *областю існування функції*,  $z$  — незалежною змінною, або *аргументом*,  $w$  — залежною змінною, або *функцією*.

Якщо кожному  $z \in D$  ставиться у відповідність тільки одне число  $w$ , то функцію  $w = f(z)$  називають *однозначною*, інакше її називають *багатозначною*.

Нехай  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ ,  $w = f(z)$  — однозначна функція.

Тоді кожній точці  $z \in D$  з координатами  $x$  і  $y$  ставиться у відповідність пара дійсних чисел  $u$  і  $v$ . Інакше кажучи, на  $D$  визначені дві дійсні функції  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$  двох дійсних змінних, тобто

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y).$$

Отже, одне комплексне співвідношення  $w = f(z)$  еквівалентне двом дійсним співвідношенням:  $u = u(x, y)$  і  $v = v(x, y)$ .

Графік функції комплексної змінної мав би бути деякою поверхнею в просторі чотирьох дійсних змінних  $x, y, u, v$ , чого не можна уявити наочно.

Нехай довільній фіксованій точці  $w \in G$  відповідають ті точки множини  $D$ , для яких  $w = f(z)$ . Цим самим на множині  $G$  визначено функцію  $z = g(w)$ , яку називають *оберненою* функцією до функції  $w = f(z)$ . Функція  $w = f(z)$  при цьому називається *прямою* функцією. Зрозуміло, що коли пряма функція  $w = f(z)$  однозначна, то обернена функція  $z = g(w)$  може бути як однозначною, так і багатозначною. Для того, щоб обернена функція була однозначною, необхідно і достатньо, щоб пряма функція кожним двом різним точкам множини  $D$  ставила у відповідність дві різні точки множини  $G$ , тобто щоб функція  $w = f(z)$  відображала множину  $D$  на множину  $G$  взаємно однозначно. У цьому разі функція називається *однолисною*.

*Околом* ( $\delta$ -околом) точки називають круг  $|z - z_0| < \delta$  з центром у точці  $z_0$  і радіусом  $\delta$ .

Нехай функція  $w = f(z)$  визначена в околі точки  $z_0$ .

Число  $A = a + ib$  називають *скінченною границею* функції  $f(z)$  в точці  $z_0$ , якщо для довільного дійсного числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться дійсне число  $\delta > 0$  таке, що  $|f(z) - A| < \varepsilon$  для всіх  $z$ , що містяться в  $\delta$ -околі точки  $z_0$  і відмінні від  $z_0$ .

Позначення:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \text{ або } f(z) \rightarrow A \text{ при } z \rightarrow z_0. \quad (3.4)$$

Означення границі функції комплексної змінної за формою збігається з означенням границі функції дійсної змінної: якщо вважати, що  $f(z) =$

$= u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z_0 = x_0 + iy_0$ , то комплексне співвідношення (3.4) еквівалентне двом дійсним співвідношенням:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

Означення границі має сенс і при  $A = \infty$ . Число  $\infty$  називають *невластивим* (нескінченним) комплексним числом, а відповідну точку — *нескінченно віддаленою* точкою комплексної площини. Для числа  $\infty$  поняття дійсної та уявної частин, а також поняття аргументу позбавлені смислу. Вважають, що модуль цього числа  $|\infty| = +\infty$ .

Околом нескінченно віддаленої точки називають множину точок  $z$ , які задовольняють нерівність  $|z| > R$ , тобто зовнішню частину кожного круга з центром у початку координат.

Комплексну площину, до якої приєднано єдину нескінченно віддалену точку, називають *розширеною комплексною площиною*.

Функція  $f(z)$  має нескінченну границю при  $z \rightarrow z_0$ , якщо для довільного числа  $P > 0$  знайдеться число  $\delta > 0$  таке, що  $|f(z)| > P$  для всіх  $z$  з  $\delta$ -околу точки  $z_0$  ( $z \neq z_0$ ).

Із означення границі випливає, що співвідношення  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$  еквівалентне співвідношенню  $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$ .

Число  $A$  називають *скінченною границею* функції  $f(z)$  при  $z \rightarrow \infty$ , якщо для довільного числа  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке число  $R > 0$ , що  $|f(z) - A| < \varepsilon$  для всіх  $|z| > R$ .

Наведемо поняття нескінченної границі у нескінченно віддаленій точці:  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ , якщо для довільного числа  $P > 0$  знайдеться число  $R > 0$  таке, що  $|f(z)| > P$  для всіх  $|z| > R$ .

Функція, визначена в околі точки  $z_0$ , *неперервна* в точці  $z_0$ , якщо  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ .

Неперервність функції  $w = f(z)$  в точці  $z_0 = x_0 + iy_0$  еквівалентна неперервності двох дійсних функцій  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  і  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  у точці  $(x_0, y_0)$ .

Функцію, неперервну в кожній точці множини  $D$ , називають *неперервною* на цій множині.

### 1.3. Ряди з комплексними членами

Вираз вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots, \quad (3.5)$$

де  $z_n = x_n + iy_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) — комплексні числа, називають *числовим рядом* (у комплексній області).

Суму

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

перших  $n$  членів ряду (3.5) називають  *$n$ -ю частинною сумою ряду*.

Ряд (3.5) називають *збіжним*, якщо існує скінченна границя

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Тоді  $S$  — *сума ряду*. Якщо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  не існує, то ряд (3.5) називають *розбіжним*.

Ряд (3.5) можна подати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n,$$

де  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  — дійсна частина ряду,  $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$  — уявна частина ряду.

#### Теорема 1

Ряд (3.5) з комплексними членами збігається тоді і тільки тоді, коли збігається кожен з рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ та } \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Якщо ряд (3.5) збіжний, то  $S = S_1 + iS_2$ , де  $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ,  $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ .

Для дослідження збіжності ряду (3.5) ефективною є також така теорема.

#### Теорема 2

Якщо збігається ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ , утворений із модулів членів ряду

ду  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ , то збігається й ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ .

Ця теорема дає можливість для дослідження рядів із комплексними членами використовувати всі достатні ознаки збіжності рядів із дійсними додатними членами (див. модуль 1).

*Степеневим рядом* називають ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  — сталі комплексні числа, які називають коефіцієнтами степеневого ряду;  $z = x + iy$  — комплексна змінна,  $z_0$  — довільне фіксоване комплексне число.

При  $z_0 = 0$  степеневий ряд набуває вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (3.6)$$

Сукупність усіх значень  $z$ , для яких ряд (3.6) збігається, називають областю збіжності степеневого ряду.

**Теорема 3** (Абеля.) Якщо ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  збігається в точці  $z = z_1 \neq 0$ , то він абсолютно збігається і в крузі  $|z| < |z_1|$ . Якщо ряд (3.6) розбігається у точці  $z = z_2$ , то він розбігається для всіх значень  $z$ , що задовольняють умову  $|z| > |z_2|$ , тобто зовні круга з радіусом  $|z_2|$  з центром у початку координат.

Круг з радіусом  $R$  з центром у точці  $z_0$ , всередині якого степеневий ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  збігається абсолютно, а зовні якого розбігається, називають *кругом збіжності* степеневого ряду, а число  $R$  — *радіусом збіжності*, який можна обчислити за формулами

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{або} \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Теорема 4** Степеневий ряд всередині круга збіжності можна почленно диференціювати та інтегрувати довільну кількість разів. Утворені при цьому ряди мають той самий радіус збіжності, що й початковий ряд.

Умова рівномірної збіжності ряду гарантує неперервність його суми  $f(z)$ , а також можливість диференціювання й інтегрування цієї суми шляхом почленного диференціювання й інтегрування степеневого ряду.



## 1.4. Основні елементарні функції та їхні властивості

### 1.4.1. Показникова та тригонометричні функції

Функції  $e^z$  ( $\exp z$ ),  $\cos z$ ,  $\sin z$  визначаються як суми збіжних степеневих рядів, тобто за означенням:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$
$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ці ряди збігаються, причому абсолютно, для довільного комплексного значення  $z$ .

Означені функції пов'язані між собою формулою Ейлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Замінімо у формулі Ейлера  $z$  на  $-z$ , тоді

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Із цих формул дістанемо ще дві формули Ейлера

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$$

Сформулюємо властивості функцій  $\exp z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$ .

1.  $e^{z+t} = e^z \cdot e^t$ . Зокрема,  $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ .
  2.  $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$  для довільного комплексного  $z$ .
  3.  $e^z \neq 0$  для довільного комплексного  $z$ .
  4.  $e^{z-t} = \frac{e^z}{e^t}$ .
  5.  $e^{z+2\pi i} = e^z$ , тобто  $e^z$  — періодична функція з суто уявним періодом  $2\pi i$ .
- Справді,

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+iy+2\pi i} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^x (\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

6.  $\cos(-z) = \cos z$ , тобто  $\cos z$  — парна функція.
7.  $\sin(-z) = -\sin z$ , тобто  $\sin z$  — непарна функція.
8.  $\sin(z+t) = \sin z \cos t + \cos z \sin t$ ,  $\cos(z+t) = \cos z \cos t - \sin z \sin t$ .
9.  $\sin 2z = 2\sin z \cos z$ ,  $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$ .
10.  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .
11.  $\cos(z + 2\pi k) = \cos z$ ,  $\sin(z + 2\pi k) = \sin z$ .
12.  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  — необмежені функції у комплексній площині.

Інші тригонометричні функції комплексної змінної  $z$  визначаються формулами:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

### 1.4.2. Гіперболічні функції

Гіперболічні синус і косинус визначаються рівностями:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Подавши  $e^z$  та  $e^{-z}$  у вигляді суми степеневих ряду, дістанемо розвинення у степеневий ряд функцій  $\operatorname{sh} z$  і  $\operatorname{ch} z$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} z &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

За формулами Ейлера знайдемо:

$$\sin iz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i \operatorname{sh} z, \quad \cos iz = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \operatorname{ch} z.$$

Якщо в ці формули підставити  $iz$  замість  $z$ , дістанемо

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

Функції *тангенс гіперболічний* та *котангенс гіперболічний* визначаються за допомогою рівностей:

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

### 1.4.3. Логарифмічна функція

Функцію, обернену до показникової, називають *логарифмічною*. Якщо  $e^w = z$ , де  $z \neq 0$ , то  $w = \text{Ln } z$ . Кожне значення функції  $w = \text{Ln } z$  називають *логарифмом комплексного числа  $z$  ( $z \neq 0$ )* і обчислюють за формулою:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z, \quad (3.7)$$

або

$$\boxed{\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.}$$

Справді, якщо  $w = u + iv$ , то з формули  $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$  випливає, що  $|e^w| = |e^u (\cos v + i \sin v)| = e^u$ ,  $\text{Arg } e^w = v + 2\pi k$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Оскільки  $e^w = z$ , то  $e^u = |z|$ ,  $u = \ln |z|$  (звичайний логарифм, бо  $|z|$  — дійсне число) і  $v = \text{Arg } z$ . Отже, формулу (3.7) доведено.

Логарифмічна функція є нескінченнозначна. Серед нескінченної множини значень логарифма комплексного числа  $z$  виділяють одне значення, що дорівнює  $\ln |z| + i \arg z$ , яке називають *головним значенням логарифма* і позначають  $\ln z$ . Отже,

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Тоді

$$\text{Ln } z = \ln z + 2\pi ki, k \in \mathbb{Z},$$

де  $\ln z$  — головне значення логарифма.

Нехай  $z$  — дійсне додатне число,  $z = x > 0$ , то  $|z| = x$ ,  $\arg z = 0$ . Тому головне значення логарифма такого комплексного числа збігається із значенням натурального логарифма дійсного числа  $x = z$ . Всі інші значення логарифма такого комплексного числа уявні.

### 1.4.4. Загальна показникова та загальна степенева функції

*Загальну показникову функцію* визначають рівністю

$$w = a^z = e^{z \text{Ln } a},$$

де  $a$  і  $z$  — комплексні числа, причому  $a \neq 0$ . Ця функція визначена для всіх  $z$  і є нескінченнозначною.

*Загальна степенева функція*  $w = z^\alpha$ , де  $\alpha$  — сталий показник, в загальному випадку визначена для всіх  $z \neq 0$ .

Якщо  $\alpha = n$  — натуральне число, то  $w = z^n$  визначена і для  $z = 0$  та являє собою цілу раціональну функцію, однозначну і неперервну в усій комплексній площині,  $f(\infty) = \infty$ .

Якщо  $\alpha = -n$  — ціле від'ємне число, то  $w = z^{-n} = \frac{1}{z^n}$  — дробово-раціональна функція, однозначна і неперервна в усій розширеній комплексній площині, крім точки  $z = 0$ .

Якщо  $\alpha = \frac{p}{q}$  ( $q$  — натуральне,  $p$  — ціле,  $\frac{p}{q}$  — нескоротний дріб), то функція  $w = \sqrt[q]{z^p}$  є багатозначною ( $q$ -значною) функцією.

Якщо  $\alpha$  — дійсне ірраціональне або довільне уявне число, то функція  $w = z^\alpha$  визначається формулою

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z} \quad (z \neq 0)$$

і є нескінченнозначною функцією, оскільки такою є логарифмічна функція.

### 1.4.5. Обернені тригонометричні і гіперболічні функції

Функції, обернені до функцій  $z = \sin w$ ,  $z = \cos w$ ,  $z = \operatorname{tg} w$ ,  $z = \operatorname{ctg} w$ , називаються *оберненими тригонометричними функціями* і позначаються відповідно  $w = \operatorname{Arcsin} z$ ,  $w = \operatorname{Arccos} z$ ,  $w = \operatorname{Arctg} z$ ,  $w = \operatorname{Arccotg} z$ .

Можна показати, що

$\operatorname{Arcsin} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$	$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz} \quad (z \neq \pm i)$
$\operatorname{Arccos} z = \frac{1}{i} \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$	$\operatorname{Arccotg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{iz-1}{iz+1} \quad (z \neq \pm i)$

Обернені гіперболічні функції визначаються за формулами:

$\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1})$	$\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$
$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+z}{1-z} \quad (z \neq \pm 1)$	$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z+1}{z-1} \quad (z \neq \pm 1)$

Усі ці функції нескінченнозначні.

### **Т.1** ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть модулі та головні значення аргументів чисел:

а)  $z_1 = -1$ ; б)  $z_2 = -2 + 2i$ ; в)  $z_3 = -3i$ ; г)  $z_4 = 3 - 4i$ .

*Розв'язання:* а) число  $z_1$  — дійсне від'ємне. Його модуль дорівнює відстані від точки  $A_1(-1; 0)$  до початку координат комплексної площини (рис. 3.2):  $|z_1| = 1$ ;  $\arg z_1 = \pi$ ;

$$\text{б) } |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Аргумент знаходимо за формулами (3.2):

$$\arg z_2 = \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{-2} \right) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi;$$

в) число  $z_3$  — суто уявне, його модуль дорівнює відстані від точки  $A_3(0; -3)$  до початку

координат:  $|z_3| = 3$ ;  $\arg z_3 = -\frac{\pi}{2}$ ;

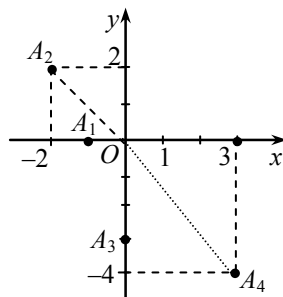


Рис. 3.2

$$\text{г) } |z_4| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5, \arg z_4 = \operatorname{arctg} \left( -\frac{4}{3} \right) = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}.$$

2. Знайдіть  $\operatorname{Re} z$  і  $\operatorname{Im} z$ , якщо  $z = \frac{2}{-i} + i(1 + i)$ .

*Розв'язання.* Зведемо число  $z$  до вигляду  $z = x + iy$ , де  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$  і  $x, y \in \mathbb{R}$ . Маємо

$$\begin{aligned} z &= \frac{2}{-i} + i(1 + i) = \frac{-2i}{i^2} + i + i^2 = -\frac{2i}{-1} + i - 1 = \\ &= -1 + i + 2i = -1 + 3i. \end{aligned}$$

Отже,  $\operatorname{Re} z = -1$ ,  $\operatorname{Im} z = 3$ .

3. Запишіть у тригонометричній формі комплексні числа:

а)  $z_1 = 2 + 5i$ ; б)  $z_2 = -2(\sin 1 + i \cos 1)$ .

*Розв'язання:* а) якщо число  $z = x + iy$  задане в алгебраїчній формі, то модуль і головне значення аргументу знаходимо за формулами (3.1) і (3.2). Для заданого числа  $z$  маємо:

$$|z_1| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}, \arg z_1 = \operatorname{arctg} \frac{5}{2}, \text{ оскільки } x > 0, y > 0.$$

$$\text{Отже, } z_1 = \sqrt{29} \left( \cos \left( \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) + i \sin \left( \operatorname{arctg} \frac{5}{2} \right) \right);$$

б) знаходимо модуль та головне значення аргументу числа  $z_2$  :

$$\begin{aligned} |z_2| &= \sqrt{4 \sin^2 1 + 4 \cos^2 1} = 2; \quad \arg z = \arctg \frac{-2 \cos 1}{-2 \sin 1} - \pi = \\ &= \arctg(\operatorname{ctg} 1) - \pi = \arctg \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) - \pi = \frac{\pi}{2} - 1 - \pi = -\frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Отже, тригонометрична форма числа:

$$z_2 = 2 \left( \cos \left( -1 - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -1 - \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

4. Обчисліть: а)  $(-\sqrt{3} + i)^{12}$ ; б)  $\sqrt[3]{-1}$ .

*Розв'язання:* а) запишемо число  $z = -\sqrt{3} + i$  у тригонометричній формі:  $-\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{5}{6} \pi + i \sin \frac{5}{6} \pi \right)$ . Згідно з формулою Муавра маємо:

$$\left( \sqrt{3} + i \right)^{12} = 2^{12} (\cos 10\pi + i \sin 10\pi) = 2^{12} = 4096;$$

б) оскільки  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , то

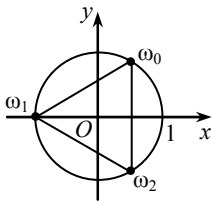


Рис. 3.3

$$\omega_k = \sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \quad (k = 0, 1, 2).$$

Звідси дістаємо:

$$k = 0: \omega_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$k = 1: \omega_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$k = 2: \omega_2 = \cos \frac{5}{3} \pi + i \sin \frac{5}{3} \pi = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Знайдені значення виразу  $\sqrt[3]{-1}$ , тобто числа  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , зображаються вершинами правильного трикутника, вписаного в коло з радіусом  $r = 1$  (рис. 3.3).

5. Визначте множини точок на комплексній площині  $z$ , що визначаються нерівностями: а)  $\operatorname{Im} z^2 > 2$ ; б)  $|z| + \operatorname{Re} z < 1$ .

*Розв'язання:* а) нехай  $z = x + iy$ . Тоді  $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ ,  $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$ . Отже,  $2xy > 2$ , або  $xy > 1$ . Ця нерівність визначає множину точок у першому і третьому квадрантах відповідно над і під гіперболою  $xy = 1$ ;

б) нехай  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ . Тоді  $|z| = r$ ,  $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$ . За умовою

$$r + r \cos \varphi < 1, \text{ звідки } r < \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

Цю умову задовольняють усі точки, що лежать в області, обмеженій кривою  $r = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$  (рівняння параболи в полярних координатах) (рис. 3.4).



*Зауваження.* Покажіть, що в прямокутних декартових координатах рівняння параболи має вигляд  $y^2 = 1 - 2x$ .

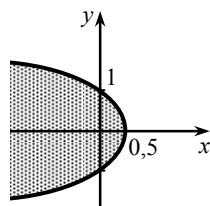


Рис. 3.4

6. Визначте лінії, які задаються рівняннями:

а)  $|z - i| + |z + i| = 4$ ;    б)  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = 1$ .

*Розв'язання:* а) оскільки  $z = x + iy$ , то  $|x + i(y - 1)| + |x + i(y + 1)| = 4$ , або  $\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 4$ . Цю умову задовольняють усі точки  $M(x, y)$ , для яких сума відстаней від точок  $F_1(0; -1)$  і  $F_2(0; 1)$  є сталою величиною. Це еліпс із фокусами  $F_1$  і  $F_2$  та більшою піввіссю, рівною 2. Відстань від початку координат до фокусів рівна 1, а менша піввісь —  $\sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$ .

Рівняння еліпса має вигляд:  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;

б) маємо  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ . Тоді

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{x - iy} = \frac{x + iy}{(x - iy)(x + iy)} = \frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Отже,  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . За умовою  $\operatorname{Re} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = 1$ , тому  $\frac{x}{x^2 + y^2} = 1$ , або

$$x = x^2 + y^2, \quad x^2 - x + y^2 = 0, \quad \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Дістали рівняння кола радіуса  $\frac{1}{2}$  з центром у точці  $C\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ .

7. Знайдіть дійсну й уявну частини функцій:

а)  $w = iz^2 - \bar{z}$ ; б)  $w = z^3$ .

*Розв'язання:* а) враховуючи, що  $z = x + iy$ ,  $\bar{z} = x - iy$ , дістанемо

$$w = i(x + iy)^2 - (x - iy) = i(x^2 - y^2 + 2ixy) - (x - iy) = \\ = -x(1 + 2y) + i(x^2 - y^2 + y).$$

Отже,  $\operatorname{Re} w = -x(1 + 2y)$ ,  $\operatorname{Im} w = x^2 - y^2 + y$ ;

б) маємо:  $w = (x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ . Отже,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} z^3 = x^3 - 3xy^2, v(x, y) = \operatorname{Im} z^3 = 3x^2y - y^3.$$

8. Визначте функцію  $w$  за відомими дійсною й уявною частинами

$$u(x, y) = x + y; v(x, y) = x - y.$$

*Розв'язання.* Із формул  $z = x + iy$  та  $\bar{z} = x - iy$  випливають рівності

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Тоді

$$u(x, y) = x + y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) - \frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z},$$

$$v(x, y) = x - y = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) + \frac{i}{2}(z - \bar{z}) = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z};$$

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = \frac{1-i}{2}z + \frac{1+i}{2}\bar{z} + i\left(\frac{1+i}{2}z + \frac{1-i}{2}\bar{z}\right) = \\ = \left(\frac{1-i}{2} + \frac{1+i}{2}i\right)z + \left(\frac{1+i}{2} + \frac{1-i}{2}i\right)\bar{z} = (1+i)\bar{z}.$$

Отже,

$$w = (1+i)\bar{z}.$$

9. Дослідіть відображення, що задаються функціями:

а)  $w = (\cos \alpha + i \sin \alpha)z$ , де  $\alpha$  — дійсне число;

б)  $w = kz$ , де  $k$  — додатна стала;

в)  $w = z + b$ , де  $b$  — комплексна стала;

г)  $w = z^2$ .

*Розв'язання:* а) нехай  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Задане відображення можна записати у вигляді двох рівнянь  $\rho = r$ ,  $\theta = \varphi + \alpha$ . З рівняння  $\rho = r$  випливає, що при заданому відображенні будь-яка точка  $z$ , що розміщена на колі  $|z| = R$ , переходить у точку  $w$ , що розміщена на колі  $|w| = R$ , тобто при заданому відображенні точка  $w$  буде лежати у площині  $W$  на такій само відстані від початку координат, що й точка  $z$  у площині  $Z$ .



З рівняння  $\theta = \varphi + \alpha$  випливає, що для побудови променя  $Ow$  необхідно промінь  $Oz$  повернути на кут  $\alpha$  навколо початку координат.

Отже, задане відображення зводиться лише до повороту площини  $Z$  на кут  $\alpha$  навколо початку координат;

б) покладемо  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Тоді задана функція запишеться у вигляді:

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta) = kr(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ звідки маємо: } \theta = \varphi, \rho = kr.$$

Рівність  $\theta = \varphi$  означає, що при відображенні  $w = kz$  будь-яка точка  $z$ , що лежить на промені  $\varphi = \varphi_0$  ( $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ ), який виходить з точки  $z = 0$ , відображається в точку, що лежить на промені  $\theta = \varphi_0$ , який виходить з точки  $w = 0$ . Отже, промені  $Oz$  та  $Ow$  нахилені до відповідної дійсної осі площини  $Z$  або  $W$  під одним і тим же кутом.

Рівність  $\rho = kr$  означає, що якщо  $k \neq 1$ , то при відображенні  $w = kz$  точка  $w$  у площині  $W$  буде лежати від точки  $w = 0$  на відстані, яка не дорівнює відстані точки  $z$  до точки  $z = 0$ . Якщо  $k > 1$ , то  $|w|$  буде більше за  $|z|$  у  $k$  разів; якщо  $0 < k < 1$ , то — менше у  $\frac{1}{k}$  разів. Отже, при  $k > 1$  ( $k < 1$ ) відбувається розтяг (стискання) променя  $Oz$ .

Таким чином, відображення  $w = kz$  при  $k \neq 1$  зводиться до подібного розтягу ( $k > 1$ ) або стискання ( $k < 1$ ) комплексної площини  $Z$ . Тому задане відображення називають відображенням подібності з центром у початку координат та коефіцієнтом подібності  $k$ .

При  $k = 1$  відображення має вигляд  $w = z$ . У цьому разі площина  $Z$  тожко відображається сама на себе.

Якщо на площині  $Z$  розглядати область  $|z| < R$ , то при заданому відображенні ця область перейде в круг  $|w| < kR$ .

Якщо на площині  $Z$  задати область  $\text{Im } z \geq 0$  (верхню півплощину  $Z$ ), то при заданому відображенні ця область перейде в область  $\text{Im } w \geq 0$  (верхню півплощину);

в) покладемо  $z = x + iy$ ,  $b = b_1 + ib_2$  ( $b_1, b_2$  — дійсні числа),  $w = u + iv$ , тоді задане відображення можна записати у вигляді двох рівностей:

$$u = x + b_1, v = y + b_2.$$

З цих рівностей випливає, що відображення зводиться до паралельного перенесення площини  $Z$  на вектор  $\vec{b}$ .

Так, якщо область  $D$  є круг  $|z| < R$  (рис. 3.5, а), то його відображення  $w = z + b$  буде кругом  $|w - b| < R$  (рис. 3.5, б).

г) функція  $w = z^2$  визначена та однозначна на всій комплексній площині  $Z$ . Обернена їй функція  $z = \sqrt{w}$  визначена також при всіх значеннях  $w$ .

Проте функція  $z = \sqrt{w}$  на комплексній площині  $W$  не однозначна. Тому функція  $w = z^2$  не є однолисною на всій комплексній площині  $Z$ .

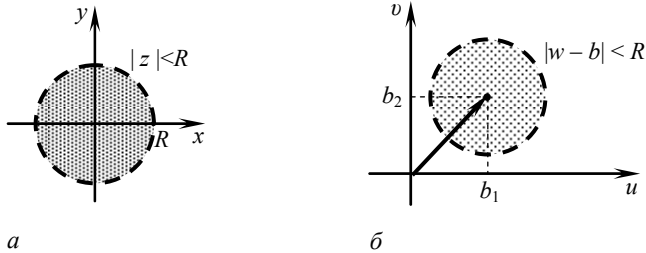


Рис. 3.5

Покладемо

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Тоді задане відображення запишеться у вигляді двох рівностей

$$\rho = r^2, \quad \theta = 2\varphi.$$

Із цих рівностей випливає, що при заданому відображенні всі точки  $z$ , які лежать на промені  $\varphi = \varphi_0$  ( $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$ ), перейдуть у точки  $w$ , що лежать на промені  $\theta = 2\varphi$ ; точки  $z$ , що лежать на колі  $|z| = R$ , перейдуть у точки  $w$ , що лежать на колі  $|w| = R^2$ .

Якщо на комплексній площині  $Z$  розглянути область  $D$ , визначену нерівністю  $\text{Im } z > 0$ , то її образом при відображенні  $w = z^2$  буде вся комплексна площина  $W$  з вирізаним променем  $\arg w = 0$ . У цьому разі задане відображення буде взаємно однозначним в області  $D$  і, отже, функція  $w = z^2$  буде однолисною в області  $\text{Im } z > 0$ .

10. Нехай  $w = \frac{1}{2i} \left( \frac{z}{\bar{z}} - \frac{\bar{z}}{z} \right)$ . Покажіть, що  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  не існує.

*Розв'язання.* Якщо границя існує, то вона не залежить від способу наближення довільної точки  $z$  до точки  $z = 0$ . Рухатимемося до нуля вздовж будь-якого променя  $re^{i\varphi}$ . Тоді  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2i} \left( \frac{re^{i\varphi}}{re^{-i\varphi}} - \frac{re^{-i\varphi}}{re^{i\varphi}} \right) = \sin 2\varphi$ , тобто ці границі різні для різних напрямків, отже, границя не існує.

11. Дослідіть ряди на збіжність:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}.$$

Розв'язання: а) запишемо ряд у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n + i \sin n}{n^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^4} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}.$$

Оскільки обидва ряди  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^4}$  збіжні, то вихідний ряд також збіжний;

б) скориставшись формулою Ейлера, виконаємо перетворення

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{i\pi}{n} + i \sin \frac{i\pi}{n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{i\pi}{n}}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n}.$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi}{n}}{n}$  збіжний (достатньо порівняти із збіжним узагальненим

гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ), а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{i\pi}{n}}{n}$  — розбіжний (порівняйте з гармонічним рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ). Отже, заданий ряд розбіжний.

**12.** Знайдіть область збіжності функціональних рядів:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-i)^n}$ ; б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ ; в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{2n}}{3^n}$ .

Розв'язання: а) використовуючи ознаку Д'Аламбера, дістанемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{(z-i)^{n+1}} \cdot \frac{(z-i)^n}{n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{|z-i|} = \frac{1}{|z-i|} < 1.$$

Звідси випливає, що ряд збігається абсолютно поза кругом радіуса  $R=1$  з центром у точці  $z=i$ , тобто при  $|z-i| > 1$ . На колі  $|z-i| = 1$  ряд, очевидно, розбігається;

б) скористаємось ознакою Д'Аламбера. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{z^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \cdot |z| = |z|.$$

Отже, в крузі  $|z| < 1$  ряд збігається. На межі круга, тобто при  $|z| = 1$ , дістаємо також збіжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty \quad (p = 2 > 1).$$

Як наслідок, заданий ряд збігається в замкненому крузі  $|z| \leq 1$ ;

в) за радикальною ознакою Коші знаходимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(z+2)^{2n}}{3^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(z+2)^2|}{3} = \frac{|z+2|^2}{3}.$$

Нерівність  $\frac{|z+2|^2}{3} < 1$  виконується для всіх точок  $z$ , що належать кругу  $|z+2| < \sqrt{3}$ . Далі, на межі круга, тобто за умови  $|z+2| = \sqrt{3}$ , маємо розбіжний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ . Отже, ряд збігається у крузі  $|z+2| < \sqrt{3}$ .

**13.** Запишіть у алгебраїчній формі вирази:

а)  $\sin i$ ; б)  $\operatorname{ch}(2-3i)$ ; в)  $\operatorname{Ln}(3+2i)$ ; г)  $i^i$ .

*Розв'язання:* а) маємо

$$\sin i = \frac{e^{i \cdot i} - e^{-i \cdot i}}{2i} = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} = i \frac{e^{-1} - e^1}{2i^2} = i \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = i \operatorname{sh} 1;$$

б) виконаємо рівносильні перетворення

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2-3i) &= \frac{e^{2-3i} + e^{-2+3i}}{2} = \frac{1}{2} (e^2(\cos 3 - i \sin 3) + e^{-2}(\cos 3 + i \sin 3)) = \\ &= \cos 3 \cdot \frac{e^2 + e^{-2}}{2} - i \sin 3 \cdot \frac{e^2 - e^{-2}}{2} = \cos 3 \operatorname{ch} 2 - i \sin 3 \operatorname{sh} 2; \end{aligned}$$

в) за означенням  $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$ . Знаходимо модуль і аргумент числа  $z = 3 + 2i$ :  $|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ ,  $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ . Отже,  $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi k$ ;  $\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}(3+2i) = \ln \sqrt{13} + i(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + 2\pi k)$ ;

г) за означенням  $i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}$ . Оскільки  $\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg i + 2\pi k)$ ,  $\ln|i| = \ln 1 = 0$ ,  $\arg i = \frac{\pi}{2}$ , то  $\operatorname{Ln} i = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ ,  $i^i = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)}$ ,  $k \in Z$ . Отже,  $i^i$  — нескінченний набір дійсних чисел.

**14.** Виведіть формулу для функції  $\operatorname{Arccos} z$  та обчисліть  $\operatorname{Arccos} 2$ .

*Розв'язання.* Оскільки рівняння  $w = \operatorname{Arccos} z$  рівносильне рівнянню  $\cos w = z$ , то  $z = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}$ , або  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$ . Звідси дістаємо  $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$  (перед коренем не ставимо знак  $\pm$ , оскільки функція  $\sqrt{z^2 - 1}$  є двозначною). Прологарифмувавши обидві частини останнього рівняння, дістанемо

$$iw = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}), \text{ або } w = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Скориставшись означенням логарифмічної функції, для  $z = 2$  маємо

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k.$$

**15.** Запишіть в алгебраїчній формі число  $\operatorname{arctg}(1 - i)$ .

*Розв'язання.* За означенням

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}.$$

Тоді для  $z = 1 - i$  дістаємо

$$\operatorname{Arctg}(1 - i) = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+i(1-i)}{1-i(1-i)} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{2+i}{-i} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln}(-1+2i).$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(-1+2i) &= \ln|-1+2i| + i \arg(-1+2i) + 2\pi ki = \\ &= \ln\sqrt{5} + i(-\operatorname{arctg} 2 + \pi) + 2\pi ki. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctg}(1-i) &= -\frac{i}{2} (\ln\sqrt{5} + i(-\operatorname{arctg} 2 + \pi) + 2\pi ki) = \\ &= \frac{1}{2} (-\operatorname{arctg} 2 + \pi(2k+1)) - i \frac{\ln 5}{4}. \end{aligned}$$

**19.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sin z = 3$ ; б)  $e^z + i = 0$ .

Розв'язання: а) розв'язок рівняння визначається за формулою

$$z = \operatorname{Arcsin} 3.$$

За означенням  $\operatorname{Arcsin} 3 = -i \operatorname{Ln} \left( i3 + \sqrt{1-3^2} \right) = -i \operatorname{Ln} \left( 3i + \sqrt{-8} \right)$ . Враховуючи, що  $\sqrt{-8} = \pm 2\sqrt{2}i$ , дістанемо

$$\operatorname{Arcsin} 3 = -i \operatorname{Ln} \left( (3 + 2\sqrt{2})i \right) \text{ або } \operatorname{Arcsin} 3 = -i \operatorname{Ln} \left( (3 - 2\sqrt{2})i \right).$$

Оскільки числа  $3 + \sqrt{8}$  додатні, тому  $\arg \left( (3 + \sqrt{8})i \right) = \arg \left( (3 - \sqrt{8})i \right) = \frac{\pi}{2}$ ,

тоді  $\operatorname{Ln} \left( (3 \pm \sqrt{8})i \right) = \ln \left( 3 \pm \sqrt{8} \right) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ .

Отже, задане рівняння має нескінченну кількість коренів, що визначаються формулою

$$z = -i \left( \ln \left( 3 \pm \sqrt{8} \right) + \frac{\pi}{2}i + 2\pi ki \right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln \left( 3 \pm \sqrt{8} \right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

б)  $e^z = -i$ . Звідси  $z = \operatorname{Ln}(-i)$ . Маємо

$$z = \operatorname{Ln}(-i) = \ln 1 + i \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = i \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right).$$

### **Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Запишіть у показниковій формі числа:

1)  $z = -2$ ; 2)  $z = i$ ; 3)  $z = -1 - i\sqrt{3}$ ; 4)  $z = \sin \alpha - i \cos \alpha$  ( $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ).

2. Запишіть у тригонометричній формі числа і зобразіть їх на комплексній площині:

1)  $z = 2$ ; 2)  $z = -2$ ; 3)  $z = 2i$ ; 4)  $z = -2i$ ;  
5)  $z = 1 + i$ ; 6)  $z = -1 + i$ ; 7)  $z = 1 - i$ ; 8)  $z = -1 - i$ .

3. Обчисліть, результат зобразіть на комплексній площині:

1)  $i + i^2 + i^3 + i^4$ ;      2)  $i^1 \cdot i^2 \cdot \dots \cdot i^{99} \cdot i^{100}$ ;      3)  $\frac{4}{1+3i}$ ;  
4)  $(\sqrt{8} - i)^2$ ;      5)  $(\sqrt{2} + i)^3$ ;      6)  $(2 + i\sqrt{3})^5$ ;  
7)  $(\sqrt{3} + 3i)^6$ ;      8)  $\frac{1}{i^{21}} - \frac{1}{i^{31}} - \frac{1}{i^{41}}$ ;      9)  $\frac{i+1}{1-i}$ .

4. Визначте усі корені, результат зобразіть на комплексній площині:

- 1)  $\sqrt{i}$ ; 2)  $\sqrt{-i}$ ; 3)  $\sqrt{1+i}$ ; 4)  $\sqrt{3+4i}$ ; 5)  $\sqrt[3]{i}$ ;  
6)  $\sqrt[3]{-i}$ ; 7)  $\sqrt[3]{1}$ ; 8)  $\sqrt[4]{-1}$ ; 9)  $\sqrt[4]{1}$ ; 10)  $\sqrt[6]{1}$ .

5. Визначте дійсну та уявну частину комплексного числа  $z$ :

- 1)  $z = \frac{9+2i}{4-i} - \frac{2-5i}{5+2i} + \frac{1}{i}$ ; 2)  $z = \frac{(1-3i)^3}{i} + i^{21}$ ;  
3)  $z = \frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$ ; 4)  $z = \frac{3+i}{3-i} + \frac{3-i}{3+i}$ ;  
5)  $z = \frac{(1+i)(2+i)}{2-i} - \frac{(1-i)(2-i)}{2+i}$ ; 6)  $z = (2-i)^2 + (1+i)^4 - \frac{7-i}{2+i}$ .

6. Доведіть рівності:

- 1)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ ; 2)  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ ; 3)  $|\bar{z}| = |z|$ .

7. Розв'яжіть рівняння:

- 1)  $z^3 + 27 = 0$ ; 2)  $z^2 + 4z + 29 = 0$ ; 3)  $2z^2 - (5-i)z + 6 = 0$ ;  
4)  $(1+i)z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$ ; 5)  $z^2 - 2(i-1)z + 1 - 2i = 0$ ;  
6)  $|z| + iz = 1 - 2i$ ; 7)  $|z| + 2z + 1 = 0$ .

8. Визначте криві, які задані рівняннями:

- 1)  $|z-a| = R$ ; 2)  $\arg z = \alpha$  ( $\alpha \in (-\pi; \pi]$ ); 3)  $\left| \frac{z-2}{z-3} \right| = 1$ ;  
4)  $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$ ; 5)  $|z+2| + |z-2| = 5$ ; 6)  $|z-i| + |z+i| = 4$ ;  
7)  $|z+2i| = |z|$ ; 8)  $|z-2| = |1-2\bar{z}|$ ; 9)  $1+z = |z+i|$ ;  
10)  $\operatorname{Im} z^2 = 2$ . 11)  $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$ .

9. Зобразіть на комплексній площині множини:

- 1)  $|z| > 4$ ; 2)  $|z| < 1$ ; 3)  $|z| \geq 1$ ; 4)  $|z-i| > 1$ ;  
5)  $|z+i| \leq 0$ ; 6)  $|z+i-2| < 4$ ; 7)  $0 < |z+i| < 2$ ;  
8)  $1 < |z-3+4i| \leq 2$ ; 9)  $2 < |z-i| < \infty$ ; 10)  $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{2}$ .

10. Запишіть у комплексній формі рівняння таких ліній:

- 1) координатних осей  $Ox$  та  $Oy$ ; 2) прямої  $y = x$ ;  
3) кола  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ .

11. Знайдіть дійсну й уявну частину функції:

- 1)  $f(z) = iz + 2z^2$ ;      2)  $f(z) = 2i - z + iz^2$ ;  
3)  $f(z) = \frac{z+i}{i-z}$ ;      4)  $f(z) = \frac{\bar{z}}{i} + \frac{i}{z}$ .

12. Задана функція  $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ . Знайдіть:

- 1)  $f(1+i)$ ;      2)  $f(i)$ ;      3)  $f(3-2i)$ .

13. Знайдіть радіус збіжності кожного з функціональних рядів.

- 1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ ;      2)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ ;      3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} z^n$ ;  
4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ ;      5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 z^n}{(n+1)!}$ ;      6)  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$ .

14. Визначте значення функції  $f(z) = e^z$  у точках:

- 1)  $z = \frac{\pi i}{2}$ ; 2)  $z = \pi(1-i)$ ; 3)  $z = 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ .

15. Подайте комплексні числа в алгебраїчній формі.

- 1)  $\operatorname{Ln}(-\sqrt{3}-i)$ ; 2)  $3^{-1+i}$ ; 3)  $\cos(-\sqrt{3}-i)$ ; 4)  $\operatorname{sh}(2-3i)$ .

16. Виконайте дії і запишіть комплексне число  $z$  у тригонометричній та показниковій формах, розглядаючи аргументи комплексних чисел як головні значення:

- 1)  $z = (\ln i)^i$ ;      2)  $z = ((-1)^i + i)^i$ ;  
3)  $z = \frac{\cos i - i \sin i}{\sin i - i \cos i}$ ;      4)  $z = 1 + i(\sqrt{3})^i$ ;  
5)  $z = 2^{2+i}\left(e^{i\pi/4} - 1\right)$ ;      6)  $z = \cos(i + (-1)^i)$ ;  
7)  $z = \frac{2^i + \ln i}{\ln 2 + i^i}$ ;      8)  $z = (-1)^{\left(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}\right)}$ .



### 17. Розв'яжіть рівняння.

- 1)  $\sin z = 2$ ;      2)  $\cos z = -2$ ;      3)  $\sin z = i$ ;      4)  $\cos z = 0$ ;  
 5)  $e^{ix} = \cos \pi x$ ;      6)  $\operatorname{sh} z = i$ ;      7)  $\operatorname{tg} z = \frac{i}{3}$ ;      8)  $\operatorname{ch} z = 0$ .

### Відповіді

1. 1)  $2e^{i\pi}$ ; 2)  $1e^{i\pi/2}$ ; 3)  $2e^{2\pi i/3}$ ; 4)  $\exp((\alpha - \frac{\pi}{2})i)$ . 2. 1)  $2(\cos 0 + i \sin 0)$ ; 2)  $2(\cos \pi + i \sin \pi)$ ;  
 3)  $2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$ ; 4)  $2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}))$ ; 5)  $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ; 6)  $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ ;  
 7)  $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}))$ ; 8)  $\sqrt{2}(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + i \sin(-\frac{3\pi}{4}))$ . 3. 1) 0; 2) -1; 3)  $\frac{2-6i}{5}$ ; 4)  $7-4\sqrt{2}i$ ;  
 5)  $-\sqrt{2}+5i$ ; 6)  $-118-31\sqrt{3}i$ ; 7) 1728; 8)  $-i$ ; 9)  $i$ . 4. 1)  $\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}$ ; 2)  $\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$ ;  
 $-\frac{\sqrt{2}(1-i)}{2}$ ; 3)  $\pm\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})$ ; 4)  $5(\cos \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\arctg \frac{4}{3} + 2k\pi}{2})$  ( $k=0, 1$ );  
 5)  $\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}$  ( $k=0, 1, 2$ ); 6)  $\cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}$  ( $k=0, 1, 2$ );  
 7) 1,  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ ; 8)  $\cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}$  ( $k=0, 1, 2, 3$ ); 9)  $\pm 1$ ;  $\pm i$ ; 10)  $\cos \frac{k\pi}{3} +$   
 $+i \sin \frac{k\pi}{3}$  ( $k=0, 1, \dots, 5$ ). 5. 1)  $\operatorname{Re} z = 2$ ,  $\operatorname{Im} z = 1$ ; 2)  $\operatorname{Re} z = 18$ ,  $\operatorname{Im} z = 27$ ; 3)  $\operatorname{Re} z = \frac{22}{159}$ ,  
 $\operatorname{Im} z = -\frac{5}{318}$ ; 4)  $\operatorname{Re} z = \frac{8}{5}$ ,  $\operatorname{Im} z = 0$ ; 5)  $\operatorname{Re} z = 0$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{14}{6}$ ; 6)  $\operatorname{Re} z = -\frac{18}{5}$ ,  $\operatorname{Im} z = -\frac{11}{5}$ .  
 7. 1)  $\{-3; \pm \frac{3}{2}(1+i\sqrt{3})\}$ ; 2)  $\{-2 \pm 5i\}$ ; 3)  $\{1+i; \frac{3}{2}(1-i)\}$ ; 4)  $\{1+i; \frac{1}{2}(1-3i)\}$ ; 5)  $\{-1; -1+2i\}$ ;  
 10)  $\{-2 + \frac{3}{2}i\}$ ; 11)  $\{-1\}$ . 8. 1) коло з центром у точці  $a$  радіуса  $R$ ; 2) промінь, що виходить  
 з початку координат та утворює з додатним напрямом дійсної осі кут  $\alpha$ ; 3) пряма  $x = \frac{5}{2}$ ;  
 4) дійсна вісь; 5) еліпс із фокусами в точках  $z = \pm 2$  і більшою піввіссю  $\frac{5}{2}$ ; 6) еліпс  
 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ ; 7) пряма  $y = 1$ ; 8) коло  $x^2 + y^2 = 1$ ; 9) точка  $(0, 0)$ ; 10) гіпербола  $xy = 1$ ;  
 11) пряма  $x - y - 2 = 0$ . 9. 1) точки площини  $Z$ , що розміщені зовні кола  $x^2 + y^2 = 1$ ; 2) точки  
 площини  $Z$ , що розміщені всередині кола одиничного радіуса з центром на початку координат;  
 3) точки площини  $Z$ , що розміщені на колі  $x^2 + y^2 = 1$  і зовні нього; 4) точки площини  
 $Z$ , що розміщені зовні кола  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ ; 5) точка  $x = 0$ ,  $y = -1$ ; 6) точки площини  $Z$ ,  
 що розміщені всередині кола  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$ ; 7) внутрішня частина круга радіусом 2 з

виколотим центром  $z_0 = -i$ ; 8) концентричне кільце, що обмежене колами з радіусами  $R_1 = 1$  і  $R_2 = 2$  з центром у точці  $z_0 = 3 - 4i$ ; коло меншого радіуса не належить множині; 9) зовнішність круга радіуса 2 з центром у точці  $z_0 = i$  і виколотою нескінченно віддаленою точкою; 10) сектор  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ . **10.** 1)  $z - \bar{z} = 0$ ,  $z + \bar{z} = 0$ ; 2)  $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$ ; 3)  $z\bar{z} + z + \bar{z} = 0$ .

**11.** 1)  $u = 2x^2 - 2y^2 + y$ ,  $v = x + 4xy$ ; 2)  $u = -2xy - x$ ,  $v = x^2 - y^2 - y + 2$ ; 3)  $u = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 - (1 - y)^2}$ ,  
 $v = -\frac{2x}{x^2 - (1 - y)^2}$ ; 4)  $u = -\frac{y(x^2 + y^2 + 1)}{x^2 + y^2}$ ,  $v = \frac{x(1 - x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$ . **12.**  $(1 + i)/2$ ;  $i$ ;  $(3 - 2i)/13$ . **13.** 1) 1;

2) 0; 3) 3; 4)  $e$ ; 5)  $\infty$ ; 6)  $\frac{1}{2}$ . **14.** 1)  $i$ ; 2)  $-e^\pi$ ; 3)  $ei$ . **15.** 1)  $\ln 2 + i(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$ ; 2)  $\frac{e^{-2\pi k}}{3}(\cos \ln 3 + i \sin \ln 3)$ ; 3)  $\cos \sqrt{3} \operatorname{ch} 1 - i \sin \sqrt{3} \operatorname{sh} 1$ ; 4)  $\operatorname{sh} 2 \cos 3 - i \operatorname{ch} 2 \sin 3$ . **16.** 1)  $e^{-\frac{\pi}{2}(\cos \ln \frac{\pi}{2} + \sin \ln \frac{\pi}{2})}$ ;

2)  $e^{-\arctg e^{-\pi}}(\cos \frac{\ln(e^{-2\pi} + 1)}{2} + i \sin \frac{\ln(e^{-2\pi} + 1)}{2})$ ; 3)  $i(\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1)^2$ ; 4)  $1 - \sin \ln \sqrt{3} + i \cos \ln \sqrt{3}$ ;

5)  $4(-\cos \ln 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \ln 2 + \sin \ln 2) + i(-\sin \ln 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \ln 2 - \sin \ln 2)))$ ; 6)  $\operatorname{ch} \cos e^{-\pi} - i \operatorname{sh} \sin e^{-\pi}$ ;

7)  $\frac{\cos \ln 2 + i(\sin \ln 2 + \frac{\pi}{2})}{\ln 2 + e^{-\frac{\pi}{2}}}$ ; 8)  $e^{-\frac{\pi}{2}}(\cos \frac{\sqrt{3}\pi}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}\pi}{2})$ . **17.** 1)  $z_1 = (2k + \frac{1}{2})\pi - i \ln(2 + \sqrt{3})$ ,

$z_2 = (2k + \frac{1}{2})\pi - i \ln(2 - \sqrt{3})$ ,  $k \in Z$ ; 2)  $z = -i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\pi ki$ ,  $k \in Z$ ; 3)  $z_1 = 2k\pi - i \ln(\sqrt{2} - 1)$ ,

$z_2 = (2k + 1)\pi - i \ln(\sqrt{2} + 1)$ ,  $k \in Z$ ; 4)  $z = (2k \pm \frac{1}{2})\pi$ ,  $k \in Z$ ; 5)  $x = 0$ ; 6)  $z = (2k + \frac{1}{2})\pi i$ ,  $k \in Z$ ;

7)  $z = k\pi + \frac{i}{2} \ln 2$ ,  $k \in Z$ ; 8)  $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}i$ ,  $k \in Z$ .

**Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ**

**1.1.** Знайдіть усі значення кореня і зобразіть їх на комплексній площині:

- |                                   |                                     |  |
|-----------------------------------|-------------------------------------|--|
| <b>1.1.1.</b> $\sqrt[4]{-1}$ .    | <b>1.1.2.</b> $\sqrt[4]{16i}$ .     | <b>1.1.3.</b> $\sqrt[3]{8i}$ .                   |
| <b>1.1.4.</b> $\sqrt[3]{-27i}$ .  | <b>1.1.5.</b> $\sqrt[3]{125}$ .     | <b>1.1.6.</b> $\sqrt[4]{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$ . |
| <b>1.1.7.</b> $\sqrt[5]{32}$ .    | <b>1.1.8.</b> $\sqrt[4]{-81}$ .     | <b>1.1.9.</b> $\sqrt[3]{-125}$ .                 |
| <b>1.1.10.</b> $\sqrt[4]{81}$ .   | <b>1.1.11.</b> $\sqrt[3]{-1 + i}$ . | <b>1.1.12.</b> $\sqrt[3]{-i}$ .                  |
| <b>1.1.13.</b> $\sqrt[3]{125i}$ . | <b>1.1.14.</b> $\sqrt[4]{81i}$ .    | <b>1.1.15.</b> $\sqrt[5]{32i}$ .                 |
| <b>1.1.16.</b> $\sqrt[4]{-81i}$ . | <b>1.1.17.</b> $\sqrt[3]{-27i}$ .   | <b>1.1.18.</b> $\sqrt[4]{256i}$ .                |

- |                                |                            |                                     |
|--------------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 1.1.19. $\sqrt[3]{-64i}$ .     | 1.1.20. $\sqrt[4]{16}$ .   | 1.1.21. $\sqrt[3]{i}$ .             |
| 1.1.22. $\sqrt{1-\sqrt{3}i}$ . | 1.1.23. $\sqrt{-i}$ .      | 1.1.24. $\sqrt{i+1}$ .              |
| 1.1.25. $\sqrt{i}$ .           | 1.1.26. $\sqrt{i-1}$ .     | 1.1.27. $\sqrt[3]{8-8i}$ .          |
| 1.1.28. $\sqrt[5]{-32i}$ .     | 1.1.29. $\sqrt[3]{-i/8}$ . | 1.1.30. $\sqrt[3]{-8-i8\sqrt{3}}$ . |

1.2. Зобразіть область, яка задається нерівностями.

- |                              |   |
|------------------------------|---|
| 1.2.1. $ z-1  \leq 1$ ,      | $ z+1  > 2$ .   |
| 1.2.2. $z\bar{z} \leq 2$ ,   | $\operatorname{Re} z > -1, \operatorname{Im} z < 1$ .               |
| 1.2.3. $ z-i  \leq 2$ ,      | $\operatorname{Re} z > 1$ .   |
| 1.2.4. $ z+1  \geq 1$ ,      | $ z+i  < 1$ .   |
| 1.2.5. $ z+1  < 1$ ,         | $ z-i  \leq 1$ .  |
| 1.2.6. $ z+i  \leq 2$ ,      | $ z-i  > 2$ .   |
| 1.2.7. $ z-1-i  \leq 1$ ,    | $\operatorname{Im} z > 1, \operatorname{Re} z \geq 1$ .             |
| 1.2.8. $ z-1+i  \geq 1$ ,    | $\operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z \leq -1$ .            |
| 1.2.9. $ z-2-i  \leq 2$ ,    | $\operatorname{Re} z \geq 3, \operatorname{Im} z < 1$ .             |
| 1.2.10. $ z-1-i  \geq 1$ ,   | $0 \leq \operatorname{Re} z < 2, 0 < \operatorname{Im} z \leq 2$ .  |
| 1.2.11. $ z+i  < 2$ ,        | $0 < \operatorname{Re} z \leq 1$ .                                  |
| 1.2.12. $ z-i  \leq 1$ ,     | $0 < \arg z < \pi/4$ .  |
| 1.2.13. $ z-i  \leq 2$ ,     | $0 < \operatorname{Im} z < 2$ .                                     |
| 1.2.14. $ z+i  > 1$ ,        | $-\pi/4 \leq \arg z < 0$ .  |
| 1.2.15. $ z-1-i  < 1$ ,      | $ \arg z  \leq \pi/4$ .   |
| 1.2.16. $ z  < 2$ ,          | $-\pi/4 \leq \arg(z-1) \leq \pi/4$ .                                |
| 1.2.17. $ z  \leq 1$ ,       | $\arg(z+i) > \pi/4$ .   |
| 1.2.18. $1 <  z-1  \leq 2$ , | $\operatorname{Im} z \geq 0, \operatorname{Re} z < 1$ .             |
| 1.2.19. $1 \leq  z-i  < 2$ , | $\operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z > 1$ .             |
| 1.2.20. $ z  < 2$ ,          | $\operatorname{Re} z \geq 1, \arg z < \pi/4$ .                      |
| 1.2.21. $ z  > 1$ ,          | $-1 < \operatorname{Im} z \leq 1, 0 < \operatorname{Re} z \leq 2$ . |
| 1.2.22. $ z-1  > 1$ ,        | $-1 \leq \operatorname{Im} z < 0, 0 \leq \operatorname{Re} z < 3$ . |
| 1.2.23. $ z+i  < 1$ ,        | $-3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/4$ .                                 |
| 1.2.24. $ z-i  \leq 1$ ,     | $-\pi/2 < \arg(z-i) < \pi/4$ .                                      |
| 1.2.25. $z\bar{z} < 2$ ,     | $\operatorname{Re} z \leq 1, \operatorname{Im} z > -1$ .            |
| 1.2.26. $ z+i  \geq 1$ ,     | $ z  < 2$ .   |
| 1.2.27. $1 < z\bar{z} < 2$ , | $\operatorname{Re} z > 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$ .      |
| 1.2.28. $ z-1  < 1$ ,        | $\arg z \leq \pi/4, \arg(z-1) > \pi/4$ .                            |
| 1.2.29. $ z-i  < 1$ ,        | $\arg z \geq \pi/4, \arg(z+1-i) \leq \pi/4$ .                       |
| 1.2.30. $ z-2-i  \geq 1$ ,   | $1 \leq \operatorname{Re} z < 3, 0 < \operatorname{Im} z \leq 3$ .  |

1.3. Визначте вид кривої і зобразіть її у площині  $Oxy$ .

1.3.1.  $z = 3 \sec t + i 2 \operatorname{tg} t$ .

1.3.2.  $z = 2 \sec t - i 3 \operatorname{tg} t$ .

1.3.3.  $z = -\sec t + i 3 \operatorname{tg} t$ .

1.3.4.  $z = 4 \operatorname{tg} t - i 3 \sec t$ .

1.3.5.  $z = 3 \operatorname{tg} t + i 4 \sec t$ .

1.3.6.  $z = -4 \operatorname{tg} t - i 2 \sec t$ .

1.3.7.  $z = 3 \operatorname{cosec} t + i 3 \operatorname{ctg} t$ .

1.3.8.  $z = 4 \operatorname{cosec} t - i 2 \operatorname{ctg} t$ .

1.3.9.  $z = \operatorname{ctg} t - i 2 \operatorname{cosec} t$ .

1.3.10.  $z = -\operatorname{ctg} t + i 3 \operatorname{cosec} t$ .

1.3.11.  $z = 3 \operatorname{ch} 2t + i 2 \operatorname{sh} 2t$ .

1.3.12.  $z = 2 \operatorname{ch} 3t - i 3 \operatorname{sh} 3t$ .

1.3.13.  $z = 5 \operatorname{sh} 4t + i 4 \operatorname{ch} 4t$ .

1.3.14.  $z = -4 \operatorname{sh} 5t - i 5 \operatorname{ch} 5t$ .

1.3.15.  $z = \frac{2}{\operatorname{ch} 2t} + i 4 \operatorname{th} 2t$ .

1.3.16.  $z = \frac{4}{\operatorname{ch} 4t} + i 2 \operatorname{th} 4t$ .

1.3.17.  $z = \operatorname{th} 5t + \frac{5i}{\operatorname{ch} 5t}$ .

1.3.18.  $z = \frac{1}{\operatorname{sh} t} - i \operatorname{cth} t$ .

1.3.19.  $z = 2e^{it} + 0,5e^{-it}$ .

1.3.20.  $z = 3e^{it} - 0,5e^{-it}$ .

1.3.21.  $z = -2e^{it} + e^{-it}$ .

1.3.22.  $z = 2e^{2it} - e^{-2it}$ .

1.3.23.  $z = 4 \cos t - 2i \sin t$ .

1.3.24.  $z = \frac{t-1+it}{t(t-1)}$ .

1.3.25.  $z = \frac{t-2+it}{t(t-2)}$ .

1.3.26.  $z = 2 \sin t + i \cos t$ .

1.3.27.  $z = \sec t + (1 + \operatorname{tg}^2 t)i$ .

1.3.28.  $z = t^2 + 2t + 5 + i(t^2 + 2t)$ .

1.3.29.  $z = 2t^2 + 2t + 1 - i(t^2 + t + 4)$ .

1.3.30.  $z = \cos \operatorname{ec} t + (1 + \operatorname{ctg}^2 t)i$ .

1.4. Визначте області збіжності рядів.

1.4.1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3} + i)^n}{z^n}$ .

1.4.2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}$ .

1.4.3.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(2+in)^n}$ .

1.4.4.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(z-1-i)^n}{3^n}$ .

1.4.5.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (z-2)^n}$ .

1.4.6.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3i)^n}{n^3 (1+i)^n}$ .

1.4.7.  $\sum_{n=0}^{\infty} 4^n (2z-1)^n$ .

1.4.8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n (z-2)^n}{(n+1)(n+2)}$ .

1.4.9.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2 (1+i)^n}$ .

1.4.10.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(z-1-i)^n}$ .

$$1.4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z-1+i)^n} . \quad 1.4.12. \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4+3i}{z-2i} \right)^n .$$

$$1.4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} . \quad 1.4.14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(\sqrt{3}+i)^n} .$$

$$1.4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\sin in} . \quad 1.4.16. \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nz} .$$

$$1.4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2}{(z-2)^n} . \quad 1.4.18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1+i)^{-n}}{(3+n)^n} .$$

$$1.4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in} . \quad 1.4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 1}{(z+2i)^n} .$$

$$1.4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i} . \quad 1.4.22. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n+i} .$$

$$1.4.23. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3+2n}{(n+i)^2} z^n . \quad 1.4.24. \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n .$$

$$1.4.25. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{2n}}{5^n + n} . \quad 1.4.26. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{3n}}{3^n + n^2} .$$

$$1.4.27. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} . \quad 1.4.28. \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n .$$

$$1.4.29. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!} . \quad 1.4.30. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} .$$

1.5. Обчислити дійсні та уявні частини, модулі та аргументи таких комплексних чисел:

$$1.5.1. \text{ а) } e^{3-2i}; \quad \text{ б) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2i\right); \quad \text{ в) } \operatorname{Arc} \sin 4 .$$

$$1.5.2. \text{ а) } e^{2+i\frac{\pi}{4}}; \quad \text{ б) } \cos\left(\frac{\pi}{3} + i\right); \quad \text{ в) } \operatorname{Arc} \cos 2 .$$

$$1.5.3. \text{ а) } i^{i+1}; \quad \text{ б) } \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4i\right); \quad \text{ в) } \operatorname{Arc} \operatorname{tg} 5i .$$

$$1.5.4. \text{ а) } 3^{1+i}; \quad \text{ б) } \operatorname{Ln}(-1+i); \quad \text{ в) } \operatorname{ctg} 2\pi i .$$

$$1.5.5. \text{ а) } e^{1+3\pi i}; \quad \text{ б) } \operatorname{Ln}(-4); \quad \text{ в) } \operatorname{tg} \pi i .$$

- 1.5.6. a)  $i^{i-1}$ ;                      б)  $\text{Ln}(1-i)$ ;                      в)  $\sin\left(\frac{\pi}{3}-i\right)$ .
- 1.5.7. a)  $i^{-i+2}$ ;                      б)  $\text{sh}(1+2i)$ ;                      в)  $\text{Arcsin}(2i)$ .
- 1.5.8. a)  $1^{-i}$ ;                      б)  $\text{ch}(1-i)$ ;                      в)  $\text{Arc cos } i$ .
- 1.5.9. a)  $i^{-i-1}$ ;                      б)  $\text{th}(2+i)$ ;                      в)  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+3i\right)$ .
- 1.5.10. a)  $\text{sh}(2+3i)$ ;                      б)  $\text{Ln}(\sqrt{3}-i)$ ;                      в)  $\text{tg}\frac{\pi}{2}i$ .
- 1.5.11. a)  $(1-i)^i$ ;                      б)  $\text{Arc cos}(-i)$ ;                      в)  $\text{tg}\frac{\pi}{3}i$ .
- 1.5.12. a)  $\text{Arctg } 2i$ ;                      б)  $3^{-i}$ ;                      в)  $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-i\right)$ .
- 1.5.13. a)  $i^{i^3}$ ;                      б)  $\text{Ln}(-\sqrt{3}-i)$ ;                      в)  $\text{tg}\frac{\pi}{3}i$ .
- 1.5.14. a)  $(1-i)^{i^3}$ ;                      б)  $2^i$ ;                      в)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}+2i\right)$ .
- 1.5.15. a)  $1^i$ ;                      б)  $\text{Ln}(-4i)$ ;                      в)  $\text{ctg}\frac{\pi}{2}i$ .
- 1.5.16. a)  $(1+i)^{1-i}$ ;                      б)  $\text{Ln}(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$ ;                      в)  $\sin\left(\frac{5\pi}{4}+3i\right)$ .
- 1.5.17. a)  $e^{1+\frac{2\pi}{3}i}$ ;                      б)  $\text{sh}(3-2i)$ ;                      в)  $\text{Arctg}(3i)$ .
- 1.5.18. a)  $2^{-i}$ ;                      б)  $\text{ch}(2+3i)$ ;                      в)  $\text{Arc cos}(2i)$ .
- 1.5.19. a)  $i^{-i-1}$ ;                      б)  $\text{th}(2-4i)$ ;                      в)  $\cos\left(\frac{5\pi}{6}+i\right)$ .
- 1.5.20. a)  $\text{ch}\left(\frac{i\pi}{2}\right)$ ;                      б)  $\text{Ln}(1+\sqrt{3}i)$ ;                      в)  $\text{ctg}\frac{\pi}{6}i$ .
- 1.5.21. a)  $\sin 2i$ ;                      б)  $(1-i)^i$ ;                      в)  $\text{tg}\frac{\pi}{6}i$ .
- 1.5.22. a)  $\text{th}(1+i)$ ;                      б)  $(1-i)^{-i}$ ;                      в)  $\cos\left(\frac{7\pi}{3}+2i\right)$ .
- 1.5.23. a)  $\text{Ln}(ei)$ ;                      б)  $(-1-i)^i$ ;                      в)  $\text{tg}\frac{5\pi}{3}i$ .
- 1.5.24. a)  $(i+1)^i$ ;                      б)  $\text{Ln}(-1-\sqrt{3}i)$ ;                      в)  $\sin\left(3i-\frac{10\pi}{3}\right)$ .

- 1.5.25. a)  $e^{3+i\frac{\pi}{4}}$ ; б)  $\text{sh}(-1-2i)$ ; в)  $\text{Arccos}(4i)$ .  
 1.5.26. a)  $6^{-i}$ ; б)  $\text{ch}(1-3i)$ ; в)  $\text{Arc cos } 3i$ .  
 1.5.27. a)  $(i+1)^i$ ; б)  $\text{th}(2-3i)$ ; в)  $\cos\left(\frac{8\pi}{3}+2i\right)$ .  
 1.5.28. a)  $\cos(4+i)$ ; б)  $\text{Ln}(2\sqrt{3}-2i)$ ; в)  $\text{ctg}\frac{\pi}{4}i$ .  
 1.5.29. a)  $\text{ctg}\pi i$ ; б)  $(1-\sqrt{3}i)^i$ ; в)  $\text{Arc cos}(-3i)$ .  
 1.5.30. a)  $\text{Ln}(1-\sqrt{3}i)$ ; б)  $(1-\sqrt{3}i)^{-i}$ ; в)  $\cos\left(\frac{13\pi}{3}+i\right)$ .

1.6. Виділіть дійсну та уявну частини функцій.

- 1.6.1.  $f(z) = e^{-z}$ .                      1.6.2.  $f(z) = \sin 3z$ .  
 1.6.3.  $f(z) = e^{z^2}$ .                      1.6.4.  $f(z) = \sin 3z \sin z$ .  
 1.6.5.  $f(z) = \cos 4z$ .                      1.6.6.  $f(z) = z \ln z$ .  
 1.6.7.  $f(z) = ze^z$ .                      1.6.8.  $f(z) = z^2 \cos z$ .  
 1.6.9.  $f(z) = z^2 \sin z$ .                      1.6.10.  $f(z) = \text{Ln } z$ .  
 1.6.11.  $f(z) = \text{sh}(z+2i)$ .                      1.6.12.  $f(z) = z^3 \ln z$ .  
 1.6.13.  $f(z) = (2+i)z^2 - 3\bar{z}$ .                      1.6.14.  $f(z) = e^{\bar{z}^2}$ .  
 1.6.15.  $f(z) = (2-i)z^2$ .                      1.6.16.  $f(z) = (1+i)z^3$ .  
 1.6.17.  $f(z) = z \sin z$ .                      1.6.18.  $f(z) = z \cos z$ .  
 1.6.19.  $f(z) = z^2 e^{\bar{z}}$ .                      1.6.20.  $f(z) = \cos(z+i)$ .  
 1.6.21.  $f(z) = \frac{e^z}{z}$ .                      1.6.22.  $f(z) = \frac{z}{|z|}$ .  
 1.6.23.  $f(z) = 2z^2 + 3z - 4iz$ .                      1.6.24.  $f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$ .  
 1.6.25.  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z^2}$ .                      1.6.26.  $f(z) = \frac{e^{-z}}{\bar{z}}$ .  
 1.6.27.  $f(z) = \text{Re}(\sin z)\cos z$ .                      1.6.28.  $f(z) = \text{Re}(\cos z)\sin z$ .  
 1.6.29.  $f(z) = \text{cth } z$ .                      1.6.30.  $f(z) = |z|(\text{Re } z + i\text{Im } z^2)$ .

## Тема 2. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ТА ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

Диференційовність, аналітичність функції. Умови Коші—Рімана. Гармонічні функції. Інтегрування функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Формула Ньютона—Лейбніца.



**Література:** [4, розділ 1, пп.1.4—1.6], [5, гл.1, пп.1.4—1.6], [12, розділ 30, §1—3], [13, розділ 1, §3—5], [15, розділ 15, п. 15.2], [17, розділ 8, §28—29].

### Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 2.1. Диференціювання функції комплексної змінної. Умови Коші—Рімана. Гармонічні функції

Нехай однозначна функція  $w = f(z)$  визначена в області  $D$  і нехай точка  $z$  належить цій області. *Похідною*  $f'(z)$  у точці  $z$  називають границю відношення приросту функції  $f(z)$  у точці  $z$  до приросту аргументу  $\Delta z$ , коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функцію  $f(z)$ , яка має в точці  $z \in D$  скінченну похідну  $f'(z)$ , називають *диференційовною* в цій точці. Функцію, диференційовну в кожній точці області, називають диференційовною в цій області.

#### Теорема 1

Якщо функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  визначена в деякому околі точки  $z = x + iy$ , причому в цій точці дійсні функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  диференційовні, то для диференційовності функції  $w = f(z)$  у точці  $z = x + iy$  необхідно і достатньо, щоб у цій точці виконувались рівності (умови Коші—Рімана):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Якщо виконано всі умови теореми, то похідну диференційовної функції  $f(z)$  можна обчислити за однією з формул:



$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Одне з найважливіших понять у теорії функції комплексної змінної — поняття аналітичної функції.

Однозначну функцію  $f(z)$  називають *аналітичною* в точці  $z$ , якщо вона диференційовна (виконуються умови Коші—Рімана) в деякому околі цієї точки. Функцію  $f(z)$  називають *аналітичною* в області  $D$ , якщо вона диференційовна в кожній точці цієї області.

Точки  $Z$ -площини, в яких однозначна функція  $f(z)$  аналітична, називають *правильними* точками цієї функції, а ті точки, в яких функція не є аналітичною, називають *особливими* точками.

Із властивостей диференційовних функцій випливає, що многочлен

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n —$$

аналітична функція в усій комплексній площині.

Далі, якщо  $f(z)$  і  $\varphi(z)$  — аналітичні функції в області  $D$ , то в цій області будуть аналітичними також і функції  $cf(z)$ ,  $f(z) \pm \varphi(z)$ ,  $f(z) \cdot \varphi(z)$ . Частка  $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$

( $\varphi(z) \neq 0$ ) аналітична в області  $D^*$ , утвореній з області  $D$  виключенням з неї тих точок  $z$ , в яких функція  $\varphi(z)$  обертається в нуль. Тобто дробово-

раціональна функція  $f(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}$  є аналітичною функцією в

області, яку дістаємо з усієї комплексної площини виключенням тих її точок, в яких знаменник дробу дорівнює нулю.

## 2.2. Гармонічні функції

Диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

називають *рівнянням Лапласа*, а дійсну функцію  $\varphi(x, y)$ , яка має в області  $D$  неперервні частинні похідні другого порядку включно і задовольняє це рівняння, називають *гармонічною* функцією в цій області.

Якщо функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  аналітична в деякій області  $D$ , то дійсні функції  $u(x, y)$  та  $v(x, y)$  задовольняють рівняння Лапласа, тобто є *гармонічними*.

Гармонічні функції  $\varphi(x, y)$  і  $\psi(x, y)$  називають *спряженими*, якщо вони задовольняють умови Коші—Рімана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

**Теорема 2** Для того щоб функція  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  була аналітичною в області  $D$ , необхідно і достатньо, щоб її дійсна частина  $u(x, y)$  і уявна частина  $v(x, y)$  були спряженими гармонічними функціями в цій області.

За даною гармонічною в однозв'язній області  $D$  функцією  $u(x, y)$  можна знайти нескінченну множину аналітичних у цій області функцій з дійсною частиною  $u(x, y)$ . Уявну частину цих функцій визначають за формулою

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = \\ &= \int_{x_0}^x -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + c. \end{aligned}$$

Отже,

$$v(x, y) = \int_{x_0}^x -\frac{\partial u(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dy + c, \quad (3.10)$$

де  $c$  — довільна стала.

Аналогічно, нехай гармонічна функція  $v(x, y)$  є уявною частиною аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , тоді її дійсну частину знаходять за формулою:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{\partial v(x, y_0)}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} dy + c. \quad (3.11)$$



*Зауваження.* За точку  $(x_0, y_0)$  можна взяти будь-яку фіксовану точку площини, в якій підінтегральні функції існують. Найзручнішою при цьому є точка  $(0; 0)$ .

### 2.3. Геометричний зміст модуля й аргумента похідної

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в точці  $z_0$  і  $f'(z_0) \neq 0$ . Проведемо через точку  $z_0$  гладку криву  $l$ .

Нехай функція  $f(z)$  відображає точку  $z_0$  площини  $Z$  у точку  $w_0 = f(z_0)$  площини  $W$ , а криву  $l$  — у криву  $L$ . Візьмемо в околі точки  $z_0$  на кривій  $l$  довільну точку  $z_0 + \Delta z$  і будемо наближати цю точку до точки  $z_0$ . Тоді точка  $w + \Delta w$ , яка відповідає точці  $z + \Delta z$ , переміщуватиметься по кривій  $L$  до точки  $w_0$  (рис. 3.4).

За означенням похідної

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

Звідси випливають рівності

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|},$$

де  $|\Delta z| = |z - z_0|$  — відстань між точками  $z_0$  та  $z_0 + \Delta z$ , а  $|\Delta w| = |w - w_0|$  — відстань між точками  $w_0$  та  $w_0 + \Delta w$ . Отже, похідна  $|f'(z_0)|$  є границею відношення нескінченно малої відстані між точками  $w_0$  та  $w_0 + \Delta w$  до нескінченно малої відстані між точками  $z_0$  та  $z_0 + \Delta z$ . Унаслідок аналітичності функції  $f(z)$  ця границя не залежить від вибору кривої  $l$ , що проходить через точку  $z_0$ , тобто границя  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$  у точці  $z_0$  стала й однакою в будь-якому напрямку.

*Геометричний зміст модуля похідної:* величина  $|f'(z_0)|$  дорівнює коефіцієнту розтягу (подібності) в точці  $z_0$  при відображенні  $w = f(z)$ . Якщо  $|f'(z_0)| > 1$ , то величину називають *коефіцієнтом розтягу*; якщо  $|f'(z_0)| < 1$ , то — *коефіцієнтом стиску*.

Для аргументу похідної в точці  $z_0$  виконуються рівності:

$$\arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta w - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \Delta z = \alpha_2 - \alpha_1,$$

де  $\alpha_1$  та  $\alpha_2$  — кути, які утворюють дотичні до кривих  $l$  і  $L$  у точках  $z_0$  та  $w_0$  відповідно з додатними напрямками дійсних осей площин  $Z$  і  $W$ .

Звідси  $\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$ . Отже, аргумент похідної  $f'(z_0)$  геометрично дорівнює куту, на який треба повернути дотичну в точці  $z_0$  до будь-якої гладкої кривої на площині  $Z$ , що проходить через точку  $z_0$ , щоб дістати напрямок дотичної в точці  $w_0 = f(z_0)$  до образу цієї кривої на площині  $W$  при відображенні  $w = f(z)$ .

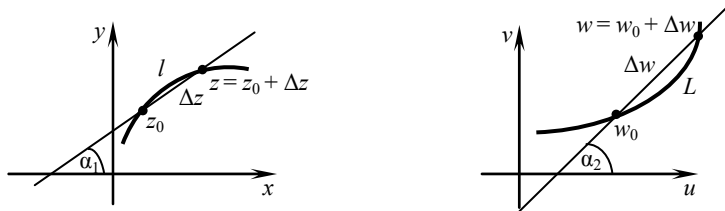


Рис. 3.4

## 2.4. Інтегрування функції комплексної змінної

Нехай однозначна функція  $f(z)$  визначена і неперервна в області  $D$ , а  $L$  — кусково-гладка крива, яка належить  $D$ .

Нехай  $z = x + iy$ ,  $f(z) = u + iv$ ,  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ .

Інтеграл від функції  $f(z)$  уздовж кривої  $L$  визначається так:

$$\boxed{\int_L f(z) dz = \int_L (u + iv)(dx + idy) = \int_L u dx - v dy + i \int_L v dx + u dy.} \quad (3.12)$$

Отже, інтеграл за комплексною змінною є сумою двох криволінійних інтегралів другого роду від функцій двох дійсних змінних.

Якщо функції  $u$  і  $v$  неперервні вздовж гладкої дуги, заданої параметрично:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , то

$$\int_L u dx - v dy = \int_{\alpha}^{\beta} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt,$$

$$\int_L v dx + u dy = \int_{\alpha}^{\beta} [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)] dt.$$

Враховуючи, що

$$u(x(t), y(t)) + i v(x(t), y(t)) = f(z(t)) \text{ і } z'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

можна записати:

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv)(x' + iy') dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t) dt. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) зводить обчислення інтеграла за комплексною змінною від функції  $f(z)$  до обчислення визначеного інтеграла на відрізку  $[\alpha; \beta]$  від дійсної змінної  $t$ .

Інтеграл  $\int_L f(z)dz$  існує для будь-якої неперервної функції  $f(z)$  і будь-якої гладкої кривої  $L$ .

**Теорема 3** (інтегральна теорема Коші). Якщо функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній області  $D$  і  $L$  — кусково-гладкий замкнений контур, що цілком міститься в  $D$ , то

$$\oint_L f(z)dz = 0. \quad (3.14)$$

Інтегральна теорема Коші справджується й у разі, коли область  $D$  є багатозв'язною (див. рис. 2.44).

**Теорема 4** Нехай багатозв'язна область  $D$  обмежена зовнішнім контуром  $L$ , орієнтованим проти ходу годинникової стрілки, і внутрішніми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_N$ , орієнтованими теж проти ходу годинникової стрілки, і нехай в  $\bar{D}$  задана аналітична функція  $f(z)$ . Тоді

$$\oint_L f(z)dz = \sum_{k=1}^N \oint_{L_k} f(z)dz. \quad (3.15)$$

Інтеграли від функції  $f(z)$ , аналітичної в однозв'язній області  $D$ , не залежать від форми шляху інтегрування, а залежать лише від початкової і кінцевої точок. Тому для інтеграла вздовж кривої  $L$ , що сполучає точки  $z_0$  і  $z$ , користуються позначенням

$$\int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta.$$

**Теорема 5** Нехай  $f(z)$  — функція, неперервна в однозв'язній області  $D$ , й інтеграл від цієї функції вздовж довільної кусково-гладкої кривої, яка цілком лежить у  $D$ , не залежить від форми цієї кривої. Тоді функція

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta,$$

де  $z_0, z \in D$ , має похідну  $F'(z)$ , причому  $F'(z) = f(z)$ .

Функцію  $F(z)$  називають *первісною* для  $f(z)$ , якщо  $F'(z) = f(z)$  для всіх  $z \in D$ .

Якщо  $F(z)$  — первісна для  $f(z)$ , то  $\Phi(z) = F(z) + c$ , де  $c$  — комплексна стала, також первісна для  $f(z)$ .

**Теорема 6** Якщо  $f(z)$  — аналітична функція в однозв'язній області  $D$  і  $\Phi(z)$  — будь-яка первісна для  $f(z)$ , то

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1), \quad (3.16)$$

де  $z_1, z_2 \in D$  й інтегрування відбувається вздовж будь-якої кусково-гладкої дуги, що цілком лежить у  $D$  і сполучає точки  $z_1$  і  $z_2$ .

Формулу (3.16) називають *формулою Ньютона—Лейбніца*.

Інтегралі від елементарних функцій комплексної змінної в області аналітичності обчислюють за допомогою тих самих правил і формул, що й від функцій дійсної змінної.

## 2.5. Інтегральна формула Коші

### Теорема 7

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в однозв'язній замкненій області  $\bar{D}$ ,  $L$  — межа області  $D$ , орієнтована в додатному напрямку (тобто проти ходу годинникової стрілки). Тоді для будь-якої внутрішньої точки  $z_0 \in D$  справджується *інтегральна формула Коші*:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (3.17)$$

Якщо  $z_0$  не належить  $\bar{D}$ , то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 0.$$

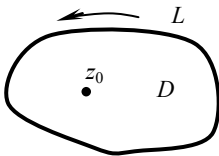


Рис. 3.5

Вираз  $\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}$  називають *інтегралом Коші*.

Формула Коші має місце і для багатозв'язної області. Важливість формули (3.17) полягає в тому, що вона виражає значення аналітичної функції  $f(z)$  в довільній внутрішній точці області  $D$  через її значення на межі цієї області.

### Теорема 8

Нехай  $f(z)$  — аналітична в області  $D$  функція і  $L$  — кусково-гладкий додатно орієнтовний замкнений контур, який цілком лежить у  $D$  разом з усіма своїми внутрішніми точками. Тоді для точок  $z_0$ , які лежать усередині  $L$ , виконуються рівності

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.18)$$

Формули (3.17) та (3.18) — конструктивний засіб для обчислення інтегралів. За умов теорем 7 та 8 виконуються рівності

$$\oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)} = 2\pi i f(z_0), \quad \oint_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

## Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Перевірте, чи диференційовна функція  $f(z) = \bar{z}$ .

*Розв'язання.* Очевидно, що розглядувана функція неперервна на всій комплексній площині.

Для заданої функції при будь-якому  $z$  дістаємо

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{z + \Delta z - \bar{z}}}{\Delta z} = \frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Із цієї рівності випливає:

1) якщо  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$ , то  $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = 1$ ;

2) якщо  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y \neq 0$ , то  $\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = -1$ .

Отже, вираз  $\frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$  при  $\Delta z \rightarrow 0$  границі не має при жодному  $z$ .

Таким чином, функція  $f(z) = \bar{z}$ , що неперервна в усій комплексній площині, не має похідної в жодній точці площини, тобто не є диференційовною.

2. Дослідіть на диференційовність функцію  $f(z) = z^2$  та знайдіть її похідну.

*Розв'язання.* Нехай  $z = x + iy$ , тоді

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \quad u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Дійсні функції  $u(x, y)$  і  $v(x, y)$  диференційовні в будь-якій точці  $(x, y)$  і задовольняють умови Коші—Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

Звідси випливає, що функція  $f(z) = z^2$  диференційовна на всій комплексній площині. Використовуючи формулу (3.9), маємо

$$(z^2)' = 2x + 2iy = 2(x + iy) = 2z.$$

3. Дослідіть аналітичність функцій: а)  $f(z) = z \cdot \bar{z}$ ; б)  $f(z) = e^{z^2}$ .

*Розв'язання.* а) маємо  $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$ , отже,  $u(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $v(x, y) = 0$ . Умови Коші—Рімана мають вигляд:

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2y = 0 \end{cases}$$

і виконуються лише в точці  $(0; 0)$ .

Отже, функція  $f(z) = z \cdot \bar{z}$  диференційовна тільки в точці  $z = 0$  і ніде не аналітична.

Обчислимо похідну  $f'(0)$ , користуючись означенням.

Враховуючи, що  $f(0) = 0$ , дістанемо

$$\Delta f = f(0 + \Delta z) - f(0) = \Delta z \Delta \bar{z},$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \Delta \bar{z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta \bar{z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x - i \Delta y) = 0.$$

Отже, похідна  $f'(0)$  існує й дорівнює нулю;

б) маємо  $e^{2z} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y)$ , звідси  $u(x, y) = e^{2x} \cos 2y$ ,  $v(x, y) = e^{2x} \sin 2y$  — диференційовні функції у будь-якій точці  $(x, y)$ . Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2x} \sin 2y,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \sin 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2x} \cos 2y.$$

Оскільки умови Коші—Рімана виконуються на всій площині, то задана функція диференційовна для будь-якого  $z$  і її похідна має вигляд:

$$(e^{2z})' = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2e^{2x} \cos 2y + i 2e^{2x} \sin 2y = 2e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 2e^{2z}.$$

**4. Чи будуть диференційовними функції:**

а)  $f(z) = y + xi$ ; б)  $f(z) = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ; в)  $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$

Розв'язання: а)  $u = y$ ,  $v = x$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = 1$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ .

Одна з умов Коші—Рімана не виконується:  $\frac{\partial u}{\partial y} \neq \frac{\partial v}{\partial x}$ . Тому розглядувана функція недиференційовна;

б)  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Умови Коші—Рімана виконуються. Отже, за теоремою 1 функція диференційовна. Похідну знаходимо за формулою (3.9):



$$f'(z) = 2x + 2yi = 2(x + iy) = 2z;$$

в)  $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y;$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Умови Коші—Рімана виконані. Знаходимо похідну

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + i e^x \sin y =$$

$$= e^x (\cos y + i \sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

5. Знайдіть аналітичну функцію  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , якщо

$$v(x, y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, f(0) = 0.$$

*Розв'язання.* Задана функція  $v(x, y)$  гармонічна на всій комплексній площині:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 12xy - 3y^2) = 6x + 12y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (6x^2 - 6xy - 6y^2) = -6x - 12y,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2,$$

то, застосувавши формулу (3.11), у якій  $x_0 = 0, y_0 = 0$ , дістанемо

$$u(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (6x^2 - 6xy - 6y^2) dx + (-3x^2 - 12xy + 3y^2) dy + c =$$

$$= \int_0^x 6x^2 dx - \int_0^y (3x^2 + 12xy - 3y^2) dy = 2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + c.$$

Отже,

$$f(z) = (2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3 + c) + i(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3).$$

З умови  $f(0) = 0$  знаходимо сталу  $c = 0$ . Враховуючи співвідношення  $z^3 = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3$ , дістанемо

$$\begin{aligned} f(z) &= (2x^3 - 3x^2y - 6xy^2 + y^3) + i(x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) = \\ &= 2(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) + i(x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3) = (2 + i)z^3. \end{aligned}$$

6. Знайдіть аналітичну функцію  $f(z) = u + iv$  за відомою гармонічною функцією  $u(x, y) = 2e^x \cos y$  та умовою  $f(0) = 2$ .

*Розв'язання.* Знаходимо спряжену гармонічну функцію  $v(x, y)$  за формулою (3.10) у якій покладемо  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Маємо:

$$v(x, y) = \int_0^x -\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} dx + \int_0^y \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} dx + c = \int_0^y 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + c.$$

Отже,

$$f(z) = u + iv = 2e^x \cos y + i 2e^x \sin y + ic = 2e^x (\cos y + i \sin y) + ic = 2e^z + ic.$$

Сталу  $c$  знаходимо з умови  $f(0) = 2: 2e^0 + ic = 2, c = 0$ . Отже,

$$f(z) = 2e^z.$$

7. Покажіть, що функція вигляду  $u(x, y) = a(x^2 + y^2) + bx + cy + d$  за умови  $a \neq 0$  не може бути дійсною (чи уявною) частиною жодної аналітичної функції.

*Розв'язання.* Достатньо показати, що задана функція не є гармонічною. Це випливає із співвідношення:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4a \neq 0.$$

8. Обчисліть інтеграл  $\int_L (1 + i - 2\bar{z}) dz$  вздовж ліній, що сполучають точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1 + i$ , у напрямку від  $z_1$  до  $z_2$

- а) вздовж прямої;
- б) вздовж параболи  $y = x^2$ ;
- в) вздовж ламаної  $z_1 z_3 z_2$ , де  $z_3 = 1$ .

*Розв'язання.* Перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y). \text{ Тут } u(x, y) = 1 - 2x, v(x, y) = 1 + 2y.$$

За формулою (3.12) маємо

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_L (1-2x)dx - (1+2y)dy + i \int_L (1+2y)dx + (1-2x)dy;$$

а) рівняння прямої, що проходить через точки  $z_1 = 0$  і  $z_2 = 1+i$ , має вигляд  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а отже,  $dy = dx$ . Тому

$$\int_L (1+i-2\bar{z})dz = \int_0^1 ((1-2x) - (1+2x))dx + i \int_0^1 ((1+2x) + (1-2x))dx = 2(i-1);$$

б) для параболи  $y = x^2$  маємо  $dy = 2xdx$  ( $0 \leq x \leq 1$ ), отже,

$$\begin{aligned} \int_L (1+i-2\bar{z})dz &= \int_0^1 (1-2x - (1+2x^2)2x)dx + \\ &+ i \int_0^1 ((1+2x^2) + (1-2x)2x)dx = -2 + \frac{4}{3}i; \end{aligned}$$

в) на відрізку  $z_1z_3$ :  $y = 0$ ,  $dy = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; на відрізку  $z_3z_2$ :  $x = 1$ ,  $dx = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

Застосовуючи властивість лінійності криволінійних інтегралів, маємо:

$$\begin{aligned} \int_L (1+i-2\bar{z})dz &= \int_{z_1z_3} (1+i-2\bar{z})dz + \int_{z_3z_2} (1+i-2\bar{z})dz = \\ &= \int_0^1 (1-2x)dx + i \int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y)dy + i \int_0^1 (1-2 \cdot 1)dy = -2. \end{aligned}$$

Цей приклад підтверджує, що інтеграл від неперервної, але не аналітичної функції залежить від форми шляху інтегрування.

**9.** Обчисліть інтеграл  $\int_L (z^2 + z\bar{z})dz$ , якщо  $L$  — дуга кола  $|z|=1$  ( $0 \leq \arg z \leq \pi$ ).

*Розв'язання.* Покладемо  $z = e^{i\varphi}$ ,  $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$ , тоді

$$\begin{aligned} \int_L (z^2 + z\bar{z})dz &= \int_0^\pi ie^{i\varphi} (e^{i2\varphi} + e^{i\varphi}e^{-i\varphi})d\varphi = \\ &= i \int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi = \left( \frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = \frac{1}{3}(e^{3\pi i} - 1) + e^{\pi i} - 1 = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

**10.** Обчисліть інтеграл  $\int_{L^+} (x-y)dx + i y dy$ , де  $L$  — коло  $|z|=1$ .



*Зауваження.*  $L^+$  тут і надалі означає додатний напрям інтегрування.

*Розв'язання.* Параметричні рівняння заданого кола мають вигляд:

$$x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Тому за формулою (3.13) маємо

$$\begin{aligned} \int_L (x - y)dx + i y dy &= \int_0^{2\pi} (-\cos t - \sin t) \sin t + i \sin t \cos t dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos t d(\cos t) + \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - i \int_0^{2\pi} \cos t d(\cos t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi. \end{aligned}$$

**11.** Обчисліть інтеграл  $\int_{L^+} (z - z_0)^n dz$ , де  $L$  — довільне коло з центром у точці  $z_0$ ,  $n$  — ціле число.

*Розв'язання.* Рівняння кола  $L$  можна записати у вигляді  $z = z_0 + Re^{it}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ), де  $R$  — радіус кола. Тоді

$$\int_L (z - z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} R^{n+1} i e^{i(n+1)t} dt = i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i R^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0,$$

оскільки  $e^{2(n+1)\pi i} = e^0 = 1$  ( $n \neq -1$ ).

Якщо  $n = -1$ , то  $\int_L \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} i R e^{it} dt = 2\pi i$ . Отже,

$$\boxed{\int_{|z-z_0|=R} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \quad n - \text{ціле} \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}}$$

**12.** Обчисліть  $\oint_{L^+} \frac{dz}{z - 4} = 0$ , де  $L$  — еліпс:  $x = 3\cos t, y = 2\sin t$ .

*Розв'язання.* Підінтегральна функція є аналітичною в області, обмеженій цим еліпсом (рис.3.6). Тому за інтегральною теоремою Коші

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{z - 4} = 0.$$

**13.** Обчисліть  $\oint_{L^+} \frac{2z - 1 - i}{(z - 1)(z - i)} dz$ , де  $L$  — коло  $|z| = 2$ .

*Розв'язання.* Підінтегральна функція розривна лише в точках  $z = 1$  і  $z = i$ . Функція  $f(z)$  – аналітична в трив'язній області, що являє собою круг з граничним колом  $L$ , з якого вирізані два круги  $|z - 1| < r_1$ ,  $|z - i| < r_2$ , де  $r_1, r_2$  — достатньо малі додатні величини (рис. 3.7, а).

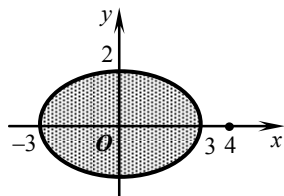
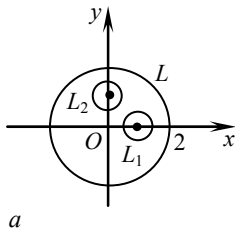
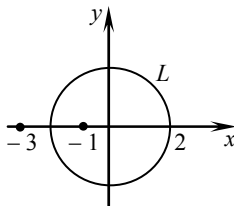


Рис. 3.6



а



б

Рис. 3.7

Отже, за формулою (3.15) маємо

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz,$$

де  $L_1$  — коло  $|z - 1| = r_1$ ,  $L_2$  — коло  $|z - i| = r_2$ .

Оскільки  $f(z) = \frac{z - 1 + z - i}{(z - 1)(z - i)} = \frac{1}{z - i} + \frac{1}{z - 1}$ , то

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} \frac{dz}{z - i} + \oint_{L_1} \frac{dz}{z - 1} + \oint_{L_2} \frac{dz}{z - i} + \oint_{L_2} \frac{dz}{z - 1}.$$

Перший і четвертий доданки у правій частині рівні нулю, оскільки підінтегральні функції є аналітичними у відповідних областях. Тому

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} \frac{dz}{z - 1} + \oint_{L_2} \frac{dz}{z - i}.$$

Коло  $L_1$  має рівняння  $z = 1 + re^{i\varphi}$ , а  $L_2$  — рівняння  $z = i + re^{i\varphi}$ . Звідси

$$\oint_L f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} + \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = \int_0^{2\pi} id\varphi + \int_0^{2\pi} id\varphi = 4\pi i.$$

**14.** Обчисліть інтеграли: а)  $\int_i^{i+1} z dz$ ; б)  $\int_0^i z \cos z dz$ .

*Розв'язання:* а) підінтегральна функція є всюди аналітичною. Використовуючи формулу Ньютона—Лейбніца (3.16), дістанемо

$$\int_i^{i+1} z dz = \frac{z^2}{2} \Big|_i^{i+1} = \frac{1}{2} ((1+i)^2 - i^2) = \frac{1}{2} (1+2i-1+1) = \frac{1}{2} + i;$$

б) функції  $f(z) = z$  і  $\varphi(z) = \cos z$  всюди аналітичні. Використовуючи формулу інтегрування частинами, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= \int_0^i z d(\sin z) = z \sin z \Big|_0^i - \int_0^i \sin z dz = \\ &= i \sin i + \cos z \Big|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \end{aligned}$$

15. Обчисліть інтеграл  $\int_{L^+} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz$ , де  $L$  — коло  $|z| = 2$ .

*Розв'язання.* Всередині кола  $|z| = 2$  знаменник дробу обертається в нуль у точці  $z_0 = -1$  (рис. 3.7, б). Для використання інтегральної формули Коші (3.17) перепишемо інтеграл у вигляді:

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz = \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)} dz = \int_{|z|=2} \frac{\frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}}{z - (-1)} dz.$$

Тут  $z_0 = -1$  і функція  $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$  — аналітична в крузі  $|z| \leq 2$ , тому

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{ch}(-i)}{2} = \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1.$$

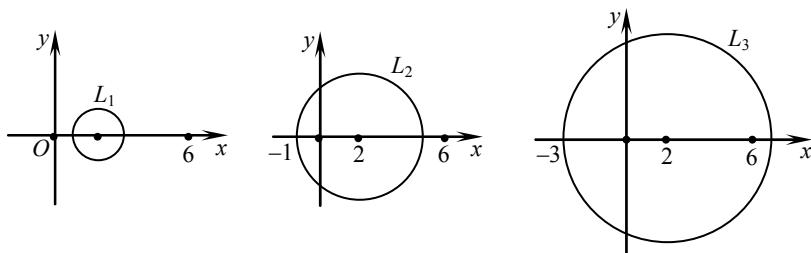


Рис. 3.8

16. Користуючись інтегральною формулою Коші, обчисліть інтеграл

$$\oint_{L_i} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz,$$

якщо: а)  $L_1: |z - 2| = 1$ ; б)  $L_2: |z - 2| = 3$ ; в)  $L_3: |z - 2| = 5$  (рис. 3.8).

*Розв'язання:* а) в замкненій області, обмеженій колом  $|z - 2| = 1$ , підінтегральна функція аналітична, тому за теоремою Коші

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0;$$

б) всередині області, обмеженої колом  $|z - 2| = 3$ , лежить одна точка  $z = 0$ , яка обертає знаменник підінтегральної функції в нуль. Перепишемо інтеграл у вигляді

$$\int_L \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{f(z)}{z} dz,$$

де функція  $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z - 6}$  аналітична в цій області. Використовуючи інтегральну формулу Коші (3.17), ( $z_0 = 0$ ), дістанемо

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z - 6} \Big|_{z=0} = 2\pi i \left( -\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3};$$

в) області, обмеженій колом  $|z - 2| = 5$ , належать обидві точки  $z = 0, z = 6$ , в яких знаменник підінтегральної функції дорівнює нулю. Тому розкладемо дріб  $\frac{1}{z^2 - 6z}$  на найпростіші дроби:

$$\frac{1}{z^2 - 6z} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z - 6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z}.$$

Підставивши їх в інтеграл, дістанемо

$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz &= \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z - 6} dz - \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z} dz = \\ &= \frac{1}{6} 2\pi i e^{36} - \frac{1}{6} 2\pi i = \frac{e^{36} - 1}{3} \pi i. \end{aligned}$$

17. Обчисліть інтеграл  $\int_{L^+} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz$ , де  $L$  — коло  $|z - 1| = 1$ .

*Розв'язання.* Підінтегральна функція  $\frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2(z - 1)^2}$  аналітична в області  $|z - 1| \leq 1$  всюди, крім точки  $z_0 = 1$  (точка  $z = -1$  міститься ззовні кола  $|z - 1| = 1$ ). Виділимо під знаком інтеграла функцію  $f(z)$ , що буде аналітичною в крузі  $|z - 1| \leq 1$ . Для цього перепишемо підінтегральну функцію у вигляді

$$\frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2(z - 1)^2} = \frac{f(z)}{(z - 1)^2},$$

де  $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2}$ . За формулою (3.18) при  $n = 1$ , маємо

$$\int_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

Знаходимо похідну

$$f'(z) = \left( \frac{\sin \pi z}{(z + 1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z (z + 1) - 2 \sin \pi z}{(z + 1)^3}.$$

Звідси  $f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}$ , тоді  $\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2 - 1)^2} dz = 2\pi i \left( -\frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\pi^2}{2} i$ .

## Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перевірте на диференційовність функцію  $f(z) = x^2 + y^2 - 2xyi$ .
2. Покажіть, що функція  $f(z) = (x^2 + 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$  диференційовна та знайдіть її похідну.
3. Чи є диференційовною функція  $f(z) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$ ? Якщо так, то знайдіть її похідну.
4. Доведіть, що функції  $w = |z|$ ,  $w = \operatorname{Re} z$  не диференційовні в жодній точці комплексної площини.
5. Знайдіть похідні  $z'(t)$  функцій:

а)  $z(t) = \cos^3 t + i e^{-t^2}$ ; б)  $z(t) = \ln(t^2 + 1) + i \arctg \frac{1}{t}$ .



6. Покажіть, що при  $z \neq 0$  функція  $f(z) = |z|^2$  не має похідної.

7. З'ясуйте, в яких точках диференційовні функції:

а)  $f(z) = z \operatorname{Im} z$ ; б)  $f(z) = z \operatorname{Re} z$ ; в)  $f(z) = |z|$ ; г)  $f(z) = |z - 1|^3$ .

8. Перевірте виконання умов Коші—Рімана й у разі їх виконання знайдіть  $f'(z)$ :

а)  $f(z) = e^{3z}$ ; б)  $f(z) = \operatorname{sh} z$ ; в)  $f(z) = \cos z$ ;

г)  $f(z) = \ln(z^2)$ ; д)  $f(z) = \sin \frac{z}{3}$ .

9. Дослідіть на аналітичність функції:

а)  $f(x + iy) = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + i \left( y - \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ ;

б)  $f(z) = |z|^2 + 2z$ ; в)  $f(z) = \frac{|z| + z}{2}$ .

10. З'ясуйте, які функції є аналітичними хоча б в одній точці, а які — ні (користуючись умовами Коші—Рімана):

а)  $f(z) = \bar{z} \cdot z^2$ ; б)  $f(z) = |z| \cdot \bar{z}$ ; в)  $f(z) = ze^{\bar{z}}$ ;

г)  $f(z) = e^{z^2}$ ; д)  $f(z) = \sin 3z - i$ ; е)  $f(z) = \operatorname{ch} z$ ;

є)  $f(z) = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$ ; ж)  $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$ ; з)  $f(z) = \bar{z} \operatorname{Im} z$ .

11. Знайдіть аналітичну функцію  $f(z)$  за заданою дійсною частиною  $u = 2^x \cos(y \ln 2)$ .

12. Знайдіть аналітичну функцію  $f(z)$  за заданою уявною частиною  $v = \sin x \operatorname{sh} y$ .

13. Визначте аналітичну функцію  $f(z) = u + iv$ , якщо:

1)  $u = x^2 - y^2 + 2x, f(i) = -1 + 2i$ ; 2)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = \frac{1}{\pi}$ ;

3)  $v = e^x \sin y + 2xy + 5y, f(0) = 10$ ; 4)  $u = x^2 - y^2 + xy, f(0) = 0$ .

14. Покажіть, що функції гармонічні в області їх визначення:

1)  $\varphi(x, y) = x^2 + 2x - y^2$ ; 2)  $\varphi(x, y) = 2e^x \cos y$ .

15. Обчисліть інтеграл  $\int_L e^z dz$ , якщо

- а)  $L$  — дуга параболи  $y = x^2$  від точки  $z_0 = 0$  до точки  $z_1 = 1 + i$ ;  
б) відрізок прямої від точки  $z_0 = 0$  до точки  $z_1 = 1 + i$ .

16. Обчисліть інтеграл  $\int_L e^{\bar{z}} dz$ , де

- 1)  $L$  — ламана  $z_1 z_3 z_2$ , що сполучає точки  $z_1 = 0$ ,  $z_3 = 1$  та  $z_2 = 1 + i$ ;  
2)  $L$  — ламана  $z_1 z_3 z_2$ , що сполучає точки  $z_1 = 0$ ,  $z_3 = i$  та  $z_2 = 1 + i$ .

17. Обчисліть інтеграл  $\int_L \cos z dz$ ,  $L$  — відрізок прямої від точки  $z_0 = \frac{\pi}{2}$

до точки  $z_1 = \pi + i$ .

18. Обчисліть інтеграл  $\int_L \sin z dz$ ,  $L = \{z : z = t^2 + it, 1/2 \leq t \leq 3/2\}$ .

19. Обчисліть інтеграл  $\int_{z_1}^{z_2} |z| dz$  вздовж ліній, що сполучають точки  $z_1 = -1$ ,

$z_2 = 1$ :

- 1) уздовж прямої;  
2) уздовж верхньої половини кола  $|z| = 1$ ;  
3) уздовж нижньої половини кола  $|z| = 1$ .

20. Обчисліть інтеграл  $\int_L f(z) dz$ , якщо  $f(z) = y + xi$ ; де  $L$  — ламана  $OAB$  з вершинами в точках  $z_0 = 0$ ,  $z_A = i$ ,  $z_B = 1 + i$ .

21. Обчисліть інтеграл  $\int_L |z| dz$ , якщо  $L$  — півколо  $|z| = 1$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ .

22. Обчисліть інтеграли:

- 1)  $\int_{-1}^{i+1} z^2 dz$ ;      2)  $\int_{1+i}^{-1-i} (2z + 1) dz$ ;      3)  $\int_0^{i+1} z^3 dz$ ;  
4)  $\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz$ ;      5)  $\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{z^2/2} dz$ ;      6)  $\int_1^i z \sin z dz$ .

23. Використовуючи інтегральну теорему Коші або інтегральну формулу

Коші, обчисліть  $\oint_{I^+} \frac{dz}{z^2 + 9}$ , якщо:

- 1) точка  $3i$  лежить усередині контуру  $L$ , а точка  $-3i$  — поза ним;
- 2) точка  $-3i$  лежить усередині контуру  $L$ , а точка  $3i$  — поза ним;
- 3) точки  $\pm 3i$  лежать усередині контуру  $L$ ;
- 4) точки  $\pm 3$  лежать поза контуром  $L$ .

24. Обчисліть інтеграл  $\int_{L^+} \frac{\exp(z^2) dz}{z^2 - 6z}$ , якщо

- 1)  $L: |z - 2| = 1$ ;
- 2)  $L: |z| = 1$ ;
- 3)  $L: |z - 6| = 1$ .

25. Обчисліть інтеграли (контури орієнтовані проти ходу годинникової стрілки):

$$1) \oint_{|z|=0,5} \frac{dz}{z(z^2 + 1)}; \quad 2) \oint_{|z-2i|=1} \frac{z^2 + 1}{\sin \frac{z}{3} \cdot (z^2 + 4)} dz;$$

$$3) \oint_{|z-3i|=2} \frac{e^z dz}{z(z-2i)}; \quad 4) \oint_{|z|=3} \frac{\cos 3z}{z(z-1)} dz;$$

$$5) \oint_{|z|=2} \frac{z+1}{(z-1)^2} dz; \quad 6) \oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sh} i\pi z}{(z+2)^4} dz;$$

$$7) \oint_{|z-2|=2} \frac{e^{2z}}{z^2 - 3z + 2} dz; \quad 8) \oint_{|z|=5} \frac{e^{2z+3}}{z^2 + z - 12} dz.$$

26. Обчисліть  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$ , якщо:

- 1) точка  $0$  лежить усередині, а точка  $1$  — поза контуром  $L$ ;
- 2) точка  $1$  лежить усередині, а точка  $0$  — поза контуром  $L$ ;
- 3) точки  $0$  і  $1$  лежать усередині контуру  $L$ .

### Відповіді

1. Недиференційовна. 2. *Вказівка.* Перевірте умови Коші–Рімана. 3.  $f'(z) = \cos z$ . 5. 1)  $z'(t) = -3\cos^2 t \sin t - 2it e^{-t^2}$ ; 2)  $z'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} - i \frac{1}{1 + t^2}$ . 7. а) диференційовна лише в точці  $z = 0$ ; б) диференційовна лише в точці  $z = 0$ ; в) не диференційовна в жодній точці; г) диференційовна лише в точці  $z = 1$ . 8. а)  $3e^{3z}$ ; б)  $\operatorname{ch} z$ ; в)  $-\sin z$ ; г)  $2/z$ ; д)  $\frac{1}{3} \cos \frac{z}{3}$ . 9. а) аналітична всюди, крім точки  $z = 0$ ; б) не аналітична в жодній точці комплексної площини, але диференційовна в точці  $z = 0$ ; в) не аналітична в жодній точці комплексної площини. 10. а) ні; б) ні; в) так; г) так; д) так; е) так; е) ні; ж) ні; з) ні. 11.  $f(z) = 2^z + c$ . 12.  $f(z) = -\cos z + c$ .

13. 1)  $f(z) = z^2 + 2z$ ; 2)  $f(z) = \frac{1}{z}$ ; 3)  $f(z) = \exp z + z^2 + 5z + 9$ ; 4)  $f(z) = \frac{z^2}{2}(2-i)$ . 15. а)  $e \cos 1 - 1 + i \sin 1$ ; б)  $e \cos 1 - 1 + i \sin 1$ . 16. 1)  $e(2 - e^{-i} - 1)$ ; 2)  $1 + e^{-i}(e - 2)$ . 17.  $-(1 + i \operatorname{sh} 1)$ .  
 18.  $\left( \cos \frac{1}{4} \operatorname{ch} \frac{1}{2} - \cos \frac{9}{4} \operatorname{ch} \frac{3}{2} \right) + i \left( \sin \frac{9}{4} \operatorname{sh} \frac{3}{2} - \sin \frac{1}{4} \operatorname{sh} \frac{1}{2} \right)$ . 19. 1) 1; 2) 2; 3) 2. 20.  $1 + i$ . 21.  $\pi i$ .  
 22. 1)  $\frac{1}{3}(-3 + 2i)$ ; 2)  $-2(1 + i)$ ; 3)  $-1$ ; 4)  $\frac{3}{5}(i - 1)$ ; 5)  $-7e^{-2} + (3 - 2i)e^i$ ; 6)  $\cos 1 - \sin 1 + ie^{-1}$ .  
 23. 1)  $\frac{\pi}{3}$ ; 2)  $-\frac{\pi}{3}$ ; 3) 0; 4) 0. 24. 1) 0, оскільки підінтегральна функція аналітична в крузі  $|z - 2| \leq 1$ ; 2)  $-\frac{\pi}{3}i$ ; 3)  $\frac{\pi i}{3}e^{36}$ . 25. 1)  $2\pi i$ ; 2)  $\frac{3\pi i}{2 \operatorname{sh} \frac{3}{3}}$ ; 3)  $\pi(\cos 2 + i \sin 2)$ ; 4)  $\pi i(\cos 6 - 1)$ ; 5)  $2\pi i$ ;  
 6)  $\frac{\pi^4}{3}$ ; 7)  $2\pi i(e^4 - e^2)$ ; 8)  $\frac{2\pi i}{7}(e^9 - \frac{1}{e^5})$ . 26. 1) 1; 2)  $e$ ; 3)  $1 + e$ .

## Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

**2.1.** Відновіть аналітичну в околі точки  $z_0$  функцію  $f(z)$  за відомою дійсною частиною  $u(x, y)$  або уявною  $v(x, y)$  та значенням  $f(z_0)$ .

- 2.1.1.  $u = x^2 - y^2 + x$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.2.  $u = x^2 - xy^2 + 1$ ,  $f(0) = 1$ .  
 2.1.3.  $v = x^3 - 3xy^2 - 2y$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.4.  $u = x^2 - y^2 - 2y$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.5.  $u = \operatorname{ch} x \cos y$ ,  $f(0) = 2$ .  
 2.1.6.  $u = \sin x \operatorname{sh} y$ ,  $f(1) = 1 + i$ .  
 2.1.7.  $v = e^{-y} \sin x + y$ ,  $f(0) = 1$ .  
 2.1.8.  $v = e^x \cos y$ ,  $f(0) = 1 + i$ .  
 2.1.9.  $v = x^3 - 3xy^2 - 2xy$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.10.  $v = y^3 - 3x^2y + x^2 - y^2$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.11.  $u = e^{-y} \cos x$ ,  $f(0) = 1$ .  
 2.1.12.  $u = y - 2xy$ ,  $f(0) = 0$ .  
 2.1.13.  $v = x^2 - y^2 + 2x + 1$ ,  $f(0) = i$ .  
 2.1.14.  $u = x^2 - y^2 - 2x + 1$ ,  $f(0) = 1$ .

- 2.1.15.  $u = \cos 2x \operatorname{ch} 2y$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.16.  $v = 2xy + y$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.17.  $u = x^3 - 3xy^2 - 2x^2 + 2y^2$ ,  $f(0) = 2$ .
- 2.1.18.  $u = 3x^2y - y^3 + 3x$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.19.  $v = 2xy + 2x$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.20.  $u = 1 - \sin y e^x$ ,  $f(0) = 1 + i$ .
- 2.1.21.  $v = \operatorname{sh} 3x \sin 3y$ ,  $f(0) = 2$ .
- 2.1.22.  $u = 3x^2 - 3y^2 + 2xy$ ,  $f(1) = i$ .
- 2.1.23.  $u = e^{-y} \cos x + x$ ,  $f(0) = 1$ .
- 2.1.24.  $v = e^{-y} \sin x$ ,  $f(0) = 1$ .
- 2.1.25.  $v = 6xy - x^2 + y^2$ ,  $f(0) = 2i$ .
- 2.1.26.  $v = 2x^2 - 2y^2 + 3x^2y - y^3$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.27.  $v = x^2 - y^2 - x$ ,  $f(0) = 0$ .
- 2.1.28.  $u = -2xy - 2y$ ,  $f(0) = i$ .
- 2.1.29.  $v = 2xy - 2y$ ,  $f(0) = 1$ .
- 2.1.30.  $u = x^3 - 3xy^2 - x$ ,  $f(0) = 0$ .

2.2. Обчисліть інтеграл від функції комплексної змінної по даній кривій (якщо не вказаний напрям інтегрування, вважати його додатним).

- 2.2.1.  $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$ ;  $AB : \{y = x^2; z_A = 0; z_B = 1 + i\}$ .
- 2.2.2.  $\int_L (z+1)e^z dz$ ;  $L : \{|z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ .
- 2.2.3.  $\int_{AB} \operatorname{Im} z^3 dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 0$ ,  $z_B = 2 + 2i$ .
- 2.2.4.  $\int_{AB} (z^2 + 7z + 1) dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 1$ ,  $z_B = 1 - i$ .
- 2.2.5.  $\int_{ABC} |z| dz$ ;  $ABC$  — ламана:  $z_A = 0$ ,  $z_B = -1 + i$ ,  $z_C = 1 + i$ .
- 2.2.6.  $\int_{AB} (12z^4 + 4z^3 + 1) dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 1$ ,  $z_B = i$ .
- 2.2.7.  $\int_{AB} \bar{z}^2 dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 0$ ,  $z_B = 1 + i$ .

2.2.8.  $\int_{ABC} z^3 e^{z^4} dz$ ;  $ABC$  — ламана:  $z_A = i, z_B = 1, z_C = 0$ .

2.2.9.  $\int_{ABC} \operatorname{Re} \frac{\bar{z}}{z} dz$ ;  $AB: \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $BC$  — відрізок,  $z_B = 1, z_C = 2$ .

2.2.10.  $\int_{ABC} (z^2 + \cos z) dz$ ;  $ABC$  — ламана:  $z_A = 0, z_B = 1, z_C = i$ .

2.2.11.  $\int_L \frac{\operatorname{Im}(z^2)}{z} dz, L = \{z : |z|=1, -\pi \leq \arg z \leq 0\}$ .

2.2.12.  $\int_{ABC} (\operatorname{ch} z + \cos iz) dz$ ;  $ABC$  — ламана:  $z_A = 0, z_B = -1, z_C = i$ .

2.2.13.  $\int_L |z| \bar{z} dz$ ;  $L : \{|z|=4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ .

2.2.14.  $\int_L (\operatorname{ch} z + z) dz$ ;  $L : \{|z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$ .

2.2.15.  $\int_L |z| \operatorname{Re} z^2 dz$ ;  $L : \{|z|=R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

2.2.16.  $\int_{AB} (3z^2 + 2z) dz$ ;  $AB : \{y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$ .

2.2.17.  $\int_L z \operatorname{Re} z^2 dz$ ;  $L : \{|z|=R; \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

2.2.18.  $\int_{ABC} (z^2 + 1) dz$ ;  $ABC$  — ламана:  $z_A = 0, z_B = -1 + i, z_C = i$ .

2.2.19.  $\int_{AB} e^{|z|^2} \operatorname{Im} z dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 1 + i, z_B = 0$ .

2.2.20.  $\int_L (\sin iz + z) dz$ ;  $L : \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$ .

2.2.21.  $\int_{AB} z \operatorname{Re} z^2 dz$ ;  $AB$  — відрізок прямої,  $z_A = 0, z_B = 1 + 2i$ .

2.2.22.  $\int_{AB} (2z + 1) dz$ ;  $AB : \{y = x^3, z_A = 0, z_B = 1 + i\}$ .

2.2.23.  $\int_{ABC} z \bar{z} dz$ ;  $AB : \{|z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $BC$  — відрізок прямої,

$z_B = 1, z_C = 0$ .

2.2.24.  $\int_L (\cos iz + 3z^2) dz$ ;  $L : \{|z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ .

2.2.25.  $\int_L |z| dz$ ;  $L : \{|z|=\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4}\}$ .

$$2.2.26. \int_{ABC} (z^9 + 1) dz; \quad ABC \text{ — ламана: } z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i.$$

$$2.2.27. \int_L (iz^3 + \cos 2z) dz; \quad L : \{ |z| = 1, \operatorname{Re} z \leq 0 \}.$$

$$2.2.28. \int_{ABC} (\sin z + z^5) dz, \quad ABC \text{ — ламана: } z_A = 0, z_B = 1, z_C = 2i.$$

$$2.2.29. \int_{AB} z \operatorname{Im} z^2 dz; \quad AB \text{ — відрізок прямої, } z_A = 0, z_B = 1 + i.$$

$$2.2.30. \int_L (z^3 + \sin z) dz; \quad L : \{ |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0 \}.$$

2.3. Обчисліть інтеграли вздовж вказаного контуру  $L$ , використовуючи інтегральну формулу Коші (обхід проти ходу годинникової стрілки).

$$2.3.1. \oint_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z(z^2+1)}.$$

$$2.3.2. \oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{(2+z)dz}{z^2(z-1)}.$$

$$2.3.3. \oint_{|z-2i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z^2+4)}.$$

$$2.3.4. \oint_{|z|=1} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz.$$

$$2.3.5. \oint_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{z^2-1} dz.$$

$$2.3.6. \oint_{|z-2-i|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)}.$$

$$2.3.7. \oint_{|z-1-2i|=2} \frac{dz}{z^3+3z}.$$

$$2.3.8. \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2-7z+10} dz.$$

$$2.3.9. \oint_{|z-1-i|=1} \frac{\sin \pi(z-1)}{z^2-2z+2} dz.$$

$$2.3.10. \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z+1}{z(z^2-4)} dz.$$

$$2.3.11. \oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z+2}{z^2(z-\pi)} dz.$$

$$2.3.12. \oint_{|z-2|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z^4-1} dz.$$

$$2.3.13. \oint_{|z+i|=1,5} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2-2z} dz.$$

$$2.3.14. \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z+1}{z^2-\pi^2} dz.$$

$$2.3.15. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-4z} dz.$$

$$2.3.16. \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z+2}{z^2-4\pi^2} dz.$$

$$2.3.17. \oint_{|z-i|=3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)z} dz .$$

$$2.3.18. \oint_{\left|z+\frac{3}{2}\right|=1} \frac{\cos^2 z + 3}{2z^2 + \pi z} dz .$$

$$2.3.19. \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 + 2\pi z} dz .$$

$$2.3.20. \oint_{|z+2|=0,5} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 3z + 2} dz .$$

$$2.3.21. \oint_{|z-2|=2} \frac{\cos(\pi z / 3)}{(z-3)(z+5)} dz .$$

$$2.3.22. \oint_{|z-1|=2} \frac{\sin^2 z + 1}{z^2 + 2\pi z} dz .$$

$$2.3.23. \oint_{|z+6|=2} \frac{2 \cos(\pi z / 5)}{(z+5)(z+3)} dz .$$

$$2.3.24. \oint_{|z|=3} \frac{\cos(z + \pi i)}{z(z^2 + 10)} dz .$$

$$2.3.25. \oint_{|z-1,5|=1,6} \frac{e^z + \sin z}{z(z - \pi)} dz .$$

$$2.3.26. \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-1)(z+3)} dz .$$

$$2.3.27. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^2 + \pi z} dz .$$

$$2.3.28. \oint_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^2 + \pi z} dz .$$

$$2.3.29. \oint_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi z}{4}}{z^2 - 1} dz .$$

$$2.3.30. \oint_{|z-i|=2} \frac{\sin z dz}{z^2 + 4} .$$

2.4. Використовуючи теорему Коші для багатозв'язної області або інтегральну формулу для похідних аналітичної функції, обчисліть інтеграли вздовж вказаного контуру  $L$  (обхід проти ходу годинникової стрілки).

$$2.4.1. \oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz .$$

$$2.4.2. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz .$$

$$2.4.3. \oint_{|z-3|=1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2 (z - \pi)^2} dz .$$

$$2.4.4. \oint_{|z-1-i|=\frac{5}{4}} \frac{(z+2)dz}{z^2 (z-1)^2} .$$

$$2.4.5. \oint_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z^2 (z^2 + 4)} .$$

$$2.4.6. \oint_{|z|=3} \frac{2 + \sin z}{z^2 (z + 2i)} dz .$$



$$2.4.7. \oint_{\left|z-\frac{1}{2}\right|=1} \frac{e^z + 1}{z^2(z-1)} dz .$$

$$2.4.8. \oint_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{(z^2 - \pi^2)^2} dz .$$

$$2.4.9. \oint_{|z-6|=1} \frac{\sin^3 z + 2}{(z^2 - 4\pi^2)^2} dz .$$

$$2.4.10. \oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{tg} z + 2}{4z^3 + \pi z^2} dz .$$

$$2.4.11. \oint_{|z-2i|=2} \frac{\cos \frac{\pi z}{2+2i}}{(z-2-2i)^2} dz .$$

$$2.4.12. \oint_{|z|=2} \frac{z^2 + \sin z + 2}{z^3 + \pi z^2} dz .$$

$$2.4.13. \oint_{|z+6|=2} \frac{2 \cos \frac{\pi z}{5}}{(z+5)^2 z} dz .$$

$$2.4.14. \oint_{|z+i|=1} \frac{\sin z}{(z+i)^3} dz .$$

$$2.4.15. \oint_{|z-i|=3} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi iz}{4+2i}}{(z-2-i)^2} dz .$$

$$2.4.16. \oint_{|z+2|=2} \frac{\sin \frac{\pi z}{2}}{(z+1)^2(z-1)} dz .$$

$$2.4.17. \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^3 + 2\pi z^2} dz .$$

$$2.4.18. \oint_{|z-2|=2} \frac{\cos(\pi z/3)}{(z-3)^2(z-5)} dz .$$

$$2.4.19. \oint_{|z-7i|=2} \frac{\sin \frac{\pi iz}{2+14i}}{(z-1-7i)^2} dz .$$

$$2.4.20. \oint_{|z+3|=2} \frac{\operatorname{sh}(\pi iz/4)}{(z+2)^2 z} dz .$$

$$2.4.21. \oint_{|z-2i|=1} \frac{e^z}{(z^2 + 4)^2} dz .$$

$$2.4.22. \oint_{|z+4|=2} \frac{\sin(\pi z/6)}{(z+3)^2(z+1)} dz .$$

$$2.4.23. \oint_{|z-3i|=2} \frac{2 \cos \frac{\pi z}{1+3i}}{(z-1-3i)^2} dz .$$

$$2.4.24. \oint_{|z-1|=2} \frac{\cos \frac{\pi z}{2}}{(z-2)^2(z-4)} dz .$$

$$2.4.25. \oint_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^2(z-1)} .$$

$$2.4.26. \oint_{|z+5|=2} \frac{\operatorname{ch}(\pi iz/4)}{(z+4)^2(z+2)} dz .$$

$$2.4.27. \oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z-2)^2(z+4)} .$$

$$2.4.28. \oint_{|z-i|=1} \frac{\sin(\pi zi) dz}{(z^2 + 1)^2} .$$

$$2.4.29. \oint_{|z-i|=3} \frac{\sin z}{(z+i)^2(z-5)} dz .$$

$$2.4.30. \oint_{|z|=3} \frac{\sin z}{(z-2i)^3} dz .$$

**Тема 3. РЯД ТЕЙЛОРА. РЯД ЛОРАНА.  
ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ, ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ.  
ЛИШКИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.**

Розкладання функцій комплексної змінної в ряди Тейлора та Лорана. Ізольовані особливі точки та їх класифікація. Лишки функцій. Застосування лишків до обчислення інтегралів.



**Література:** [4, розділ 1, пп. 1.7—1.9], [5, гл.1, пп. 1.7—1.9], [12, розділ 30, §4—6], [13, розділ 1, §6—8], [15, розділ 15, п.п. 15.3—15.4], [17, розділ 8, §30—31].

**Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ**

**3.1. Ряд Тейлора**

**Теорема 1**

Нехай функція  $f(z)$  — аналітична в області  $D$ ,  $z_0$  — довільна фіксована точка цієї області і  $R$  — відстань від точки  $z_0$  до найближчої межевої точки області  $D$ . Тоді функцію  $f(z)$  у крузі  $|z - z_0| < R$  єдиним способом можна розкласти у степеневий ряд

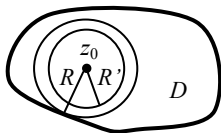
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.19)$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

Тут  $L$  — довільне коло з центром у точці  $z_0$  радіуса  $R'$ :  $0 < R' < R$ , орієнтоване проти ходу годинникової стрілки.

Степеневий ряд (3.19) з коефіцієнтами (3.20), тобто ряд вигляду



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Рис. 3.9

називають *рядом Тейлора* функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0$ .

Розвинення деяких елементарних функцій в ряд Маклорена (ряд Тейлора за степенями  $z$ ) вміщені у табл. 3.1.

Таблиця 3.1

№	Ряд Маклорена функції $f(z)$	Область збіжності
1	$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$	Комплексна площина $Z$
2	$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$	Комплексна площина $Z$
3	$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots$	Комплексна площина $Z$
4	$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots$	$ z  < 1$
5	$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$	$ z  < 1$

**Зауваження.**

1. Підкреслимо, що радіус збіжності ряду (3.19) дорівнює відстані від точки  $z_0$  до найближчої особливої точки функції  $f(z)$ .
2. Існує інше означення аналітичності (див. п. 2.1), яке належить Вейерштрассу, воно пов'язане з розкладом функції в ряд Тейлора.

Функцію  $f(z)$ , однозначну в області  $D$ , називають *аналітичною за Вейерштрассом* у цій області, якщо для довільної точки  $z_0 \in D$  можна вказати окіл цієї точки, в якому функцію можна подати у вигляді суми степеневого ряду (3.19).

Ці два означення аналітичності функції рівносильні.

Оскільки степеневий ряд можна почленно диференціювати, то його сума  $f(z)$  має похідні всіх порядків, які також є аналітичними функціями. Тому під аналітичною функцією розуміють інколи таку, яка є нескінченно диференційовною.

### 3.2. Ряд Лорана

**Теорема 2**

Нехай  $0 \leq r < R \leq \infty$ . Кожну аналітичну в круговому кільці  $r < |z - z_0| < R$  функцію  $f(z)$  можна подати в цьому кільці збіжним рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad (3.21)$$

коефіцієнти якого визначаються за формулою

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.22)$$

де  $L$  — будь-яке коло  $|z - z_0| = \rho$ ,  $r < \rho < R$ , орієнтоване проти ходу годинникової стрілки.

Ряд (3.21) з коефіцієнтами (3.22) називають *рядом Лорана* для функції  $f(z)$  у круговому кільці  $r < |z - z_0| < R$ .

Ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

складається з двох частин. Перша частина, тобто ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

називається *правильною частиною* ряду Лорана; цей ряд містить лише додатні степені  $z - z_0$  і збігається у крузі  $|z - z_0| < R$  до деякої аналітичної в цьому крузі функції  $f_1(z)$ :

$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Другу частину ряду Лорана, тобто ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

називають *головною частиною* ряду Лорана. Цей ряд містить лише від'ємні степені  $z - z_0$  й визначає деяку функцію  $f_2(z)$ , аналітичну поза кругом із центром у точці  $z_0$  і радіусом  $r$ :

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Отже, функція  $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$  аналітична всередині кільця  $r < |z - z_0| < R$ . Залежно від значень радіусів  $r$  та  $R$  це кільце може виродитись:

- 1) у круг з виколотим центром:  $0 < |z - z_0| < R$  ( $r = 0, 0 < R < \infty$ );
- 2) у зовнішність круга:  $|z - z_0| > r$  ( $0 < r < R = \infty$ );
- 3) в усю комплексну площину без точки  $z = z_0$  ( $r = 0, R = \infty$ ).

### 3.3. Ізольовані особливі точки, їх класифікація.

#### Нулі аналітичної функції та зв'язок між нулем і полюсом функції

Особливу точку  $z = z_0$  функції  $f(z)$  називають *ізольованою*, якщо  $f(z)$  є однозначною й аналітичною в кожній точці кругового кільця  $0 < |z - z_0| < \delta$ , крім самої точки  $z_0$ .

Ізольовану особливу точку називають *усувною*, якщо ряд Лорана функції  $f(z)$  не містить від'ємних степенів  $(z - z_0)$ , тобто

$$f(z) = f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Іншими словами, ряд Лорана в околі усувної точки має лише правильну частину.

#### Теорема 3

Для того, щоб ізольована особлива точка  $z_0$  однозначної аналітичної функції  $f(z)$  була усувною, необхідно і достатньо, щоб функція  $f(z)$  у точці  $z_0$  мала скінченну границю  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$ .

Ізольована особлива точка називається *полюсом* порядку  $m \geq 1$ , якщо головна частина ряду Лорана функції  $f(z)$  містить лише скінченне число ( $m$ ) від'ємних степенів  $(z - z_0)$ , тобто

$$f(z) = f_1(z) + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} ,$$

причому, якщо  $m = 1$ , полюс називають *простим*, якщо  $m > 1$ , полюс називають *кратним* (кратності  $m$ ).

#### Теорема 4

Для того, щоб ізольована особлива точка  $z_0$  однозначної аналітичної функції  $f(z)$  була полюсом, необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ .

Ізольовану особливу точку називають *істотною особливою* точкою функції  $f(z)$ , якщо ряд Лорана цієї функції містить нескінченну кількість від'ємних степенів  $(z - z_0)$ , тобто

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} .$$

**Теорема 5** Для того, щоб ізольована особлива точка однозначної аналітичної функції була істотно особливою, необхідно й достатньо, щоб у цій точці не існувало ні скінченної, ні нескінченної границі функції  $f(z)$ .

Точку  $z_0$  називають нулем функції  $f(z)$  порядку (або кратності)  $m$ , якщо виконуються умови

$$f(z_0) = 0, f'(z_0) = 0, \dots, f^{(m-1)}(z_0) = 0, f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Якщо  $m=1$ , то точку  $z_0$  називають простим нулем. Точка  $z_0$  тоді і тільки тоді є нулем  $m$ -го порядку аналітичної в точці  $z_0$  функції  $f(z)$ , коли в деякому околі цієї точки виконується рівність

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

де функція  $\varphi(z)$  аналітична в точці  $z_0$  і  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Для того, щоб точка  $z_0$  була полюсом функції  $f(z)$ , необхідно і достатньо, щоб ця точка була нулем функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

Точка  $z_0$  є полюсом порядку  $m(m \geq 1)$  функції  $f(z)$ , якщо ця точка є нулем кратності  $m$  функції  $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ .

Нехай  $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ ,  $f_1(z_0) \neq 0$ ,  $f_2(z_0) = 0$ . Точка  $z_0$  — полюс порядку  $m$  функції  $f(z)$ , якщо ця точка — нуль кратності  $m$  функції  $\varphi(z) = f_2(z)$ .

### 3.4. Лишок функції

Нехай  $z_0$  — правильна або ізольована особлива точка однозначної функції  $f(z)$ ,  $L$  — контур у крузі  $|z - z_0| < R$ , орієнтований проти ходу годинникової стрілки і такий, що точка  $z_0$  міститься всередині  $L$ , при цьому круг не містить інших особливих точок.

Лишком функції  $f(z)$  в точці  $z = z_0$  (позначають символом  $\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0}$ ) називають інтеграл

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz. \quad (3.23)$$

Якщо  $z_0$  — правильна або скінченна усувна особлива точка функції  $f(z)$ , то  $\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0} = 0$ .

**Теорема 6** Нехай  $z_0$  — ізольована особлива точка функції  $f(z)$ . Тоді лишок  $f(z)$  у точці  $z_0$  дорівнює коефіцієнту  $a_{-1}$  при  $\frac{1}{z - z_0}$  в розвиненні функції  $f(z)$  у ряд Лорана в околі точки  $z_0$ :

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}.} \quad (3.24)$$

**Теорема 7** Нехай  $z_0$  — простий полюс функції  $f(z)$ . Тоді

$$\boxed{a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)).} \quad (3.25)$$

**Теорема 8** Нехай  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , де  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$  (з цих умов випливає, що  $z_0$  — простий полюс функції  $f(z)$ ). Тоді

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.} \quad (3.26)$$

**Теорема 9** Нехай  $z_0$  — полюс порядку  $m$ , тоді

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1} ((z - z_0)^m f(z))}{dz^{m-1}}.} \quad (3.27)$$

### 3.5. Лишок функції відносно нескінченно віддаленої точки

Поняття ізольованої особливої точки вводиться також і для нескінченно віддаленої точки комплексної площини  $z = \infty$ .

Нагадаємо, що околом нескінченно віддаленої точки називають множини точок  $z$ , які задовольняють нерівність  $|z| > R$ , тобто зовнішню частину кожного круга з центром у початку координат.

Припустимо, що в теоремі 2 (про розкладання аналітичної в кільці функції в ряд Лорана)  $z_0 = 0$  і  $R = \infty$ , а  $r$  — будь-яке невід'ємне число ( $0 < r < \infty$ ). Тоді теорему 2 можна сформулювати так.

Якщо функція  $f(z)$  аналітична для всіх комплексних чисел  $z$ , що задовольняють нерівність  $|z| > r$ , то її можна розкласти в ряд Лорана за степенями  $z$ :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = F_1(z) + F_2(z), \quad (3.28)$$

який збігається для всіх  $z$ , що задовольняють нерівність  $|z| > r$ .

Якщо покласти  $z = \frac{1}{z'}$ , то функція  $\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right)$  буде аналітичною в

кільці  $0 < |z'| < \frac{1}{r}$  комплексної площини  $Z'$ . Таким чином, зв'язок між ха-

рактером точки  $z = \infty$  відносно функції  $f(z)$  і відповідним розкладанням в ряд Лорана аналогічний випадку скінченної точки, тільки ролі членів з додатними і від'ємними степенями міняються між собою, тобто функція

$$F_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n}$$

є правильною частиною ряду Лорана, а функція

$$F_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

є головною частиною цього ряду.

Залежно від поведінки функції  $f(z)$  в околі точки  $z = \infty$  природно також ввести таку класифікацію:

а) особливість у точці  $z = \infty$  *усувна*, якщо у формулі (3.28) немає головної частини, тобто

$$f(z) = F_1(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Якщо покласти  $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$ , то особливість у нескінченно віддаленій точці зникає і функція стає аналітичною;

б) точка  $z = \infty$  є *полюсом порядку  $m$* , якщо головна частина ряду (3.28) містить лише скінченну кількість членів, тобто

$$f(z) = \left( a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots \right) + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m = F_1(z) + \sum_{n=1}^m a_n z^n,$$

у цьому разі  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ ;

в) точка  $z = \infty$  — *істотно особлива* точка, якщо головна частина містить нескінченну кількість членів; при цьому не існує ні скінченної, ні нескінченної границі  $f(z)$  при  $z = \infty$ .



Нехай функція аналітична в деякому околі точки  $z = \infty$ ;  $r < |z| < \infty$ ,  $L$  — замкнений контур, що належить околу точки  $z = \infty$ . Тоді функція  $f(z)$  аналітична в області  $D$ , що обмежена контуром  $L$ , і складається з точок, які лежать зовні контура  $L$ . Додатному обходу  $L$  (тобто  $L^+$ ) відповідає орієнтація контура за ходом годинникової стрілки (точки області  $D$  залишаються ліворуч).

Лишком функції  $f(z)$  у точці  $z = \infty$  називається інтеграл

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^+} f(z) dz.$$

Для обчислення лишку в точці  $z = \infty$  використовують формулу

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}. \quad (3.29)$$



*Зауваження.* Лишок функції відносно точки  $z = \infty$  не обов'язково дорівнює нулю, коли ця точка правильна або усувна особлива. Наприклад, для функції  $f(z) = 1 + \frac{2}{z}$  точка  $z = \infty$  є усувною особливою точкою, проте  $\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1} = -2$ .

### Теорема 10

Нехай  $f(z)$  аналітична в усій комплексній площині, за винятком скінченної кількості точок  $z_1, z_2, \dots, z_N$ . Тоді має місце рівність

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (3.30)$$

### 3.6. Застосування лишків до обчислення інтегралів

#### Теорема 11

(*основна теорема про лишки*). Нехай функція  $f(z)$  аналітична в замкненій області  $D$  з межею  $L$ , за винятком скінченного числа особливих точок  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , розміщених усередині області  $D$ .

Тоді

$$\oint_{L^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (3.31)$$

Лишки використовують також для обчислення визначених та невластних інтегралів.

## 1. Інтеграл вигляду

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt,$$

де  $R(u, v)$  — раціональна функція двох змінних  $u$  і  $v$ , причому  $R(\cos t, \sin t)$  — неперервна на відрізку  $[0; 2\pi]$ , спрощується за допомогою використання лишків.

Введемо нову комплексну змінну  $z = e^{it}$ , тоді

$$dt = \frac{dz}{zi}, \quad \cos t = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad \sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}.$$

Якщо змінна  $t$  змінюється неперервно від 0 до  $2\pi$ , то геометричним образом змінної  $z$  є коло  $|z|=1$ . Отже,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz, \quad (3.32)$$

де  $\tilde{R}(z)$  — дробово-раціональна функція змінної  $z$ , коло  $|z|=1$  обігається в додатному напрямі.

Контурний інтеграл у правій частині (3.32) обчислюється за формулою (3.31), а лишки функції  $f(z) = \tilde{R}(z)$  розглядаються тільки в тих особливих точках (полюсах) функції  $\tilde{R}(z)$ , які містяться всередині кола  $|z|=1$ .

## 2. Обчислення невластних інтегралів вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

ґрунтується на використанні такої теореми.

**Теорема 12** Нехай функція  $f(z)$  аналітична у верхній півплощині  $\text{Im } z \geq 0$ , включаючи дійсну вісь, за винятком скінченної кількості особливих точок  $z_1, z_2, \dots, z_N$ , які лежать у верхній півплощині. Нехай, крім того,  $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^m}$ , при  $|z| \geq R$ , де  $m \geq 2$  і  $R$  — досить велике число. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res } f(z).$$



**Наслідок.** Якщо  $f(x) = R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  — раціональна функція, де  $P_m(x)$ ,

$Q_n(x)$  — многочлени степенів  $m$  і  $n$  відповідно,  $R(x)$  — неперервна на дійсній осі функція і  $n - m \geq 2$ , тобто степінь знаменника принаймні на дві одиниці більший від степеня чисельника, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} R(z),$$

причому сума лишків функції  $R(z)$  береться відносно всіх полюсів  $z = z_k$ , розміщених у верхній півплощині  $\operatorname{Im} z > 0$ .

### 3. Обчислення невласних інтегралів вигляду

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$$

грунтується на застосуванні такої теореми.

#### Теорема 13

Нехай функція  $f(z)$  аналітична в півплощині  $\operatorname{Im} z \geq 0$ , за винятком скінченної кількості особливих точок  $z_1, z_2, \dots, z_N$  в  $\operatorname{Im} z > 0$ , і прямує в цій півплощині до нуля при  $|z| \rightarrow \infty$ . Тоді для будь-якого  $\lambda > 0$  виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} \left[ f(z) e^{i\lambda z} \right].$$



**Наслідок.** Якщо  $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$  — раціональна функція, неперервна на дійсній осі і  $n - m \geq 1$ , то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} \left[ R(z) e^{i\lambda z} \right] \quad (\lambda > 0, z_k \in (\operatorname{Im} z > 0)).$$

Зокрема, якщо  $R(x)$  — парна функція, то

$$\int_0^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} \left[ R(z) e^{i\lambda z} \right], \quad (3.33)$$

а якщо  $R(x)$  — непарна функція, то

$$\int_0^{\infty} R(x) \sin \lambda x \, dx = \pi \sum_{k=1}^N \operatorname{Res} \left[ R(z) e^{i\lambda z} \right]. \quad (3.34)$$

### **Т.3** ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розкладіть у ряд Тейлора за степенями  $z - z_0$  функцію

$$f(z) = \frac{1}{2-3z},$$

якщо: а)  $z_0 = 0$ ; б)  $z_0 = 2$ .

*Розв'язання.* а) функція  $f(z)$  має одну особливу точку  $z = \frac{2}{3}$ . Отже, в

крузі  $|z| < \frac{2}{3}$  ( $R = \frac{2}{3}$  — відстань від точки  $z_0 = 0$  до особливої точки

$z = \frac{2}{3}$ ) функція аналітична, тому за теоремою 1 вона розкладається в цьому

крузі в ряд Тейлора:  $\frac{1}{2-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , коефіцієнти якого можна визначити

за формулами (3.20). Покажемо, як можна уникнути громіздких обчислень інтегралів, виконавши такі дії. Запишемо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{1}{2-3z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3z}{2}}.$$

Скориставшись формулою 5 із табл. 3.1, дістанемо

$$f(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3z}{2}} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3z}{2} + \left(\frac{3z}{2}\right)^2 + \left(\frac{3z}{2}\right)^3 + \dots \right),$$

де  $|z| < \frac{2}{3}$ ;

б) виконаємо перетворення

$$f(z) = \frac{1}{2-3z} = \frac{1}{-3(z-2)-4} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \frac{3(z-2)}{4}}.$$

За формулою 4 (табл. 3.1) дістаємо

$$\frac{1}{1 + \frac{3(z-2)}{4}} = 1 - \frac{3}{4}(z-2) + \left(\frac{3}{4}\right)^2 (z-2)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n (z-2)^n + \dots$$

Тоді

$$f(z) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4^2}(z-2) - \frac{3^2}{4^3}(z-2)^2 + \dots + (-1)^n \frac{3^n}{4^{n+1}}(z-2)^n + \dots,$$

область збіжності степеневому ряду — круг  $|z-2| < \frac{4}{3}$ .



*Зуваження.* У загальному випадку розкладання функції  $f(z) = \frac{A}{a+bz}$  у ряд Тейлора за степенями  $z - z_0$  виконують у такій послідовності:

1) записують функцію  $f(z)$  у вигляді

$$f(z) = \frac{A}{a+bz} = \frac{A}{b(z-z_0) + a+bz_0} = \frac{A}{a+bz_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b(z-z_0)}{a+bz_0}} \quad (a+bz_0 \neq 0);$$

2) за формулою 4 (або 5) розкладають функцію у степеневий ряд;

3) область збіжності степеневому ряду — круг  $|z - z_0| < \left| \frac{a}{b} + z_0 \right|$ .

Розвинення у ряд Тейлора правильних дробово-раціональних функцій складнішого вигляду проводять у два етапи: спочатку розкладають дріб у суму найпростіших елементарних дробів, після цього кожен дріб розкладають у ряд Тейлора.

**2.** Розкладіть у ряд Тейлора в околі точки  $z_0 = 0$  функцію

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}.$$

*Розв'язання.* Розклавши знаменник дробу на множники, запишемо функцію у вигляді

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-3)}.$$

Звідси видно, що функція  $f(z)$  має дві особливі точки:  $z = -1$  і  $z = 3$ . Отже, в крузі  $|z| < 1$  ( $R = 1$  — відстань від точки  $z_0$  до найближчої особливої точки) функція аналітична, тому за теоремою 1 вона розкладається в цьому крузі в ряд Тейлора:  $\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ . Коефіцієнти степеневому ряду визначимо так.

Розкладемо заданий дріб на елементарні дробі:

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{z+1} + \frac{3}{z-3} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+z} - \frac{1}{1-\frac{z}{3}} \right).$$

Оскільки

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots, \quad (|z| < 1),$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = 1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{3}\right)^n + \dots, \quad (|z| < 3),$$

то розклад заданої функції у ряд Тейлора за степенями  $z$  має вигляд

$$f(z) = \frac{1}{4} \left( (1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots) - \left( 1 + \frac{z}{3} + \left(\frac{z}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z}{3}\right)^n + \dots \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left( (-1)^n - \frac{1}{3^n} \right) z^n.$$

**3.** Розкладіть функцію  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  в ряд Лорана в кільці  $|z| > 1$ , вважаючи  $z_0 = 0$ .

*Розв'язання.* За умовою треба розкласти задану функцію в околі точки  $z = \infty$ . Виконаємо перетворення

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z \left( 1 - \frac{1}{z} \right)}.$$

Для всіх точок кільця  $|z| > 1$  виконується нерівність  $\left| \frac{1}{z} \right| < 1$ , отже, застосовна формула 5 (табл. 3.1):

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z \left( 1 - \frac{1}{z} \right)} = -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) =$$

$$= -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

4. Функцію  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  розкладіть у ряди Тейлора або Лорана

за степенями  $z$  в областях: а)  $|z| < 1$ ; б)  $1 < |z| < 2$ ; в)  $|z| > 2$ .

*Розв'язання.* За умовою  $z_0 = 0$ . Функція  $f(z)$  має дві особливі точки:  $z = 1$ ,  $z = 2$ , які визначають три кругові «кільця» (рис. 3.10).

Розкладемо задану функцію у суму елементарних дробів:

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Знайдемо по черзі усі лоранівські розклади функцій  $f_1(z) = \frac{1}{z-2}$  та  $f_2(z) = \frac{1}{z-1}$ . Функція  $f_1(z)$  має одну особливу точку  $z = 2$ , коло  $|z| = 2$  поділяє комплексну площину на дві частини. У крузі  $|z| < 2$  ця функція аналітична, отже, за теоремою 1 розкладається в ряд Тейлора. Маємо

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{2^n} + \dots \right) = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{z}{2} \right)^n = f_{1\text{Тейлор}}.$$

За умови  $|z| > 2$  за теоремою 2 функція  $f_1(z)$  розкладається у ряд Лорана, дістанемо

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \dots + \frac{2^n}{z^n} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = f_{1\text{Лоран}}.$$

Аналогічно знаходимо розклади функції  $f_2(z)$ :

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -(1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n = f_{2\text{Тейлор}}, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = f_{2\text{Лоран}}, \quad (|z| > 1).$$

Розглянемо тепер випадки:

а)  $|z| < 1$ . У цьому крузі обидві функції  $f_1(z)$  та  $f_2(z)$  розкладаються в ряд Тейлора, отже, задана функція розкладається в ряд Тейлора, який має вигляд

$$f(z) = f_{1\text{Тейлор}} - f_{2\text{Тейлор}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) z^n;$$

б)  $1 < |z| < 2$ . У цьому кільці функція  $f_1(z)$  розкладається в ряд Тейлора, а функція  $f_2(z)$  — у ряд Лорана, отже, розклад функції  $f(z)$  в ряд Лорана такий:

$$f(z) = f_{1\text{Тейлор}} - f_{2\text{Лоран}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}};$$

в)  $|z| > 2$ . У цьому разі розкладання  $f(z)$  в кільці  $|z| > 2$  має вигляд:

$$f(z) = f_{1\text{Лоран}} - f_{2\text{Лоран}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{z^{n+1}}.$$

5. Знайдіть усі лоранівські розклади функції  $f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3}$  за степенями  $z-3$ .

*Розв'язання:* Функція  $f(z)$  має дві особливі точки  $z_1 = 1$  та  $z_2 = 3$ . Проведемо через особливу точку  $z_1 = 1$  коло  $|z-3| = 2$ , яке поділить площину на дві частини, у кожній з яких функція є аналітичною:

- 1) кільце  $0 < |z-3| < 2$ ;
- 2)  $|z-3| > 2$  — зовнішня частина круга  $|z-3| \leq 2$  (рис. 3.11).

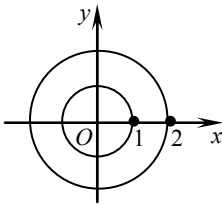


Рис. 3.10

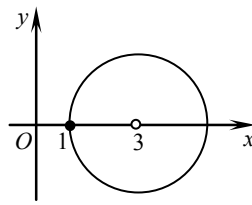


Рис. 3.11

Знайдемо ряди Лорана для кожного з цих випадків.

Виконаємо перетворення заданої функції:

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 4z + 3} = \frac{z+1}{(z-3)(z-1)} = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{z-1+2}{z-1} = \frac{1}{z-3} \cdot \left(1 + \frac{2}{(z-3)+2}\right).$$

У кільці  $0 < |z-3| < 2$  виконується умова  $\left|\frac{z-3}{2}\right| < 1$ , тоді



$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z-3} \cdot \left( 1 + \frac{1}{1 + \frac{z-3}{2}} \right) = \frac{1}{z-3} \cdot \left( 1 + 1 - \frac{z-3}{2} + \frac{(z-3)^2}{2^2} - \frac{(z-3)^3}{2^3} + \dots \right) = \\
 &= \frac{2}{z-3} - \frac{1}{2} + \frac{z-3}{2^2} - \frac{(z-3)^2}{2^3} + \dots = \frac{2}{z-3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-3)^{n-1}}{2^n}.
 \end{aligned}$$

Якщо  $|z-3| > 2$ , то виконуються нерівності  $\left| \frac{z-3}{2} \right| > 1$ ,  $\left| \frac{2}{z-3} \right| < 1$ . Виходячи з цього, виконуємо перетворення:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z-3} \cdot \left( 1 + \frac{2}{z-3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{z-3}} \right) = \\
 &= \frac{1}{z-3} \cdot \left( 1 + \frac{2}{z-3} \left( 1 - \frac{2}{z-3} + \frac{2^2}{(z-3)^2} - \frac{2^3}{(z-3)^3} + \dots \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{z-3} + \frac{2}{(z-3)^2} - \frac{2^2}{(z-3)^3} + \frac{2^3}{(z-3)^4} - \dots = \frac{1}{z-3} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{n-1}}{(z-3)^n}.
 \end{aligned}$$

### 6. Дослідіть збіжність ряду

$$\dots + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2(z-1)} + 1 + \frac{z-1}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \dots$$

*Розв'язання.* Розглянемо два ряди:

$$\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2^2(z-1)^2} + \frac{1}{2^3(z-1)^3} + \dots ; \tag{3.35}$$

$$1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \dots . \tag{3.36}$$

Поклавши в ряді (3.35)  $z-1 = \frac{1}{z'}$ , дістанемо степеневий ряд

$$\frac{z'}{2} + \frac{z'^2}{2^2} + \frac{z'^3}{2^3} + \dots .$$

Визначаємо радіус збіжності цього ряду:  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1}}{\frac{1}{2^n}} = 2$ . Отже, степе-

невий ряд збігається, якщо  $|z'| < 2$ . Тоді  $\left| \frac{1}{z-1} \right| < 2$ ,  $|z-1| > \frac{1}{2}$ .

Отже, ряд (3.35) збігається поза кругом радіуса  $R = \frac{1}{2}$  з центром у точці  $z = 1$ .

Визначаємо тепер радіус збіжності ряду (1.35):  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n-1}}{\frac{1}{5^n}} = 5$ .

Звідси випливає, що область збіжності ряду (3.36) визначається нерівністю  $|z-1| < 5$ .

Отже, областю збіжності заданого ряду є кільце  $\frac{1}{2} < |z-1| < 5$ .

Розв'язання цієї задачі можна спростити. Ряди (3.35) та (3.36) є геометричними прогресіями із знаменниками  $\frac{1}{2(z-1)}$  та  $\frac{z-1}{5}$  відповідно. Ці ряди

будуть збігатись, якщо одночасно  $\left| \frac{1}{2(z-1)} \right| < 1$  і  $\left| \frac{z-1}{5} \right| < 1$ , тобто

$|z-1| > \frac{1}{2}$  та  $|z-1| < 5$ . Таким чином, область збіжності — кільце, що визначається подвійною нерівністю

$$\frac{1}{2} < |z-1| < 5.$$

7. В околі точки  $z_0 = 0$  розкладіть у ряд Лорана функцію

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

*Розв'язання.* Підставивши у формулу 1 з табл. 1 замість змінної  $z$  значення  $\frac{1}{z}$ , дістанемо шукане розвинення

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots$$

Ряд, що міститься праворуч, збігається до функції  $e^{\frac{1}{z}}$  для всіх  $z$ , крім  $z = 0$ .

**8.** Розкладіть в ряд Лорана функцію

$$f(z) = \cos \frac{1}{z-3}$$

в околі точки  $z_0 = 3$ .

*Розв'язання.* Замінивши у формулі 3 (табл. 1) змінну  $z$  на  $\frac{1}{z-3}$ , дістанемо розклад

$$\cos \frac{1}{z-3} = 1 - \frac{1}{2!(z-3)^2} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!(z-3)^{2n}} + \dots,$$

що збігається до функції  $\cos \frac{1}{z-3}$  для всіх  $z$ , крім  $z = 3$ .

**9.** Розкладіть функцію  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$  в ряд Лорана в околі точки  $z_0 = \infty$ .

*Розв'язання.* Функція  $f(z)$  має дві особливі точки —  $z = 2$  та  $z = -2$ . В околі точки  $z_0 = \infty$ , тобто у кільці  $|z| > R$ , де  $R \geq 2$ , ряд Лорана знаходимо так:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2 - 4} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = \frac{1}{z^2} \cdot \left( 1 + \frac{4}{z^2} + \frac{4^2}{z^4} + \dots + \frac{4^n}{z^{2n}} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^4} + \frac{4^2}{z^6} + \dots + \frac{4^n}{z^{2n+2}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{z^{2n+2}}, \end{aligned}$$

де  $|z| > 2$ .

10. Знайдіть нулі функції  $f(z) = 1 + \cos z$  та визначте їх порядок.

*Розв'язання.* Розв'язуємо рівняння

$$1 + \cos z = 0, \text{ тобто } \cos z = -1,$$

звідки дістаємо нулі заданої функції:

$$z_n = (2n + 1)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \dots).$$

Далі

$$f'((2n + 1)\pi) = -\sin(2n + 1)\pi = 0,$$

$$f''((2n + 1)\pi) = -\cos(2n + 1)\pi = 1 \neq 0.$$

Отже, точки  $z_n = (2n + 1)\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) є нулями другого порядку заданої функції.

11. Знайдіть особливі точки функції та визначте їх характер:

$$\text{а) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{1}{z^3}; \quad \text{в) } f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}; \quad \text{г) } f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z};$$

$$\text{а) } f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}; \quad \text{е) } f(z) = (z - 1)e^{\frac{1}{z-1}}; \quad \text{е) } f(z) = \operatorname{tg}^2 z.$$

*Розв'язання.* а) особливою є точка  $z_0 = 0$ . Обчислимо границю

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Отже,  $z_0 = 0$  – усувна особлива точка;

б) особлива точка  $z_0 = 0$ . Оскільки  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z^3} = \infty$ , то точка  $z_0 = 0$

є полюсом цієї функції. Для функції  $\varphi(z) = z^3$  точка  $z_0 = 0$  є нулем третього

порядку, отже,  $z_0 = 0$  — полюс третього порядку для функції  $f(z) = \frac{1}{z^3}$ ;

в) розглянемо поведінку цієї функції на дійсній та уявній осях. На дійсній осі  $z = x$  і  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . На уявній осі  $z = iy$  і

$f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \rightarrow 0$  при  $y \rightarrow 0$ . Отже, границя  $f(z)$  у точці  $z = 0$  не існує (ні скінченна, ні нескінченна). Тому  $z = 0$  — істотно особлива точка функції  $f(z)$ ;

г) використовуючи розвинення в ряд Тейлора функції  $e^{-z}$  в околі точки  $z_0 = 0$ , одержуємо лоранівський розклад функції  $f(z)$  в околі нуля:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{z} \left( 1 - e^{-z} \right) = \frac{1}{z} \left( 1 - \left( 1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots \right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \dots .
 \end{aligned}$$

Цей розклад не містить головної частини. Тому точка  $z_0 = 0$  є усупною особливою точкою;

д) розкладаючи  $\cos z$  у ряд Тейлора за степенями  $z$ , дістаємо лоранівський розклад функції  $f(z)$  в околі нуля:

$$f(z) = \frac{1}{z^7} \left( \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots \right) = \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} + \dots .$$

Розкладання у ряд Лорана функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0 = 0$  містить скінченне число членів з від'ємними степенями  $z$ . Отже, точка  $z_0 = 0$  є полюсом п'ятого порядку, оскільки найбільший показник степеня  $z$  у знаменниках членів головної частини ряду Лорана дорівнює п'яти;

е) використовуючи розклад  $e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \dots$  та покладаючи

$w = \frac{1}{z-1}$ , дістаємо лоранівський розклад функції  $f(z)$  в околі точки  $z_0 = 1$ :

$$\begin{aligned}
 f(z) &= (z-1) \left( 1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \right) = \\
 &= 1 + (z-1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \frac{1}{3!(z-1)^2} + \dots .
 \end{aligned}$$

Цей розклад містить нескінченну множину членів з від'ємними степенями  $(z-1)$ . Отже, точка  $z_0 = 1$  є істотною особливою точкою функції  $f(z)$ ;

е) особливі точки даної функції — це ті значення  $z$ , для яких  $\cos z = 0$ ,

звідси  $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in Z$ . Покажемо, що усі ці точки є полюсами другого порядку. Оскільки  $\sin^2 z_n = 1 \neq 0$ , то достатньо визначити за теоремою 5 порядок нуля  $z_n$  функції  $\varphi(z) = \cos^2 z$ :

$$\varphi'(z) = -\sin 2z, \quad \varphi'(z_n) = -\sin(\pi + 2\pi n) = 0,$$

$$\varphi''(z) = -2 \cos 2z, \quad \varphi''(z_n) = -2 \cos(\pi + 2\pi n) = 2 \neq 0.$$

Отже, точки  $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) є нулями другого порядку функції  $\varphi(z)$  та відповідно полюсами другого порядку заданої функції  $f(z)$ .

**12.** Визначте, яку особливість у нескінченно віддаленій точці мають функції:

$$\text{а) } f(z) = \frac{z}{2-z}; \quad \text{б) } f(z) = e^z; \quad \text{в) } f(z) = \sin z; \quad \text{г) } f(z) = \cos z.$$

*Розв'язання:* а) розкладемо функцію в околі точки  $z = \infty$  ( $R < |z| < +\infty$ ).  
Маємо

$$f(z) = \frac{z}{2-z} = z \cdot \frac{1}{-z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \frac{2^3}{z^3} + \dots\right) = -1 - \frac{2}{z} - \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} - \dots$$

У знайденому розкладі немає членів з додатними степенями  $z$ , отже, для заданої функції нескінченно віддалена точка є усувною особливою;

б) – г) Запишемо розвинення заданих функцій у степеневий ряд:

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \\ \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots; \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots, \end{aligned}$$

де  $z$  — будь-яке комплексне число. Оскільки кожен ряд містить нескінченно багато членів з додатними степенями  $z$ , то для заданих функцій нескінченно віддалена точка є істотно особливою.

**13.** Знайдіть лишки функцій у скінченних особливих точках:

$$\text{а) } f(z) = \sin \frac{1}{z}; \quad \text{б) } f(z) = \frac{\cos z}{z^3}; \quad \text{в) } f(z) = \cos \frac{1}{z-1}; \quad \text{г) } \frac{\sin z}{z}.$$

*Розв'язання:* а) розвинення функції  $\sin \frac{1}{z}$  в ряд Лорана в околі особливої точки  $z_0 = 0$  має вигляд:

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots, \quad |z| > 0.$$

Отже, за формулою (3.24) маємо  $\operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = a_{-1} = 1$ ;

б) функція  $\frac{\cos z}{z^3}$  розкладається в околі особливої точки  $z_0 = 0$  в ряд Лорана:

$$\frac{\cos z}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!}z - \frac{1}{6!}z^3 + \dots, \quad |z| > 0.$$

Звідси

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = a_{-1} = -\frac{1}{2};$$

в) в околі точки  $z_0 = 1$  функція  $\cos \frac{1}{z-1}$  має вигляд:

$$\cos \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{4!(z-1)^4} - \dots, \quad |z-1| > 0.$$

Отже,

$$\operatorname{Res}_{z=1} \cos \frac{1}{z-1} = a_{-1} = 0;$$

г) розкладемо функцію  $\frac{\sin z}{z}$  в ряд Лорана в околі особливої точки  $z_0 = 0$ :

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left( z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Отже,  $z_0 = 0$  – усувна особлива точка і  $\operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} = a_{-1} = 1$ .

**14.** Обчисліть лишок функції  $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$  у точці  $z_0 = 2$ .

*Розв'язання.* Оскільки особлива точка  $z_0 = 2$  — простий полюс, то за формулою (3.25) маємо:

$$\operatorname{Res}_{z=2} f(z) = \operatorname{Res}_{z=2} \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-2)}{(z-2)(z-3)} = -1.$$

**15.** Обчисліть лишок функції  $f(z) = \frac{\sin^2 z}{\cos z}$  у точці  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ .

*Розв'язання.* Оскільки  $\sin^2 \frac{\pi}{2} \neq 0$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $(\cos z)' \Big|_{\frac{\pi}{2}} = -1 \neq 0$ , то за формулою (3.26) дістаємо

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 z}{\cos z} = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -1.$$

**16.** Обчисліть лишок функції  $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2(z-3)}$  у точці  $z_0 = 2$ .

*Розв'язання.* Враховуючи, що точка  $z_0 = 2$  є нулем кратності 2 для функції, що стоїть у знаменнику, і при цьому чисельник дробу не дорівнює нулю, то вона є полюсом другого порядку функції  $f(z)$ . Отже, за формулою (3.27) маємо

$$\operatorname{Res}_{z=2} \frac{1}{(z-2)^2(z-3)} = \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{(z-2)^2}{(z-2)^2(z-3)} \right)' = - \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{(z-3)^2} = -1.$$

**17.** Знайдіть лишок функції  $f(z) = e^z$  у точці  $z = 0$ .

*Розв'язання.* Маємо

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Отже,  $z = 0$  — істотно особлива точка і

$$\operatorname{Res}_{z=0} e^z = a_{-1} = 1.$$

**18.** Обчисліть інтеграл  $\oint_{L^+} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} dz$ , де  $L$  — коло  $|z+i|=1$ .

*Розв'язання.* Підінтегральна функція  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$  має три осо-

бливі точки:  $z = 1; \pm i$ . Кругу  $|z+i| < 1$  належить тільки одна особлива точка —  $z = -i$ . Ця точка є простим полюсом ( $z = -i$  нуль першого порядку знаменника  $(z-1)(z+i)(z-i)$ ). За формулою (3.26) маємо



$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=-i} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} &= \frac{z}{((z-1)(z^2+1))'} \Big|_{z=-i} = \frac{z}{z^2+1+2z(z-1)} \Big|_{z=-i} = \\ &= \frac{-i}{-1+1+2(-i)(-i-1)} = \frac{i-1}{4}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\oint_{L^+} \frac{z}{(z-1)(z^2+1)} dz = 2\pi i \cdot \frac{i-1}{4} = -\frac{\pi}{2}(1+i).$$

19. Обчисліть  $\oint_{L^+} z \sin^2 \frac{1}{z} dz$ , де  $L$  — коло  $|z|=1$ .

*Розв'язання.* Особлива точка  $z=0$  міститься всередині даного кола. Інтеграл обчислюємо за формулою (3.31). Використовуючи формулу зниження степеня  $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$  і розвинення в ряд для косинуса (див. табл. 3.1), дістанемо розклад функції  $f(z) = z \sin^2 \frac{1}{z}$  у ряд Лорана в околі точки  $z=0$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{2} \left( 1 - \cos \frac{2}{z} \right) = \frac{z}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2^2}{z^2 2!} + \frac{2^4}{z^4 4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{z^{2n} (2n)!} + \dots \right) \right) = \\ &= \frac{2}{z 2!} - \frac{2^3}{z^3 4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{z^{2n-1} (2n)!} + \dots = \\ &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{z^{2n-1} (2n)!} + \dots \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1 \quad \text{і} \quad \int_{L^+} z \sin^2 \frac{1}{z} dz = 2\pi i.$$



*Зауваження.* Можна не підносити ряд до квадрата, а використати формулу зниження степеня  $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$  і скористатись відомим розкладанням косинуса.

20. Обчисліть інтеграл  $\oint_{L^+} \frac{dz}{z(z^2+1)}$ , де  $L$  — коло  $|z|=3$ .

*Розв'язання.* В області, обмеженій колом  $|z|=3$ , лежать три прості полюси функції:  $z_1=0$ ,  $z_2=i$ ,  $z_3=-i$ . Знайдемо лишки функції стосовно кожного з них. Маємо:

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{(z(z^2+1))' \Big|_{z=0}} = \frac{1}{(3z^2+1) \Big|_{z=0}} = 1,$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{(z(z^2+1))' \Big|_{z=i}} = \frac{1}{3i^2+1} = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} \frac{1}{z(z^2+1)} = \frac{1}{(z(z^2+1))' \Big|_{z=-i}} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, згідно з основною теоремою про лишки (3.31) маємо

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{z(z^2+1)} = 2\pi i \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 0.$$

21. Обчисліть інтеграл  $\oint_{L^+} \frac{dz}{z^{10}+1}$ , де  $L$  — коло  $|z|=2$ .

*Розв'язання.* Підінтегральна функція має в крузі  $|z|=2$  десять особли-

вих точок  $z_k = e^{\frac{2k+1}{10}\pi i}$ ,  $k=0,1,\dots,9$ , які є простими полюсами, що лежать на колі одиничного радіуса. Замість обчислення десяти лишків набагато зручніше використати теорему 10, за якою достатньо обчислити лишок лише в точці  $z=\infty$ . Розклад функції в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд:

$$\frac{1}{z^{10}+1} = \frac{1}{z^{10} \left( 1 + \frac{1}{z^{10}} \right)} = \frac{1}{z^{10}} \left( 1 - \frac{1}{z^{10}} + \frac{1}{z^{20}} - \dots \right) = \frac{1}{z^{10}} - \frac{1}{z^{20}} + \frac{1}{z^{30}} - \dots,$$

отже,  $\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^{10}+1} = -a_{-1} = 0$ . Тоді за формулою (3.29)

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} \frac{1}{z^{10}+1} = -\sum_{k=0}^9 \operatorname{Res}_{z=z_k} \frac{1}{z^{10}+1} = 0,$$

а шуканий інтеграл

$$\oint_{L^+} \frac{dz}{z^{10} + 1} = 2\pi i \cdot 0 = 0.$$

22. Обчисліть інтеграл  $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}$ .

*Розв'язання.* Покладаючи  $z = e^{it}$ , дістанемо за формулою (3.32)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left( z + \frac{1}{z} - 2 \right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Функція  $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$  має два прості полюси  $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ , з яких тільки  $z_2 = 2 - \sqrt{3}$  міститься всередині контура  $|z|=1$ . Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} &= 2\pi i \frac{2}{i} \operatorname{Res}_{z=2-\sqrt{3}} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = 4\pi \left. \frac{1}{2z - 4} \right|_{z=2-\sqrt{3}} = \\ &= 4\pi \frac{1}{2(2-\sqrt{3}) - 4} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

23. Обчисліть інтеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ .

*Розв'язання.* Функція  $R(x) = \frac{1}{1+x^4}$  задовольняє всі умови наслідку з теореми 12. Функція  $R(z) = \frac{1}{1+z^4}$  має у верхній півплощині прості полюси

в точках  $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$  і  $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ . Тому  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i \left( \operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} + \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} \right)$ .

Лишки обчислюємо за формулою (3.26)

$$\operatorname{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1+z^4} = \left. \frac{1}{4z^3} \right|_{z=z_1} = \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_2} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-\frac{\pi}{4}}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= \frac{2\pi i}{4} \left( e^{-i\frac{3}{4}\pi} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi i}{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} (-i\sqrt{2}) = \pi \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

24. Обчисліть інтеграл  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$ .

Розв'язання.  $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)e^{2xi}}{x^2 + 2x + 2} dx$ , тут  $\lambda = 2 > 0$ .

Функція  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2}$  задовольняє всі умови теореми 13. У верх-

ній півплощині  $\operatorname{Im} z > 0$  функція  $f(z) = \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2}$  має лише простий полюс  $z = -1 + i$ . Тоді за теоремою 13:

$$\begin{aligned} I &= \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2} e^{2iz} \right] = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \frac{1}{2} e^{-2-2i} \right] = \\ &= \operatorname{Im} (\pi i e^{-2} (\cos 2 - i \sin 2)) = \pi e^{-2} \cos 2. \end{aligned}$$

25. Обчисліть інтеграли: а)  $\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx$ , б)  $\int_0^{\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx$ .

Розв'язання: а) на підставі формули (3.33), де  $R(x)$  — парна функція, маємо:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + x^2} dx = \pi i \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{i\lambda z}}{z^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a} \quad (\lambda > 0, a > 0);$$

б) аналогічно, на підставі формули (3.34), де  $R(x)$  — непарна функція, маємо

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \pi \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{z e^{i\lambda z}}{z^2 + a^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2} \quad (\lambda > 0, a > 0).$$

**Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ  
І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**

1. Розкладіть у ряд Тейлора в околі точки  $z = 0$  функції:

$$1) f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}; \quad 2) f(z) = \frac{2z-5}{z^2-5z+6};$$

$$3) f(z) = \frac{z}{(z^2+1)(z^2-4)}; \quad 4) f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)}.$$



*Вказівка.* Попередньо подайте задану функцію у вигляді суми найпростіших дробів.

Розкладіть у ряд Лорана в околі точки  $z_0$  функції:

$$2. \frac{ze^{2z}}{z-1}, \quad z_0 = 1. \quad 3. \cos \frac{1}{z^2} + \frac{z}{z-1}, \quad z_0 = 0. \quad 4. \frac{z}{(z+1)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$5. \frac{\sin z}{z^2}, \quad z_0 = 0. \quad 6. z^3 e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0. \quad 7. \frac{e^z - 1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

8. Використовуючи розклади  $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ,  $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ , де  $|z| < 1$ ,

та властивість про почленне диференціювання степеневого ряду, знайдіть у вказаних областях розклади в ряд за степенями  $z$  таких функцій:

$$1) f(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad (|z| < 1); \quad 2) f(z) = \frac{2}{(1+z)^3} \quad (|z| < 1).$$

Розкладіть у ряд Лорана за степенями  $z$  функції у вказаних кільцях:

$$9. \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad \text{а) } 2 < |z| < 3; \quad \text{б) } 3 < |z| < +\infty.$$

$$10. \frac{1}{z^2+z}, \quad \text{а) } 0 < |z| < 1; \quad \text{б) } 1 < |z| < +\infty.$$

$$11. \frac{z-1}{z^2+2z-8}, \quad 0 < |z+4| < 6.$$

$$12. \frac{1}{z^2-2z-3}, \quad |z-3| > 4. \quad 13. \frac{z+1}{z^2+2z-15}, \quad |z-3| > 8.$$

Знайдіть нулі функцій  $f(z)$  та визначте їх порядок.

14.  $f(z) = (z^2 + 9)(z^2 + 4)^3$ . 15.  $f(z) = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$ . 16.  $f(z) = z \sin z$ .

Визначте порядок полюсів  $z_0$  для функцій.

17.  $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 2z - 15}$ . 18.  $f(z) = \frac{z^2 - 3z + 2}{(z^2 - 4)^2(z - 1)^3}$ ,  $z_0 = 2$ ,  $z_0 = 1$ .

Доведіть, що точка  $z_0$  є істотно особливою точкою для функцій.

19.  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} + e^{\frac{1}{z-i}}$ ,  $z_0 = i$ . 20.  $f(z) = \frac{\cos \frac{1}{z+1}}{z^2 - z + 2}$ ,  $z_0 = -1$ .

21. Вкажіть усі скінченні особливі точки і визначте їх характер для функцій:

1)  $\frac{1}{(z^2 + 1)^3}$ ; 2)  $\frac{z + 2}{z(z + 1)(z - 1)^3}$ ; 3)  $\frac{1}{\sin z}$ ; 4)  $\frac{z}{(z + 1)(z - 2)^3(z + i)^5}$ ;

5)  $\frac{1}{z^2 \sin(z - 1)}$ ; 6)  $\frac{z}{(z + 1)^3(e^z - 1)}$ ; 7)  $\frac{z(\pi - z)}{\sin 2z}$ ; 8)  $\frac{z - \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg} z - 1}$ ;

9)  $\operatorname{tg}^3 z$ ; 10)  $e^{\frac{1}{z-3i}}$ ; 11)  $\cos \frac{1}{z + 2i}$ ; 12)  $\cos^2 \frac{1}{z - 1}$ ;

13)  $\frac{\operatorname{tg}(z - 1)}{z - 1}$ ; 14)  $\frac{1 - \cos z}{z^2}$ ; 15)  $\frac{\sin z}{z^5}$ ; 16)  $\frac{1}{e^z - 3}$ .

Визначте характер точки  $z_0 = \infty$  для функцій:

22.  $\frac{z^2 + z + 1}{(z + i)^2(z - 4)^3}$ . 23.  $\frac{z^3 + z + 5}{z(z^2 + 7)}$ .

Обчисліть лишки функцій в особливих точках  $z_0$ .

24. 1)  $\frac{z^3 + 1}{(z + 2)^2(z - 3)}$ ,  $z_0 = 3$ ,  $z_0 = -2$ ; 2)  $\frac{\cos z}{z^3(z + 4)}$ ,  $z_0 = 0$ ;

3)  $\frac{z^4 + 2}{z^2 + 16}$ ,  $z_0 = \infty$ ; 4)  $\exp\left(\frac{1}{z + 2}\right)$ ,  $z_0 = -2$ ;

5)  $\sin \frac{4}{z - 1}$ ,  $z_0 = 1$ ; 6)  $\operatorname{tg} z$ ,  $z_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Вважаючи, що обхід замкнених контурів відбувається в додатному напрямку, обчисліть за допомогою лишків такі інтеграли:

$$25. \oint_{|z|=1/2} \frac{dz}{z(z^2+4)} \quad 26. \oint_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z(z^2+4)}$$

$$27. \oint_{|z-1-i|=5/4} \frac{2dz}{z^2(z-1)} \quad 28. \oint_{|z|=3} \frac{2+\sin z}{z(z+2i)} dz$$

$$29. \oint_{|z-3|=1/2} \frac{e^z dz}{\sin z} \quad 30. \oint_{|z-\frac{3}{2}|=2} \frac{z(\sin z+2)}{\sin z} dz$$

$$31. \oint_C \frac{z \sin z}{(z-1)^5} dz, \text{ де } C \text{ — еліпс } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$32. \oint_C \frac{dz}{z^4+1}, \text{ де } C \text{ — коло } x^2 + y^2 = 2x.$$

33. Обчисліть за допомогою лишків визначені інтеграли.

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - \cos x}; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \sqrt{3} \sin x}.$$

34. Обчисліть за допомогою лишків невластні інтеграли.

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+25)(9x^2+1)}; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2+14x+5};$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 4x}{x^2+4x+5} dx; \quad 4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^4+17x^2+16} dx.$$

### Відповіді

$$1. 1) \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^{n+1} - 2^{-n-1}) z^n; \quad 2) - \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} + 3^{-n-1}) z^n; \quad 3) \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^{n+1} - 4^{-n-1}) z^{2n+1};$$

$$4) - \sum_{n=0}^{\infty} (z^{4n} + z^{4n-1}). \quad 2. e^2 \left( \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2^n}{n!} + \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \right) (z-1)^n \right) \text{ при } 0 < |z-1| < \infty. \quad 3. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} \text{ при } 0 < |z| < 1 \text{ або } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)! z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \text{ при } |z| > 1. \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^n \text{ при } |z| < 1 \text{ або}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{n+1}} \text{ при } |z| > 1. \quad 5. \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots \text{ при } |z| > 0. \quad 6. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3-n}}{n!}. \quad 7. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

$$8. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n. \quad 9. \text{ а) } -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n; \quad \text{ б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}. \quad 10. \text{ а) } \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n; \quad \text{ б) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+2}}.$$

$$11. \frac{5}{6(z+4)} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+4)^n}{6^{n+2}}. \quad 12. \frac{1}{4(z-3)} - \frac{1}{4(z-3)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(z-3)^n}. \quad 13. \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n}{(z-3)^{n+1}}.$$

14.  $z = \pm 3i$  – нулі першого порядку;  $z = \pm 2i$  – нулі третього порядку. 15.  $z_k = 2k\pi i$  ( $k \in Z$ ) – нулі першого порядку;  $z = \pm 2$  – нулі третього порядку. 16.  $z = 0$  – нуль другого порядку;  $z_k = k\pi$  ( $k = 0, +1, +2, \dots$ ) – нулі першого порядку. 17.  $z_0 = 0$  – полюс другого порядку,  $z_0 = k\pi$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , – полюси третього порядку. 18.  $z_0 = 2$  – полюс першого порядку,  $z_0 = 1$  – полюс другого порядку.

21. 1)  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$  – полюси третього порядку; 2)  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = -1$  – полюси першого порядку,  $z_3 = 1$  – полюс третього порядку; 3)  $z_k = k\pi$ ,  $k \in Z$ , полюси першого порядку; 4)  $z_0 = -1$  – полюс першого порядку,  $z_1 = 2$  – полюс третього порядку,  $z_2 = -i$  – полюс п'ятого порядку; 5)  $z_1 = 0$  – полюс другого порядку,  $z_k = 1 + k\pi$ ,  $k \in Z$  – полюси першого порядку; 6)  $z_1 = -1$  – полюс третього порядку,  $z_2 = 0$  – усувна особлива точка,  $z_k = 2k\pi i$ ,  $k \in Z$ ,  $k \neq 0$  – полюси першого порядку; 7)  $z_0 = 0$ ,  $z_2 = \pi$  – усувні особливі точки,  $z_k = \pi k/2$ ,  $k = \pm 1,$

$-2, \pm 3, \dots$ , – полюси першого порядку; 8)  $z_0 = \frac{\pi}{4}$  – усувна особлива точка,  $z_k = \pi(4k+1)/4$ ,

$k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , – полюси першого порядку; 9)  $z_k = \pi(2k+1)/2$ ,  $k \in Z$  – полюси третього порядку; 10)  $z_0 = 3i$  – істотно особлива точка; 11)  $z_0 = -2i$  – істотно особлива точка; 12)  $z = 1$  –

істотно особлива точка; 13)  $z = 1$  – усувна особлива точка,  $z_k = 1 + \frac{\pi(2k+1)}{2}$ ,  $k \in Z$  – полюси

першого порядку; 14)  $z_0 = 0$  – усувна особлива точка; 15)  $z_0 = 0$  – полюс четвертого порядку;

16)  $z_k = \ln 3 + 2k\pi i$ ,  $k \in Z$  – полюси першого порядку. 22. Нуль порядку 3. 23. Усувна особлива

точка. 24. 1)  $\frac{28}{25}$ ;  $-\frac{53}{25}$ ; 2)  $-\frac{7}{64}$ ; 3) 0; 4) 1; 5) 4; 6)  $-1$ . 25.  $\frac{\pi i}{2}$ . 26.  $\frac{\pi i}{4}$ . 27.  $4\pi i$ . 28.  $i\pi \operatorname{sh} 2$ .

29.  $-2\pi i e^\pi$ . 30.  $-4\pi^2 i$ . 31.  $\frac{\sin 1 - 4 \cos 1}{12} \pi i$ . 32.  $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$ . 33. 1)  $\frac{8\pi}{3}$ ; 2)  $2\pi$ . 34. 1)  $\frac{7\pi}{560}$ ;

2)  $4\pi(\sin 2 + i \cos 2)$ ; 3)  $\frac{\pi}{e}((\sin 2 - 2 \cos 2) + i(\cos 2 + 2 \sin 2))$ ; 4)  $\frac{\pi}{60} \frac{4e^3 - 1}{e^4}$ .

### Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

**3.1.** Задані функції розкладіть у ряд Тейлора за степенями  $z - z_0$ , використовуючи відомі розвинення функцій, і знайдіть радіуси збіжності рядів.

**3.1.1.**  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z_0 = 2$ .

**3.1.2.**  $f(z) = \frac{1}{3 - 2z}$ ,  $z_0 = 1$ .

**3.1.3.**  $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$ ,  $z_0 = 0$ .

**3.1.4.**  $f(z) = \frac{2z}{z^2 - 1}$ ,  $z_0 = 0$ .



$$3.1.5. f(z) = \frac{1}{5-3z}, z_0 = 2.$$

$$3.1.7. f(z) = \frac{z}{z^2-4}, z_0 = 0.$$

$$3.1.9. f(z) = \cos^2(iz), z_0 = 0.$$

$$3.1.11. f(z) = \frac{z-3}{z+2}, z_0 = -1.$$

$$3.1.13. f(z) = \frac{1}{3z+7}, z_0 = 3.$$

$$3.1.15. f(z) = \frac{2}{3z+2}, z_0 = 0.$$

$$3.1.17. f(z) = \cos^2 \frac{iz}{2}, z_0 = 0.$$

$$3.1.19. f(z) = \sin^2 \frac{z}{2i}, z_0 = 0.$$

$$3.1.21. f(z) = \frac{z}{z-2}, z_0 = 3.$$

$$3.1.23. f(z) = \cos(2z-3), z_0 = 1.$$

$$3.1.25. f(z) = e^z, z_0 = 1.$$

$$3.1.27. f(z) = \frac{z}{2z-3}, z_0 = 1.$$

$$3.1.29. f(z) = \frac{z+1}{z+4}, z_0 = 3.$$

$$3.1.6. f(z) = \frac{1}{3+z}, z_0 = -2.$$

$$3.1.8. f(z) = \frac{1}{z^2+i}, z_0 = 0.$$

$$3.1.10. f(z) = \operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}, z_0 = 0.$$

$$3.1.12. f(z) = \frac{z-1}{2z-3}, z_0 = 1.$$

$$3.1.14. f(z) = \frac{1}{5z-3}, z_0 = 4.$$

$$3.1.16. f(z) = \frac{z}{z^2-1}, z_0 = 0.$$

$$3.1.18. f(z) = \operatorname{ch}^2(iz), z_0 = 0.$$

$$3.1.20. f(z) = \frac{1}{5-4z}, z_0 = -2.$$

$$3.1.22. f(z) = \frac{1}{6+5z}, z_0 = -1.$$

$$3.1.24. f(z) = \frac{1}{4-3z}, z_0 = -1.$$

$$3.1.26. f(z) = \frac{1}{3z+5}, z_0 = -2.$$

$$3.1.28. f(z) = \frac{z-3}{z-4}, z_0 = 0.$$

$$3.1.30. f(z) = \frac{z-1}{z-2}, z_0 = 0.$$

3.2. Знайдіть усі лоранівські розклади заданої функції за степенями  $z-z_0$ .

$$3.2.1. \frac{z-2}{2z^2+z-1}, z_0 = -1.$$

$$3.2.2. \frac{z-4}{z^2+z-2}, z_0 = 0.$$

$$3.2.3. \frac{z-6}{2z^2+3z-9}, z_0 = -3.$$

$$3.2.4. \frac{z-8}{z^2+2z-8}, z_0 = 0.$$

$$3.2.5. \frac{z-3}{2z^2+3z-2}, z_0 = -2.$$

$$3.2.7. \frac{z-12}{z^2+3z-18}, z_0 = 3.$$

$$3.2.9. \frac{z-1}{z^2-7z+12}, z_0 = 4.$$

$$3.2.11. \frac{z+3}{z^2-7z+10}, z_0 = 2.$$

$$3.2.13. \frac{z+4}{z^2+5z+6}, z_0 = -2.$$

$$3.2.15. \frac{2z+1}{z^2+z-12}, z_0 = 3.$$

$$3.2.17. \frac{z}{z^2+2z-3}, z_0 = 1.$$

$$3.2.19. \frac{z+1}{z^2-3z-4}, z_0 = -1.$$

$$3.2.21. \frac{z+8}{8+2z-z^2}, z_0 = -2.$$

$$3.2.23. \frac{2z+4}{z^2-4z-5}, z_0 = -1.$$

$$3.2.25. \frac{2}{z^2-6z+8}, z_0 = 4.$$

$$3.2.27. \frac{7}{z^2+5z-6}, z_0 = 1.$$

$$3.2.29. \frac{1}{z^2-2z-8}, z_0 = -2.$$

$$3.2.6. \frac{z-16}{z^2+4z-32}, z_0 = 0.$$

$$3.2.8. \frac{z-18}{2z^2+9z-81}, z_0 = 0.$$

$$3.2.10. \frac{2z-1}{z^2-z-6}, z_0 = 0.$$

$$3.2.12. \frac{3z-6}{z^2-5z+4}, z_0 = 0.$$

$$3.2.14. \frac{2z-7}{z^2-z-2}, z_0 = 0.$$

$$3.2.16. \frac{z+5}{z^2+4z+3}, z_0 = 0.$$

$$3.2.18. \frac{z-4}{z^2-2z-15}, z_0 = 0.$$

$$3.2.20. \frac{2z-5}{z^2-5z+6}, z_0 = 0.$$

$$3.2.22. \frac{2z-7}{z^2-7z+12}, z_0 = 0.$$

$$3.2.24. \frac{2z+9}{z^2+9z+20}, z_0 = 0.$$

$$3.2.26. \frac{z-4}{z^2-8z+15}, z_0 = 0.$$

$$3.2.28. \frac{1}{z^2-z-12}, z_0 = 0.$$

$$3.2.30. \frac{z}{z^2-2z-3}, z_0 = 0.$$

3.3. Для заданої функції знайдіть ізольовані особливі точки та визначте їх характер.

$$3.3.1. \frac{\cos \pi z}{(2z-1)(z^2+1)}.$$

$$3.3.2. \frac{1}{\cos z}.$$

$$3.3.3. \operatorname{tg} 2z.$$

$$3.3.4. \frac{z^3+1}{z^2(z^2+4)}.$$

$$3.3.5. \frac{e^z-1}{z^2(z+1)^2}.$$

$$3.3.6. \frac{\sin \pi z}{(z-2)^4}.$$

$$\begin{array}{lll}
3.3.7. \frac{z^2 + 4}{(z-3)^2(z^2 + 9)}. & 3.3.8. \cos^2 \frac{1}{z}. & 3.3.9. \sin^2 \frac{1}{2z}. \\
3.3.10. \frac{\sin^3 z}{z(1 - \cos z)}. & 3.3.11. \operatorname{ctg} \pi z. & 3.3.12. \frac{\sin \pi z}{(z-1)^3}. \\
3.3.13. \frac{e^z - 1}{z \sin z}. & 3.3.14. \frac{1}{\sin z^2}. & 3.3.15. \frac{\sin z}{(e^z - 1) \cos z}. \\
3.3.16. \frac{e^z - 1}{\sin \pi z}. & 3.3.17. \frac{\sin z}{z^3(1 - \cos z)}. & 3.3.18. \cos \frac{1}{z} - \sin \frac{2}{z}. \\
3.3.19. \frac{e^z - 1}{z^4(z-1)}. & 3.3.20. \frac{1}{z^2} + \sin \frac{1}{z^2}. & 3.3.21. \frac{e^z - e}{\sin \pi z}. \\
3.3.22. z^2 \sin \frac{1}{z}. & 3.3.23. \frac{\cos \frac{\pi}{2} z}{z^4 - 1}. & 3.3.24. \frac{\sin \pi z}{2z^2 - z - 1}. \\
3.3.25. z^3 \exp \frac{1}{z}. & 3.3.26. \frac{\cos \frac{\pi}{6} z}{(z-3)(z+2)}. & 3.3.27. \frac{\sin 3z^2}{z(z^2 + 1)}. \\
3.3.28. \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{z^2 - 4}. & 3.3.29. \frac{\sin 3z}{z(1 - \cos z)}. & 3.3.30. \frac{2z - \sin 2z}{z^2(z^2 + 1)}.
\end{array}$$

3.4. Знайдіть лишки функцій в особливих точках.

$$\begin{array}{lll}
3.4.1. \frac{1}{(z+2)^2 z^3}. & 3.4.2. \frac{\exp z}{(z+1)^3(z-2)}. & 3.4.3. \frac{z^4 + \cos \pi z}{(1+z)^3}. \\
3.4.4. \frac{1}{(2z-1)^4 z^2}. & 3.4.5. \frac{e^z}{(1+z)^2}. & 3.4.6. \frac{z^6}{(1-z)^2(2+z)}. \\
3.4.7. \frac{e^z}{z^2(z^2+9)}. & 3.4.8. \sin z \sin \frac{1}{z}. & 3.4.9. \frac{\sin \pi z}{(z+2)^3(z-1)}. \\
3.4.10. \frac{z^4}{1+z^2}. & 3.4.11. \frac{e^z}{(2+z)^2}. & 3.4.12. z^2 \sin \frac{1}{z^2}. \\
3.4.13. z^2 \exp \frac{1}{z}. & 3.4.14. \frac{e^z}{z^3(z-1)}. & 3.4.15. (z-2) \exp \frac{1}{z-2}.
\end{array}$$

$$3.4.16. \frac{z^2 - 3}{z(z-2)^3}. \quad 3.4.17. (z^3 - 1)e^{\frac{1}{z}}. \quad 3.4.18. \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}.$$

$$3.4.19. \cos z - \sin \frac{1}{z}. \quad 3.4.20. (z^2 + 1) \sin \frac{1}{z}. \quad 3.4.21. \cos \frac{1}{z} + z^3.$$

$$3.4.22. \frac{1 - \cos z}{z^3(z-3)}. \quad 3.4.23. \frac{\sin(iz)}{(z^2 - 4)z}. \quad 3.4.24. \frac{\cos z}{z^2(z-2)}.$$

$$3.4.25. \frac{e^{iz}}{(z^2 - 1)(z + 3)}. \quad 3.4.26. \frac{z^4}{(z-1)^2}. \quad 3.4.27. \frac{e^{\pi z}}{(z-i)^2}.$$

$$3.4.28. \frac{\cos z}{2z^2 - \pi z}. \quad 3.4.29. (z^3 - 2)e^{\frac{2}{z}}. \quad 3.4.30. \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z-3)}.$$

3.5. Вважаючи, що обхід замкнених контурів відбувається в додатному напрямку, обчисліть за допомогою лишків інтеграли.

$$3.5.1. \oint_{|z|=1} \frac{\cos z^2 - 1}{z^3} dz. \quad 3.5.2. \oint_{|z|=1/2} \frac{2 - z^2 + 3z^3}{4z^3} dz.$$

$$3.5.3. \oint_{|z|=3} \frac{e^z + 1}{z} dz. \quad 3.5.4. \oint_{|z|=2} \frac{\sin z^3}{1 - \cos z} dz.$$

$$3.5.5. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z + 3z^2}{z^2} dz. \quad 3.5.6. \oint_{|z|=2} \frac{1 - \cos z^3}{z^7} dz.$$

$$3.5.7. \oint_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz. \quad 3.5.8. \oint_{|z|=3} \frac{1 - \sin \frac{1}{z}}{z} dz.$$

$$3.5.9. \oint_{|z|=1/2} \frac{e^{2z^2} - 1}{z^3} dz. \quad 3.5.10. \oint_{|z|=1/3} \frac{3 - 2z + 4z^2}{z^3} dz.$$

$$3.5.11. \oint_{|z|=2} \frac{z - \sin z}{2z^4} dz. \quad 3.5.12. \oint_{|z|=1} \frac{z^3 - 3z^2 + 1}{2z^4} dz.$$

$$3.5.13. \oint_{|z|=1/3} \frac{4z^5 - 3z^3 + 1}{z^4} dz .$$

$$3.5.14. \oint_{|z|=1} \frac{e^{2z} - z}{z^2} dz .$$

$$3.5.15. \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz .$$

$$3.5.16. \oint_{|z|=1} \frac{\cos iz - 1}{z^3} dz .$$

$$3.5.17. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - 2z^4 + 3z^5}{z^4} dz .$$

$$3.5.18. \oint_{|z|=3} \frac{z^3 + \cos z}{z^3} dz .$$

$$3.5.19. \oint_{|z|=1/2} \frac{z^5 - 3z^3 + 5z}{z^4} dz .$$

$$3.5.20. \oint_{|z|=2} \frac{z + \sin 2z}{z^4} dz .$$

$$3.5.21. \oint_{|z|=3} \frac{\cos z^3 - 1}{z^4} dz .$$

$$3.5.22. \oint_{|z|=1/2} \frac{2 + 3z^3 - 5z^4}{z^5} dz .$$

$$3.5.23. \oint_{|z|=1} \frac{\frac{1}{z} e^z - z - 1}{z^3} dz .$$

$$3.5.24. \oint_{|z|=2} z^2 \sin \frac{i}{z^2} dz .$$

$$3.5.25. \oint_{|z|=1/2} \frac{z^4 + 2z^2 + 3}{2z^6} dz .$$

$$3.5.26. \oint_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz .$$

$$3.5.27. \oint_{|z|=1/3} \frac{1 - z^4 + 3z^6}{2z^3} dz .$$

$$3.5.28. \oint_{|z|=2} z^3 \cos \frac{2i}{z} dz .$$

$$3.5.29. \oint_{|z|=1/3} \frac{e^z - \sin z}{z^2} dz .$$

$$3.5.30. \oint_{|z|=3} \frac{2z^3 + 3z^2 - 2}{2z^5} dz .$$

**Загальна характеристика модуля.** Розглядаються перетворення Лапласа та його властивості. Використовуються знання з розділів «Невласні інтеграли», «Теорія функції комплексної змінної» та ін. Операційне числення широко застосовується при розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь, до яких зводяться задачі електротехніки, імпульсної техніки, теорії автоматичного регулювання тощо.

### СТРУКТУРА МОДУЛЯ

- Тема 1.** Оригінал та зображення за Лапласом. Властивості перетворення Лапласа. Відшукування зображень різних функцій.
- Тема 2.** Відшукування оригіналу за його зображенням. Застосування перетворення Лапласа до розв'язання диференціальних рівнянь. Формула Дюамеля.

**Базисні поняття.** 1. Оригінал. 2. Зображення. 3. Функція Хевісайда. 4. Диференціювання оригіналу. 5. Диференціювання зображення. 6. Інтегрування оригіналу. 7. Інтегрування зображення. 8. Згортка функцій. 9. Формула Дюамеля.

**Основні задачі.** 1. Відшукування зображення оригіналів. 2. Відшукування оригінала за зображенням. 3. Застосування перетворення Лапласа до розв'язування прикладних задач.

### ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

#### 1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

- 1.1. Оригінал; зображення; перетворення Лапласа.
- 1.2. Функція Хевісайда.
- 1.3. Зображення основних елементарних функцій.
- 1.4. Теорема лінійності, подібності, зміщення, запізнення.
- 1.5. Теорема про диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення.
- 1.6. Згортка функцій.
- 1.7. Формула Дюамеля.

## 2. Знання на рівні доведень та виведень

- 2.1. Зображення основних функцій.
- 2.2. Властивості оригіналів і зображень.

## 3. Уміння в розв'язанні задач

- 3.1. Знаходити зображення оригіналів.
- 3.2. Знаходити оригінали зображень.
- 3.3. Уміти застосовувати операційний метод для розв'язання диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь.

### Тема 1. ОРИГІНАЛ ТА ЗОБРАЖЕННЯ ЗА ЛАПЛАСОМ. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА. ЗНАХОДЖЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ РІЗНИХ ФУНКЦІЙ.

Оригінал та зображення за Лапласом. Теореми лінійності, подібності, зміщення, запізнення. Диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення. Зображення згортки функцій. Зображення деяких найпростіших функцій. Зображення періодичних та ступінчастих функцій.



**Література:** [4, розділ 2, пп.2.1—2.3], [5, гл.2, пп.2.1—2.10], [12, розділ 32, §1—2], [13, розділ 2, §11], [15, розділ 16, п.п. 16.2.1—16.2.4], [17, розділ 9, §32].

## **T.1** ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1. Операційний метод

Операційне (символічне) числення виникло у середині XIX століття. Одним із його засновників є український вчений, професор Київського університету М.С. Ващенко-Захарченко, який в 1862 році в своїй дисертації «Символічне числення і застосування його до інтегрування диференціальних рівнянь» уперше висловив ідею операційного методу до розрахунків процесів в електричних колах. Англійський фізик і математик О. Хевісайд поклав початок систематичному застосуванню операційного числення до розв'язання багатьох фізико-технічних задач, тому виникнення цього методу найчастіше пов'язують з його ім'ям.

Розглянемо суть операційного методу. Нехай потрібно знайти функцію  $x(t)$  з деякого рівняння, яке містить цю функцію під знаком похідних або інтегралів. Операційний метод зводиться до таких етапів.

1. Від шуканої функції  $x(t)$  переходять до функції  $X(p)$  комплексної змінної  $p$ .

2. Над зображенням  $X(p)$  проводять операції, які відповідають заданим операціям над  $x(t)$ , і одержують операторне рівняння відносно  $X(p)$ . При цьому операції над зображенням виявляються простішими: диференціюванню відповідає множення на  $p$ , інтегруванню — ділення на  $p$  та ін.

3. Одержане операторне рівняння розв'язують відносно  $X(p)$ , що, як правило, зводиться до простих алгебраїчних дій.

4. Від знайденого зображення  $X(p)$  переходять до оригіналу  $x(t)$ , який і є шуканою функцією.

## 1.2. Оригінал і зображення. Перетворення Лапласа

Функцією-оригіналом називають будь-яку комплекснозначну функцію  $f(t) = u(t) + iv(t)$  дійсної змінної  $t$ , яка задовольняє такі умови:

1)  $f(t)$  кусково-неперервна на всій осі  $t$ , тобто вона неперервна або має точки розриву першого роду, причому на будь-якому скінченному проміжку осі  $t$  таких точок розриву скінченне число;

2)  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ ;

3) існують такі сталі  $M > 0$  і  $\sigma \geq 0$ , що для всіх  $t > 0$  виконується нерівність

$$|f(t)| \leq Me^{\sigma t}. \quad (4.1)$$

Умова 3) означає, що  $|f(t)|$  може зростати не швидше деякої показникової функції.

Нижню грань  $\sigma_0$  усіх чисел, для яких виконується (4.1), називають показником зростання функції  $f(t)$ .

Для обмежених функцій показник зростання можна покласти  $\sigma_0 = 0$ .

Найпростішою функцією-оригіналом є так звана одинична функція Хевісайда (рис. 4.1, а)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ 1 & \text{для } t \geq 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Очевидно, якщо функція  $\varphi(t)$  задовольняє умови 1) і 3), але не задовольняє умову 2) (рис. 4.1, б), то функція

$$\varphi(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases}$$



вже буде оригіналом (рис. 4.1, в). Тут роль множника  $\eta(t)$  полягає в тому, що він «гасить» (обертає в нуль) функцію при  $t < 0$ .

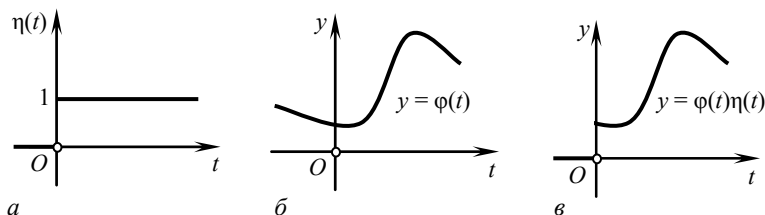


Рис. 4.1

➔ *Зауваження.* Далі, для скорочення запису, писатимемо  $f(t)$  замість  $f(t)\eta(t)$ , вважаючи, що розглядувані нами функції задовольняють умову 2).

Приклади оригіналів:  $t^n$  ( $n \geq 0$ ),  $e^{at}$ ,  $\sin at$ ,  $\cos at$  ( $a$  — стала).

Не є оригіналами, наприклад, такі функції:  $\frac{1}{t}$ ,  $e^{t^2}$ ,  $\operatorname{tg} t$ ,  $\ln t$ .

Зображенням функції-оригіналу  $f(t)$  називають функцію  $F(p)$  комплексної змінної  $p = \sigma + i\omega$ , яку визначають рівністю

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (4.3)$$

Інтеграл в (4.3) називають *інтегралом Лапласа*, а операцію переходу від оригіналу  $f(t)$  до зображення  $F(p)$  — *перетворенням Лапласа*. Той факт, що  $F(p)$  є зображенням оригіналу  $f(t)$ , символічно позначають так:

$$f(t) \doteq F(p), \text{ або } F(p) = L(f(t)).$$

Функція  $F(p)$  визначена в півплощині  $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ , де  $\sigma_0$  — показник зростання, і є в цій півплощині аналітичною функцією, при цьому  $F(p) \rightarrow 0$ , якщо  $\sigma \rightarrow +\infty$ .

Наприклад, не існує жодної функції-оригіналу, зображення якої має вигляд  $F(p) = \frac{p}{2p+1}$ , оскільки  $\lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = \frac{1}{2} \neq 0$ .

Сукупність усіх оригіналів  $f(t)$  називають *простором оригіналів*, а сукупність зображень  $F(p)$  — *простором зображень*.

### 1.3. Зображення деяких найпростіших функцій

Використовуючи означення, знайдемо зображення таких функцій:

1.  $f(t) = \eta(t)$  (одинична функція Хевісайда) (див. (4.2)):

Розв'язання. За формулою (4.3) дістанемо

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \eta(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-pt}}{-p} \right|_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-pa}}{p} + \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p}.$$

Отже,

$$\boxed{\eta(t) = \frac{1}{p}}.$$

Показник зростання  $\sigma_0 = 0$ .

2.  $f(t) = e^t$ .

Розв'язання. Показник зростання функції  $f(t)$  дорівнює 1. Вважаючи  $\operatorname{Re} p > 1$ , дістанемо

$$F(p) = L(e^t) = \int_0^{\infty} e^{-(p-1)t} dt = \lim_{a \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-(p-1)t}}{1-p} \right|_0^a = \frac{1}{p-1}.$$

Отже,

$$\boxed{L(e^t) = \frac{1}{p-1}}.$$



Зуваження Зображення основних функцій-оригіналів наведені в додатку 1.

### 1.4. Властивості перетворення Лапласа

1<sup>0</sup>. Теорема єдиності.

Якщо функція  $F(p)$  є зображенням деяких двох оригіналів  $f_1(t)$  і  $f_2(t)$ , то ці оригінали тотожно рівні в точках своєї неперервності.

2<sup>0</sup>. Лінійність зображення.

Якщо  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  — функції-оригінали, то для будь-яких сталих  $A$  і  $B$  виконується рівність:

$$L(Af_1(t) + Bf_2(t)) = AL(f_1(t)) + BL(f_2(t)).$$

### 3<sup>0</sup>. Подібність.

Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то для будь-якої сталої  $a > 0$

$$f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

*Доведення.* Застосуємо перетворення Лапласа до функції  $f(at)$ :

$$Lf(at) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(at) dt = \left| \begin{array}{l} at = z, \\ dt = \frac{dz}{a}, 0 \leq z < \infty \end{array} \right| = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}z} f(z) dz = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right).$$

### 4<sup>0</sup>. Запізнення оригіналу.

Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то для будь-якого  $\tau > 0$

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p).$$

*Доведення.* Оскільки  $f(t - \tau) \equiv 0$  для  $t < \tau$  (рис. 4.2), то

$$\begin{aligned} L(f(t - \tau)) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dz = \left| \begin{array}{l} t - \tau = z, \\ dt = dz, 0 \leq z < \infty \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-p(z+\tau)} f(z) dz = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pz} f(z) dz = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

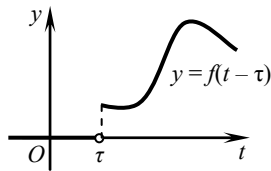
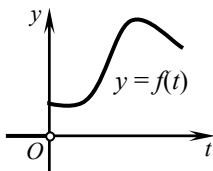


Рис. 4.2

Цю властивість зручно використовувати для відшукування зображень функцій, які на різних проміжках задаються різними аналітичними виразами.



*Зауваження.* Якщо  $f(t) \doteq F(p)$ , то для будь-якого  $\tau > 0$

$$f(t + \tau) \doteq e^{p\tau} \left\{ F(p) - \int_0^{\tau} e^{-pt} f(t) dt \right\}. \quad (4.4)$$

Доведіть це твердження самостійно.

5<sup>0</sup>. Зміщення зображення.

Якщо  $f(t) \doteq F(p)$  і  $p_0$  — будь-яке комплексне число, то

$$f(t) e^{p_0 t} \doteq F(p - p_0).$$

*Доведення.*

$$f(t) e^{p_0 t} \doteq \int_0^{\infty} f(t) e^{p_0 t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-p_0)t} dt = F(p - p_0).$$

6<sup>0</sup>. Диференціювання оригіналу.

Якщо функція  $f(t)$  та її похідні  $f'(t), f''(t), \dots, f^{(n)}(t)$  є функціями-оригіналами і  $f(t) \doteq F(p)$ , тоді

$$L(f'(t)) = pF(p) - f(0),$$

$$L(f''(t)) = p^2 F(p) - pf'(0) - f''(0),$$

.....

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Іншими словами, операції диференціювання у просторі оригіналів відповідає множення зображення на аргумент  $p$  з подальшим відніманням початкового значення оригінала.

*Доведення.* За означенням зображення маємо

$$f'(t) \doteq \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \left| \begin{array}{l} u = e^{-pt}, \quad du = -pe^{-pt} dt \\ dv = f'(t) dt, \quad v = f(t) \end{array} \right| = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = -f(0) + pF(p).$$

Отже,  $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ . Звідси випливає, що

$$f''(t) = (f'(t))' \doteq p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf'(0) - f''(0)$$

і т. д.



*Зауваження.*

1. Позначення  $f^{(k)}(0)$  означає правосторонню границю

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t) \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

2. Нехай  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0)$ , тоді

$$f(t) \doteq F(p),$$

$$f'(t) \doteq pF(p),$$

$$f''(t) \doteq p^2 F(p),$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p).$$

7<sup>0</sup>. Диференціювання зображення.

Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ ,  $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ , тоді

$$-t f(t) \doteq \frac{dF(p)}{dp}.$$

Застосовуючи операцію диференціювання багаторазово, дістають формулу

$$(-t)^n f(t) \doteq \frac{d^n F(p)}{dp^n},$$

або

$$t^n f(t) \doteq (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$



*Зауваження.* Зазначимо, що коли  $f(t)$  — оригінал, то  $t^n f(t)$  — також оригінал.

8<sup>0</sup>. Інтегрування оригіналу.

Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ , тоді

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p).$$

9<sup>0</sup>. Інтегрування зображення.

Нехай  $f(t) \doteq F(p)$  і  $\frac{f(t)}{t}$  — оригінал, тоді

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(p) dp.$$

10<sup>0</sup>. Згортка оригіналів (теорема множення).

Згорткою неперервних функцій  $f(t)$  і  $\varphi(t)$  називають функцію  $\psi(t)$ , що визначається формулою

$$\psi(t) = f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Нехай  $f_1(t) \doteq F_1(p)$  і  $f_2(t) \doteq F_2(p)$ , тоді

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) \cdot F_2(p),$$

тобто згортці оригіналів відповідає добуток зображень оригіналів.

11<sup>0</sup>. (граничні співвідношення). Нехай  $f(t) \doteq F(p)$  і  $f'(t)$  — оригінал, тоді

$$1) \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t);$$

$$2) \text{якщо існує границя } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t), \text{ то } \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t).$$

### 1.5. Зображення періодичних і ступінчастих функцій

#### Теорема

Нехай  $f(t)$  — функція-оригінал з періодом  $T$  (рис. 4.3), тобто

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \dots, \quad t \geq 0.$$

Тоді

$$f(t) \doteq \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt. \quad (4.5)$$

Доведення. Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ . Оскільки  $f(t) = f(t+T)$ , то  $f(t+T) \doteq F(p)$ . За формулою (4.4)

$$f(t+T) \doteq e^{pT} \left\{ F(p) - \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \right\}.$$

Отже,

$$F(p) = e^{pT} \left\{ F(p) - \int_0^T e^{-pt} f(t) dt \right\}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $F(p)$ , дістанемо

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T f(t)e^{-pt} dt,$$

що доводить твердження теореми.

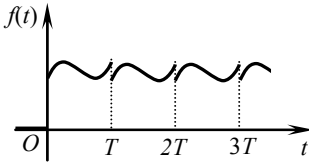


Рис. 4.3

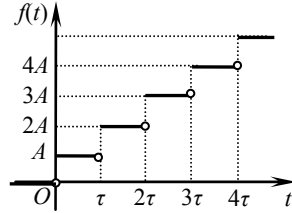


Рис. 4.4

У прикладних задачах часто доводиться зустрічатися з так званими ступінчастими функціями (рис. 4.4), які характеризуються наявністю різних аналітичних виразів на різних проміжках значень аргументу. Вони є кусково-сталими функціями, тому їх можна будувати за допомогою функцій Хевісайда й отримувати зображення згідно з властивістю запізнення оригіналу.

Наприклад, нескінченну ступінчасту функцію  $f(t)$ , зображену на рис.4.4, за допомогою функцій Хевісайда можна подати у вигляді

$$f(t) = A(\eta(t) - \eta(t - \tau)) + 2A(\eta(t - \tau) - \eta(t - 2\tau)) + 3A(\eta(t - 2\tau) - \eta(t - 3\tau)) + \dots = A(\eta(t) + \eta(t - \tau) + \eta(t - 2\tau) + \dots).$$

За властивістю  $4^0$  функції Хевісайда  $\eta(t - t_0)$ , де  $t_0 > 0$ , відповідає зображення  $\frac{1}{p} e^{-t_0 p}$ , тоді

$$L(f(t)) = A \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{p} e^{-p\tau} + \frac{1}{p} e^{-2p\tau} + \dots \right) = \frac{A}{p} (1 + e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + \dots).$$

Обчисливши суму нескінченно спадної геометричної прогресії, дістанемо

$$L(f(t)) = \frac{A}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}.$$

Аналогічно знаходять зображення будь-яких кусково-неперервних функцій. При цьому у загальному випадку функцію

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{для } t \in [0; a_1), \\ f_2(t) & \text{для } t \in [a_1; a_2), \\ \dots & \dots \\ f_k(t) & \text{для } t \in [a_{k-1}; a_k), \\ 0 & \text{для } t < 0 \text{ або } t \geq a_k. \end{cases} \quad (4.6)$$

записують у вигляді

$$f(t) = f_1(t)(\eta(t) - \eta(t - a_1)) + f_2(t)(\eta(t - a_1) - \eta(t - a_2)) + \dots + f_k(t)(\eta(t - a_{k-1}) - \eta(t - a_k)). \quad (4.7)$$

### **Т.1** ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Покажіть, що функція

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \sin 3t & \text{для } t \geq 0, \\ 0 & \text{для } t < 0 \end{cases}$$

є функцією-оригіналом.

*Розв'язання.* Справді, функція  $f(t)$  задовольняє умови:

- 1)  $f(t)$  неперервна на всій осі  $t$ ;
- 2)  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ ;
- 3) для всіх  $t > 0$  виконується нерівність

$$|e^{2t} \sin 3t| \leq e^{2t}, \quad \sigma_0 = 2.$$

Отже,  $f(t)$  — функція-оригінал.

2. Покажіть, що

$$\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \text{та} \quad \cos t \doteq \frac{p}{p^2 + 1}.$$

*Розв'язання.* Використовуючи формули Ейлера

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t,$$

дістанемо

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}, \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}.$$

За властивістю лінійності

$$\begin{aligned} L(\sin t) &= \frac{1}{2i} L(e^{it}) - \frac{1}{2i} L(e^{-it}) = \frac{1}{2i} \frac{1}{p-i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{p+i} = \\ &= \frac{1}{2i} \frac{p+i - (p-i)}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Аналогічно дістаємо зображення для  $\cos t$ :

$$L(\cos t) = \frac{1}{2} L(e^{it}) + \frac{1}{2} L(e^{-it}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{p}{p^2 + 1}.$$



3. Знайдіть зображення функцій  $e^{\alpha t}$ ,  $\sin \omega t$ ,  $\cos \omega t$ , користуючись властивістю 3<sup>0</sup> (подібності).

Розв'язання. Маємо

$$L(e^{\alpha t}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{p}{\alpha} - 1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\frac{p - \alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{p - \alpha} = \frac{1}{p - \alpha};$$

$$L(\sin \omega t) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$L(\cos \omega t) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\frac{p}{\omega} \cdot \omega^2}{p^2 + \omega^2} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Отже,

$$e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p - \alpha}, \quad \sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}, \quad \cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

4. Знайдіть зображення одиничної функції Хевісайда «із запізненням»:

$$\eta(t - \tau) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \geq \tau, \\ 0 & \text{для } t < \tau. \end{cases} \quad (\text{рис. 4.5})$$

Розв'язання. Використовуючи властивість 4<sup>0</sup> (запізнення оригіналу), дістанемо

$$\eta(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \cdot L(\eta(t)) = \frac{e^{-p\tau}}{p}.$$

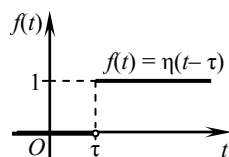


Рис. 4.5

5. Знайдіть зображення функцій  $\sin(\omega t - \varphi)$  і  $\cos(\omega t - \varphi)$ .

Розв'язання. Використовуючи властивості 3<sup>0</sup> та 4<sup>0</sup>, дістанемо

$$\sin(\omega t - \varphi) = \sin \omega \left( t - \frac{\varphi}{\omega} \right) \doteq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\varphi}{\omega} p} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\varphi}{\omega} p},$$

$$\cos(\omega t - \varphi) = \cos\omega\left(t - \frac{\varphi}{\omega}\right) \doteq \frac{1}{\omega} \frac{\frac{p}{\omega}}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 + 1} \cdot e^{-\frac{\varphi}{\omega}p} = \frac{p}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\varphi}{\omega}p}.$$

6. Знайдіть зображення функції  $f(t) = e^{-t} \cos 2t$ .

*Розв'язання.* Враховуючи, що  $\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2 + 4}$ , за властивістю 5<sup>0</sup> (зміщення зображення) ( $p_0 = -1$ ) маємо

$$e^{-t} \cos 2t \doteq \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4} = \frac{p+1}{p^2 + 2p + 5}.$$

7. Знайдіть зображення функції  $f(t) = \sin^2 t$ .

*Розв'язання. Перший спосіб.* Запишемо  $f(t)$  у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t).$$

Використовуючи властивості 2<sup>0</sup> та 3<sup>0</sup>, дістанемо

$$f(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \doteq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2 + 4} \right) = \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

*Другий спосіб.* Нехай  $f(t) \doteq F(p)$ . Тоді за властивістю 6<sup>0</sup> (диференціювання оригіналу)  $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$ . Але  $f(0) = \sin^2 0 = 0$ , отже,

$$f'(t) = (\sin^2 t)' = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \doteq \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Звідси випливає, що  $\frac{2}{p^2 + 4} = pF(p)$ .

Отже,  $F(p) = \frac{2}{p(p^2 + 4)} \doteq \sin^2 t$ .

8. Знайдіть зображення функції  $f(t) = t^n$ .

*Розв'язання.* Відомо, що  $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ . Тоді, використовуючи властивість 7<sup>0</sup> (диференціювання зображення), послідовно дістанемо

$$-t \cdot \eta(t) \doteq \left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{-1}{p^2}, \text{ або } t \doteq \frac{1}{p^2};$$

$$t^2 \cdot \eta(t) \doteq \left(\frac{-1}{p^2}\right)' = \frac{2}{p^3},$$

.....

$$\boxed{t^n \cdot \eta(t) \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}}.$$

9. Знайдіть зображення функції  $f(t) = t^2 e^t$ .

*Розв'язання.* Відомо, що  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ . За властивістю 7<sup>0</sup> (диференціювання зображення) маємо

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' \doteq -t e^t, \text{ тобто } \frac{1}{(p-1)^2} \doteq t e^t.$$

Використовуючи цю властивість ще раз, дістаємо

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \doteq t^2 e^t, \text{ звідки } t^2 e^t \doteq \frac{2}{(p-1)^3}.$$

10. Знайдіть зображення функції  $f(t) = \int_0^t e^{\tau} d\tau$ .

*Розв'язання.* Використовуючи властивість 8<sup>0</sup> (інтегрування оригіналу) і враховуючи, що  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ , дістанемо

$$f(t) = \int_0^t e^{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

11. Знайдіть зображення функції  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ .

*Розв'язання.* Враховуючи, що  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$ , і скориставшись властивістю 9<sup>0</sup> (інтегрування зображення), дістанемо

$$\frac{\sin t}{t} \stackrel{+}{=} \int_p^{+\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \lim_{a \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} p \Big|_p^a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p.$$

**12.** Знайдіть згортку функцій  $t$  і  $\cos t$  та її зображення.

*Розв'язання.* Нехай  $f(t) = t$ ,  $\varphi(t) = \cos t$ . Тоді

$$f(t) * \varphi(t) = \int_0^t \tau \cos(t - \tau) d\tau.$$

Для обчислення інтеграла використаємо метод інтегрування частинами.

$$\begin{aligned} \int_0^t \tau \cos(t - \tau) d\tau &= \left| \begin{array}{l} u = \tau \quad du = d\tau \\ \cos(t - \tau) d\tau = dv \\ v = -\sin(t - \tau) \end{array} \right| = -\tau \sin(t - \tau) \Big|_0^t + \\ &+ \int_0^t \sin(t - \tau) d\tau = -t \sin(t - t) + 0 \cdot \sin(t - 0) + \cos(t - \tau) \Big|_0^t = 1 - \cos t. \end{aligned}$$

Отже,

$$t * \cos t = 1 - \cos t.$$

Зображення  $F(p)$  цієї згортки за властивістю  $10^0$  має вигляд

$$F(p) = L(t) \cdot L(\cos t) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p(p^2 + 1)}.$$

**13.** Знайдіть зображення ступінчастої функції

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ 3 & \text{для } 1 \leq t < 2, \\ 1 & \text{для } 3 \leq t < 6, \\ 0 & \text{для } t < 0 \text{ або } t \geq 6. \end{cases}$$

*Розв'язання.* Графік заданої функції зображено на рис. 4.6. Використовуючи функції Хевісайда  $\eta(t)$ ,  $\eta(t-1)$ ,  $\eta(t-3)$ ,  $\eta(t-6)$ , запишемо  $f(t)$  одним аналітичним виразом. Маємо

$$f(t) = 2(\eta(t) - \eta(t-1)) + 3(\eta(t-1) - \eta(t-3)) + \eta(t-3) - \eta(t-6).$$

Тут вираз  $2(\eta(t) - \eta(t-1))$  визначає графік функції  $f(t)$  на проміжку  $(0; 1)$ ,  $3(\eta(t-1) - \eta(t-3))$  — на проміжку  $(1; 3)$ , а  $\eta(t-3) - \eta(t-6)$  — на проміжку  $(3; 6)$ .

Враховуючи, що  $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ , і скориставшись властивістю  $4^0$  (запізнення оригіналу), дістанемо

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq 2\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) + 3\left(\frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-3p}}{p}\right) + \frac{e^{-3p}}{p} - \frac{e^{-6p}}{p} = \\ &= \frac{2}{p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{2e^{-3p}}{p} - \frac{e^{-6p}}{p} = \frac{1}{p}(2 + e^{-p} - 2e^{-3p} - e^{-6p}). \end{aligned}$$

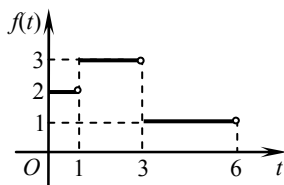


Рис. 4.6

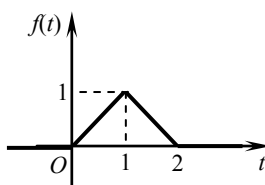


Рис. 4.7

14. Знайдіть зображення функції, заданої графіком (рис. 4.7).  
Розв'язання. Знайдемо аналітичний вираз для  $f(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{для } 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & \text{для } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{для } t < 0 \text{ або } t \geq 2. \end{cases}$$

Використовуючи функції Хевісайда, подамо  $f(t)$  у вигляді:

$$\begin{aligned} f(t) &= t(\eta(t) - \eta(t-1)) + (-t+2)(\eta(t-1) - \eta(t-2)) = \\ &= t\eta(t) - t\eta(t-1) - (t-2)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2) = \\ &= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

За властивістю  $4^0$  (запізнення оригіналу) дістанемо

$$f(t) \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{2e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2} = \frac{1}{p^2}(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}) = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2}.$$

15. Знайдіть зображення функції

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 1, \\ t^2 & \text{для } 1 \leq t \leq 2, \\ 0 & \text{для } t > 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо  $f(t)$  у вигляді

$$f(t) = t^2(\eta(t-1) - \eta(t-2)) = t^2\eta(t-1) - t^2\eta(t-2).$$

Виразимо  $f(t)$  через різниці  $(t-1)$  та  $(t-2)$ . Маємо

$$t^2 = ((t-1)+1)^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$

$$t^2 = ((t-2)+2)^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Тоді

$$f(t) = ((t-1)^2 + 2(t-1) + 1)\eta(t-1) - ((t-2)^2 + 4(t-2) + 4)\eta(t-2).$$

Оскільки  $\eta(t) \doteq \frac{1}{p}$ ,  $t\eta(t) \doteq \frac{1}{p^2}$ ,  $t^2 \cdot \eta(t) \doteq \frac{2}{p^3}$ , то за властивістю 4<sup>0</sup>

(запізнення оригіналу), дістанемо

$$L(f(t)) = \left( \frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p} - \left( \frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-2p}.$$

**16.** Знайдіть зображення  $F(p)$  функції  $f(t)$ , заданої графіком (рис. 4.8).

Розв'язання. Склавши рівняння відповідних відрізків, запишемо аналітичний вираз функції  $f(t)$ :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{äëÿ } t \in (0; a), \\ 0 & \text{äëÿ } t \in (a; 2a), \\ \frac{t-2a}{a} & \text{äëÿ } t \in (2a; 3a), \\ 1 - \frac{(t-3a)}{a} & \text{äëÿ } t \in (3a; 4a), \\ 0 & \text{äëÿ } t < 0 \text{ äáí } t > 4a, \end{cases}$$

тобто функцію вигляду (4.6). За формулою (4.7) маємо

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 \cdot (\eta(t) - \eta(t-a)) + \frac{t-2a}{a} (\eta(t-2a) - \eta(t-3a)) + \\ &+ \left( 1 - \frac{t-3a}{a} \right) (\eta(t-3a) - \eta(t-4a)) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( 1 - \frac{t-3a}{a} - \frac{t-2a}{a} \right) \eta(t-3a) - \left( 1 - \frac{t-3a}{a} \right) \eta(t-4a) = \eta(t) - \eta(t-a) + \\
 & + \frac{1}{a} \left( (t-2a)\eta(t-2a) - 2(t-3a)\eta(t-3a) + (t-4a)\eta(t-4a) \right).
 \end{aligned}$$

Користуючись властивостями  $2^0$  і  $4^0$ , дістанемо шукане зображення

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ap} + \frac{1}{a} \left( \frac{1}{p^2} e^{-2ap} - \frac{2}{p^2} e^{-3ap} + \frac{1}{p^2} e^{-4ap} \right).$$

17. Знайдіть зображення прямокутного періодичного імпульсу з періодом  $2b$  (рис. 4.9).

$$f(t) = \begin{cases} A & \text{для } 0 < t \leq b, \\ 0 & \text{для } b < t \leq 2b. \end{cases}$$

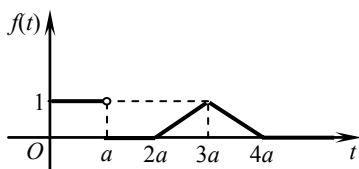


Рис. 4.8

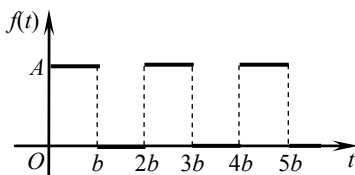


Рис. 4.9

*Розв'язання.* Знайдемо зображення функції на проміжку  $0 < t \leq 2b$  (на одному періоді):

$$F_0(p) = \int_0^b A e^{-pt} dt = A \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_0^b = \frac{A}{p} (1 - e^{-pb}).$$

Тоді за формулою (1.5) дістанемо

$$f(t) = \frac{1}{1 - e^{-2pb}} \frac{A}{p} (1 - e^{-pb}) = \frac{A}{p(1 + e^{-pb})}.$$

### Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Перевірте, які з заданих функцій є функціями-оригіналами:

1)  $f(t) = b^t \eta(t)$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ .      2)  $f(t) = e^{(2+4i)t} \eta(t)$ .

$$3) f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t).$$

$$4) f(t) = t^2 \eta(t).$$

$$5) f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t \cdot \eta(t).$$

$$6) f(t) = \operatorname{tg} t \cdot \eta(t).$$

$$7) f(t) = t \eta(t).$$

$$8) f(t) = \eta(t) e^{-t} \cos t.$$

2. Користуючись означенням, знайдіть зображення функцій:

$$1) f(t) = t.$$

$$2) f(t) = (t-1)e^t.$$

$$3) f(t) = \sin 3t.$$

$$4) f(t) = t^2.$$

$$5) f(t) = e^{2t}.$$

$$6) f(t) = (2t-1)e^{-t}.$$

$$7) f(t) = t e^t.$$

$$8) f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1).$$

3. Знайдіть зображення оригіналів:

$$1) f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2, \\ -1, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & 3 \leq t. \end{cases}$$

$$2) f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ (4-t)^2, & 2 \leq t < 4, \\ 0, & 4 \leq t. \end{cases}$$

4. Користуючись властивостями  $2^0$  і  $3^0$ , знайдіть зображення функцій:

$$1) f(t) = \sin^2 t.$$

$$2) f(t) = \cos^2 t.$$

$$3) f(t) = \cos^3 t.$$

$$4) f(t) = \operatorname{ch} \omega t.$$

$$5) f(t) = \sin \alpha t \cdot \cos \beta t.$$

$$6) f(t) = \sin \alpha t \cdot \sin \beta t.$$

$$7) f(t) = \sin^4 t.$$

$$8) f(t) = \cos^3 \omega t.$$

5. Користуючись властивостями  $4^0$  і  $5^0$ , знайдіть зображення функцій:

$$1) f(t-1) = (t-1)^2 \eta(t-1).$$

$$2) f(t-b) = \sin(t-b) \eta(t-b).$$

$$3) f(t) = e^t \cos nt.$$

$$4) f(t) = e^{-t} t^3.$$

6. Користуючись властивістю  $6^0$ , знайдіть зображення функцій:

$$1) f(t) = \cos^2 t.$$

$$2) f(t) = \cos^3 t.$$

$$3) f(t) = \cos^4 t.$$

$$4) f(t) = t \sin \omega t.$$



7. Користуючись властивістю  $7^0$ , знайдіть зображення функцій:

1)  $f(t) = t^2$ .

2)  $f(t) = t^n$ .

3)  $f(t) = t \cos 2t$ .

4)  $f(t) = t e^{-3t}$ .

5)  $f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t)$ .

6)  $f(t) = t^2 \operatorname{sh} t$ .

8. Користуючись властивістю  $8^0$ , знайдіть зображення функцій:

1)  $f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau$ .

2)  $f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos t d\tau$ .

9. Користуючись властивістю  $9^0$ , знайдіть зображення функцій:

1)  $f(t) = \frac{e^t - 1}{t}$ .

2)  $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$ .

10. Користуючись властивістю  $10^0$ , знайдіть зображення функцій:

1)  $f(t) = \int_0^t (t - \tau)^2 \cos 2\tau d\tau$ .

2)  $f(t) = \int_0^t \tau e^{t-\tau} \sin(t - \tau) d\tau$ .

11. Знайдіть зображення функцій, заданих графічно (рис.4.10—4.12):

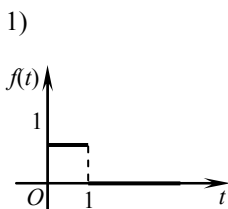


Рис. 4.10

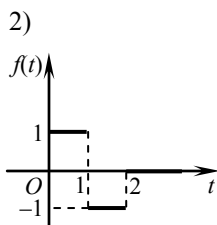


Рис. 4.11

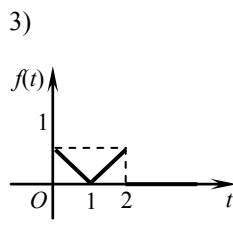


Рис. 4.12

### Відповіді

1. 1) так; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) ні; 7) так; 8) так. 2. 1)  $\frac{1}{p^2}$ ; 2)  $\frac{2-p}{(p-1)^2}$ ;  
 3)  $\frac{3}{p^2+9}$ ; 4)  $\frac{2}{p^3}$ ; 5)  $\frac{1}{p-2}$ ; 6)  $\frac{1-p}{(p+1)^2}$  3. 1)  $\frac{1}{p}(1+e^{-3p}-2e^{-2p})$ ; 2)  $\frac{1}{2p^2}(2-2pe^{-2p}-3e^{-2p}+e^{-4p})$ ;  
 4. 1)  $\frac{2}{p(p^2+4)}$ ; 2)  $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$ ; 3)  $\frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}$ ; 4)  $\frac{p}{p^2-\omega^2}$ ;

$$\begin{aligned}
& 5) \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2}; \quad 6) \frac{2\alpha\beta p}{(p^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2}; \quad 7) \frac{1}{8} \left( \frac{3}{p} + \frac{p}{p^2 + 16} - \frac{4p}{p^2 + 1} \right); \\
& 8) \frac{\omega(p^3 + 7p\omega)}{(p^2 + 9\omega^2)(p^2 + \omega^2)}; \quad 5.1) \frac{2e^{-p}}{p^3}; \quad 2) \frac{e^{-bp}}{p^2 + 1}; \quad 3) \frac{p-1}{(p-1)^2 + n^2}; \quad 4) \frac{6}{(p+1)^4}; \quad 6.1) \frac{p^2 + 2}{p(p^2 + 4)}; \\
& 2) \frac{p^3 + 7p}{(p^2 + 9)(p^2 + 1)}; \quad 3) \frac{p^4 + 16p^2 + 24}{p(p^2 + 4)(p^2 + 16)}; \quad 4) \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}; \quad 7.1) \frac{2}{p^3}; \quad 2) \frac{n!}{p^{n+1}}; \quad 3) \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 4)^2}; \\
& 4) \frac{1}{(p+3)^2}; \quad 5) \frac{2(p^2 + p + 1)}{(p^2 - 1)^2}; \quad 6) \frac{2(1 - p^2)(1 + 3p^2)}{(p^2 - 1)^4}; \quad 8.1) \frac{1}{p(p^2 + 1)}; \quad 2) \frac{p^3 + p^2 + p - 1}{p(p^2 + 1)^2}; \\
& 9.1) \ln \frac{p}{p-1}; \quad 2) \ln \frac{p+1}{p}; \quad 10.1) \frac{2}{p^2(p^2 + 4)}; \quad 2) \frac{1}{p^2(p^2 - 2p + 2)}; \quad 11.1) \frac{1 - e^{-p}}{p}; \quad 2) \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}; \\
& 3) \frac{p(1 - e^{-2p}) - (1 - e^{-p})^2}{p^2}.
\end{aligned}$$

## Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

**1.1.** Користуючись властивостями лінійності і подібності, знайдіть зображення функцій.

**1.1.1.**  $f(t) = \sin^2 5t$ .

**1.1.2.**  $f(t) = \cos^2 9t$ .

**1.1.3.**  $f(t) = \cos^3 \frac{t}{2}$ .

**1.1.4.**  $f(t) = \operatorname{ch} \frac{t}{3} \operatorname{ch} t$ .

**1.1.5.**  $f(t) = \sin 2t \cos 3t$ .

**1.1.6.**  $f(t) = \sin 4t \cos 5t$ .

**1.1.7.**  $f(t) = \cos 2t \cos 7t$ .

**1.1.8.**  $f(t) = \operatorname{ch}^3 t$ .

**1.1.9.**  $f(t) = -\sin 4t + \operatorname{sh}^2 3t$ .

**1.1.10.**  $f(t) = \sin 4t \sin 3t$ .

**1.1.11.**  $f(t) = \operatorname{sh} t \operatorname{sh} 3t$ .

**1.1.12.**  $f(t) = \operatorname{ch} 3t - \sin^2 t$ .

**1.1.13.**  $f(t) = \sin^4 2t$ .

**1.1.14.**  $f(t) = \cos^4 \frac{t}{2}$ .

**1.1.15.**  $f(t) = \sin 6t \cos 4t$ .

**1.1.16.**  $f(t) = \sin 4t \sin 8t$ .

**1.1.17.**  $f(t) = \cos 2t \cos 3t$ .

**1.1.18.**  $f(t) = \cos 2t \cos^2 t$ .

**1.1.19.**  $f(t) = \sin^3 4t$ .

**1.1.20.**  $f(t) = \cos^3 3t$ .

**1.1.21.**  $f(t) = \cos^3 \frac{t}{3}$ .

**1.1.22.**  $f(t) = \operatorname{sh} \frac{2t}{5} \operatorname{ch} \frac{3t}{5}$ .

**1.1.23.**  $f(t) = \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} 2t.$

**1.1.24.**  $f(t) = \operatorname{ch} 3t \operatorname{sh} t.$

**1.1.25.**  $f(t) = \operatorname{sh}^2 3t.$

**1.1.26.**  $f(t) = \operatorname{ch} 3t \operatorname{ch} 2t.$

**1.1.27.**  $f(t) = \operatorname{sh}^3 t.$

**1.1.28.**  $f(t) = \operatorname{ch}^3 4t.$

**1.1.29.**  $f(t) = \sin 3t \cos 5t.$

**1.1.30.**  $f(t) = \sin 2t \sin^2 t.$

**1.2.** Користуючись властивостями  $4^0$  і  $5^0$ , знайдіть зображення функцій.

**1.2.1.**  $f(t-2) = (t-2)^2 \eta(t-2).$       **1.2.2.**  $f(t-3) = \sin^2 \frac{t-3}{2} \eta(t-3).$

**1.2.3.**  $f(t-4) = \cos^2(t-4) \eta(t-4).$       **1.2.4.**  $f(t-1) = e^{-t} \eta(t-1).$

**1.2.5.**  $f(t-5) = e^{t-5} \eta(t-5).$       **1.2.6.**  $f(t-3) = \cos^3(t-3) \eta(t-3).$

**1.2.7.**  $f(t-2) = \sin^2(t-2) \eta(t-2).$       **1.2.8.**  $f(t) = e^{-3t} (2t-1).$

**1.2.9.**  $f(t) = e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t.$       **1.2.10.**  $f(t) = e^{-\alpha t} \sin^2 \beta t.$

**1.2.11.**  $f(t) = e^t \cos 2t.$       **1.2.12.**  $f(t) = e^{-t} t^4.$

**1.2.13.**  $f(t) = e^{2t} \operatorname{sh} 3t.$       **1.2.14.**  $f(t) = e^{4t} \cos t.$

**1.2.15.**  $f(t) = e^{3t} \sin^2 2t.$       **1.2.16.**  $f(t) = e^{2t} \sin 5t.$

**1.2.17.**  $f(t) = e^{-2t} t^3.$       **1.2.18.**  $f(t) = e^{-3t} t^2.$

**1.2.19.**  $f(t) = e^{3t} \operatorname{sh} 4t.$       **1.2.20.**  $f(t) = e^{-t} \cos^2 \frac{t}{2}.$

**1.2.21.**  $f(t) = e^{-3t} \sin^2 t.$       **1.2.22.**  $f(t) = e^{-2t} \sin 4t.$

**1.2.23.**  $f(t-3) = e^{2(t-3)} \eta(t-3).$       **1.2.24.**  $f(t-1) = \cos^3 \frac{t-1}{2} \eta(t-1).$

**1.2.25.**  $f(t-4) = \sin^2 \frac{t-4}{4} \eta(t-4).$       **1.2.26.**  $f(t) = e^{-4t+2} \eta(t-3).$

**1.2.27.**  $f(t) = e^{-3t} \cos 4t.$       **1.2.28.**  $f(t) = e^{-t} t^6.$

**1.2.29.**  $f(t) = e^{-t} \operatorname{ch} 5t.$       **1.2.30.**  $f(t) = (3t-2)e^{2t}.$

**1.3.** Користуючись властивостями  $6^0$  або  $7^0$ , знайдіть зображення функцій.

**1.3.1.**  $f(t) = t \sin^2 2t.$       **1.3.2.**  $f(t) = t \sin^3 t.$

**1.3.3.**  $f(t) = t \cos^2 t.$       **1.3.4.**  $f(t) = t \sin 3t.$

**1.3.5.**  $f(t) = t \cos \omega t.$       **1.3.6.**  $f(t) = t \operatorname{sh} t.$

$$1.3.7. f(t) = t \operatorname{ch} t.$$

$$1.3.9. f(t) = t^2 \cos \omega t.$$

$$1.3.11. f(t) = t \sin \omega t \operatorname{sh} \omega t.$$

$$1.3.13. f(t) = t^2 \sin 3t.$$

$$1.3.15. f(t) = t^2 \operatorname{sh} t.$$

$$1.3.17. f(t) = t \cos 5t.$$

$$1.3.19. f(t) = t e^{-5t}.$$

$$1.3.21. f(t) = t(e^t - \operatorname{ch} 2t).$$

$$1.3.23. f(t) = t \operatorname{sh} 3t.$$

$$1.3.25. f(t) = t \sin t \operatorname{sh} t.$$

$$1.3.27. f(t) = t \cos t \operatorname{ch} t.$$

$$1.3.29. f(t) = t^2 e^{-2t}.$$

$$1.3.8. f(t) = t \operatorname{ch} \omega t.$$

$$1.3.10. f(t) = t^2 \operatorname{sh} t.$$

$$1.3.12. f(t) = t \cos \omega t \operatorname{ch} \omega t.$$

$$1.3.14. f(t) = t^2 \operatorname{ch} 5t.$$

$$1.3.16. f(t) = t^2 \operatorname{ch} 2t.$$

$$1.3.18. f(t) = t \sin 3t.$$

$$1.3.20. f(t) = t^2 \cos t.$$

$$1.3.22. f(t) = (t+1) \sin 2t.$$

$$1.3.24. f(t) = (t^2 - 1) \operatorname{sh} 2t.$$

$$1.3.26. f(t) = t^2 \operatorname{ch} 2t.$$

$$1.3.28. f(t) = t \operatorname{ch} 2t.$$

$$1.3.30. f(t) = t^2 e^{4t}.$$

1.4. Користуючись властивостями  $8^0$  або  $9^0$ , знайдіть зображення функцій.

$$1.4.1. f(t) = \int_0^t \tau \sin 3\tau d\tau.$$

$$1.4.2. f(t) = \int_0^t (2\tau - 3) \cos \tau d\tau.$$

$$1.4.3. f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau.$$

$$1.4.4. f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau.$$

$$1.4.5. f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{ch} \omega \tau d\tau.$$

$$1.4.6. f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau.$$

$$1.4.7. f(t) = \int_0^t \sin(2\tau - 3) d\tau.$$

$$1.4.8. f(t) = \int_0^t \frac{\tau^3 e^{2\tau}}{6} d\tau.$$

$$1.4.9. f(t) = \int_0^t e^{-3\tau} \sin 5\tau d\tau.$$

$$1.4.10. f(t) = \int_0^t e^{-4\tau} \cos 8\tau d\tau.$$

$$1.4.11. f(t) = \int_0^t \tau \cos 4\tau d\tau.$$

$$1.4.12. f(t) = \int_0^t (\tau - 2) \cos 2\tau d\tau.$$

$$1.4.13. f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}.$$

$$1.4.14. f(t) = \int_0^t (\tau - 1) \operatorname{sh} 4\tau d\tau.$$

$$1.4.15. f(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

$$1.4.16. f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}.$$

$$1.4.17. f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$$

$$1.4.18. f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}.$$

$$1.4.19. f(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t}.$$

$$1.4.20. f(t) = (1 - e^{2t})e^t \frac{1}{t}.$$

$$1.4.21. f(t) = \frac{e^{-at} \sin t}{t}.$$

$$1.4.22. f(t) = \frac{\sin 7t \sin 3t}{t}.$$

$$1.4.23. f(t) = \frac{\cos 3t - \cos 2t}{t}.$$

$$1.4.24. f(t) = \frac{1 - \cos t}{t} e^{-t}.$$

$$1.4.25. f(t) = \frac{1 - e^{at}}{t e^t}.$$

$$1.4.26. f(t) = \frac{e^{-at} \sin^2 bt}{t}.$$

$$1.4.27. f(t) = \frac{\cos^2 3t}{t}.$$

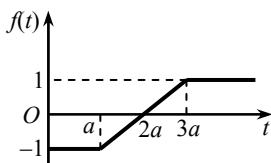
$$1.4.28. f(t) = e^{-2t} \sin 2t \frac{1}{t}.$$

$$1.4.29. f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}.$$

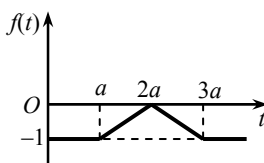
$$1.4.30. f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

1.5. Знайдіть зображення функцій, заданих графічно.

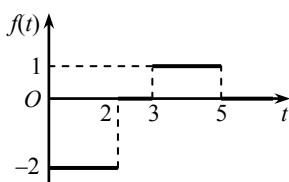
1.5.1.



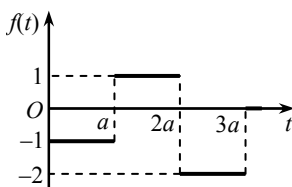
1.5.2.



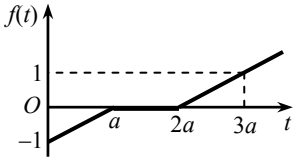
1.5.3.



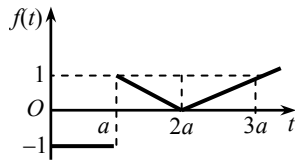
1.5.4.



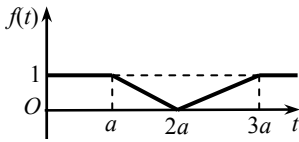
1.5.5.



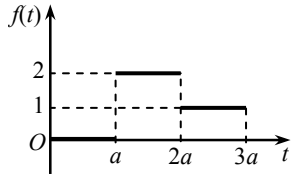
1.5.6.



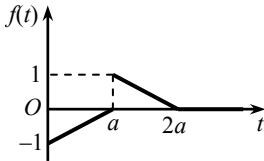
1.5.7.



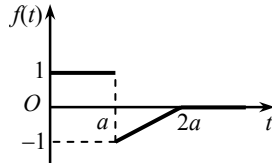
1.5.8.



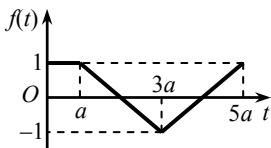
1.5.9.



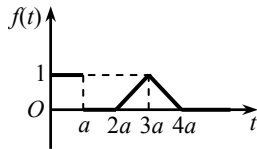
1.5.10.



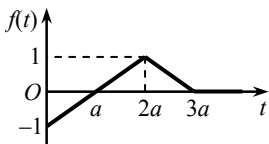
1.5.11.



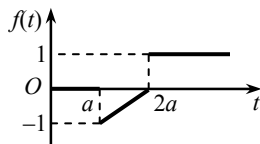
1.5.12.



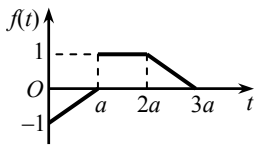
1.5.13.



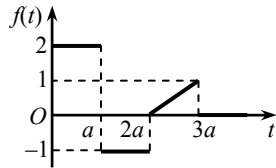
1.5.14.



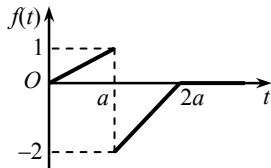
1.5.15.



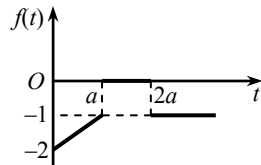
1.5.16.



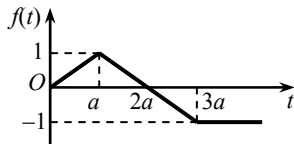
1.5.17.



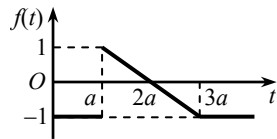
1.5.18.



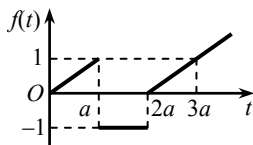
1.5.19.



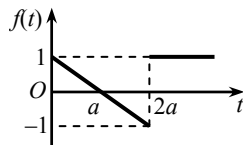
1.5.20.



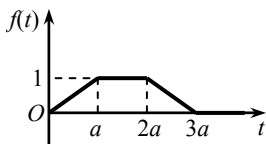
1.5.21.



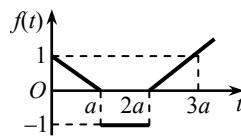
1.5.22.



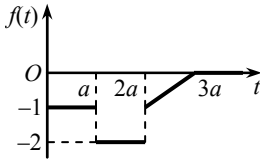
1.5.23.



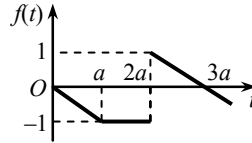
1.5.24.



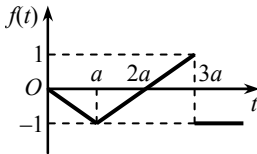
1.5.25.



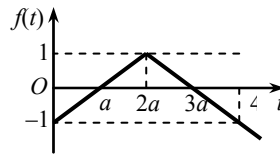
1.5.26.



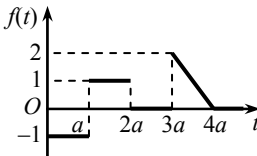
1.5.27.



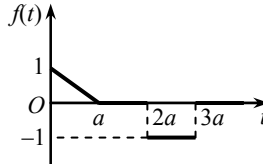
1.5.28.



1.5.29.



1.5.30.



**Тема 2. ВІДШУКАННЯ ОРИГІНАЛУ ЗА ЙОГО ЗОБРАЖЕННЯМ.  
ЗАСТОСУВАННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА  
ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.  
ФОРМУЛА ДЮАМЕЛЯ**

Обернене перетворення Лапласа. Елементарні засоби відшукування оригіналів. Перша та друга теореми розкладання. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь. Інтеграл Дюамеля. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь



**Література:** [4, розділ 2, пп. 2.4—2.7], [5, гл.2, пп. 2.11—2.12], [12, розділ 32, §3—4], [13, розділ 2, §12—14], [15, розділ 16, п.п. 16.2.6—16.2.8], [17, розділ 9, §33—34]



## Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 2.1. Обернене перетворення Лапласа

Якщо  $f(t)$  — оригінал, а  $F(p)$  — його зображення, то в будь-якій точці неперервності функції  $f(t)$  виконується співвідношення

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} F(p)e^{pt} dp. \quad (4.8)$$

Формулу (4.8) називають формулою *оберненого перетворення Лапласа*.

Безпосереднє обчислення інтеграла (4.8) зазвичай викликає значні труднощі. Щоб уникнути їх, на практиці використовують інші методи, найпростішим серед яких є використання таблиці оригіналів і зображень (дод. VI) та властивостей  $1^0$  —  $10^0$  зображень (див. далі приклади).

### 2.2. Теорема розкладання

У більш складних випадках для відшукування оригіналів застосовують теорему розкладання.

**Теорема 1** (*перша теорема розкладання*). Якщо функція  $F(p)$  аналітична в деякому околі точки  $p = \infty$  і її розклад в ряд Лорана в околі нескінченно віддаленої точки має вигляд

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}, \quad (4.9)$$

тоді функція

$$f(t)\eta(t) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!} \right) \eta(t) \quad (4.10)$$

є оригіналом для функції  $F(p)$ .

**Теорема 2** (*друга теорема розкладання*). Якщо функція  $F(p)$  аналітична в усій комплексній площині за винятком скінченної кількості особливих точок  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , тоді оригінал для  $F(p)$  знаходять за формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left[ F(p)e^{pt} \right]. \quad (4.11)$$

Зокрема, якщо  $F(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$ , і  $p_1, p_2, \dots, p_n$  — прості корені функції  $\Psi(p)$  (тобто прості полюси функції  $F(p)$ ), то

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{\Phi(p_k)}{\Psi'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (4.12)$$

На практиці часто використовують різновидність формули (4.12), коли одне з чисел  $p_k$  дорівнює нулю, тобто зображення  $F(p)$  має вигляд

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{p\Psi_1(p)},$$

де  $\Psi_1(p)$  має  $n - 1$  простих коренів, відмінних від нуля. Враховуючи, що  $(p\Psi_1(p))' = \Psi_1(p) + p\Psi_1'(p)$ , дістанемо з (4.12)

$$f(t) = \frac{\Phi(0)}{\Psi_1(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\Phi(p_k) e^{p_k t}}{p_k \Psi_1'(p_k)}. \quad (4.13)$$

Якщо знаменник  $\Psi(p)$  має кратні корені  $p_1, p_2, \dots, p_l$ , кратності  $m_1, m_2, \dots, m_l$  відповідно ( $m_1 + m_2 + \dots + m_l = n$ ), тобто

$$\Psi(p) = (p - p_1)^{m_1} (p - p_2)^{m_2} \dots (p - p_l)^{m_l},$$

тоді

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k - 1}}{dp^{m_k - 1}} \left[ (p - p_k)^{m_k} \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} e^{pt} \right]. \quad (4.14)$$

### 2.3. Розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай треба знайти розв'язок  $x(t)$  лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t), \quad (4.15)$$

який задовольняє початкові умови

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}. \quad (4.16)$$

Вважатимемо, що функції  $f(t)$ ,  $x(t)$ ,  $x'(t)$ , ...,  $x^{(n-1)}(t)$  є функціями-оригіналами. Застосуємо до обох частин рівняння (4.15) перетворення Лапласа, тобто від задачі Коші (4.15) – (4.16) перейдемо до операторного рівняння

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n)X(p) + Q(p) = F(p),$$

де  $X(p)$  — зображення шуканого розв'язку  $x(t)$ ;  $F(p)$  — зображення правої частини  $f(t)$  рівняння (4.15);  $Q(p)$  — деякий многочлен, коефіцієнти якого залежать від початкових умов  $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$  (якщо  $x_0 = x'_0 = \dots = x_0^{(n-1)} = 0$ , то  $Q(p) \equiv 0$ ). Розв'язавши операторне рівняння відносно  $X(p)$ , дістанемо

$$X(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{A(p)}, \quad (4.17)$$

де  $A(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n$  — характеристичний многочлен заданого рівняння (4.15).

Оригінал для  $X(p)$  буде шуканим розв'язком  $x(t)$  задачі Коші (4.15) — (4.16).

Отже, загальна схема розв'язання задачі Коші має такий вигляд



## 2.4. Інтеграл Дюамеля

Інтеграл Дюамеля є безпосереднім наслідком теореми про згортку оригіналів (властивість  $10^0$ ).

Якщо  $f(t) \rightleftharpoons F(p)$  і  $g(t) \rightleftharpoons G(p)$ , то

$$pF(p)G(p) \rightleftharpoons f(t)g(0) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau. \quad (4.18)$$

Формулу (4.18) називають *формулою Дюамеля*. Враховуючи властивості згортки, можна дістати ще три варіанти цієї формули

$$\begin{aligned} pF(p)G(p) &= f(t)g(0) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau = \\ &= f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau = f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Формулу Дюамеля використовують для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$L[x] \equiv a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t) \quad (4.19)$$

за нульових початкових умов

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0 \quad (4.20)$$

(це обмеження на початкові умови несуттєве, оскільки ненульові умови можна за допомогою простої заміни шуканої функції звести до нульових).

Припустимо, що відомий розв'язок рівняння

$$L[x] = 1 \quad (4.21)$$

з тією самою лівою частиною й одиницею в правій частині за умов (4.20).

Нехай

$$A(p)X(p) = F(p) \text{ і } A(p)X_1(p) = \frac{1}{p}$$

є операторні рівняння відповідно для рівнянь (4.19) і (4.21), де  $A(p)$  — характеристичний многочлен  $L[x]$ .

$$\text{Звідси } X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}, \quad A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}, \text{ тобто } X(p) = pX_1(p)F(p).$$

Згідно з формулою (4.18)

$$pX_1(p)F(p) \equiv f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

Враховуючи, що  $x_1(0) = 0$ , дістанемо

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \equiv \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau.$$

Отже, розв'язок  $x(t)$  рівняння (1.19) при нульових початкових умовах має вигляд

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau, \quad (4.22)$$

де  $x_1(t)$  — розв'язок задачі (4.20) — (4.21).

## 2.5. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь

Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відбувається за тією самою схемою, що і розв'язання одного рівняння. При цьому в просторі зображень дістають систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Ця система має такі особливості:

— по-перше, вона завжди лінійна відносно невідомих зображень розв'язків;

— по-друге, вона вже містить початкові умови для шуканих функцій, тобто, роз'язавши її, знайдемо відразу частинний розв'язок системи;

— по-третє, при її розв'язанні кожна невідома функція обчислюється сама по собі, незалежно від решти; це має велике практичне значення, оскільки досить часто трапляється так, що дослідника цікавить тільки одна невідома функція, що входить до системи, решта невідомих можуть залишатися невизначеними.

### Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть оригінал для функції  $F(p) = \frac{4p-3}{p^2+6p+13}$ .

*Розв'язання.* Виконаємо перетворення

$$F(p) = \frac{4(p+3)-15}{(p+3)^2+4} = 4 \cdot \frac{(p+3)}{(p+3)^2+4} - \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{(p+3)^2+4}.$$

Оскільки  $\frac{p}{p^2+4} \doteq \cos 2t$ ,  $\frac{2}{p^2+4} \doteq \sin 2t$ , то за властивістю  $S^0$  маємо

$$F(p) \doteq 4e^{-3t} \cos 2t - \frac{15}{2} e^{-3t} \sin 2t.$$

2. Знайдіть оригінал  $f(t)$ , якщо  $F(p) = \frac{pe^{-2p}}{p^2-2p+10}$ .

*Розв'язання.* Нехай  $f(t)$  — шуканий оригінал, тобто  $f(t) \doteq F(p)$ . Запишемо зображення у вигляді

$$F(p) = e^{-2p} F_1(p),$$

$$\text{де } F_1(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 10}.$$

Аби знайти оригінал заданого зображення  $F(p)$ , достатньо виконати такі дії:

- 1) визначити оригінал  $f_1(t)$  для зображення  $F_1(p)$ ;
- 2) скористатися властивістю  $4^0$  (запізнення оригіналу):

$$f(t) = f_1(t-2)\eta(t-2) \text{ — шуканий оригінал.}$$

Маємо

$$F_1(p) = \frac{p}{p^2 - 2p + 10} = \frac{p-1+1}{(p-1)^2 + 3^2} = \frac{p-1}{(p-1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(p-1)^2 + 3^2},$$

$$F_1(p) \doteq f_1(t) = e^t \cos 3t + \frac{1}{3} e^t \sin 3t,$$

$$f(t) = f_1(t-2)\eta(t-2) = e^{t-2} \left( \cos 3(t-2) + \frac{1}{3} \sin 3(t-2) \right) \eta(t-2).$$

3. Знайдіть оригінал для функції  $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)}$ .

*Розв'язання. Перший спосіб.* Розкладемо правильний раціональний дріб  $F(p)$  на елементарні дроби.

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 1}.$$

Визначивши коефіцієнти  $A$ ,  $B$  і  $C$ , дістанемо

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1}.$$

За таблицею знаходимо оригінал  $f(t) = 1 - \cos t$ .

*Другий спосіб.* Відомо, що  $\sin t \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ . Діленню зображення на  $p$  відповідає інтегрування оригіналу (властивість  $8^0$ ), тому

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \doteq \int_0^t \sin \tau \, d\tau = -\cos \tau \Big|_0^t = -\cos t + \cos 0 = 1 - \cos t.$$

4. Знайдіть оригінал для функції  $F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$ .

*Розв'язання.* Розклавши дріб на елементарні дроби, дістанемо

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \cdot \frac{p-4}{p^2+4}.$$

Перший і другий доданки мають табличні оригінали, а третій доданок подамо у вигляді різниці

$$\frac{1}{20} \cdot \frac{p-4}{p^2+4} = \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{p^2+4}.$$

Тоді

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

5. Знайдіть оригінал для функції  $F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$ .

*Розв'язання.* Для відшукування оригіналу використаємо теорему про згортку оригіналів (властивість  $10^0$ ).

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \int_0^t \sin \tau \cdot \sin (t-\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos (2\tau-t) - \cos t) d\tau = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \sin (2\tau-t) \Big|_0^t - \tau \cos t \Big|_0^t \right) = \\ &= \frac{1}{4} (\sin t + \sin t) - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{1}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t = \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

6. Знайдіть оригінал  $f(t)$ , якщо  $F(p) = \sin \frac{1}{p}$ .

*Розв'язання.* Розкладемо функцію  $\sin \frac{1}{p}$  у ряд Лорана:

$$\sin \frac{1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3!p^3} + \frac{1}{5!p^5} - \dots,$$

тоді за формулою (4.10) знаходимо оригінал

$$f(t) = 1 - \frac{1}{3!} \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{5!} \frac{t^4}{4!} - \dots$$

7. Знайдіть оригінал, що відповідає зображенню

$$F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^4 - 4p^3 - 9p^2 + 16p + 20} = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)}.$$

*Розв'язання.* Розв'язавши рівняння  $p^4 - 4p^3 - 9p^2 + 16p + 20 = 0$ , дістанемо корені  $p_1 = -2, p_2 = -1, p_3 = 2, p_4 = 5$ . Отже,

$$\Psi(p) = p^4 - 4p^3 - 9p^2 + 16p + 20 = (p+1)(p-2)(p+2)(p-5).$$

Для відшукування оригіналу використаємо формулу (4.12). Знаходимо похідну від знаменника:

$$\begin{aligned} \Psi'(p) &= \left( (p+1)(p-2)(p+2)(p-5) \right)' = \\ &= (p-2)(p+2)(p-5) + (p+1)(p+2)(p-5) + \\ &+ (p+1)(p-2)(p-5) + (p+1)(p-2)(p+2) \end{aligned}$$

і обчислюємо її значення в точках  $p_k$ :

$$\Psi'(-1) = 18, \quad \Psi'(-2) = -28, \quad \Psi'(2) = -18, \quad \Psi'(5) = 128.$$

Обчислимо значення чисельника  $\Phi(p)$  в точках  $p_k$ :

$$\Phi(-1) = -2, \quad \Phi(-2) = -1, \quad \Phi(2) = 7, \quad \Phi(5) = 34.$$

За формулою (4.12) визначаємо шуканий оригінал

$$f(t) = -\frac{2}{18} e^{-t} + \frac{-1}{-28} e^{-2t} + \frac{7}{-18} e^{2t} + \frac{34}{128} e^{5t},$$

тобто

$$f(t) = -\frac{1}{9} e^{-t} + \frac{1}{28} e^{-2t} - \frac{7}{18} e^{2t} + \frac{17}{64} e^{5t}.$$

8. Знайдіть оригінал для зображення

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} = \frac{p+1}{p(p^2+4)}.$$



*Розв'язання.* Знаходимо корені знаменника:  $p_1 = 0, p_2 = 2i, p_3 = -2i$ . Використовуємо формулу (4.13). При цьому  $\Psi_1(p) = p^2 + 4, \Psi'_1(p) = 2p$ .

Маємо

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{0+1}{0+4} + \frac{(2i+1)e^{2it}}{2i \cdot 2 \cdot 2i} + \frac{(-2i+1)e^{-2it}}{-2i \cdot 2 \cdot (i-2)} = \frac{1}{4} - \frac{1+2i}{8} e^{2it} - \frac{1-2i}{8} e^{-2it} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{8} + \frac{e^{2it} - e^{-2it}}{4i} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 2t + \frac{1}{2} \sin 2t. \end{aligned}$$

9. Знайдіть оригінал для зображення

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{\Psi(p)} = \frac{p-2}{p^5 + 2p^4 + p^3}.$$

*Розв'язання.* Оскільки  $\Psi(p) = p^5 + 2p^4 + p^3 = p^3(p+1)^2$ , то знаменник має два кратні корені:  $p_1 = 0$  кратності три і  $p_2 = -1$  кратності два. Тому застосуємо формулу (4.14). Маємо

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{(3-1)!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left( (p-0)^3 \frac{(p-2)}{p^3(p+1)^2} e^{pt} \right) + \\ &+ \frac{1}{(2-1)!} \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left( (p+1)^2 \frac{(p-2)}{p^3(p+1)^2} e^{pt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} \left( \frac{(p-2)}{(p+1)^2} e^{pt} \right) + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} \left( \frac{(p-2)}{p^3} e^{pt} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2}{dp^2} (A(p)) + \lim_{p \rightarrow -1} \frac{d}{dp} (B(p)). \end{aligned}$$

Знайдемо похідні:

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{p+1-3}{(p+1)^2} e^{pt} = e^{pt} (p+1)^{-1} - 3e^{pt} (p+1)^{-2}, \\ \frac{dA(p)}{dp} &= te^{pt} (p+1)^{-1} - e^{pt} (p+1)^{-2} - 3te^{pt} (p+1)^{-2} + 6e^{pt} (p+1)^{-3}, \\ \frac{d^2 A(p)}{dp^2} &= t(te^{pt} (p+1)^{-1} - e^{pt} (p+1)^{-2}) - te^{pt} (p+1)^{-2} + 2e^{pt} (p+1)^{-3} - \\ &- 3t(te^{pt} (p+1)^{-2} - 2e^{pt} (p+1)^{-3}) + 6te^{pt} (p+1)^{-3} - 18e^{pt} (p+1)^{-4}, \end{aligned}$$

$$B(p) = \frac{(p-2)}{p^3} e^{pt} = e^{pt} p^{-2} - 2e^{pt} p^{-3},$$

$$\frac{dB(p)}{dp} = te^{pt} p^{-2} - 2e^{pt} p^{-3} - 2te^{pt} p^{-3} + 6e^{pt} p^{-4}.$$

Тоді

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^2 A(p)}{dp^2} = t(t-1) - t + 2 - 3t(t-2) + 6t - 18 = -2t^2 - 10t - 18,$$

$$\lim_{p \rightarrow -1} \frac{dB(p)}{dp} = te^{-t} + 2e^{-t} + 2te^{-t} + 6e^{-t} = e^{-t}(3t+8).$$

Отже,

$$f(t) = \frac{1}{2}(-2t^2 + 10t - 16) + (3t+8)e^{-t} = -t^2 + 5t - 8 + (3t+8)e^{-t}.$$

**10.** Розв'яжіть задачу Коші

$$x'' + 2x' + x = te^{-t}, \quad x(0)=1, \quad x'(0) = 2.$$

*Розв'язання.* Нехай  $x(t) \doteq X(p)$ , тоді за властивістю 6<sup>0</sup>

$$x'(t) \doteq pX(p) - x_0 = pX(p) - 1,$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px_0 - x'_0 = p^2 X(p) - p - 2.$$

Знаходимо зображення правої частини рівняння:

$$te^{-t} \doteq \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Отже, операторне рівняння набуває вигляду

$$(p^2 + 2p + 1)X(p) - (p+2) - 2 = \frac{1}{(p+1)^2},$$

його розв'язок має вигляд

$$X(p) = \frac{p+2}{(p+1)^2} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^4}.$$

Для визначення оригіналу зручно записати  $X(p)$  у вигляді

$$X(p) = \frac{(p+1)+1}{(p+1)^2} + \frac{2}{(p+1)^2} + \frac{1}{(p+1)^4} = \frac{1}{(p+1)^4} + \frac{3}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1}.$$

За таблицею зображень знаходимо шуканий розв'язок:

$$x(t) = \frac{1}{3!} t^3 e^{-t} + 3t e^{-t} + e^{-t}.$$

**11.** Розв'яжіть рівняння  $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t)$  за початкових умов  $x(0) = -1$ ,  $x'(0) = 1$ .

*Розв'язання.* Нехай  $x(t) \doteq X(p)$ , тоді

$$x'(t) \doteq pX(p) + 1, \quad x''(t) \doteq p^2 X(p) + p - 1.$$

Знайдемо зображення правої частини заданого рівняння:

$$e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t) \doteq \frac{p+2}{(p+2)^2+1} + \frac{2}{(p+2)^2+1} = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Складаємо операторне рівняння

$$p^2 X(p) + p - 1 + 4(pX(p) + 1) + 4X(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Звідси

$$X(p)(p^2 + 4p + 4) = \frac{p+4}{(p+2)^2+1} - p - 3,$$

або

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{p+4}{(p+2)^2(p+2)^2+1} - \frac{p+3}{(p+2)^2} = \\ &= \frac{p+4}{(p+2)^2((p+2)^2+1)} - \frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2}. \end{aligned}$$

Розглянемо дріб

$$\frac{p+4}{(p+2)^2((p+2)^2+1)}.$$

Оскільки множники знаменника відрізняються на одиницю, то виконаємо такі дії:

$$\begin{aligned} \frac{p+4}{(p+2)^2((p+2)^2+1)} &= \frac{(p+4)((p+2)^2+1) - (p+2)^2}{(p+2)^2((p+2)^2+1)} = \\ &= \frac{p+4}{(p+2)^2} - \frac{p+4}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2+2}{(p+2)^2} - \frac{p+2+2}{(p+2)^2+1} = \\ &= \frac{1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2} - \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+2)^2+1}. \end{aligned}$$

Отже,

$$X(p) = \frac{1}{(p+2)^2} - \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{2}{(p+2)^2+1}.$$

Шуканий оригінал має вигляд

$$x(t) = e^{-2t}(t - \cos t - 2 \sin t).$$

**12.** Розв'яжіть рівняння  $y'' - 2y' + 2y = 2e^t \cos t$ , якщо  $y(0) = y'(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Нехай  $y(t) \doteq Y(p)$ , тоді  $y'(t) \doteq pY(p)$ ,  $y''(t) \doteq p^2Y(p)$ .

Складаємо операторне рівняння

$$(p^2 - 2p + 2)Y(p) = F(p),$$

де  $F(p) = \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}$  — зображення правої частини заданого рівняння. Звідси

$$Y(p) = \frac{2(p-1)}{((p-1)^2+1)^2}.$$

Для відшукування оригіналу застосуємо теорему про згортку функції (властивість  $10^0$ ).

Відомо, що  $e^t \sin t \doteq \frac{1}{(p-1)^2+1}$ , тоді вираз

$$\frac{2(p-1)}{((p-1)^2+1)^2} = \frac{1}{(p-1)^2+1} \cdot \frac{2(p-1)}{(p-1)^2+1}$$

є зображенням згортки

$$e^t \sin t * 2e^t \cos t = 2 \int_0^t e^{t-\tau} \cos(t-\tau) e^\tau \sin \tau d\tau.$$

Обчислимо цей інтеграл

$$\begin{aligned} 2e^t \int_0^t \cos(t-\tau) \sin \tau d\tau &= e^t \int_0^t (\sin(t-\tau+\tau) + \sin(t-\tau-\tau)) d\tau = \\ &= e^t \left( \sin t \cdot \tau \Big|_0^t + \frac{1}{2} \cos(t-2\tau) \Big|_0^t \right) = e^t \left( t \sin t + \frac{1}{2} \cos t - \frac{1}{2} \cos t \right) = t e^t \sin t. \end{aligned}$$

Отже,  $y = t e^t \sin t$  — розв'язок заданої задачі Коші.

### 13. Розв'яжіть задачу Коші

$$x'' - x = \frac{1}{1 + e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

використовуючи формулу Дюамеля.

*Розв'язання.* Розглянемо допоміжну задачу

$$x_1'' - x_1 = 1, \quad x_1(0) = x_1'(0) = 0.$$

Якщо  $X_1(p) \doteq x_1(t)$ , то переходячи до операторного рівняння, дістанемо

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2 - 1)},$$

звідки  $x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1$ . За формулою (4.22) маємо

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + e^\tau} \operatorname{sh}(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} (e^t - t e^t - 1) + \operatorname{sh} t \ln \frac{1 + e^t}{2}.$$

### 14. Розв'яжіть систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} y' = 3z - y, \\ z' = y + z + e^t \end{cases}$$

за початкових умов  $y(0) = z(0) = 0$ .

*Розв'язання.* Переведемо задану систему в простір зображень. Нехай  $y(t) \doteq Y(p)$ ,  $z(t) \doteq Z(p)$ , тоді  $y'(t) \doteq pY(p)$ ,  $z'(t) \doteq pZ(p)$ , крім того,  $e^t \doteq \frac{1}{p-1}$ .

Тоді зображувальна система має вигляд

$$\begin{cases} pY(p) = 3Z(p) - Y(p), \\ pZ(p) = Y(p) + Z(p) + \frac{1}{p-1}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (p+1)Y(p) - 3Z(p) = 0, \\ -Y(p) + (p-1)Z(p) = \frac{1}{p-1}. \end{cases}$$

Цю систему зручно розв'язати за формулами Крамера. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix} = p^2 - 4, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ \frac{1}{p-1} & p-1 \end{vmatrix} = \frac{3}{p-1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} p+1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{p-1} \end{vmatrix} = \frac{p+1}{p-1}.$$

Отже,  $Y(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{(p-1)(p^2-4)}$ ,  $Z(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{p+1}{(p-1)(p^2-4)}$ .

Розклавши дробы на елементарні, знайдемо оригінали (розв'язок системи)

$$\begin{cases} y(t) = \frac{3}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - e^t, \\ z(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{1}{12}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^t. \end{cases}$$

**15.** У схемі (рис. 4.13) при  $t = 0$  замикається ключ  $K$ . Визначте напругу  $u_c(t)$  на конденсаторі  $C$  і струми  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$ ,  $i_3(t)$  у вітках електричного кола.

*Розв'язання.* За схемою (рис. 4.13) визначимо початкові умови. При розімкненому ключі  $K$  очевидно, що  $u_c(0) = E$ ,  $i_1(0) = i_2(0) = i_3(0) = 0$ . При замкненому ключі  $K$  за схемою можна записати систему рівнянь електричної рівноваги, використовуючи закони Ома і Кірхгофа

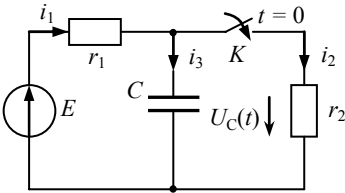


Рис. 4.13

$$\begin{cases} i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) = 0, \\ r_1 i_1(t) + u_c(t) - E = 0, \\ r_2 i_2(t) - u_c(t) = 0. \end{cases}$$

Враховуючи, що струм і напруга в ємності зв'язані співвідношенням

$$i_3(t) = i_c(t) = C u_c'(t), \quad (4.23)$$

дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{i}_1(t) - i_2(t) - C u_c'(t) = 0, \\ r_1 \dot{i}_1(t) + u_c(t) = E, \\ r_2 i_2(t) - u_c(t) = 0. \end{cases}$$

Нехай  $I_1(p) \rightarrow i_1(t)$ ,  $I_2(p) \rightarrow i_2(t)$ ,  $I_3(p) \rightarrow i_3(t)$ ,  $U_C(p) \rightarrow u_c(t)$ , тоді з урахуванням співвідношення  $I_3(p) = p C U_C(p) - C u_c(0)$  (див. властивість  $b^0$ ), зображувана система має вигляд

$$\begin{cases} I_1(p) - I_2(p) - p C U_C(p) = -C U_C(0), \\ r_1 I_1(p) + U_C(p) = \frac{E}{p}, \\ r_2 I_2(p) - U_C(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних  $I_1(p)$ ,  $I_2(p)$ ,  $U_c(p)$ , дістанемо

$$I_1(p) = \frac{E}{r_1 r_2 C} \frac{1}{p \left( p + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} \right)}, \quad I_2(p) = \frac{E}{r_2} \frac{p + \frac{1}{r_1 C}}{p \left( p + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} \right)},$$

$$U_c(p) = E \frac{p + \frac{1}{r_1 C}}{p \left( p + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} \right)}.$$

Тепер можна визначити  $I_3(p)$ :

$$I_3(p) \doteq i_3(t) = i_c(t),$$

або

$$I_3(p) = p C U_c(p) - C u_c(0) = -\frac{E}{r_2} \frac{1}{p + \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}}.$$

Знаходимо, нарешті, оригінали шуканих струмів і напруги

$$i_1(t) = \frac{E}{r_1 r_2 C} \left( \frac{1}{\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}} + \frac{1}{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C}} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t} \right) = \frac{E}{r_1 + r_2} \left( 1 - e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t} \right),$$

$$i_2(t) = \frac{E}{(r_1 + r_2) r_2} \left( r_2 + r_1 e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t} \right), \quad i_3(t) = -\frac{E}{r_2} e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t},$$

$$u_c(t) = \frac{E}{r_1 + r_2} \left( r_2 + r_1 e^{-\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 C} t} \right).$$

## Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайдіть оригінали для зображень:

$$1) F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}, \quad 2) F(p) = \frac{1}{p^2+4p+3},$$

$$3) F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)},$$

$$4) F(p) = \frac{1}{p+2p^2+p^3},$$

$$5) F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2+9},$$

$$6) F(p) = \frac{1}{p^2+4p+5},$$

$$7) F(p) = \frac{3p-2}{(p-1)(p^2-6p+10)},$$

$$8) F(p) = \frac{1}{(p^2+4)^2}.$$

2. Для заданих зображень знайдіть оригінали і побудуйте їхні графіки:

$$1) F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3};$$

$$2) F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3}.$$

3. Розв'яжіть диференціальні рівняння при заданих початкових умовах.

$$1) y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1;$$

$$2) y' + y = e^t, \quad y(0) = 0;$$

$$3) x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0;$$

$$4) y'' - 2y' - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = y'(0) = 0;$$

$$5) y'' + y' - 2y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4. Розв'яжіть задачу Коші  $x'' + x = f(t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ , якщо функція  $f(t)$  задана графічно (рис. 4.14 — 4.15).

1)

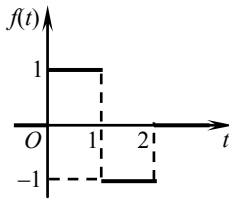


Рис. 4.14

2)

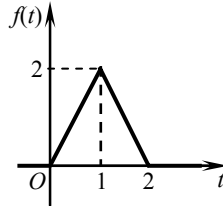


Рис. 4.15

5. За допомогою формули Дюамеля розв'яжіть диференціальні рівняння з нульовими початковими умовами.

$$1) x'' = \frac{1}{1+t^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$2) x'' = \arctg t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$3) x'' = t \ln^2 t, \quad x(0) = x'(0) = 0;$$

$$4) x'' - x' = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$



6. Знайдіть розв'язки диференціальних рівнянь при нульових початкових умовах.

$$\begin{aligned}
 1) \quad x' + x &= f(t), & \text{якщо } f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{для } t \geq 2; \end{cases} \\
 2) \quad x'' + x &= f(t), & \text{якщо } f(t) &= \begin{cases} \cos t & \text{для } 0 \leq t < \pi, \\ 0 & \text{для } t \geq \pi; \end{cases} \\
 3) \quad x'' - x' &= f(t), & \text{якщо } f(t) &= \begin{cases} e^{-t} & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ 0 & \text{для } t \geq 1; \end{cases} \\
 4) \quad x' - 2x &= f(t), & \text{якщо } f(t) &= \begin{cases} \operatorname{sh}(3t-6) & \text{для } t \geq 2, \\ 0 & \text{для } t < 2; \end{cases} \\
 5) \quad x'' + x &= f(t), & \text{якщо } f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \leq t < 1, \\ -1 & \text{для } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{для } t \geq 2. \end{cases}
 \end{aligned}$$

7. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь при заданих початкових умовах.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \begin{cases} x' + y = 0, \\ x + y' = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1; & \quad 2) \quad \begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1. \\
 3) \quad \begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1; & \quad 4) \quad \begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.
 \end{aligned}$$

### Відповіді

$$\begin{aligned}
 1. \quad 1) \quad & \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t; \quad 2) \quad \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}); \quad 3) \quad -\frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}; \\
 4) \quad & 1 - e^{-t} - te^{-t}; \quad 5) \quad \frac{1}{2}e^t \sin(2t-2) + \cos(3t-6); \quad 6) \quad e^{-2t} \sin t; \quad 7) \quad \frac{e^t + e^{3t}(17 \sin t + \cos t)}{5}; \\
 8) \quad & \frac{\sin 2t - 2t \cos 2t}{16}. \quad 2. \quad 1) \quad (t-1)^2 \eta(t-1); \quad 2) \quad e^{-3(t-3)} \eta(t-3). \quad 3. \quad 1) \quad \frac{1}{4}te^{3t} - \frac{1}{16}e^{3t} + \frac{1}{16}e^{-t}; \\
 2) \quad & \operatorname{sh} t; \quad 3) \quad e^{2t}; \quad 4) \quad \operatorname{sh} t; \quad 5) \quad 0; \quad 6) \quad \frac{1}{3}te^t - \frac{7}{9}e^t - \frac{2}{9}e^{-2t}; \quad 7) \quad (t+1)e^{-t}; \quad 8) \quad -1; \quad 9) \quad \frac{1}{5}(e^{-2t} - \\
 & -\cos t + 2 \sin t); \quad 10) \quad t + \frac{1}{2}t^2; \quad 11) \quad 2e^t + \frac{3}{5}e^{2t} - \frac{8}{5}e^t \left( \cos \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} \right). \quad 4. \quad 1) \quad 2 \left( \sin^2 \frac{t}{2} \eta(t) - \right. \\
 & \left. - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} \eta(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} \eta(t-2) \right); \quad 2) \quad \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \eta(t) - \left( (t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1) \right) \eta(t-1) + \\
 & + \frac{1}{2} \left( (t-2) - \frac{1}{2} \sin 2(t-2) \right) \eta(t-2). \quad 5. \quad 1) \quad t \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2); \quad 2) \quad \frac{1}{2}(t^2-1) \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2} \ln(1+t^2) + \frac{t}{2};
 \end{aligned}$$

3)  $\frac{t^3}{6} \left( \ln^2 t - \frac{5}{8} \ln t + \frac{19}{18} \right)$ ; 4)  $e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) \ln(e^t + 1)$ . 6. 1)  $1 - e^{-t} - \eta(t-2)(1 - e^{-(t-2)})$ ;  
 2)  $\frac{t}{2} \sin t + \frac{1}{2} \eta(t-\pi)(t-\pi) \sin(t-\pi)$ ; 3)  $\operatorname{ch} t - 1 - \frac{1}{e} \eta(t-1)(\operatorname{ch}(t-1) - 1)$ ; 4)  $\left( \frac{1}{2} e^{3(t-2)} + \frac{1}{10} e^{-3(t-2)} - \frac{3}{5} e^{2(t-2)} \right) \eta(t-2)$ ; 5)  $2 \left( \sin^2 \frac{t}{2} - 2\eta(t-1) \sin^2 \frac{t-1}{2} + \eta(t-2) \sin^2 \frac{t-2}{2} \right)$ ; 6)  $\left( \frac{t-T}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2(t-T)}}{4} \right) \times$   
 $\times \eta(t-T) - \left( \frac{t-(T+\tau)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{e^{-2(t-(T+\tau))}}{4} \right) \eta(t-(T+\tau))$ . 7. 1)  $x = e^t, y = -e^t$ ; 2)  $x = e^t (\cos t - 2 \sin t)$ ,  
 $y = e^t (\cos t + 3 \sin t)$ ; 3)  $x = y = e^t$ ; 4)  $x = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3e^{at}}{a^2-4}, y = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} +$   
 $+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+1)e^{at}}{a^2-4}$ .

## Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

**2.1.** Знайдіть оригінали, що відповідають заданим зображенням.

2.1.1. а)  $F(p) = \frac{pe^{-p}}{p^2 + 4p + 20}$ ; б)  $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 1)}$ .

2.1.2. а)  $F(p) = \frac{e^{-3p}(p+3)}{p^2 + 4p + 8}$ ; б)  $F(p) = \frac{2p+3}{p^3 + 4p^2 + 5p}$ .

2.1.3. а)  $F(p) = \frac{e^{-4p}}{p^2 - 6p + 10}$ ; б)  $F(p) = \frac{2p-1}{(p-2)^2(p+4)}$ .

2.1.4. а)  $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 2p + 5}$ ; б)  $F(p) = \frac{2p-3}{(p+2)(p^2+p)}$ .

2.1.5. а)  $F(p) = \frac{e^{-6p}p}{p^2 + 8p + 17}$ ; б)  $F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-2)^2}$ .

2.1.6. а)  $F(p) = \frac{e^{-p}(p-1)}{p^2 - 4p + 5}$ ; б)  $F(p) = \frac{p-1}{(p+2)^3(p+1)}$ .

2.1.7. а)  $F(p) = \frac{e^{-p}(2p+1)}{p^2 + 6p + 5}$ ; б)  $F(p) = \frac{p-1}{(p-2)^2(2p+1)}$ .

2.1.8. a) $F(p) = \frac{e^{-2p}(p+4)}{p^2 - 4p + 3};$	б) $F(p) = \frac{1}{(p+1)(p^2 + 4)}.$
2.1.9. a) $F(p) = \frac{e^{-3p}p}{p^2 - p - 2};$	б) $F(p) = \frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}.$
2.1.10. a) $F(p) = \frac{e^{-p}(2p-1)}{p^2 + p - 2};$	б) $F(p) = \frac{1}{p^4 + 4p^2}.$
2.1.11. a) $F(p) = \frac{e^{-4p}p}{p^2 - 8p + 20};$	б) $F(p) = \frac{p}{(p-2)(p^2 + 9)}.$
2.1.12. a) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 4p - 5};$	б) $F(p) = \frac{1}{p^3(p+1)}.$
2.1.13. a) $F(p) = \frac{e^{-3p}(4p-3)}{p^2 - 6p + 13};$	б) $F(p) = \frac{p+2}{(p-1)(p^2 + 16)}.$
2.1.14. a) $F(p) = \frac{e^{-p}(p+1)}{p^2 + 4p + 8};$	б) $F(p) = \frac{1}{p^2(p+1)^2}.$
2.1.15. a) $F(p) = \frac{e^{-p}(2p-3)}{p^2 - 2p + 10};$	б) $F(p) = \frac{1}{(p+2)^2(p-1)^2}.$
2.1.16. a) $F(p) = \frac{e^{-4p}(p-2)}{p^2 + 2p + 17};$	б) $F(p) = \frac{1}{p^4 - 16}.$
2.1.17. a) $F(p) = \frac{e^{-2p}p}{p^2 - 4p + 40};$	б) $F(p) = \frac{p}{(p+1)^2(p+3)}.$
2.1.18. a) $F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2 - 4p - 5};$	б) $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)(p+1)}.$
2.1.19. a) $F(p) = \frac{e^{-3p}(p+1)}{p^2 - 6p + 25};$	б) $F(p) = \frac{2p-1}{(p^2 + 8)(p-2)}.$
2.1.20. a) $F(p) = \frac{e^{-p}p}{p^2 - 2p + 26};$	б) $F(p) = \frac{p}{(p-3)(p^2 + 4)}.$
2.1.21. a) $F(p) = \frac{e^{-p}(2p-5)}{p^2 - 4p + 8};$	б) $F(p) = \frac{1}{p^4 - 1}.$

$$2.1.22. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-2p}(p+3)}{p^2 + 4p + 20};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p}{(p+2)(p^2 + 9)}.$$

$$2.1.23. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-3p}(2p-1)}{p^2 - 8p + 25};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p^2 + 2p - 1}{p^3 - 2p^2 + 2p - 1}.$$

$$2.1.24. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-5p}(p-3)}{p^2 - p - 2};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p^2 + 3p + 1}{p(p+2)(p+3)}.$$

$$2.1.25. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-p}(p+2)}{p^2 - 3p - 4};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2 + 2p + 5)}.$$

$$2.1.26. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-p}p}{p^2 - 10p + 26};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p+3}{(p+1)(p^2 + 4p + 5)}.$$

$$2.1.27. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-2p}(2p+3)}{p^2 + 4p - 5};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p}{(p^2 - 4)(p^2 + 9)}.$$

$$2.1.28. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-4p}(p-5)}{p^2 - 2p + 37};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p}{(p^2 - 16)(p^2 + 25)}.$$

$$2.1.29. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-2p}(3p-1)}{p^2 - p - 2};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p^2 + 1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

$$2.1.30. \text{ a) } F(p) = \frac{e^{-3p}(p+1)}{p^2 - 5p + 6};$$

$$\text{б) } F(p) = \frac{p+1}{(p+3)(p^2 + 2p + 5)}.$$

2.2. Розв'яжіть диференціальні рівняння при заданих початкових умовах.

$$2.2.1. \quad x'' + 2x' + 10x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$2.2.2. \quad x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$2.2.3. \quad x'' + 2x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

$$2.2.4. \quad x'' + 3x' = e^{-3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

$$2.2.5. \quad x'' - 2x' + 2x = \sin t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

$$2.2.6. \quad x'' + 4x = \sin 2t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -2.$$

$$2.2.7. \quad x'' - 9x = \operatorname{sh} t, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 3.$$

$$2.2.8. \quad x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

- 2.2.9.  $x'' - 2x' + 2x = 1$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.10.  $x'' + x' = \cos t$ ,  $x(0) = 2$ ,  $x'(0) = 0$ .
- 2.2.11.  $x'' + 5x' = e^{-2t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 2$ .
- 2.2.12.  $x'' - 4x' + 5x = 3 + 2t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.13.  $x'' + 2x' + 5x = 3$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
- 2.2.14.  $x'' + 4x = t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
- 2.2.15.  $x'' - 2x' + 5x = 1 - t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.16.  $x'' - x' = t e^t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$ .
- 2.2.17.  $x'' + 2x' + x = t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.18.  $x'' - x' - 2x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
- 2.2.19.  $x'' - 2x' + x = t - \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.20.  $x'' + 2x' + x = 1 + \cos 2t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.21.  $x'' + x = t e^t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.22.  $x'' + 4x = 2$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.23.  $x'' + x = 2 - 2 \cos 2t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = -1$ .
- 2.2.24.  $x'' - x' = t^2$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
- 2.2.25.  $x'' + x' = t \cos 2t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.26.  $x'' - 2x' - 3x = t$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 1$ .
- 2.2.27.  $x'' - 4x = \sin t$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x'(0) = 0$ .
- 2.2.28.  $x'' + 2x' - 3x = t + 2$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.29.  $x'' + 4x = t \sin t$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .
- 2.2.30.  $x'' + x = t^2$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

2.3. Операційним методом розв'яжіть систему диференціальних рівнянь.

$$2.3.1. \begin{cases} x' = x + 3y + 2, \\ y' = x - y + 1, \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

$$2.3.2. \begin{cases} x' = -x + 3y + 1, \\ y' = x + y; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2.$$

$$2.3.3. \begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$

$$2.3.4. \begin{cases} x' = x + 2y + 1, \\ y' = 4x - y; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.5. \begin{cases} x' = 2x + 5y, \\ y' = x - 2y + 2; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.6. \begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$2.3.7. \begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -5x - 3y + 2; \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$2.3.8. \begin{cases} x' = -3x - 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$2.3.9. \begin{cases} x' = -2x + 6y + 1, \\ y' = 2x + 2; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.10. \begin{cases} x' = 2x + 3y + 1, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

$$2.3.11. \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 5.$$

$$2.3.12. \begin{cases} x' = 2x - 2y, \\ y' = -4x; \end{cases} \quad x(0) = 3, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.13. \begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = \frac{5}{2}x - y + 2; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.14. \begin{cases} x' = 2y + 1, \\ y' = 2x + 3; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$$

- 2.3.15.  $\begin{cases} x' = 2x + 8y + 1, \\ y' = 3x + 4y; \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.16.  $\begin{cases} x' = 2x + 2y + 2, \\ y' = 4y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.17.  $\begin{cases} x' = -x - 2y + 1, \\ y' = -\frac{3}{2}x + y; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
- 2.3.18.  $\begin{cases} x' = 3x + 5y + 2, \\ y' = 3x + y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 2.$
- 2.3.19.  $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = 4x + y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
- 2.3.20.  $\begin{cases} x' = x - 2y + 1, \\ y' = -3x; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.21.  $\begin{cases} x' = 3y + 2, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.22.  $\begin{cases} x' = x + 4y + 1, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.23.  $\begin{cases} x' = 2y, \\ y' = 2x + 3y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 1.$
- 2.3.24.  $\begin{cases} x' = -2x + y + 2, \\ y' = 3x; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$
- 2.3.25.  $\begin{cases} x' = 4x + 3, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0.$
- 2.3.26.  $\begin{cases} x' = y + 3, \\ y' = x + 2; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$

$$2.3.27. \begin{cases} x' = x + 3y + 3, \\ y' = x - y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.28. \begin{cases} x' = -x + 3y + 2, \\ y' = x + y + 1; \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

$$2.3.29. \begin{cases} x' = 3y, \\ y' = 3x + 1; \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

$$2.3.30. \begin{cases} x' = x + 3y, \\ y' = x - y; \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0.$$



**Загальна характеристика модуля.** Розглядаються наближені методи розв'язання рівнянь, обчислення визначених інтегралів, наближення функцій многочленами, інтерполювання сплайнами, обробки експериментальних даних методом найменших квадратів.

### Структура модуля

- Тема 1. Наближені методи розв'язання рівнянь.
- Тема 2. Наближене обчислення визначених інтегралів.
- Тема 3. Інтерполювання функцій. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- Тема 4. Інтерполювання сплайнами.
- Тема 5. Метод найменших квадратів.
- Тема 6. Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь.

**Базисні поняття.** 1. Проміжок ізоляції кореня. 2. Квадратурна формула. 3. Інтерполяція. 3. Сплайн. 4. Наближення. 5. Похибка.

**Основні задачі.** 1. Відшукування наближеного розв'язку нелінійного рівняння. 2. Обчислення визначених інтегралів за допомогою квадратурних формул. 3. Побудова інтерполяційного многочлена Лагранжа. 4. Побудова лінійного та кубічного сплайнів. 5. Апроксимація експериментальних даних лінійною та квадратичною функціями. 6. Інтегрування диференціального рівняння першого порядку з початковою умовою методом Ейлера та методом Рунге—Кутта.

### ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

#### 1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

- 1.1. Нелінійне рівняння. Найпростіші методи відокремлення коренів.
- 1.2. Методи половинного поділу, хорд, дотичних.
- 1.3. Геометричний зміст визначеного інтеграла.
- 1.4. Постановка задачі інтерполяції. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- 1.5. Сплайн.
- 1.6. Метод найменших квадратів (постановка задачі).
- 1.7. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку.

## 2. Знання на рівні доведень та виведень

- 2.1. Методи спроб, хорд, Ньютона.
- 2.2. Формули прямокутників, трапецій, Сімпсона.
- 2.3. Інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- 2.4. Формули чисельного інтегрування методом Ейлера.
- 2.5. Підбір параметрів методом найменших квадратів на прикладі припущення лінійної залежності.

## 3. Уміння в розв'язанні задач

- 3.1. Знаходити проміжки ізоляції коренів рівняння.
- 3.2. Проводити уточнення кореня й оцінювати похибку.
- 3.3. Обчислювати наближено визначені інтеграли за допомогою квадратних формул.
- 3.4. Будувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.
- 3.5. Підбирати функціональну залежність двох змінних за відомими табличними даними.
- 3.6. Знаходити наближені розв'язки задачі Коші за методами Ейлера та Рунге—Кутта.

### Тема 1. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ

Постановка задачі. Метод спроб (половинного поділу або дихотомії). Методи хорд та дотичних (Ньютона). Комбінований метод.



**Література:** [6], [10, розділ 6, с. 121—133], [11], [14, розділ 8, §4], [18, розділ 6, с. 265—296].

## T.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 1.1. Постановка задачі

Нехай треба розв'язати рівняння

$$f(x) = 0, \quad (5.1)$$

де  $x$  — дійсна змінна.

Рівняння (5.1) може бути як алгебраїчним, так і трансцендентним. У деяких випадках можна знайти точні розв'язки цього рівняння. Наприклад, корені квадратного рівняння можна визначити за відомими формулами. Взагалі будь-яке алгебраїчне рівняння степеня не вище четвертого є розв'яз-

ним у радикалах, тобто корені такого рівняння можна виразити за певними формулами, використовуючи скінченне число дій додавання, віднімання, множення, ділення і добування кореня з коефіцієнтами рівняння. Проте часто постає задача відшукування наближених коренів рівняння (5.1).

Рівняння (5.1) може мати:

- а) порожню множину розв'язків;
- б) скінченну кількість коренів;
- в) нескінченну кількість коренів (наприклад, якщо (5.1) є тригонометричне рівняння).

Відшукування одного кореня проводять у два етапи:

1) спочатку знаходять проміжок ізоляції кореня, тобто визначають відрізок, на якому міститься один корінь (такий процес називають *відокремленням коренів*);

2) корінь уточнюють до наперед заданої точності.

Найпростіший метод відокремлення коренів пов'язаний з побудовою графіків функцій. Геометрично розв'язки рівняння (5.1) — це абсциси точок перетину графіка функції  $y = f(x)$  з віссю  $Ox$ . Якщо ця функція неперервна і на кінцях відрізка  $[a; b]$  набуває значень протилежних знаків, тобто  $f(a)f(b) < 0$ , то існує принаймні одна точка  $x \in (a; b)$ , яка є коренем рівняння (1.1) (рис. 5.1, а, б). Насправді при відсутності інших додаткових умов на заданому відрізку рівняння може мати більше, ніж один корінь, точніше непарну кількість коренів (рис. 5.1, в). На практиці часто доцільно записати функцію  $f(x)$  у вигляді різниці двох функцій:

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

тоді рівняння (5.1) рівносильне рівнянню

$$f_1(x) = f_2(x).$$

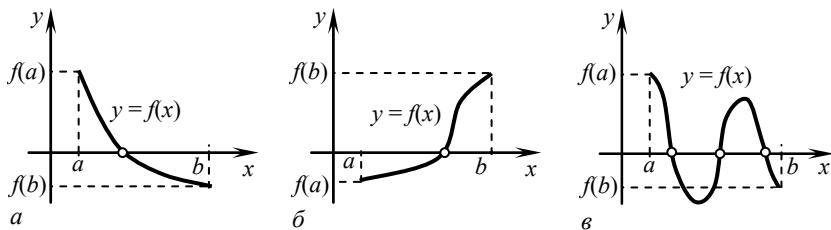


Рис. 5.1

Побудувавши графіки функцій  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$ , оцінюють значення коренів заданого рівняння як абсциси точок перетину графіків функцій. Звичайно намагаються зробити так, щоб графіки функцій  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  були якомога простішими.

Нехай, наприклад, треба відокремити корені рівняння

$$x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$x^3 - 1 = x^2 - 4x.$$

Тоді  $f_1(x) = x^3 - 1$ ,  $f_2(x) = x^2 - 4x$ . Побудувавши графіки цих функцій (рис. 5.2), дійдемо висновку, що рівняння має лише один корінь, причому цей корінь належить проміжку  $(0; 1)$ .

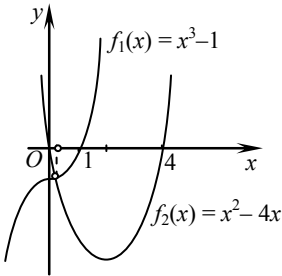


Рис. 5.2

Очевидно, якщо позначити  $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 1$ , то з нерівностей  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 3 > 0$  випливає, що на проміжку  $[0; 1]$  задане рівняння має корінь. Проте такий підхід не дає відповіді на питання, скільки коренів має задане рівняння взагалі і на відрізку  $[0; 1]$  зокрема.

Виникає питання, за яких умов на проміжку  $[a; b]$  рівняння  $f(x) = 0$  має лише один корінь. Сформулюємо *достатні умови*, за яких рівняння має на заданому проміжку один корінь.

**Теорема**

Нехай функція  $f(x)$  є двічі диференційовною і визначено відрізок  $[a; b]$ , на якому виконуються умови:

- 1)  $f(x)$  неперервна;
- 2)  $f(a)f(b) < 0$ ;
- 3) похідні  $f'(x)$  та  $f''(x)$  зберігають свої знаки.

Тоді рівняння  $f(x) = 0$  має на  $[a; b]$  лише один корінь. Іншими словами, графік функції  $y = f(x)$ , де  $x \in [a; b]$ , перетинає вісь  $Ox$  тільки один раз.

Справді, з умови 2) випливає, що графік функції на відрізку  $[a; b]$  перетинає вісь абсцис не менше одного разу, а з умови 3) випливає, що на відрізку  $[a; b]$  функція монотонна і зберігає опуклість (або вгнутість), що гарантує лише одну точку перетину графіка функції з віссю  $Ox$  (рис. 5.3).

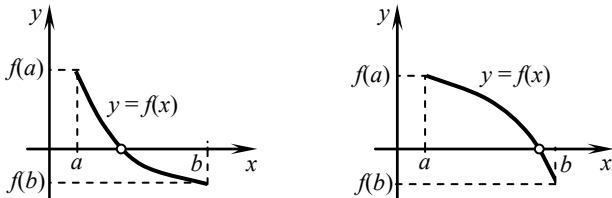


Рис. 5.3

Розглянемо деякі методи розв'язання рівняння (5.1).

## 1.2. Метод спроб

Нехай рівняння  $f(x) = 0$  на проміжку ізоляції  $[a; b]$  має один корінь. Звичайно вимагатимемо неперервність функції  $f(x)$  на цьому проміжку. Уточнення шуканого кореня можна проводити за таким алгоритмом. Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  навпіл точкою  $x_1 = \frac{a+b}{2}$  і обчислимо  $f(x_1)$ .

Можливі три варіанти:

- 1) якщо  $f(x_1) = 0$ , то  $x_1$  буде коренем заданого рівняння;
- 2) знак  $f(x_1)$  протилежний значенню  $f(a)$ ;
- 3) знак  $f(x_1)$  протилежний значенню  $f(b)$ .

Якщо  $f(x_1) \neq 0$ , то робимо вибір, яку з двох частин відрізка  $[a; b]$  ( $[a; x_1]$  або  $[x_1; b]$ ) взяти для подальшого уточнення кореня (рис. 5.4). Оскільки  $f(x)$  неперервна на  $[a; b]$ , то корінь буде міститися в тій половині відрізка, на кінцях якого  $f(x)$  має різні знаки. Тобто один із відрізків  $[a; x_1]$  або  $[x_1; b]$  матиме ті самі властивості, що й відрізок  $[a; b]$ . Отже, на наступному кроці буде розглядатися вже не відрізок  $[a; b]$ , а відрізок  $[a; x_1]$  або  $[x_1; b]$ , довжина якого вдвічі менша за відрізок  $[a; b]$ , після чого ділимо обраний відрізок навпіл і таким чином процес продовжуємо доти, доки довжина відрізка, на кінцях якого функція набуває значень протилежних знаків, не стане меншою від заданої точності.

Наприклад, якщо  $f(x)$  така, як на рис. 5.4, то уточнення кореня відбувається у такій послідовності:

1)  $x_1 = \frac{a+b}{2}$ , оскільки  $f(x_1) > 0$ , а  $f(b) < 0$ , тобто  $f(x_1)f(b) < 0$ , то обираємо для уточнення відрізок  $[x_1; b]$ ;

2)  $x_2 = \frac{x_1+b}{2}$ , оскільки  $f(x_2) < 0$ , а  $f(x_1) > 0$ , тобто  $f(x_1)f(x_2) < 0$ , то обираємо для уточнення відрізок  $[x_1; x_2]$ ;

3)  $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ , оскільки  $f(x_3)f(x_2) < 0$ , то обираємо для уточнення відрізок  $[x_3; x_2]$  і т. д.

Умовою зупинки ітераційного процесу є виконання нерівності  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  — задана точність,  $x_n$  та  $x_{n+1}$  — наближені корені рівняння.

Викладений метод відшукування кореня називають ще *методом дихотомії* (половинного поділу).

Головні переваги методу — простота і надійність. Послідовність  $\{x_k\}$  збігається до кореня  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  для будь-яких неперервних функцій  $f(x)$ . До недоліків відносяться:

1) невисока швидкість збігу методу (за одну ітерацію точність збільшується приблизно удвічі);

2) метод не узагальнюється на системи рівнянь.

Враховуючи недоліки методу спроб, на практиці частіше використовують швидкісні методи, зокрема методи хорд та дотичних (Ньютона).

### 1.3. Метод хорд

Нехай на відрізку  $[a; b]$  рівняння  $f(x) = 0$  має тільки один корінь, крім цього виконуються умови:

1)  $f(a) < 0, f(b) > 0$ ;

2)  $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ , тобто функція  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  монотонно зростаюча і вгнута (рис. 5.5).

Вкажемо алгоритм уточнення кореня  $x^*$  рівняння  $f(x) = 0$  на проміжку ізоляції  $[a; b]$ .

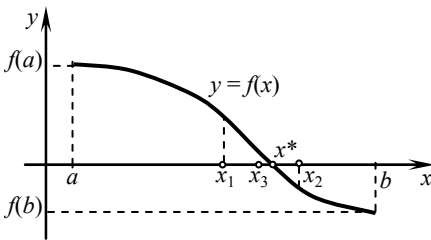


Рис. 5.4

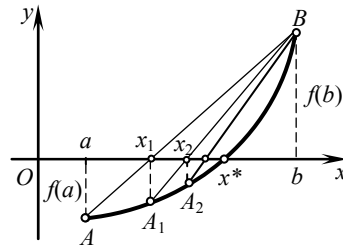


Рис. 5.5

Сполучимо точки  $A$  і  $B$  відрізком. Позначимо через  $x_1$  точку перетину хорди  $AB$  з віссю  $Ox$ , після цього обчислимо значення  $f(x_1)$  (за даних умов  $f(x_1) \leq 0$ ). Якщо  $f(x_1) = 0$ , то  $x_1$  — корінь рівняння і задача розв'язана. Якщо  $f(x_1) < 0$ , то проведемо хорду  $A_1B$ . Точку перетину цієї хорди з віссю  $Ox$  позначимо через  $x_2$ . Продовжуючи цей процес, дістанемо послідовність чисел  $\{a, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , яка прямує до кореня  $x^*$ . Процес зупиняють, якщо виконується нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon.$$

Запишемо аналітичні вирази для відшукування членів послідовності  $\{x_n\}$ . Нагадаємо рівняння прямої, яка проходить через дві точки  $(x_1, y_1)$  та  $(x_2, y_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Рівняння прямої  $AB$ :

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Поклавши  $y=0$ ,  $x=x_1$ , знайдемо абсцису точки перетину хорди  $AB$  з віссю абсцис:

$$\frac{x_1-a}{b-a} = \frac{-f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1 = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a). \quad (5.2)$$

Щоб визначити точку  $x_2$ , замінімо у формулі (5.2)  $x_1$  на  $x_2$ , а  $a$  на  $x_1$ , дістанемо

$$x_2 = x_1 - \frac{b-x_1}{f(b)-f(x_1)} f(x_1).$$

Продовжуючи цей процес, дістанемо формулу

$$x_n = x_{n-1} - \frac{b-x_{n-1}}{f(b)-f(x_{n-1})} f(x_{n-1}). \quad (5.3)$$

Це є розрахункова формула методу хорд.

Формула (5.3) застосовна також і для випадку, коли на відрізку ізоляції  $[a; b]$  виконуються нерівності  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$  (рис. 5.6).

Якщо на відрізку  $[a; b]$  виконуються нерівності  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$  або  $f(a) > 0$ ,  $f(b) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$  (графічні образи цих випадків розгляньте самостійно), то корінь можна уточнити за формулою

$$x_n = x_{n-1} - \frac{a-x_{n-1}}{f(a)-f(x_{n-1})} f(x_{n-1}). \quad (5.3')$$

Тут  $n=1, 2, \dots$ ,  $x_0 = b$ .

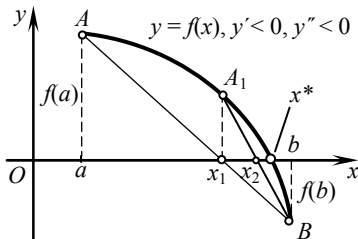


Рис. 5.6

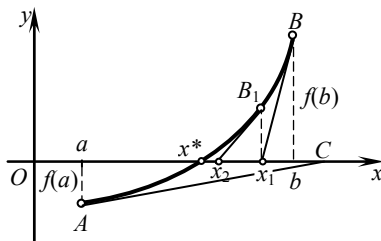


Рис. 5.7

#### 1.4. Метод Ньютона, або метод дотичних

Проведемо дотичну до графіка функції  $y = f(x)$  в тій із точок  $A$  чи  $B$ , в якій виконується умова  $f(x)f''(x) > 0$ , тобто знак функції збігається із знаком її другої похідної. На рис. 5.7  $f(b) > 0$  і  $f''(b) < 0$  (функція вгнута), тому дотичну проводимо через точку  $B$  (дотична проведена у точці  $A$  може перетнути вісь абсцис поза відрізком ізоляції  $[a; b]$ ). Знайдемо точку  $x_1$  перетину дотичної з віссю абсцис.

Рівняння дотичної до кривої у точці  $B$  має вигляд

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Поклавши  $y = 0$ ,  $x = x_1$ , дістанемо

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Тепер обчислимо значення  $f(x_1)$  і проведемо дотичну до кривої через точку  $B_1(x_1, f(x_1))$ , після цього знайдемо точку  $x_2$  перетину цієї дотичної з віссю абсцис:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Продовжуючи процес, дістанемо формулу

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}}. \quad (5.4)$$

Нехай  $x^*$  — корінь рівняння (5.1). Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*.$$

Модуль різниці між наближеним коренем  $x_n$  і точним коренем  $x^*$  задовольняє нерівність

$$|x_n - x^*| < \frac{f(x_n)}{\min_{x \in [a; b]} f'(x)}. \quad (5.5)$$

Даний метод володіє значною швидкістю збіжності. Зазвичай трьох — п'яти ітерацій достатньо для одержання високої точності.



Критерій зупинки ітераційного процесу:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  — задана точність. Проте виконання такої нерівності ще не гарантує того, що корінь визначено із заданою точністю  $\varepsilon$ .

### 1.5. Комбінований метод

Метод хорд і метод Ньютона часто застосовують до проміжку ізоляції кореня разом. Нехай на відріжку  $[a; b]$  виконуються умови:

1)  $f(a) < 0, f(b) > 0$ ;

2) функція вгнута (рис. 5.5 або 5.7).

Оскільки здобує методом хорд наближене значення кореня відхиляється від точного значення кореня у напрямку угнутості, а за методом Ньютона — у протилежному напрямку, то шуканий корінь  $x^*$  розміщений між  $x_n$  та  $\tilde{x}_n$  (тут  $x_n$  — наближення кореня за методом хорд, а  $\tilde{x}_n$  — за методом Ньютона). Тому, якщо  $|\tilde{x}_n - x_n| < \varepsilon$ , то процес уточнення кореня припиняють і беруть  $x^* = \frac{\tilde{x}_n + x_n}{2}$ .

## Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть дійсний корінь рівняння  $\ln x + x - 3 = 0$  з точністю до 0,005, використовуючи метод спроб.

*Розв'язання.* Запишемо рівняння у вигляді

$$\ln x = 3 - x.$$

Побудувавши графіки функцій  $y = 3 - x$  та  $y = \ln x$ , дійдемо висновку, що задане рівняння має один-єдиний корінь  $x = x^*$ , який належить проміжку  $(1; 3)$  (рис. 5.8). Позначимо  $f(x) = \ln x + x - 3$  і обчислимо, наприклад, значення функції  $f(x)$  у точках  $x = 2$  та  $x = 2,5$ . Дістанемо

$$f(2) = -0,3068528 < 0, f(2,5) = 0,4162907 > 0.$$

Отже, корінь заданого рівняння належить проміжку ізоляції  $[2; 2,5]$ .

Застосуємо метод половинного поділу. Розділивши відрізок  $[2; 2,5]$  навпіл, дістанемо точку  $x_1 = \frac{2+2,5}{2} = 2,25$ . Обчислимо значення  $f(x_1) =$

$= f(2,25) = 0,0609 > 0$ . Отже, шуканий корінь належить проміжку  $[2; 2,25]$ .

Візьмемо  $x_2 = \frac{2+2,25}{2} = 2,125$ ,  $f(x_2) = f(2,125) = -0,1212 < 0$ .

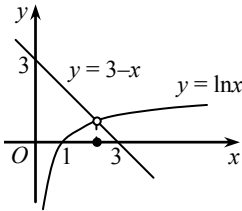


Рис. 5.8

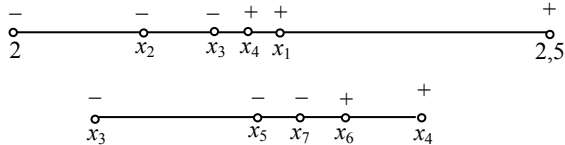


Рис. 5.9

Далі розглядаємо проміжок  $[2,125; 2,25]$ , на кінцях якого функція набуває протилежних знаків. Продовжимо процес доти, доки відстань між сусідніми наближеними коренями не стане меншою, ніж  $0,005$  (див. рис. 5.9 і табл 5.1).

2. Знайдіть дійсний корінь рівняння  $\ln x + x - 3 = 0$ , комбінуючи методи хорд і дотичних.

Знайдемо похідні функції  $f(x) = \ln x + x - 3$ :

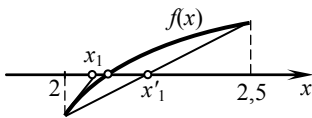


Рис. 5.10

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

На проміжку ізоляції  $[2; 2,5]$  функція  $f(x)$  монотонно зростаюча й опукла (рис. 5.10), отже, застосовні обидва методи.

Таблиця 5.1

Обрана точка	$f(x_i)$	Відстань між сусідніми точками
$x_1 = 2,25$	0,0609302	0,25
$x_2 = 2,125$	-0,1212282	0,125
$x_3 = 2,1875$	-0,08125	0,0625
$x_4 = 2,2187$	0,015	0,0312
$x_5 = 2,2031$	-0,007	0,0156
$x_6 = 2,2109$	0,004354	0,0078
$x_7 = 2,207$	-0,00132	0,0039

Оскільки  $f(2)$  і  $f''(2)$  одночасно від'ємні, то за початкове наближення можемо взяти точку  $x_0 = 2$ . У цій точці  $f(2) = -0,3068528$ ,  $f'(2) = 1,5$ . За формулою (5.4) обчислимо

$$x_1 = 2 - \frac{-3068528}{1,5} = 2,2045685.$$

Застосуємо ще раз формулу (5.4):

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2,2045685 - \frac{f(2,2045685)}{1 + \frac{1}{2,2045685}} = 2,207939.$$

Застосуємо тепер двічі метод хорд. Взявши за початкове наближення  $x_0 = 2,5$  і використовуючи формулу (5.3'), дістанемо

$$x'_1 = 2,5 - \frac{2 - 2,5}{f(2) - f(2,5)} f(2,5) = 2,21217,$$

$$x'_2 = x'_1 - \frac{2 - x'_1}{f(2) - f(x'_1)} f(x'_1) = 2,21217 - \frac{2 - 2,21217}{f(2) - f(2,21217)} f(2,21217) = 2,208.$$

Оскільки  $x'_2 - x_2 = 2,208 - 2,207939 = 0,00007$ , то корінь  $x^*$  обчислений із точністю до 0,00007:  $x^* \approx \frac{x_2 + x'_2}{2} = \frac{2,207939 + 2,208}{2} = 2,2079695$ .

Таблиця 5.2

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
<b>1</b>	$(x - 1)^2 - 2\sin x = 0$	<b>16</b>	$x^3 - 2x + 7 = 0$
<b>2</b>	$x^3 - 3x + 1 = 0$	<b>17</b>	$x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$
<b>3</b>	$e^x - 2(1 - x)^2 = 0$	<b>18</b>	$x^2 - \sin x - 2 = 0$
<b>4</b>	$x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = 0$	<b>19</b>	$\sqrt{x+1} + \sin x = 0$
<b>5</b>	$x^3 - x^2 + 3 = 0$	<b>20</b>	$x^2 - 2 - \ln x = 0$
<b>6</b>	$x^3 - 2x - 4 = 0$	<b>21</b>	$\sqrt{2-x} - \ln x = 0$
<b>7</b>	$x^3 + 2x - 5 = 0$	<b>22</b>	$\cos x - 2x + 1 = 0$
<b>8</b>	$x^3 - x^2 - 2 = 0$	<b>23</b>	$x^3 - \cos x = 0$
<b>9</b>	$x^3 + x - 32 = 0$	<b>24</b>	$\sqrt{x} - e^x = 0$
<b>10</b>	$x^2 - \cos x = 0$	<b>25</b>	$e^x + \ln x = 0$
<b>11</b>	$x^2 - 2 - e^x = 0$	<b>26</b>	$x^3 + \ln x = 0$

Варіант	Рівняння	Варіант	Рівняння
12	$x^2 - 1 - \sin x = 0$	27	$4 - x - 2^x = 0$
13	$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$	28	$e^{-x} - x - 2 = 0$
14	$x^3 + x^2 + 1 = 0$	29	$\sqrt{x} = \cos x$
15	$x^3 - x - 3 = 0$	30	$x^2 - 3 + \ln x = 0$



*Зауваження.* Насправді корінь  $x_2$ , одержаний методом дотичних, міститься значно ближче до точного кореня, ніж  $x_2'$ . Оцінимо різницю  $|x_2 - x^*|$  за формулою (5.5). На проміжку  $[2; 2,5]$  найменше значення похідної  $f'(x)$  досягається у точці  $x = 2,5$  і дорівнює 1,4. Оскільки  $|f(x_2)| = 1,2 \cdot 10^{-6}$ , то

$$|x_2 - x^*| < \frac{1,2 \cdot 10^{-6}}{1,4} < 10^{-6}.$$

### Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

- Знайдіть додатний корінь рівняння  $x^4 - 16x - 64 = 0$  з точністю до 0,01, використовуючи:
  - метод хорд; 2) метод Ньютона.
- Визначте більший корінь рівняння  $x^2 - 2x - 4 = 0$  з точністю до 0,001, використовуючи:
  - метод половинного поділу;
  - метод хорд;
  - метод дотичних.
- Визначте корінь рівняння  $x + \ln x = 0$  з точністю до 0,01, використовуючи метод половинного поділу.

### Відповіді

1. 3,29. 2. 3,236. 3. - 0,57.

### Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

- Визначте корені рівнянь (табл. 5.2) з точністю до 0,01, використовуючи:
  - метод половинного поділу;
  - метод хорд;
  - метод дотичних.

## Тема 2. НАБЛИЖЕНЕ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Постановка задачі чисельного інтегрування. Формули прямокутників. Формула трапецій. Формула парабол (Сімпсона). Абсолютні похибки квадратурних формул.



**Література:** [6], [10, розділ 5, с. 98—111], [11], [14, розділ 8, §6], [18, розділ 5, с. 232—262].

### Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 2.1. Постановка задачі

Припустимо треба обчислити визначений інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

де  $f(x)$  — неперервна на  $[a; b]$  функція.

Якщо можна знайти первісну  $F(x)$  від підінтегральної функції  $f(x)$ , то

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Проте часто на практиці зустрічаються випадки,

коли підінтегральну функцію  $f(x)$  не можна проінтегрувати аналітичним шляхом або коли аналітичне інтегрування вимагає великого обсягу роботи. У подібних випадках можна користуватися чисельними методами. Ці методи дають можливість обчислити визначений інтеграл за числовими значеннями підінтегральної функції в окремих точках відрізка  $[a; b]$ . Формули, за допомогою яких проводять чисельне інтегрування, дістали назву *квадратурних* формул. З них найпоширенішими і найзручнішими є формули прямокутників, трапецій та формула парабол (або Сімпсона).

Виведення цих формул ґрунтується на понятті визначеного інтеграла як границі інтегральної суми та геометричному змісті визначеного інтеграла:

якщо  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x)dx$  чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої кривою  $y = f(x)$  та прямими  $y = 0$ ,  $x = a$  та  $x = b$ .

При наближеному обчисленні визначеного інтеграла криву  $y = f(x)$  замінюють новою лінією, яка зазвичай складається з відрізків або дуг парабол, після цього площа криволінійної трапеції наближено дорівнює площі фігури, обмеженої зверху новою лінією. Розглянемо ці методи детальніше.

## 2.2. Формула прямокутників

Нехай треба обчислити визначений інтеграл  $\int_a^b f(x)dx$  від неперервної на відрізку  $[a; b]$  функції  $f(x)$ . Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на  $n$  рівних частин точками

$$x_k = a + \frac{b-a}{n}k, \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

після чого обчислимо значення функції у цих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1, \quad \dots, \quad f(x_n) = y_n.$$

Складемо суму

$$\begin{aligned} y_0 \cdot (x_1 - x_0) + y_1 \cdot (x_2 - x_1) + \dots + y_{n-1} \cdot (x_n - x_{n-1}) = \\ = \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \end{aligned}$$

Ця сума чисельно дорівнює площі ступінчастої фігури, зображеної на рис. 5.11, і наближено дорівнює площі криволінійної трапеції. Отже,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}). \quad (5.6)$$

Аналогічно, використовуючи рис. 5.12, запишемо ще одну наближену формулу

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n). \quad (5.7)$$

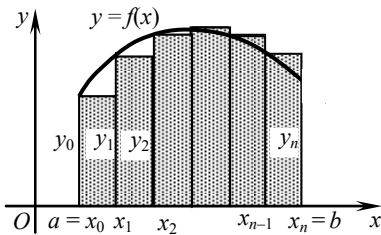


Рис. 5.11

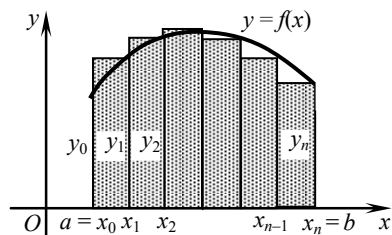


Рис. 5.12

Нарешті, якщо за висоти прямокутників взяти значення функції у серединах відрізків  $[x_{k-1}; x_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то дістанемо формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[ f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right) \right] = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right). \quad (5.8)$$

Формули (5.6) — (5.8) називаються *формулами прямокутників*.

### 2.3. Формула трапецій

Замінімо криву  $y = f(x)$  ламаною лінією, сполучивши послідовно точки  $(x_k, y_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ). Тоді площа криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ прямокутних трапецій, обмежених зверху ланками ламаної (рис. 5.13). Площа першої прямокутної трапеції дорівнює  $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_0+y_1}{2}$ , другої —  $\frac{b-a}{n} \cdot \frac{y_1+y_2}{2}$  і т. д. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (5.9)$$

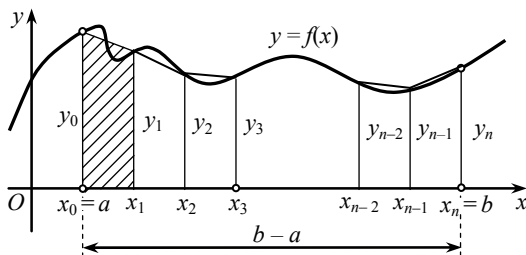


Рис. 5.13

Чим більшим буде число  $n$ , тим точніша, за інших рівних умов, формула (5.9).



*Зауваження.* Формулу трапецій можна дістати з формул (5.6) та (5.7), якщо взяти півсуму їх лівих і правих частин.

## 2.4. Формула парабол (Сімпсона)

Розіб'ємо відрізок  $[a; b]$  на парне число  $2n$  рівних частин. Площу криволінійної трапеції, що відповідає відрізку  $[x_0; x_2]$ , замінимо площею трапеції  $AM_0M_1M_2B$ , обмеженої зверху параболою  $y = px^2 + qx + r$ , що проходить через точки  $M_0(x_0; y_0)$ ,  $M_1(x_1; y_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2)$  (рис. 5.14).

Обчислимо площу трапеції  $AM_0M_1M_2B$ . Для зручності обчислень перенесемо вісь ординат вздовж осі  $Ox$  так, щоб вона проходила через точку  $M_1$  (рис. 5.15). Позначимо  $x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h = \frac{b-a}{2n}$  і знайдемо коефіцієнти параболу  $y = px^2 + qx + r$ , що проходить через точки  $M_0(-h; y_0)$ ,  $M_1(0; y_1)$ ,  $M_2(h; y_2)$ . Підставивши координати цих точок у рівняння параболу, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_0 = ph^2 - qh + r, \\ y_1 = r, \\ y_2 = ph^2 + qh + r, \end{cases}$$

розв'язок якої

$$p = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}, \quad q = \frac{y_2 - y_1}{2h}, \quad r = y_1.$$

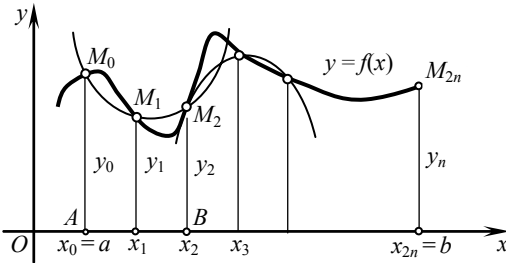


Рис. 5.14

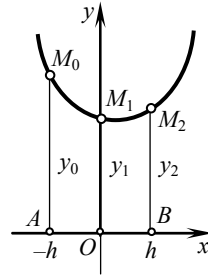


Рис. 5.15

Тепер обчислюємо площу трапеції  $AM_0M_1M_2B$ :

$$\begin{aligned} s_{12} &= \int_{-h}^h (px^2 + qx + r) dx = \left( \frac{p}{3} x^3 + \frac{q}{2} x^2 + rx \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2p}{3} h^3 + 2rh = \\ &= \frac{h}{3} (2ph^2 + 6r) = \frac{h}{3} (y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1) = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$



Аналогічно визначаємо площі параболічних трапецій, що відповідають відрізкам  $[x_2; x_4]$ ,  $[x_4; x_6]$ , ...,  $[x_{2n-2}; x_{2n}]$ :

$$s_{34} = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$s_{56} = \frac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6),$$

.....

$$s_{2n-1 \ 2n} = \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \approx s_{12} + s_{34} + s_{56} + \dots + s_{2n-1 \ 2n},$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}(y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})). \quad (5.10)$$

Формулу (5.10) називають *формулою Сімпсона*.

### 2.5. Абсолютні похибки для квадратурних формул

Різницю між лівою і правою частинами квадратурної формули називають її *залишковим членом* і позначають  $R_n(f)$ . Величина  $|R_n(f)|$  визначає абсолютну похибку квадратурної формули, яка залежить від числа  $n$  — кількості відрізків, на які розбивають відрізок інтегрування  $[a; b]$  (зі збільшенням  $n$  абсолютна похибка зменшується).

Оцінювання абсолютних похибок формул прямокутників, трапецій та парабол проводять за формулами, що вміщені у табл. 5.3. Використовуючи ці формули, можна визначити число  $n$  так, щоб обчислити заданий інтеграл із наперед заданою точністю.

Таблиця 5.3

№	Назва формули	Оцінка абсолютної похибки	$M_i$
1	прямокутників (5.6), (5.7)	$ R_n(f) _{\text{т} \ 1} \leq \frac{(b-a)^2 M_1}{2n}$	$M_1 = \max_{x \in [a; b]}  f'(x) $
2	прямокутників (5.8)	$ R_n(f) _{\text{т} \ 2} \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{24n^2}$	$M_2 = \max_{x \in [a; b]}  f''(x) $

№	Назва формули	Оцінка абсолютної похибки	$M_i$
3	трапецій	$ R_n(f) _{\infty} \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12n^2}$	$M_2 = \max_{x \in [a, b]}  f''(x) $
4	Сімпсона	$ R_{2n}(f) _{\infty} \leq \frac{(b-a)^5 M_3}{180 \cdot (2n)^4}$	$M_3 = \max_{x \in [a, b]}  f^{(4)}(x) $

## Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть інтеграл  $I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$ , використовуючи формули прямокутників, трапецій та Сімпсона. Оцініть похибку кожної формули.

*Розв'язання.* Розіб'ємо відрізок  $[0; 1]$  на 10 рівних частин точками  $x_0 = 0, x_1 = 0,1, x_2 = 0,2, \dots, x_{10} = 1$  і обчислимо значення підінтегральної функції  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  у цих точках (табл. 5.4)

Таблиця 5.4

№	$x_i$	$y_i$	№	$x_i$	$y_i$
<b>0</b>	0	1	<b>6</b>	0,6	1,1661903
<b>1</b>	0,1	1,0049875	<b>7</b>	0,7	1,2206555
<b>2</b>	0,2	1,0198039	<b>8</b>	0,8	1,2806248
<b>3</b>	0,3	1,0440306	<b>9</b>	0,9	1,3453624
<b>4</b>	0,4	1,0770329	<b>10</b>	1	1,4142135
<b>5</b>	0,5	1,1180339			

Обчислимо наближено заданий інтеграл за формулами (5.6) — (5.10).  
Маємо:

1) за формулою (5.6)

$$I \approx \frac{1}{10} (y_0 + y_1 + \dots + y_9) = 1,1276722;$$

2) за формулою (5.7)

$$I \approx \frac{1}{10} (y_1 + y_2 + \dots + y_{10}) = 1,1690936;$$

3) за формулою (5.8)

$$I \approx \frac{1}{10} (f(0,5) + f(1,5) + \dots + f(9,5)) = 1,1474988;$$

4) за формулою (5.9)

$$I \approx \frac{1}{20} (y_0 + y_{10} + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_9)) = 1,1483829.$$

5) за формулою (5.10)

$$I \approx \frac{1}{30} (y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)) = 1,1477932.$$

Оцінімо точність одержаних результатів. Знайдемо похідні

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{3(4x^2-1)}{\sqrt{(1+x^2)^7}}.$$

На відрізку  $[0; 1]$  виконуються нерівності

$$|f'(x)| \leq 1, \quad |f''(x)| \leq 1, \quad |f^{(4)}(x)| \leq 9.$$

Використовуючи формули з табл. 5.3, дістанемо такі оцінки:

$$|R_n(f)|_{\text{np1}} \leq \frac{(1-0)^2 \cdot 1}{2 \cdot 10} = 0,05; \quad |R_n(f)|_{\text{np2}} \leq \frac{1}{2400} < 0,00042;$$

$$|R_n(f)|_{\text{np}} \leq \frac{1}{1200} < 0,00084; \quad |R_{2n}(f)|_{\text{nap}} \leq \frac{9}{180 \cdot (10)^4} = 0,000005.$$

Порівнявши похибки, переконуємось, що найбільш точним є результат, одержаний за формулою Сімпсона (парабол)

$$I = 1,147793 \pm 0,000005.$$



*Зауваження.* Заданий інтеграл можна обчислити за формулою Ньютона—Лейбніца. Маємо

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = x\sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{\sqrt{1+x^2}} dx =$$

$$= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{2} - I + \ln(1+\sqrt{2}).$$

Звідси

$$I = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \approx 1,1477935,$$

що підтверджує правильність проведених обчислень.

2. Обчисліть інтеграл  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  з точністю до 0,00005, використовуючи формулу Сімпсона.

*Розв'язання.* Оцінимо спочатку, на скільки рівних частин достатньо розбити відрізок  $[1; 2]$ , щоб гарантувати задану точність. Число  $n$  визначимо з нерівності

$$|R_{2n}(f)|_{\text{пар}} \leq \frac{(b-a)^5 M_3}{180 \cdot (2n)^4} < 0,00005,$$

де  $b-a=1$ ,  $M_3 = \max_{x \in [1; 2]} \left| \left( \frac{1}{x} \right)^{(4)} \right| = \max_{x \in [1; 2]} \left| \frac{24}{x^5} \right| = 24$ . Маємо

$$\frac{24}{180 \cdot (2n)^4} < 0,00005, (2n)^4 > \frac{24}{180 \cdot 0,00005}, (2n)^4 > 2668, 2n > 7,18.$$

Отже,  $2n = 8$ . Розіб'ємо відрізок  $[1; 2]$  на 8 рівних частин точками  $x_i = 1 + 0,125i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 8$ ) і обчислимо значення функції  $f(x) = \frac{1}{x}$  у цих точках із точністю до 0,000001 (табл. 5.5).

Таблиця 5.5

№	$x_i$	$y_i$	№	$x_i$	$y_i$
<b>0</b>	1	1	<b>5</b>	1,675	0,653846
<b>1</b>	1,125	0,888888	<b>6</b>	1,750	0,571428
<b>2</b>	1,25	0,8	<b>7</b>	1,875	0,533333
<b>3</b>	1,375	0,727272	<b>8</b>	2	0,5
<b>4</b>	1,5	0,666666			

За формулою Сімпсона дістаємо

$$I \approx \frac{1}{24}(y_0 + y_8 + 2(y_2 + y_4 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)) = 0,69315.$$

Отже,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 \approx 0,69315 \pm 0,00005..$$

## **Т.2** ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчисліть інтеграл  $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ :

- а) з точністю до 0,01, використовуючи формулу трапецій;  
б) з точністю до 0,0001, використовуючи формулу Сімпсона.  
Результат порівняйте з точною відповіддю.

2. Обчисліть інтеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

з точністю до 0,0001 за формулою Сімпсона.

3. Знайдіть інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$$

за формулою Сімпсона, взявши  $n = 5$ . Обчислення проведіть з п'ятьма знаками після коми.

### **Відповіді**

1. а) 1,01; б) 0,5000. 2.  $0,7468 \pm 0,00005$ . 3. 0,915965.

## **Т.2** ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Обчисліть інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$ , використовуючи формули трапецій та

Сімпсона за умови, що відрізок інтегрування  $[a; b]$  розбито на 10 рівних частин. Оцініть абсолютну похибку. Перевірте результат безпосереднім інтегруванням. Підінтегральна функція та межі інтегрування вміщені у табл. 5.6.

Таблица 5.6

№	$f(x)$	$a$	$b$	№	$f(x)$	$a$	$b$
1	$\ln x$	1	2	16	$x^{-2}$	1	2
2	$\sqrt{x}$	0	1	17	$\sqrt[3]{x}$	0	1
3	$\sqrt[4]{x}$	0	2	18	$\sqrt{x+1}$	0	2
4	$\frac{1}{1+x^2}$	1	2	19	$\frac{1}{4+x^2}$	0	1
5	$\frac{x}{1+x^2}$	0	1	20	$\frac{x}{4+x^2}$	0	2
6	$\sqrt{2-x}$	0	2	21	$\sqrt[3]{x+2}$	0	1
7	$xe^x$	0	1	22	$x \ln x$	1	2
8	$\frac{\ln x}{x}$	1	2	23	$\frac{1}{x+2}$	0	1
9	$\frac{1}{x^3}$	1	2	24	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	1	2
10	$\frac{x}{x+1}$	1	2	25	$\frac{x+1}{x-1}$	2	4
11	$\frac{x^2}{1+x^2}$	1	2	26	$\frac{x^2}{4+x^2}$	1	2
12	$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$	0	1	27	$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	1	2
13	$\ln(x-1)$	2	3	28	$\ln(x+1)$	0	2
14	$\sqrt{2x+1}$	0	1	29	$\sqrt{3x-1}$	1	2
15	$\frac{x^2}{1+x^3}$	0	1	30	$\frac{x^3}{3+x^4}$	0	1

### Тема 3. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ ФУНКЦІЙ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

Постановка задачі інтерполяції. Інтерполяційний многочлен Лагранжа. Похибка інтерполяційної формули. Інтерполяційна формула Лагранжа для рівновіддалених вузлів.



**Література:** [2, стр.30–34], [6], [11], [14, розділ 8, §3], [18, розділ 2, с.84–92].

#### Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

##### 3.1. Постановка задачі

Нехай на відрізку  $[a; b]$  обрано деяку фіксовану сукупність попарно різних точок  $x_0, x_1, \dots, x_n$  ( $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ) і в цих точках відомі значення деякої функції  $f(x)$ :  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  (див. табл. 5.7). Потрібно знайти таку функцію  $\varphi(x)$ , яка збігається з  $f(x)$  у вказаних точках, тобто  $\varphi(x_0) = f(x_0)$ ,  $\varphi(x_1) = f(x_1)$ ,  $\dots$ ,  $\varphi(x_n) = f(x_n)$ , при цьому в усіх інших точках  $x \in [a; b]$  виконується наближена рівність:  $\varphi(x) \approx f(x)$ .

Процес пошуку функції  $\varphi(x)$  називають *інтерполюванням*; функцію  $\varphi(x)$  — *інтерполяційною функцією*, точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — *вузлами інтерполювання*.

Таблиця 5.7

$x$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
$f(x)$	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_n$

Розглянемо спочатку наближення функції  $f(x)$  за допомогою многочлена степеня  $n$ :

$$\varphi(x) = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Цей многочлен має  $n+1$  коефіцієнтів, які можна однозначно визначити з системи  $n+1$  рівнянь:

$$\begin{cases} \varphi(x_0) = y_0, \\ \varphi(x_1) = y_1, \\ \dots \\ \varphi(x_n) = y_n, \end{cases}$$







Для виконання умов (5.15) достатньо накласти на функції  $\Phi_0(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_n(x)$  такі обмеження:

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{для } i \neq j, \\ 1 & \text{для } i = j, \end{cases}$$

тобто  $\Phi_0(x_0) = 1$ ,  $\Phi_1(x_1) = 1, \dots$ ,  $\Phi_n(x_n) = 1$ ; в усіх інших вузлах значення цих функцій дорівнюють нулю.

Побудуємо функцію  $\Phi_i(x)$  загального вигляду, яка в заданих точках  $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$  дорівнює нулю, а в точці  $x_i$  — одиниці. Першу умову  $\Phi_i(x_j) = 0$ ,  $j \neq i$  задовольняє функція

$$\Phi_i(x) = c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n),$$

де  $c_i$  — довільна стала.

Враховуючи другу умову  $\Phi_i(x_i) = 1$ , дістанемо

$$\Phi_i(x_i) = c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n) = 1.$$

Звідси

$$c_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)},$$

тоді

$$\Phi_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}. \quad (5.17)$$

Отже, функція (5.16), в якій функції  $\Phi_0(x)$ ,  $\Phi_1(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_n(x)$  визначаються за формулою (5.17), інтерполює задану функцію  $f(x)$  у вузлах  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Справді, при  $x = x_0$   $\Phi_0(x_0) = 1$ , а функції  $\Phi_1(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_n(x)$  обертаються в нуль, отже,  $L_n(x_0) = f(x_0)$ . При  $x = x_1$  уже  $\Phi_1(x_1) = 1$ , а функції  $\Phi_0(x)$ ,  $\Phi_2(x)$ ,  $\dots$ ,  $\Phi_n(x)$  обертаються в нуль і т. д.

Запишемо многочлен (5.16) у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} L_n(x) = & f(x_0) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \\ & + f(x_1) \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + \\ & + f(x_n) \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Функцію  $L_n(x)$ , задану формулою (5.18), називають *інтерполяційним многочленом Лагранжа*. На практиці функцію (5.18) після належних перетворень зводять до вигляду

$$L_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n.$$

Формулу (5.18) можна подати у компактнішому вигляді. Введемо позначення

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

і продиференціюємо  $\omega_{n+1}(x)$  за змінною  $x$ :

$$\begin{aligned} \omega'_{n+1}(x) &= (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \omega'_{n+1}(x_0) &= (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n), \\ \omega'_{n+1}(x_1) &= (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n), \\ &\dots \dots \dots \\ \omega'_{n+1}(x_n) &= (x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}); \\ \Phi_j(x) &= \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}, \quad (j = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

У результаті введення функції  $\omega_{n+1}(x)$  інтерполяційний многочлен Лагранжа можна записати так:

$$L_n(x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}. \quad (5.19)$$

### 3.3. Похибка інтерполяційної формули

При побудові інтерполяційних функцій важливою є можливість оцінки похибок подання заданої функції в проміжках між вузлами інтерполювання.

За побудовою в вузлах інтерполяції  $x_0, x_1, \dots, x_n$  виконується рівність  $L_n(x) = f(x)$ .

Якщо функція  $f(x)$  є многочленом степеня не вище  $n$ , то дана функція і відповідний інтерполяційний многочлен  $L_n(x)$  тотожно рівні.

Якщо  $f(x)$  — многочлен степеня вищий  $n$ , то інтерполяційний многочлен  $L_n(x)$  збігається з  $f(x)$  тільки у вузлах інтерполяції. Така сама ситуація буде у випадку, коли  $f(x)$  не є многочленом. В інших точках  $x \neq x_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , маємо наближену рівність

$$L_n(x) \approx f(x), \quad (5.20)$$

тобто  $L_n(x)$  зображає функцію  $f(x)$  з похибками.

Різницю  $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$  називають похибкою інтерполяційної формули (5.20).

### Теорема

Нехай функція  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$  має диференційовні похідні включно до  $n$ -го порядку, а похідна  $(n+1)$ -го порядку неперервна. Тоді для кожного  $x \in [a; b]$  існує значення  $\xi = \xi(x) \in [a; b]$ , що виконується рівність

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \frac{\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}.$$

Позначимо  $M_{n+1}(x) = \max_{x \in [a; b]} |f^{(n+1)}(x)|$ . Тоді для абсолютної похибки дістаємо оцінку

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|. \quad (5.21)$$

### 3.4. Інтерполяційна формула Лагранжа для рівновіддалених вузлів

Якщо відстань між усіма сусідніми вузлами інтерполювання є однаковою (рівновіддалені вузли), тобто

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = h,$$

тоді вираз (5.18) істотно спрощується. Введемо нову змінну

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

звідси

$$\begin{aligned} x - x_0 &= th, \\ x - x_1 &= x - x_0 - h = th - h = h(t - 1), \\ x - x_2 &= x - x_0 - 2h = th - 2h = h(t - 2), \\ x - x_i &= x - x_0 - ih = th - ih = h(t - i). \end{aligned}$$

Вираз  $\omega_{n+1}(x)$  набирає вигляду

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) = h^{n+1}t(t-1)\dots(t-n).$$

Враховуючи рівності

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

послідовно знаходимо

$$\begin{aligned} x_i - x_0 &= ih, \\ x_i - x_1 &= h(i-1), \\ &\dots\dots\dots \\ x_i - x_n &= h(i-n). \end{aligned}$$

Тоді

$$\omega'_{n+1}(x_i) = h^n \cdot i! \cdot (n-i)! \cdot (-1)^{n-i}.$$

У результаті інтерполяційний многочлен Лагранжа набирає вигляду

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n L_i^{(n)}(t) \cdot f(x_i),$$

де коефіцієнти Лагранжа  $L_i^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \cdot \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{t-i}$  не залежать від вигляду функції  $f(x)$  і величини  $h$ , а залежать лише від величин  $i$  і  $n$ . Тому таблиці, складені один раз для різних значень  $n$ , можна використовувати при розв'язуванні різноманітних задач інтерполювання для рівновіддалених вузлів.

### Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

**1.** Побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції, заданої таблицею 5.8:

*Таблиця 5.8*

$x$	1	3	4
$f(x)$	12	4	6

*Розв'язання.* За умовою  $x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 4, f(x_0) = 12, f(x_1) = 4, f(x_2) = 6$ . Крім того, з таблиці випливає, що  $n = 2$ , отже, степінь інтерполяційного многочлена буде не вищим за два.

Використовуючи формулу (5.18), дістаємо:

$$L_2(x) = 12 \cdot \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \cdot \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} = 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22.$$

2. Функція  $f(x)$  задана таблицею 5.9. Побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа для цієї функції.

Таблиця 5.9

$x$	1	2	3	5
$f(x)$	1	5	14	81

*Розв'язання.* Оскільки функція задається чотирма значеннями, то порядок отриманого многочлена не вище третього. Підставивши вихідні дані у формулу (5.18), дістанемо:

$$P_3(x) = 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \cdot \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \cdot \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)} = x^3 - 2x^2 + 3x - 1.$$

3. Функція  $f(x)$  задана таблицею 5.10:

Таблиця 5.10

$x$	0	1	2	6
$f(x)$	-1	-3	3	1187

Користуючись інтерполяційним поліномом Лагранжа, знайдіть її значення в точці  $x = 4$ .

*Розв'язання.* Підставляючи у формулу (5.18) дані з табл. 4 і  $x = 4$ , маємо

$$P_3(4) = -1 \cdot \frac{(4-1)(4-2)(4-6)}{(-1)(-2)(-6)} - 3 \cdot \frac{4(4-2)(4-6)}{1(1-2)(1-6)} + 3 \cdot \frac{4(4-1)(4-6)}{2(2-1)(2-6)} + 1187 \cdot \frac{4(4-1)(4-2)}{6(6-1)(6-2)} = 255.$$

4. Оцініть точність обчислення величини  $\sin \frac{5\pi}{180}$  за інтерполяційною формулою Лагранжа, якщо за вузли інтерполявання вибрані значення

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{3}.$$

Розв'язання. У цьому разі

$$f(x) = \sin x, \quad n = 3, \quad a = 0, \quad b = \frac{\pi}{3}.$$

Знаходимо

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(4)}(x) = \sin x, \quad M_4(x) = \max_{x \in [0; \frac{\pi}{3}]} |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Застосовуючи оцінку (5.21), дістаємо

$$\left| \sin \frac{5\pi}{180} - L_n \left( \frac{5\pi}{180} \right) \right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4!} \left| \left( \frac{5\pi}{180} - 0 \right) \left( \frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{6} \right) \right| \times \\ \times \left| \left( \frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{4} \right) \left( \frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{3} \right) \right| \approx 0,0009.$$

### Т.3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа другого порядку для функції, заданої таблицею 5.11.

Таблиця 5.11

$x$	1	3	5
$f(x)$	-2	4	-6

2. Побудуйте інтерполяційний поліном Лагранжа, який збігається з функцією  $f(x) = 3^x$ , де  $x \in [-1; 1]$ , у точках  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = -0$ ,  $x_2 = 1$ .

3. Оцініть точність обчислення величини  $\ln 1,5$  за інтерполяційною формулою Лагранжа, якщо за вузли інтерполявання вибрані значення  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .

4. Функція  $f(x)$  задана таблицею 5.12:

Таблиця 5.12

$x$	0,6	0,8	1	1,2
$f(x)$	0,56	0,72	0,84	0,93

Користуючись інтерполяційним многочленом Лагранжа, знайдіть її значення в точці  $x = 0,7$ .

## Відповіді

1.  $L_2(x) = -2x^2 + 11x - 11$ . 2.  $3^x \approx \frac{1}{3}(2x^2 + 4x + 3)$ . 3. 0,125. 4.  $\approx 0,64$ .

### Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. За табл. 5.13 значень функції побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа, його графік і позначте на ньому вузлові точки.

Таблиця 5.13

Варіант	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y_0$	$y_1$	$y_2$
1	-1	0	3	-3	5	2
2	2	3	5	4	1	7
3	0	2	3	-1	-4	2
4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	-1	1,5	3	4	-7	1
11	2	4	7	-1	-6	3
12	-9	-7	-4	3	-3	4
13	0	1	4	7	-1	8
14	-8	-5	0	9	-2	4
15	-7	-5	-4	4	-4	5
16	1	4	9	-2	9	3
17	7	8	10	6	-2	7
18	-4	0	2	4	8	-2
19	-3	-1	1	11	-1	6
20	0	3	8	1	5	-4
21	1	3	7	5	-3	2
22	-2	0	3	-4	2	-3
23	-1	3	4	2	5	-1
24	2	4	8	-1	7	3



Варіант	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y_0$	$y_1$	$y_2$
25	-5	-4	-2	-6	0	-4
26	1	2	5	-4	-8	1
27	6	8	11	3	5	1
28	0	3	5	-1	-3	4
29	1	5	7	6	2	5
30	-1	2	4	-5	-2	-7

2. Побудуйте інтерполяційний многочлен Лагранжа третього порядку, якщо його значення у вузлових точках визначаються таблицею 5.14.

Таблиця 5.14

$x$	$1 + 0,1k$	$2 + 0,2k$	$3 + 0,3k$	$4 + 0,4k$
$f(x)$	$1 + 0,5k$	$10 + k$	$20 + k$	$50 + 2k$

Тут  $k$  — номер варіанта.

#### Тема 4. ІНТЕРПОЛЮВАННЯ СПЛАЙНАМИ

Визначення сплайн-функції. Найпростіша задача наближення лінійними сплайнами. Алгоритм побудови кубічної сплайн-функції.



Література: [2, стр.256–257], [6].

### T.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 4.1. Визначення сплайн-функції

Нехай про функцію  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$  відомо лише її значення  $y_i$  у вузлах  $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), а в проміжних точках функція може набувати будь-яких значень. Тоді заміна функції  $f(x)$  інтерполяційним многочленом навіть дуже високого степеня, крім великої обчислювальної роботи, нової інформації може і не дати. Високого степеня многочлена можна уникнути, якщо відрізок інтерполяції розбити на кілька частин, після чого на кожній із них побудувати свій інтерполяційний многочлен. Проте при такому підході є суттєвий недолік: у точках стику різних інтерполяційних многочленів буде розривною їхня перша похідна.

У цьому разі використовують особливий вид інтерполювання — *інтерполювання сплайнами*.

У загальному випадку відрізок  $[a; b]$  точками  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  розбивають на частини, і на кожному відрізку  $[x_{i-1}; x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) будують свій інтерполяційний многочлен. Вимагаючи гладкого спряження многочленів на сусідніх відрізках, приходимо до кусково-многочленних функцій з однорідною структурою, що і називаються сплайнами або сплайн-функціями.

**Висновок.** Сплайн — це функція, яка на кожному частинному відрізку інтерполяції є алгебраїчним многочленом, а на всьому заданому відрізку неперервна разом із кількома своїми похідними.

Розглянемо побудову сплайнів першого і третього степенів.

#### 4.2. Задача наближення лінійними сплайнами

Найлегший для обчислення спосіб заміни функції  $f(x)$  на проміжку  $x \in [x_{i-1}; x_i]$  лінійною функцією, тобто геометрично — частиною прямої (відрізком). Тоді графік функції  $f(x)$  на  $[a; b]$  заміниться ламаною лінією, що проходить через точки  $(x_i, y_i)$  і складатиметься з  $n$  відрізків:  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  (рис. 5.16). У кожному вузлі цієї ламаної перша похідна має розрив першого роду. Ламана у нашому випадку — це сплайн.

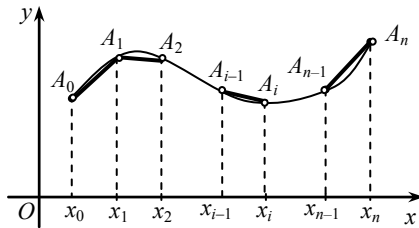


Рис. 5.16

Запишемо рівняння частини прямої, що сполучає сусідні точки  $A_{i-1}(x_{i-1}; y_{i-1})$  і  $A_i(x_i; y_i)$ :

$$\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}}, \quad x \in [x_{i-1}; x_i],$$

звідси

$$y = y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})(y_i - y_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \quad (5.22)$$

де  $x \in [x_{i-1}; x_i]$ .

Підставляючи в (5.22) послідовно значення  $i = 1, 2, \dots, n$ , дістанемо рівняння відрізків  $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ , тобто усієї ламаної.

### 4.3. Алгоритм побудови кубічної сплайн-функції

Припустимо, що у вузлах  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  відрізка  $[a; b]$  задані значення функції  $f(x) : y_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n$ . Довжину частинного відрізка  $[x_{i-1}; x_i]$  позначимо через  $h_i = x_i - x_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Будемо шукати кубічний сплайн на кожному частинному відрізку  $[x_{i-1}; x_i]$  у вигляді

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3,$$

де  $a_i, b_i, c_i, d_i$  — четвірка невідомих коефіцієнтів для одного частинного відрізка  $[x_{i-1}; x_i]$ . Таких відрізків усього  $n$ :  $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ . Тоді на всьому відрізку  $[a; b]$  інтерполяційний сплайн має вигляд

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{для } x \in [x_0; x_1], \\ S_2(x) & \text{для } x \in [x_1; x_2], \\ \dots & \dots \\ S_n(x) & \text{для } x \in [x_{n-1}; x_n]. \end{cases}$$

Оскільки невідомих коефіцієнтів усього  $4n$ , то для однозначного визначення цих коефіцієнтів потрібно мати систему з  $4n$  рівнянь.

За умовою функція  $S(x)$  у вузлах повинна збігатися із заданими значеннями функції  $f$ :

$$S_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \quad (5.23)$$

$$S_i(x_i) = y_i = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3. \quad (5.24)$$

Кількість таких рівнянь дорівнює  $2n$ . Інші  $2n$  рівнянь отримуємо з таких міркувань. Вимагатимемо неперервності першої і другої похідних від  $S(x)$  в усіх точках, включаючи і вузли. Для цього потрібно прирівняти ліві і праві похідні  $S'(x-0), S'(x+0), S''(x-0), S''(x+0)$  у внутрішніх вузлах:

$$S'_i(x_i - 0) = S'_{i+1}(x_i + 0), \quad (5.25)$$

$$S''_i(x_i - 0) = S''_{i+1}(x_i + 0). \quad (5.26)$$

Геометрично умова (5.25) означає, що графіки сусідніх кускових многочленів у вузловій точці мають спільну дотичну; умова (5.26) означає, що графіки сусідніх кускових многочленів у вузловій точці мають однаковий напрям опуклості, якщо друга похідна не рівна нулю, або точка  $(x_i, y_i)$  — точка перегину графіка функції  $S(x)$ , якщо  $S''(x_i) = 0$ .

Знаходимо похідні:

$$S'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \quad (5.27)$$

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) \quad (5.28)$$

Далі маємо:

$$\begin{aligned} S'_i(x_i - 0) &= \lim_{x \rightarrow x_i - 0} (b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2) = \\ &= b_i + 2c_i(x_i - x_{i-1}) + 3d_i(x_i - x_{i-1})^2 = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2, \\ S'_{i+1}(x_i + 0) &= \lim_{x \rightarrow x_i + 0} (b_{i+1} + 2c_{i+1}(x - x_i) + 3d_{i+1}(x - x_i)^2) = b_{i+1}; \\ S''_i(x_i - 0) &= \lim_{x \rightarrow x_i - 0} (2c_i + 6d_i(x - x_{i-1})) = \\ &= 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}) = 2c_i + 6d_i h_i, \\ S''_i(x_i + 0) &= \lim_{x \rightarrow x_i + 0} (2c_{i+1} + 6d_{i+1}(x - x_i)) = 2c_{i+1}. \end{aligned}$$

Отже, рівності (5.26), (5.27) набувають вигляду

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad (5.29)$$

$$2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \text{ або } c_i + 3d_i h_i = c_{i+1}, \quad (5.30)$$

де  $i = 1, 2, \dots, n - 1$ .

Рівняння (5.29), (5.30) дають ще  $2(n - 1)$  умов. Дві умови, що залишилися, замінюють вимогою у точках  $x_0 = a$  і  $x_n = b$  нульової кривизни, тобто рівності нулю другої похідної:

$$S''_1(x_0) = 2c_1 = 0, \quad S''_n(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0. \quad (5.31)$$

Запишемо усі рівняння (5.23), (5.24), (5.29) – (5.31) разом, урахувавши, що  $a_i = y_{i-1}$ :

$$\begin{cases} b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i - y_{i-1} & (i = 1, 2, \dots, n); \\ b_{i+1} - b_i - 2c_i h_i - 3d_i h_i^2 = 0 & (i = 1, 2, \dots, n - 1); \\ c_{i+1} - c_i - 3d_i h_i = 0 & (i = 1, 2, \dots, n - 1); \\ c_1 = 0, \quad c_n + 3d_n h_n = 0. \end{cases} \quad (5.32)$$

Система (5.32) складається з  $3n$  рівнянь та  $3n$  невідомих  $b_i, c_i, d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Розв'язавши цю систему, наприклад методом Гаусса, дістанемо сукупність усіх формул для шуканого інтерполяційного сплайна.

#### Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Для функції, заданої на проміжку  $[0; 0,3]$  таблицею 5.15, побудуйте сплайн-функцію першого степеня.

Таблиця 5.15

$x$	0	0,1	0,2	0,3
$f(x)$	0	1	-1	2

*Розв'язання.* У даному разі інтерполяційний сплайн має таку структуру:

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{для } x \in [0; 0,1], \\ S_2(x) & \text{для } x \in [0,1; 0,2], \\ S_3(x) & \text{для } x \in [0,2; 0,3]. \end{cases}$$

За формулою (5.22) дістаємо:

$$S_1(x) = 0 + \frac{(x-0)(1-0)}{0,1-0} = 10x, \quad x \in [0; 0,1];$$

$$S_2(x) = 1 + \frac{(x-0,1)(-1-1)}{0,2-0,1} = 3 - 20x, \quad x \in [0,1; 0,2];$$

$$S_3(x) = -1 + \frac{(x-0,2)(2+1)}{0,3-0,2} = 30x - 7, \quad x \in [0,2; 0,3].$$

Отже, задача розв'язана.

2. Інтерполяційна функція задана таблицею 5.16. Знайдіть значення коефіцієнтів  $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2, d_2, b_3, c_3, d_3$ , які визначають кубічний сплайн

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) & \text{для } x \in [2; 3], \\ S_2(x) & \text{для } x \in [3; 5], \\ S_3(x) & \text{для } x \in [5; 7]. \end{cases}$$

Таблиця 5.16

$x$	2	3	5	7
$f(x)$	4	-2	6	-3

Розв'язання. Запишемо вираз для  $S(x)$ :

$$S_1(x) = 4 + b_1(x-2) + c_1(x-2)^2 + d_1(x-2)^3, \quad x \in [2; 3];$$

$$S_2(x) = -2 + b_2(x-3) + c_2(x-3)^2 + d_2(x-3)^3, \quad x \in [3; 5];$$

$$S_3(x) = 6 + b_3(x-5) + c_3(x-5)^2 + d_3(x-5)^3, \quad x \in [5; 7].$$

Складаємо систему (5.32):

$$\begin{cases} 2b_1 + c_1 + d_1 = -6, \\ 2b_2 + 4c_2 + 8d_2 = 8, \\ 2b_3 + 4c_3 + 8d_3 = -9, \\ b_2 - b_1 - 2c_1 - 3d_1 = 0, \\ b_3 - b_2 - 4c_2 - 12d_2 = 0, \\ c_2 - c_1 - 3d_1 = 0, \\ c_3 - c_2 - 6d_2 = 0, \\ c_1 = 0, \quad c_3 + 6d_3 = 0. \end{cases} \quad (5.33)$$

Система (5.33) складається з дев'яти лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему методом Гаусса, дістанемо такі значення (результати округлені до двох знаків після коми):

$$\begin{aligned} b_1 &= -11,6, & c_1 &= 5,6, & d_1 &= 0, \\ b_2 &= -0,4, & c_2 &= 6,6, & d_2 &= -1,7, \\ b_3 &= 1,62, & c_3 &= -4,59, & d_3 &= 0,76. \end{aligned}$$

У таблиці 5.17 вміщено результати перевірки всіх умов, які повинен задовольняти знайдений сплайн.

Таблиця 5.17

$x$	2	3	5	7
$f(x)$	4	-2	6	-3
$S_1(x)$	4	-2	-	-
$S_2(x)$	-	-2	6	-
$S_3(x)$	-	-	6	-3,04
$S'_1(x)$	-11,6	-0,4	-	-
$S'_2(x)$	-	-0,4	1,60	-
$S'_3(x)$	-	-	1,62	-7,62

Проаналізуйте результати таблиці 5.17 самостійно.

## Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Для функції, заданої таблицею 5.18,

Таблиця 5.18

$x$	0	0,2	0,6	1
$f(x)$	1	-3	-1	5

побудуйте сплайн-функцію першого степеня.

2. Нехай функція  $f(x)$  задана на проміжку  $[0; 0,3]$  таблицею 5.19. Побудуйте кубічну сплайн-функцію.

Таблиця 5.19

$x$	0	0,1	0,2	0,3
$f(x)$	0,5	0,3	0,7	0,6

### Відповіді

1.  $y = 1 - 20x$ , якщо  $x \in [0; 0,2]$ ;  $y = 5x - 4$ , якщо  $x \in [0,2; 0,6]$ ;  $y = 15x - 10$ , якщо  $x \in [0,6; 1]$ . 2.  $S_1(x) \approx 193x^3 - 3,93x + 0,5$ ,  $x \in [0; 0,1]$ ;  $S_2(x) \approx 193(0,2 - x)^3 - 173(x - 0,1)^3 + 1,07(0,2 - x) + 3,73(x - 0,1)$ ,  $x \in [0,1; 0,2]$ ;  $S_3(x) \approx -173(0,3 - x)^3 + 3,73(0,3 - x) + 6(x - 0,2)$ ,  $x \in [0,2; 0,3]$ .

## Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1. Для функції, заданої на проміжку  $[0; 0,3 + 0,3k]$  (табл. 5.20), побудуйте сплайн-функцію першого степеня.

Таблиця 5.20

$x$	0	$0,1 + 0,1k$	$0,2 + 0,2k$	$0,3 + 0,3k$
$f(x)$	0	1	-1	2

Тут  $k$  — номер варіанта.

### Тема 5. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Постановка задачі. Принципи побудови методу найменших квадратів. Оцінка якості апроксимації методом найменших квадратів.



**Література:** [10, розділ 7, с. 134—147], [11], [18, розділ 9, с. 662—665].

## Т.5

 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

### 5.1. Постановка задачі

Припустимо, що в результаті експерименту одержано набір  $n$  пар значень двох змінних величин  $x_i$  і  $y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), які є характеристиками деякого фізичного процесу ( $y$  — функція від  $x$ ). Результати вимірювань подані у таблиці 5.21.

Таблиця 5.21

$x$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$y$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

Потрібно встановити функціональну залежність між цими величинами у вигляді неперервної функції  $y = \varphi(x)$ , яка б найкраще відбивала характер зміни експериментальних даних.

Для побудови функції  $y = \varphi(x)$  використовують метод найменших квадратів, який ґрунтується на мінімізації виразу

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2,$$

де  $\delta_k$  — абсолютна похибка  $k$ -го вимірювання.

### 2. Принципи побудови методу найменших квадратів

Припустимо, вигляд функції  $y = \varphi(x)$ , що наближає експериментальні дані, відомий. Її вибір, зазвичай, ґрунтується на попередньому (часто візуальному) аналізі поведінки експериментальних даних, зокрема на основі характеру розміщення на координатній площині  $Oxy$  точок, які відповідають експериментальним даним, або на апріорній інформації щодо законів, що керують перебігом досліджуваного процесу.

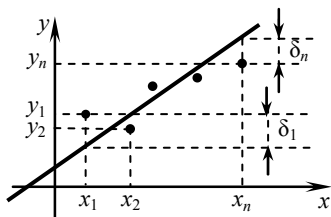


Рис. 5.17

Нехай, наприклад, пари значень  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , ...,  $(x_n, y_n)$  розміщені на координатній площині так, як зображено на рис. 5.17, тобто майже на прямій лінії. Враховуючи, що при проведенні експерименту вимірювання проводяться з похибками, природно припустити, що змінні  $x$  і  $y$  зв'язані лінійною залежністю

$$y = ax + b, \quad (5.34)$$

де  $a$  і  $b$  — невідомі параметри.



Знайдемо модуль відхилення (похибки) точок  $(x_k, y_k)$  від прямої (5.34):

$$\begin{aligned}\delta_1 &= |ax_1 + b - y_1|, \\ \delta_2 &= |ax_2 + b - y_2|, \\ &\text{-----} \\ \delta_n &= |ax_n + b - y_n|.\end{aligned}$$

За методом найменших квадратів (МНК) сталі  $a$  і  $b$  визначають так, щоб сума квадратів похибок

$$\Phi(a, b) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_n^2 = \sum_{k=1}^n (ax_k + b - y_k)^2 \quad (5.35)$$

була мінімальною. Шукані значення  $a$  і  $b$  задовольняють систему рівнянь

$$\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial b} = 0. \quad (5.36)$$

Виконаємо перетворення

$$\begin{aligned}\Phi(a, b) &= (ax_1 + b - y_1)^2 + (ax_2 + b - y_2)^2 + \dots + (ax_n + b - y_n)^2 = \\ &= a^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) + nb^2 + (y_1^2 + \dots + y_n^2) + 2ab(x_1 + \dots + x_n) - \\ &\quad - 2a(x_1y_1 + \dots + x_ny_n) - 2b(y_1 + \dots + y_n) = \\ &= a^2 \sum_{k=1}^n x_k^2 + nb^2 + \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2ab \sum_{k=1}^n x_k - 2a \sum_{k=1}^n x_k y_k - 2b \sum_{k=1}^n y_k.\end{aligned}$$

Тепер знайдемо частинні похідні

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial a} &= 2a \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2b \sum_{k=1}^n x_k - 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k; \\ \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial b} &= 2nb + 2a \sum_{k=1}^n x_k - 2 \sum_{k=1}^n y_k.\end{aligned}$$

Отже, система (5.36) набирає вигляду

$$\begin{cases} a \sum_{k=1}^n x_k^2 + b \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \\ a \sum_{k=1}^n x_k + b \cdot n = \sum_{k=1}^n y_k. \end{cases} \quad (5.37)$$

Одержана система — це система лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $a$  і  $b$ , її розв'язання не вимагає значних зусиль (можна, наприклад, скористатися методом Гаусса або методом Крамера).



### Зауваження.

1. Можна довести, що система (5.37) має єдиний розв'язок. Для цього достатньо перевірити, що основний визначник системи не дорівнює нулю.

Справді,

$$\begin{vmatrix} \sum_{k=1}^n x_k^2 & \sum_{k=1}^n x_k \\ \sum_{k=1}^n x_k & n \end{vmatrix} = n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (x_i - x_j)^2 > 0.$$

2. Умова (5.36) є лише необхідною умовою екстремуму функції двох змінних  $\Phi(a, b)$ . Проте можна показати, що єдиний розв'язок системи — пара  $(a, b)$  є точкою мінімуму функції  $\hat{O}(a, b)$ . Справді,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} = 2 \sum_{k=1}^n x_k^2, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial b} = 2 \sum_{k=1}^n x_k, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b^2} = 2n.$$

Тоді

$$\Delta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b^2} - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial a \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( 2 \sum_{k=1}^n x_k \right)^2 = 4 \sum_{\substack{i,j \\ i < j}} (x_i - x_j)^2 > 0.$$

Оскільки  $\Delta > 0$  і  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} > 0$ , то функція  $\Phi(a, b)$  у точці  $(a, b)$  сягає мінімуму.

3. Покажіть самостійно, що у разі припущення між  $x$  і  $y$  лінійної залежності  $y = ax$ , число  $a$  знаходять за формулою

$$a = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

Нехай тепер функція, що наближує експериментальні дані, має три невідомі параметри  $a, b, c$ , тобто  $y = \varphi(x, a, b, c)$ . За критерій вибору значень  $a, b, c$ , при яких функція  $y = \varphi(x, a, b, c)$  щонайкраще буде наближати експериментальні значення, використовують суму квадратів різниць значень функцій  $y = \varphi(x, a, b, c)$  і  $y_i = f(x_i)$  у точках  $x = x_i$ , тобто функціонал вигляду

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - \varphi(x_i, a, b, c))^2. \quad (5.38)$$

Задача зводиться до відшукування такого набору значень  $a, b, c$ , при якому функціонал (5.38) набиратиме мінімального значення з усіх можливих. Для пошуку мінімуму  $\Phi(a, b, c)$  використовують необхідну умову екстремуму функції кількох змінних, а саме: прирівнюють до нуля всі частинні похідні функціонала  $\Phi(a, b, c)$  за його аргументами  $a, b, c$ :

$$\boxed{\frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial c} = 0.} \quad (5.39)$$

Нехай функціонал  $\Phi(a, b, c)$  має вигляд квадратного тричлена:

$$\Phi(a, b, c) = ax^2 + bx + c.$$

У цьому разі після належних перетворень система рівнянь (5.39) набуває вигляду

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i^2), \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i), \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + c \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i. \end{cases} \quad (5.40)$$

Отримана система є системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно невідомих  $a, b, c$ . Коефіцієнтами (5.40) є, окрім кількості експериментальних точок  $n$ , такі суми:

$$\sum_{i=1}^n x_i^4, \quad \sum_{i=1}^n x_i^3, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i^2), \quad \sum_{i=1}^n (y_i \cdot x_i), \quad \sum_{i=1}^n y_i, \quad (5.41)$$

які легко знаходяться за відомими значеннями координат експериментальних точок  $x_i$  та  $y_i$ . Лінійність системи (5.40) дозволяє використовувати для її розв'язання довільний метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, зокрема методи Гаусса, Крамера або інші методи, які більшою мірою адаптовані до специфіки та особливостей конкретного випадку, що розглядається. Знайдені в результаті розв'язання значення  $a, b, c$  завершують, як зазначалося вище, процес визначення залежності, що апроксимує експериментальні дані. Зауважимо, що підібрана таким чином функція  $\Phi(a, b, c)$  називається *рівнянням регресії*.

### 5.3. Оцінка якості апроксимації методом найменших квадратів

Якість апроксимації експериментальних даних знайденої аналітичної залежності оцінюється так званою *залишковою дисперсією* або *дисперсією адекватності*

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i, a, b, c))^2}{n - k}, \quad (5.42)$$

де  $n$  — число дослідних значень,  $k$  — кількістю коефіцієнтів (параметрів апроксимуючої залежності)

При наближенні одного й того самого набору експериментальних даних функціями  $y = \varphi(x, a, b, c)$  різного вигляду, значення дисперсії адекватності, яке визначається відповідно до формули (5.42), може слугувати критерієм, за яким вибирається найкращий із розглянутих видів апроксимуючих функцій. Для кількох різних функцій із різною, в загальному випадку, кількістю параметрів  $k$ , кращою слід визнати ту з них, для якої значення дисперсії адекватності  $S^2$ , визначене за формулою (5.42), виявиться найменшим щодо значень цієї величини для інших розглянутих функцій.

#### Т.5 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Результати вимірювань величин  $x$  і  $y$  подано у табл. 5.2.

Таблиця 5.22

$x$	-2	-1	0	1	2	3
$y$	3,4	2,3	1,9	1,7	1,2	0,6

Установіть залежність між величинами  $x$  і  $y$  і визначте параметри емпіричної формули.

*Розв'язання.* Зобразимо на координатній площині точки  $(-2; 3,4)$ ,  $(-1; 2,3)$ ,  $(0; 1,9)$ ,  $(1; 1,7)$ ,  $(2; 1,2)$ ,  $(3; 0,6)$  (рис. 5.18). З рисунка видно, що ці точки розміщені приблизно на деякій прямій  $y = ax + b$ , отже, можемо припустити, що між  $x$  і  $y$  існує лінійна залежність  $y = ax + b$ .

Результати вимірювань величин  $x$  і  $y$  та підсумки їх обробки занесемо в таблицю 5.23.

Таблиця 5.23

$k$	$x_k$	$y_k$	$x_k y_k$	$x_k^2$
1	-2	3,4	-6,8	4
2	-1	2,3	-2,3	1

Закінчення табл. 5.23

$k$	$x_k$	$y_k$	$x_k y_k$	$x_k^2$
3	0	1,9	0	0
4	1	1,7	1,7	1
5	2	1,2	2,4	4
6	3	0,6	1,8	9
$\Sigma$	3	11,1	-4,2	19

Система рівнянь (5.37) набирає вигляду

$$\begin{cases} 19a + 3b = -42, \\ 3a + 6b = 11,1, \end{cases}$$

розв'язок якої  $a = -0,5$ ,  $b = 2,1$ .

Отже, залежність між  $x$  і  $y$  виражається наближеною формулою

$$y = -0,5x + 2,1.$$

2. Результати вимірювань величин  $x$  і  $y$  подано в табл. 5.24.

Таблиця 5.24

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y$	0	0	1	2	3	5	8

Установіть залежність між величинами  $x$  і  $y$  і визначте параметри емпіричної формули.

*Розв'язання.* Зобразимо на координатній площині  $Oxy$  точки  $(-3; 0)$ ,  $(-2; 0)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(2; 5)$ ,  $(3; 8)$ . Помічаємо, що ці точки незначно відхиляються від точок дуги деякої параболи (рис. 5.19).

Отже, припускаємо, що між  $x$  і  $y$  існує квадратична залежність  $y = ax^2 + bx + c$ .

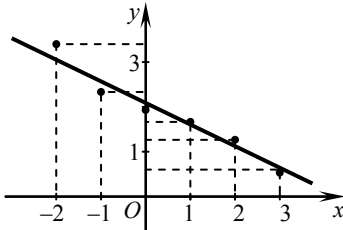


Рис. 5.18

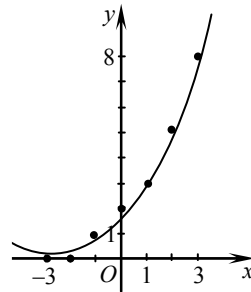


Рис. 5.19

Результати вимірювань величин  $x$  і  $y$  та підсумки їх обробки занесемо в таблицю 5.25.

Таблиця 5.25

$k$	$x_k$	$x_k^2$	$x_k^3$	$x_k^4$	$y_k$	$x_k y_k$	$y_k x_k^2$
1	-3	9	-27	81	0	0	0
2	-2	4	-8	16	0	0	0
3	-1	1	-1	1	1	-1	1
4	0	0	0	0	2	0	0
5	1	1	1	1	3	3	3
6	2	4	8	16	5	10	20
7	3	9	27	81	8	24	72
$\Sigma$	0	28	0	196	19	36	96

Система (5.40) набуває вигляду

$$\begin{cases} 196a + 28c = 96, \\ 28b = 36, \\ 28a + 7c = 19. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо

$$a = \frac{5}{21}, \quad b = \frac{9}{7}, \quad c = \frac{37}{21}.$$

Отже,

$$y = \frac{5}{21}x^2 + \frac{9}{7}x + \frac{37}{21}.$$

Характер проходження графіка апроксимуючої кривої (рис. 5.19) дає можливість зробити висновок про те, що знайдена залежність відбиває загальну тенденцію зміни отриманих експериментальним шляхом значень.

Проаналізуйте результати таблиці 5.25 самостійно.



*Зауваження.* Якщо між  $x$  і  $y$  припускається залежність  $y = ax^2$ , то сума квадратів похибок  $\delta_k = ax_k^2 - y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) найменша тоді, коли

$$a = \frac{\sum_{k=1}^n y_k x_k^2}{\sum_{k=1}^n x_k^4}.$$

## Т.5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Для значень аргументу  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5, x_6 = 6$  здобути значення функції  $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$  (табл. 5.26). Установіть методом найменших квадратів функціональну залежність між  $x$  та  $y$  і визначте параметри емпіричної формули.

Таблиця 5.26

Номер задачі	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$
1	2,2	4,5	6,7	9	11	13,5
2	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17
3	0	-2	-6	-11	-18	-26,5

### Відповіді

1.  $y = 2,23x$ . 2.  $y = 3,023x - 1,081$ . 3.  $y = -0,75x^2 + 0,85$ .

## Т.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Для значень аргументу  $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$  отримані значення функції  $y_1, \dots, y_5$  (табл. 5.27). Побудуйте методом найменших квадратів функцію  $y = ax + b$ , що наближає експериментальні дані, а також графік цієї функції.

Таблиця 5.27

№ варіанта	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
1	2,8	3,7	2,6	4,1	5,1
2	4,9	3,6	4,1	2,0	0,8
3	3,4	4,3	5,1	6,2	7,0
4	4,1	5,2	6,0	7,5	8,1
5	5,2	10,5	14,4	18,9	24,3
6	4,5	4,9	6,0	7,1	7,7
7	2,9	3,1	4,1	4,9	6,1
8	5,3	6,1	6,8	7,5	8,5
9	5,8	4,9	4,4	3,9	3,6
10	2,7	5,2	7,4	8,2	9,6

№ варіанта	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$
11	1,2	-0,3	-1,4	-3,5	-4,8
12	-1,3	1,5	3,2	5,6	6,5
13	3,4	4,1	4,8	5,6	7,8
14	5,4	3,8	3,2	1,7	1,4
15	4,5	6,3	10,8	14	15,5
16	3,7	4,5	6,6	7,4	7,8
17	2,6	1,2	-0,8	-3,6	-4,7
18	4,5	10,1	12,2	18,2	20,3
19	6,3	4,7	4,2	2,7	1,8
20	5,6	8,2	7,5	8,4	10,8
21	3,1	4,5	5,4	5,9	7,1
22	4,4	5,5	6,3	7,8	8,4
23	3,9	2,8	1,9	0,6	-0,5
24	3,6	4,7	5,5	6,8	7,5
25	5,7	5,1	4,5	3,9	3,3
26	4,7	3,9	2,6	1,7	0,5
27	5,2	6,1	7,0	8,4	8,9
28	3,0	3,8	4,2	5,1	5,9
29	5,2	4,5	4,0	3,2	1,9
30	3,8	2,7	1,6	0,8	-0,3

## Тема 6. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

|| Метод Ейлера. Метод Рунге—Кутта.



Література: [6], [10, гл. 6, с. 121—133], [11], [18, гл. 6, с. 265—296].

### Т.6 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

#### 6.1. Метод Ейлера

Нехай треба розв'язати задачу Коші, тобто знайти такий розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y), \quad (5.43)$$



який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0.$$

Розглянемо *метод Ейлера* побудови наближеного розв'язку такої задачі на проміжку  $[x_0; x]$ . Розіб'ємо відрізок  $[x_0; x]$  на  $n$  рівних частин точками  $x_i = x_0 + hi$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), де  $h = \frac{x - x_0}{n}$  — крок процесу. Вважатимемо, що на проміжку  $[x_0; x_0 + h]$  ( $[x_0; x_1]$ ) похідна  $y'$  зберігає сталі значення і дорівнює  $f(x_0, y_0)$ . Тоді

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0),$$

де  $y_1$  — значення шуканої функції в точці  $x_1 = x_0 + h$ . Звідси

$$y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0).$$

Повторюючи операцію для наступних проміжків  $[x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$ , послідовно дістають значення шуканої функції в точках  $x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} y_2 &\approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1), \\ y_3 &\approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &\approx y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

У результаті обчислень дістають наближену інтегральну криву у вигляді ламаної з вершинами  $M_i(x_i, y_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Порядок похибки методу Ейлера на інтервалі  $[x_i; x_{i+1}]$  дорівнює  $h^2$ , а на всьому відрізку  $[a; b]$  —  $h$ , тобто метод Ейлера має перший порядок точності. Отже, для підвищення точності в 10 разів (для обчислення одного додаткового десяткового знака) потрібно збільшити кількість точок розбиття також у 10 разів, що значно збільшить обсяг обчислювальної роботи. У цьому полягає основний недолік методу.

## 6.2. Метод Рунге—Кутта

Є кілька шляхів побудови чисельних методів розв'язання задачі Коші вищої за порядком точності відносно  $h$ . Один із них ґрунтується на використанні розкладання розв'язку за формулою Тейлора (інакше кажучи, розкладання в ряд). Проте на практиці перевагу надають методам, які

вимагають фактичного обчислення лише значень правої частини рівняння (5.43), без використання її похідних. Саме такими і є методи Рунге–Кутта.

Найпоширенішим на практиці є метод Рунге–Кутта четвертого порядку точності. Як і в методі Ейлера відрізок  $[x_0; x]$  розбивають на  $n$  рівних частин. Обчислення проводять за формулами:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}),$$

де

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= h \cdot f(x_i, y_i), & k_2^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), & k_4^{(i)} &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}) \\ & & & (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Похибка на кожному кроці цього методу має порядок  $h^5$ , а сумарна похибка методу на всьому інтервалі —  $h^4$ . Таким чином, якщо число точок розбиття збільшити у 10 разів, то точність підвищиться в 10 000 разів.

## Т.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Використовуючи методи Ейлера та Рунге–Кутта, проінтегруйте диференціальне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = -y \cos 3x \tag{5.44}$$

на проміжку  $x \in [0; 2]$  за початкової умови  $y(0) = 1$  ( $x_0 = 0, y_0 = 1$ ).

*Розв'язання.* Задане рівняння зручне для ілюстрації тим, що воно має аналітичний розв'язок, який шукається відокремленням змінних:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -\cos 3x dx, & d \ln y &= -\frac{1}{3} d \sin 3x, & \ln y &= -\frac{\sin 3x}{3} + C, \\ y &= e^{-\frac{\sin 3x}{3} + C} = C_1 e^{-\frac{\sin 3x}{3}}, \end{aligned} \tag{5.45}$$

де  $C$  та  $C_1$  – довільні сталі, які пов'язані між собою очевидним співвідношенням  $C_1 = e^C$ . Вираз (5.45) є загальним розв'язком диференціального рі-

вняння (5.44). Скориставшись початковою умовою  $y(0) = 1$ , дістанемо частинний розв'язок

$$y = e^{\frac{\sin 3x}{3}}. \quad (5.46)$$

Цей аналітичний розв'язок буде використано як точний (еталонний) для порівняння з ним результатів наближених чисельних розв'язків рівняння (5.44) методами Рунге—Кутта.

З метою чисельного інтегрування рівняння (5.44) виберемо крок інтегрування  $h = 0,2$ . При цьому значенні інтегрування на всьому інтервалі  $x \in [0; 2]$  буде здійснене за  $n = \frac{2-0}{0,2} = 10$  кроків.

Результати чисельного інтегрування заданого рівняння методами Ейлера та Рунге—Кутта подано в табл. 5.28 та 5.29.

Таблиця 5.28

$n$	$x_i$	$y_i$ (за методом Ейлера)	$n$	$x_i$	$y_i$ (за методом Ейлера)
0	0	1,000	6	1,2	0,890
1	0,2	0,800	7	1,4	1,050
2	0,4	0,668	8	1,6	1,153
3	0,6	0,620	9	1,8	1,133
4	0,8	0,648	10	2,0	0,989
5	1	0,743			

Таблиця 5.29

$n$	$x_i$	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$y_i$ (за методом Рунге— Кутта 4-го порядку)
0	0	—	—	—	—	1,000
1	0,200	-0,200	-0,172	-0,185	-0,136	0,828
2	0,400	-0,137	-0,094	-0,097	-0,053	0,733
3	0,600	-0,053	-0,010	-0,010	0,033	0,723
4	0,800	0,033	0,075	0,077	0,118	0,798
5	1,000	0,118	0,155	0,158	0,189	0,954
6	1,200	0,189	0,207	0,209	0,209	1,159
7	1,400	0,208	0,183	0,182	0,131	1,337
8	1,600	0,131	0,059	0,058	-0,024	1,394
9	1,800	-0,024	-0,104	-0,101	-0,164	1,294
10	2,000	-0,164	-0,202	-0,199	-0,210	1,098

Порівняємо одержані результати з точним розв'язком (5.46). Для цього обчислимо за формулою (5.46) значення функції  $y(x)$  у точках розбиття відрізка  $[0; 2]$ . Як видно з табл. 5.30, наближений розв'язок обчислений методом Рунге—Кутта практично збігається з точним розв'язком задачі Коші.

Таблиця 5.30

$n$	$x_i$	$y_i$ (аналітичний розв'язок (6.7))	$y_i$ (за методом Ейлера)	$y_i$ (за методом Рунге— Кутта)
0	0	1,000	1,000	1,000
1	0,200	0,828	0,800	0,828
2	0,400	0,733	0,668	0,733
3	0,600	0,723	0,620	0,723
4	0,800	0,798	0,648	0,798
5	1,000	0,954	0,743	0,954
6	1,200	1,159	0,890	1,159
7	1,400	1,337	1,050	1,337
8	1,600	1,394	1,153	1,394
9	1,800	1,294	1,133	1,294
10	2,000	1,098	0,989	1,098

### Т.6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Проінтегруйте рівняння  $y' = y(1 - x)$  на проміжку  $[0; 1]$  за умови  $y(0) = 1$ , використовуючи методи Ейлера та Рунге—Кутта (крок  $h = 0,1$ ; точний розв'язок  $y = e^{\frac{1-x^2}{2}}$ ).

#### Відповіді

1. Див. табл. 5.31.

Таблиця 5.31

Метод	$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Ейлера	$y$	1,000	1,105	1,208	1,309	1,404	1,491	1,567	1,631	1,681	1,715	1,732
Рунге— Кутта		1,000	1,099	1,197	1,290	1,377	1,455	1,522	1,576	1,616	1,640	1,648
Точний розв'язок		1,000	1,099	1,197	1,290	1,377	1,455	1,522	1,576	1,616	1,640	1,648

## Т.6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Проінтегруйте диференціальні рівняння методами Ейлера і Рунге—Кутта на заданому інтервалі  $[a; b]$  при заданих початкових умовах  $y_0 = y(x_0)$  (табл. 5.32). Проміжок інтегрування розбийте на 10 рівних частин. Результати інтегрування подайте у вигляді таблиць. Розрахунки порівняйте з точним розв'язком заданого диференціального рівняння.

Таблиця 5.32

Номер варіанта	Диференціальне рівняння	Інтервал інтегрування	Початкова умова
1	$y' = y + 3x$	$x \in [0; 2]$	$x_0 = 0, y_0 = 4$
2	$y' = x - 2y$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
3	$y' = x^2 \sqrt{y}$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 0$
4	$y' = x^2 - y$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 2$
5	$y' = x^2 - y$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
6	$y' = 3x^2y - x^2 e^{x^3}$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
7	$(x^2+1)y' = 4xy$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 4$
8	$y(4+x^2)y' = x(4+y^2)$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 2$
9	$(x+1)y' = 2y$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 4$
10	$y(1+x^2)y' = x(1+y^2)$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 0$
11	$y' = y + xe^{2x}$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
12	$y' = x \sqrt{y}$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
13	$(2x+1)y' = y$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 3$
14	$(x^2+4)y' = 2xy$	$x \in [0; 2]$	$x_0 = 0, y_0 = 4$
15	$y' = -2y + 2x$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
16	$y' = -4y + 4x + 1$	$x \in [0; 2]$	$x_0 = 0, y_0 = 0$
17	$y' = -y - xe^x$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
18	$y' = 3x^5 - 3x^2y$	$x \in [0; 1]$	$x_0 = 0, y_0 = 1$
19	$(x+2)y' = 3y$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 0, y_0 = 8$
20	$y' = y \sin 2x$	$x \in [1; 3]$	$x_0 = 1, y_0 = 2$

Номер варіанта	Диференціальне рівняння	Інтервал інтегрування	Початкова умова
21	$y' = y^2 \cos x$	$x \in [2; 4]$	$x_0 = 2, y_0 = 3$
22	$y' = \sqrt{y} \sin 4x$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 3$
23	$y' = y \ln 2x$	$x \in [5; 7]$	$x_0 = 5, y_0 = 4$
24	$y' = 5y^2 x$	$x \in [6; 8]$	$x_0 = 6, y_0 = 2$
25	$y' = 3yx^3$	$x \in [2; 3]$	$x_0 = 2, y_0 = 5$
26	$y' = (xy)^2$	$x \in [3; 5]$	$x_0 = 3, y_0 = 1$
27	$y' = y^3 x^2$	$x \in [1; 3]$	$x_0 = 1, y_0 = 3$
28	$(x^2 + 1)y' = 2xy$	$x \in [1; 2]$	$x_0 = 1, y_0 = 2$
29	$(x - 1)y' = 2y$	$x \in [2; 4]$	$x_0 = 2, y_0 = 4$
30	$y' = y^3 x^{-2}$	$x \in [1; 3]$	$x_0 = 1, y_0 = 3$

## ДОДАТКИ

**I. Основні правила диференціювання.** Нехай  $u(x)$ ,  $v(x)$  — диференційовні в точці  $x$  функції,  $C$  — стала. Тоді виконуються формули:

$$1. (u + v)' = u' + v'.$$

$$2. (uv)' = u'v + uv'.$$

$$3. (Cu)' = Cu'.$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

**II. Похідна складеної функції.** Якщо функція  $y = f(u)$  має похідну в точці  $u$ , а функція  $u = g(x)$  — в точці  $x$ , то складена функція  $y = f(g(x))$  диференційовна в точці  $x$ , причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

## III. Формули диференціювання основних елементарних функцій

$$1. (C)' = 0$$

$$2. (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$3. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$5. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$6. (e^x)' = e^x$$

$$7. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$9. (\sin x)' = \cos x$$

$$10. (\cos x)' = -\sin x$$

$$11. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$12. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$13. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$18. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$19. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$20. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

IV. Диференціал  $dy$  функції  $y = f(x)$  у точці  $x$ :  $dy = f'(x)dx$ .

V. Таблиця інтегралів основних елементарних функцій

1. $\int 0 dx = C$ .	2. $\int dx = x + C$ .
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ .	4. $\int \frac{dx}{x} = \ln  x  + C$ .
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ .	6. $\int e^x dx = e^x + C$ .
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ .	8. $\int \cos x dx = \sin x + C$ .
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ .	10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ .
11. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ .	12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$ .
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ .	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C$ .
15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ .	16. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ .
17. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$ .	18. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$ .
19. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln  \cos x  + C$ .	20. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln  \sin x  + C$ .

VI. Таблиця зображень основних функцій оригіналів

№	Оригінал	Зображення
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$\eta(t - t_0)$	$\frac{e^{-t_0 p}}{p}$
3	$t^n$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$



№	Оригінал	Зображення
5	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{\omega^2 + p^2}$
6	$\cos \omega t$	$\frac{p}{\omega^2 + p^2}$
7	$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
8	$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
9	$\sin(\omega t - \alpha), \alpha > 0$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\alpha}{\omega} p}$
10	$\cos(\omega t - \alpha), \alpha > 0$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2} e^{-\frac{\alpha}{\omega} p}$
11	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
12	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
13	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
14	$t \text{ch } \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
15	$t \text{sh } \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
16	$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
17	$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$
18	$a^t$	$\frac{1}{p - \ln a}$

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987. — 600 с.
2. Буйвол В. М., Денисюк В. П. Елементи теорії поля: Навч. посібник. — К.: НАУ, 2004. — 72 с.
3. Валсєв К. Г., Джалладова І. Л. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 2. — 451 с.
4. Гасва К. А., Супрун О. М. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення. Збірник задач. — К.: НАУ, 2003. — 192 с.
5. Гасва К. А., Супрун О. М., Чевський В. М. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення: Навч. посібник. — К.: КМУЦА, 1997. — 120 с.
6. Денисюк В. П. Чисельні методи. Тексти лекцій. — К.: НАУ, 2003. — 76 с.
7. Денисюк В. П., Ренета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч.— Ч. 1. Книжкове вид-во НАУ, 2005. — 298 с.
8. Денисюк В. П., Ренета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч.— Ч. 2. — К.: — Книжкове вид-во НАУ, 2005. — 276 с.
9. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.
10. Заварькин В. М., Житомирский В. Г., Ланчик М. П. Численные методы. — М.: Просвещение, 1991. — 172 с.
11. Клешина Н. О, Шквар Є. О., Коробова М. В. Чисельні методи в інженерних задачах: Методичні вказівки. — К.: КМУЦА, 2002. — 40 с.
12. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И., Шикин Е. В., Залятин В. И., Соболев С. К. Вся высшая математика: Учебник. — Т. 4. — М.: Эдиториал УРСС, 2001. — 352 с.
13. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 255 с.
14. Овчинников П. П. Вища математика: Підручник: У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. — К.: Техніка, 2000. — 792 с.
15. Пак В. В., Носенко Ю. Л. Вища математика: Підручник. — Д.: Видавництво Сталкер, 2003. — 496 с.
16. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. — М.: Наука, 1985. — Т. 2. — 456 с.
17. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 256 с.
18. Фильчаков П. Ф. Численные и графические методы прикладной математики. — К.: Наук. думка, 1970. — 792 с.

## ЗМІСТ

Вступ . . . . .	3
<b>Модуль 1. РЯДИ . . . . .</b>	<b>4</b>
<i>Тема 1. Числові ряди . . . . .</i>	<i>5</i>
<i>Тема 2. Функціональні ряди . . . . .</i>	<i>40</i>
<i>Тема 3. Ряди Фур'є . . . . .</i>	<i>76</i>
<i>Тема 4. Інтеграл Фур'є . . . . .</i>	<i>98</i>
<b>Модуль 2. КРАТНІ, КРИВОЛІНІЙНІ, ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ . . . . .</b>	<b>110</b>
<i>Тема 1. Подвійні інтеграли . . . . .</i>	<i>112</i>
<i>Тема 2. Потрійні інтеграли . . . . .</i>	<i>142</i>
<i>Тема 3. Криволінійні інтеграли . . . . .</i>	<i>160</i>
<i>Тема 4. Поверхневі інтеграли . . . . .</i>	<i>190</i>
<i>Тема 5. Елементи теорії поля . . . . .</i>	<i>213</i>
<b>Модуль 3. ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ . . . . .</b>	<b>240</b>
<i>Тема 1. Комплексні числа (огляд). Функція комплексної змінної. Ряди з комплексними членами. Основні елементарні функції . . . . .</i>	<i>241</i>
<i>Тема 2. Диференціювання та інтегрування функції комплексної змінної . . . . .</i>	<i>272</i>
<i>Тема 3. Ряд Тейлора. Ряд Лорана. Ізольовані особливі точки, їх класифікація. Лишки та їх застосування . . . . .</i>	<i>298</i>
<b>Модуль 4. ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ . . . . .</b>	<b>334</b>
<i>Тема 1. Оригінал та зображення за Лапласом. Властивості перетворення Лапласа. Знаходження зображень різних функцій . . . . .</i>	<i>335</i>
<i>Тема 2. Відшукування оригіналу за його зображенням. Застосування перетво- рення Лапласа до розв'язання диференціальних рівнянь. Формула Дюамеля . . . . .</i>	<i>360</i>
<b>Модуль 5. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ . . . . .</b>	<b>385</b>
<i>Тема 1. Наближені методи розв'язання рівнянь . . . . .</i>	<i>386</i>
<i>Тема 2. Наближене обчислення визначених інтегралів . . . . .</i>	<i>397</i>
<i>Тема 3. Інтерполювання функцій. Інтерполяційний многочлен Лагранжа . . . . .</i>	<i>407</i>
<i>Тема 4. Інтерполювання сплайнами . . . . .</i>	<i>417</i>
<i>Тема 5. Метод найменших квадратів . . . . .</i>	<i>423</i>
<i>Тема 6. Чисельне інтегрування диференціальних рівнянь . . . . .</i>	<i>432</i>
<i>Додатки . . . . .</i>	<i>439</i>
<i>Список рекомендованої і використаної літератури . . . . .</i>	<i>442</i>
	443

*Навчальне видання*

ДЕНИСЮК Володимир Петрович  
РЕПЕТА Віктор Кузьмич  
ГАСВА Катерина Антонівна  
КЛЕШНЯ Надія Олександрівна

# ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модульна технологія навчання

Навчальний посібник  
У чотирьох частинах

*Частина 3*

Художник обкладинки *Т. Зябліцева*  
Редактор *П. Тютюнник*  
Верстка *О. Іваненко*

Підп. до друку 23.02.09. Формат 60×84/16. Папір офс.  
Офс. друк. Ум. друк. арк. 25,80. Обл.-вид. арк. 27,75.  
Тираж 1000 прим. Замовлення № 44-1. Вид. № 06-116.

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»  
03680, Київ-58, просп. Космонавта Комарова, 1  
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК, № 977 від 05.07.2002  
Тел. (044) 406-71-33. Тел./факс (044) 406-78-28

E-mail: [publish@nau.edu.ua](mailto:publish@nau.edu.ua)