В. П. Денисюк, В. К. Репета

Вища математика

МОДУЛЬНА ТЕХНОЛОГІЯ НАВЧАННЯ

У чотирьох частинах

Частина 2

Четверте видання, стереотипне

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів
технічних спеціальностей
вищих навчальних закладів*

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»

2009

УДК 51(075.8)
ББК В 161.я7
Д 332

Рецензенти:

В. І. Нікішов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Інститут гідромеханіки)

Н. О. Вірченко, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Національний технічний університет України «КПІ»)

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист № 14/18.2-2872 від 29.12.2004)

Денисюк В. П.
Д 332 Вища математика. Модульна технологія навчання: навч. посіб. У 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета : – 4-те вид., стереотип. – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 276 с.

ISBN 978–966–598–515–0
ISBN 978–966–598–518–1 (частина 2)

У посібнику запропоновано модульну технологію вивчення вищої математики.

Викладено основні розділи курсу вищої математики (диференціальне числення функції кількох змінних, інтегральне числення функції однієї змінної, диференціальні рівняння), які традиційно вивчаються у другому семестрі.

Навчальний матеріал поділено на логічно завершені розділи — модулі, які складаються з тем (мікромодулів). Кожна тема містить стислі теоретичні відомості, практичну частину, у якій наведено приклади розв'язання типових вправ, завдання для аудиторної та самостійної роботи з відповідями, а також індивідуальні тестові завдання.

Для студентів першого курсу вищих технічних навчальних закладів.

УДК 51(075.8)
ББК В 161.я7

ISBN 978–966–598–515–0
ISBN 978–966–598–518–1 (частина 2)

ВСТУП

У посібнику запропоновано модульну технологію вивчення курсу вищої математики у другому семестрі для студентів інженерних спеціальностей.

Матеріал другого семестру поділяється на три модулі:

1) диференціальне числення функції кількох змінних. Комплексні числа;
2) інтегральне числення функції однієї змінної;
3) диференціальні рівняння.

Кожен модуль містить загальні положення, в яких сформульовані теми розділу, базисні поняття, основні задачі, вимоги до теоретичних та практичних знань і вмінь студентів, якими вони повинні володіти після вивчення цього модуля.

Тема (мікромодуль) містить:

1) теоретичну частину;
2) практичну частину;
3) індивідуальні тестові завдання.

У теоретичній частині у стислій формі викладено необхідний матеріал для опанування розглядуваної теми (конспект лекції). До всіх тем подано посилання на літературу, що дасть можливість студентам у разі необхідності більш детально і ґрунтовно опанувати теоретичний матеріал.

Практична частина містить приклади розв’язання типових задач, які ілюструють теоретичний матеріал, а також вправи з відповідями для аудиторної і самостійної роботи студентів.

Наприкінці теми вміщено індивідуальні тестові завдання для контролю засвоювання студентами матеріалу даного модуля. На кожному практичному занятті студент здає індивідуальне завдання попереднього мікромодуля, виконане у письмовій формі.

Зважаючи на різну кількість годин, відведених за планом для вивчення вищої математики студентами різних спеціальностей, провідний викладач (лектор) може коригувати вміст модулів, кількість тестових завдань, які студент повинен виконати протягом семестру. Про це викладач повідомляє студентів на початку семестру.

Автори посібника висловлюють подяку співробітникам кафедри вищої та обчислювальної математики НАУ Олешко Тетяні Анатоліївні та Погребецькій Тетяні Олександрівні за допомогу у підготовці посібника.

Модуль **1**

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Загальна характеристика модуля. Диференціальне числення функції кількох змінних є продовженням і розвитком диференціального числення функції однієї змінної. Більшість питань розв'язується аналогічно. Крім того, у модулі вводиться поняття комплексного числа, розглядаються дії з комплексними числами. Цей матеріал використовується при вивченні інших розділів вищої математики та деяких технічних дисциплін.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

Тема 1. Функція кількох змінних. Основні поняття, границя та неперервність.
Тема 2. Похідні та диференціали функції кількох змінних.
Тема 3. Деякі застосування частинних похідних.
Тема 4. Комплексні числа.

Базисні поняття. **1.** Функція кількох змінних. **2.** Границя, неперервність функції кількох змінних. **3.** Частинна похідна. **4.** Повний диференціал. **5.** Екстремум. **6.** Дотична площина та нормаль до поверхні. **7.** Градієнт. **8.** Комплексне число. **9.** Модуль і аргумент комплексного числа.

Основні задачі. **1.** Відшукання області визначення функції кількох змінних. **2.** Відшукання частинних похідних і повних диференціалів першого і вищих порядків. **3.** Відшукання частинних похідних складених і неявних функцій. **4.** Відшукання екстремумів, найбільших та найменших значень функції. **5.** Дії з комплексними числами.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Функція кількох змінних, область визначення, множина значень, способи задання.

1.2. Складена функція, неявна функція кількох змінних. Найпростіші випадки.

1.3. Границя та неперервність функції кількох змінних, властивості.

1.4. Частинний приріст і частинна похідна.

1.5. Частинні похідні вищих порядків.

1.6. Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.

1.7. Похідні складених та неявних функцій.

1.8. Повний приріст і повний диференціал функції кількох змінних.

1.9. Повні диференціали вищих порядків.

1.10. Формула Тейлора.

1.11. Екстремум функції. Необхідна і достатня умови екстремуму функції двох змінних.

1.12. Умовний екстремум.

1.13. Найбільше та найменше значення функції. Алгоритм відшукання найбільшого та найменшого значення функції в обмеженій замкненій області.

1.14. Дотична площина та нормаль до поверхні.

1.15. Похідна за напрямом.

1.16. Градієнт.

1.17. Комплексні числа; алгебраїчна, тригонометрична, показникова форми запису; геометрична інтерпретація.

1.18. Дії з комплексними числами: додавання, віднімання, множення, ділення.

1.19. Формули Ейлера.

2. Знання на рівні доведень та виведень

2.1. Формула для похідної складеної функції двох аргументів.

2.2. Необхідна умова екстремуму.

2.3. Виведення рівняння дотичної та нормалі до поверхні.

2.4. Формула для обчислення похідної за напрямом.

2.5. Піднесення комплексного числа до натурального степеня (формула Муавра), добування кореня n-го степеня.

3. Уміння в розв'язанні задач

3.1. Знаходити область визначення функції двох змінних.

3.2. Знаходити частинні похідні першого та вищих порядків явно заданої функції.

3.3. Знаходити похідні складених та неявних функцій.

3.4. Знаходити повні диференціали першого і другого порядків функції двох аргументів.

3.5. Знаходити безумовні й умовні екстремуми функції.

3.6. Знаходити найбільше та найменше значення функції в обмеженій замкненій області.

3.7. Будувати рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні.

3.8. Виконувати дії з комплексними числами.

Тема 1. ФУНКЦІЯ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ, ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ

Основні поняття функції кількох змінних. Границя функції кількох змінних. Неперервність функції двох змінних.

Література: [2, розділ 1, п. 1.1], [3, розділ 6, §1], [6, розділ 6, п. 6.1], [7, розділ 8, §1—4], [9, §43].

Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Основні поняття функції кількох змінних

Нехай задано множину D упорядкованих пар чисел (x, y). *Якщо кожній парі чисел $(x, y) \in D$ за певним правилом ставиться у відповідність єдине дійсне число z, то кажуть, що на множині D визначено функцію z від двох змінних x та y і записують $z = f(x, y)$.*

При цьому змінну z називають залежною змінною (*функцією*), а x та y — незалежними змінними (*аргументами*).

Множину пар (x, y), для яких функція $z = f(x, y)$ визначена, називають *областю визначення* (*існування*) цієї функції і позначають $D(f)$, або D.

Множину значень z позначають $E(f)$, або E.

Кожній упорядкованій парі чисел (x, y) у прямокутній декартовій системі координат взаємно однозначно відповідає точка $M(x; y)$ площини Oxy. Тому функцію $z = f(x, y)$ можна розглядати як функцію точки $M(x; y)$ і писати $z = f(M)$.

Значення функції $z = f(x, y)$ в точці $M_0(x_0;\ y_0)$ позначають так: $z_0 = f(x_0, y_0)$, або $z_0 = f(M_0)$, або $z = z\big|_{M_0}$.

Областю визначення функції двох змінних $z = f(x, y)$ є деяка множина точок координатної площини R^2 (площини Oxy).

Будь-який упорядкований набір m дійсних чисел $x_1,\ x_2,\ ..., x_m$ позначають $(x_1, x_2,\ ...,\ x_m)$, або $M(x_1; x_2;\ ...; x_m)$, і називають точкою m-вимірного координатного простору R^m. Числа $x_1, x_2,\ ..., x_m$ називають координатами точки M.

Простір R^1 — це множина всіх дійсних чисел, тобто координатна пряма; R^2 — множина усіх дійсних пар (x, y), тобто координатна площина; R^3 — множина всіх дійсних трійок (x, y, z), тобто координатний простір.

Відстань між точками $M(x_1; x_2; \ldots; x_m)$ і $M_0(x_1^0;\ x_2^0;\ \ldots;\ x_m^0)$ визначають за формулою

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \ldots + (x_m - x_m^0)^2}.$$

Множину всіх точок *M*, координати яких задовольняють нерівність $\rho(M, M_0) < \varepsilon$, називають ε — *околом* точки M_0. Так, ε — *окіл* точки $M_0(x_0, y_0)$ — множина всіх точок площини, які розміщені всередині кола радіуса ε з центром у точці M_0.

Лінію, що обмежує область *D*, називають *межею області визначення*. Точки області, які не лежать на її межі, називають *внутрішніми*. Область, яка містить лише внутрішні точки, називають *відкритою*. Якщо ж до області визначення належать і всі точки межі, то таку область називають *замкненою*.

Якщо всі точки області *D* містяться всередині деякої *m*-вимірної кулі, то цю область називають *обмеженою*.

Область *D* називають *зв'язною*, якщо дві довільні її точки можна з'єднати неперервною кривою, усі точки якої містяться в області D.

Наприклад, круг — це зв'язна область, а об'єднання двох кругів, які не мають спільних точок, — незв'язна область.

Надалі під околом точки *M* будемо розуміти довільну відкриту зв'язну множину, яка містить точку *M*.

Узагальнимо поняття функції на випадок трьох і більше незалежних змінних.

Якщо кожній трійці чисел $(x, y, z) \in D$ *за певним правилом відповідає єдине число* u, *то кажуть, що на множині D визначено функцію* u *від трьох змінних* x, y *та* z, *і записують* $u = f(x, y, z)$, *або* $u = f(M)$.

Тут u — залежна змінна (функція), а x, y, z — незалежні змінні (аргументи). Область існування функції $u = f(x,\ y,\ z)$ – деяка множина точок простору R^3. Саму функцію геометрично зобразити неможливо.

Наприклад, областю існування функції $u = \ln(4 - x^2 - y^2 - z^2)$ є куля радіуса 2 з центром у початку координат. Цій області не належать точки сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ — межі області. Отже, шукана область відкрита. Множиною значень даної функції є проміжок $(-\infty;\ \ln 4]$.

Якщо кожній точці $M(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m)$ із області D ставиться за певним правилом у відповідність деяке число u, то кажуть, що на множині D визначено функцію m змінних, і пишуть $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, або $u = f(M)$.

1.2. Границя функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в деякій області D і точка M_0 — гранична точка області D, тобто точка $M_0 \in D$ або $M_0 \notin D$, але в довільному околі цієї точки міститься принаймні одна точка множини D, відмінна від точки M_0.

> Число b називають границею функції $f(M)$ у скінченній точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, які задовольняють умову $0 < \rho(M, M_0) < \delta$, виконується нерівність
> $$\left| f(x, y) - b \right| < \varepsilon .$$

При цьому пишуть: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$, або $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$.

Слід пам'ятати, що границя функції, якщо вона існує, не залежить від шляху наближення до точки, в якій ця границя шукається. Інакше границя не існує. *Для доведення неіснування границі функції кількох змінних достатньо вказати хоча б такі два шляхи наближення точки M до точки M_0, вздовж яких границі набувають різних значень.*

Обчислення границь у багатьох випадках доцільно виконувати у такій послідовності:

1. Перенести початок координат у точку $M_0(x_0, y_0)$ (якщо не всі координати точки M_0 дорівнюють нулю). Так, якщо $x_0 \neq 0$, виконують заміну

$$t = \begin{cases} x - x_0, & \text{якщо } x_0 \neq 0,\ x_0 \neq \infty, \\ \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } \ x_0 = \infty. \end{cases}$$

Наприклад, якщо $M(x; y) \to M_0(2;\ \infty)$, то після заміни $t_1 = x - 2$, $t_2 = 1/y$ дістанемо $M(t_1, t_2) \to M_0(0;\ 0)$.

2. Інколи необхідно перейти до полярних координат із полюсом у точці $M_0(x_0, y_0)$ і полярною віссю, напрям якої збігається з додатним напрямом осі абсцис, тоді перехід від прямокутних декартових координат (x, y) до полярних координат (ρ, φ) (рис. 1.1) здійснюється за формулами:

$$\boxed{x - x_0 = \rho\cos\varphi,\ \ y - y_0 = \rho\sin\varphi,}$$

де

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},\ \ 0 \le \rho < \infty,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Отже, задача відшукання границі $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ зводиться до обчислення границі $\lim\limits_{\rho \to 0} f(M)$, де ρ є однією з координат точки *M*, а інша координата (кут φ) вважається довільною. *При цьому казати про існування границі можна тільки тоді, коли існує та сама границя при* $\rho \to 0$ *при будь-яких залежностях* $\varphi = \varphi(\rho)$, $\theta = \theta(\rho)$.

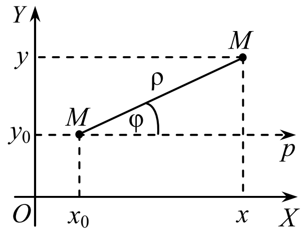

Рис. 1.1

1.3. Неперервність функції двох змінних

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ належить області визначення функції $u = f(x, y)$.

Функцію $u = f(x, y)$ називають *неперервною* в точці M_0, якщо виконується рівність

$$\lim_{\substack{x \to x_0, \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0), \tag{1.1}$$

тобто

$$\boxed{\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0),}$$

причому точка *M* прямує до точки M_0 довільно, залишаючись в області визначення функції.

Позначимо $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$. Тоді формулу (1.1) можна записати так:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0}} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0,$$

або

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta u = 0,$$

де $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ — відстань між точками M та M_0, Δu — повний приріст функції в точці M_0.

Функцію, неперервну в кожній точці деякої області, називають неперервною в цій області.

Якщо в деякій точці M_0 не виконується умова неперервності, то цю точку називають *точкою розриву*. Це досягається у таких випадках:

1) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0, за винятком самої точки M_0;

2) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0, але не існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3) функція визначена в усіх точках деякого околу точки M_0, існує $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$, але $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Сформулюємо властивості неперервних функцій у замкненій обмеженій області.

Теорема 1 Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області *D,* то вона обмежена в цій області, тобто існує таке число $M > 0$, що для всіх точок області *D* виконується нерівність

$$|f(x, y)| < M.$$

Теорема 2 Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області, то в цій області існують точки, в яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.

Теорема 3 Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна у замкненій обмеженій області *D* та існують точки M_1 і M_2 у цій області, в яких функція набуває значень різного знака, тобто $f(M_1)f(M_2) < 0$, то існує точка $M_0 \in D$, для якої $f(M_0) = 0$.

Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Визначте область існування функції $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Вираз $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$ має зміст, якщо $x^2 - y^2 \neq 0$, тобто $x \neq y$ та $x \neq -y$. Областю існування даної функції є вся площина Oxy, за винятком прямих $y = x$ та $y = -x$, зображених на рис. 1.2 пунктирною лінією. Шукана область є необмеженою, відкритою і незв'язною.

2. Знайдіть область визначення і множину значень функції

$$z = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}\ .$$

Розв'язання. Функція $z(x, y)$ визначена в усіх точках (x, y), для яких підкореневий вираз невід'ємний, тобто виконується нерівність

$$36 - 4x^2 - 9y^2 \geq 0\,.$$

Межа даної області описується рівнянням $4x^2 + 9y^2 = 36$, яке запишемо так: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Це рівняння визначає в площині Oxy еліпс із центром у початку координат і півосями $a = 3$ і $b = 2$, який ділить площину на дві частини (рис. 1.3). Для точок однієї з цих частин виконується умова $36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$, а для іншої — $36 - 4x^2 - 9y^2 < 0$. Щоб виявити, яка з цих частин є областю визначення даної функції, достатньо перевірити умову $36 - 4x^2 - 9y^2 > 0$ для однієї довільної точки, яка не належить еліпсу. Точка $(0;\ 0)$, яка лежить усередині еліпса, задовольняє дану умову. Отже, областю визначення є множина точок, обмежена еліпсом, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. При цьому сам еліпс також належить області визначення.

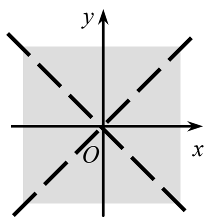

Рис. 1.2

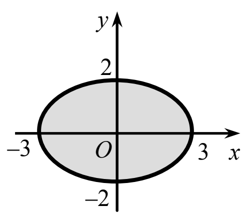

Рис. 1.3

Відзначимо, що шукана область замкнена, обмежена і зв'язна. Множиною значень функції $z(x, y)$ є відрізок $[0, 6]$.

3. Знайдіть область визначення функції

$$z = \sqrt{y - x + 2} + \arcsin\frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Розв'язання. Область визначення цієї функції визначаємо із системи нерівностей

$$\begin{cases} y - x + 2 \geq 0, \\ -1 \leq \dfrac{x^2 + y^2}{4} \leq 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} y \geq x - 2, \\ x^2 + y^2 \leq 4. \end{cases}$$

Графічним образом нерівності $y \geq x - 2$ є півплощина, розміщена над прямою $y = x - 2$, разом з цією прямою. Нерівність $x^2 + y^2 \leq 4$ визначає в площині круг із центром у початку координат і радіусом 2. Перетин цих множин і є областю визначення даної функції (рис. 1.4). Шукана множина є обмеженою, замкненою і зв'язною.

4. Обчисліть $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.

Розв'язання. Функція $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$ обмежена: $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} < \dfrac{\pi}{2}$. При $x \to 0$ та $y \to 0$ сума $x^2 + y^2$ є нескінченно малою величиною. Оскільки добуток нескінченно малої величини на обмежену є нескінченно малою величиною, то

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0.$$

5. Доведіть, що $\lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} \dfrac{2xy}{x^2 + xy + y^2}$ не існує.

Розв'язання. Нехай точка $(x; y)$ наближається до точки $(0; 0)$ по прямій $y = kx$ (рис. 1.5).

Тоді

$$\lim_{\substack{x \to 0, \\ y \to 0}} \frac{2xy}{x^2 + xy + y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 k}{x^2 + x^2 k + x^2 k^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2k}{1 + k + k^2} = \frac{2k}{1 + k + k^2}.$$

Значення виразу $\dfrac{2k}{1+k+k^2}$ змінюється зі зміною кутового коефіцієнта k, тобто від вибору прямої, вздовж якої точка $(x;y)$ наближається до точки $(0;\ 0)$. Це означає, що границя не існує.

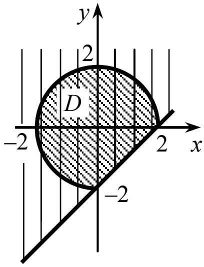

Рис. 1.4

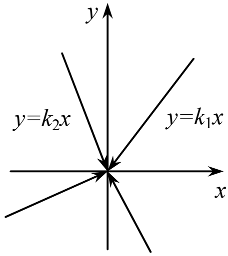

Рис. 1.5

6. Доведіть, що $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^4 y}{x^8+y^2}$ не існує.

Розв'язання. Розглянемо спочатку границю за умови, що $y = kx$ ($k = \text{const}$). Маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^4 y}{x^8+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5 k}{x^8+x^2k^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 k}{x^6+k^2} = 0 .$$

Проте це ще не означає, що шукана границя існує і також дорівнює нулю.

Нехай точка $(x;y)$ прямує до точки $(0;0)$ вздовж кривої $y = x^4$, тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^4 y}{x^8+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8+x^8} = \frac{1}{2} .$$

Отже, значення границі залежить від шляху наближення довільної точки $(x;y)$ до точки $(0;0)$, а тому границя не існує.

7. Обчисліть $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^4}-e^{y^4}}{x^2-y^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{e^{x^4} - e^{y^4}}{x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{e^{y^4}(e^{x^4-y^4} - 1)}{x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{e^{x^4-y^4} - 1}{x^2 - y^2} =$$

$$\left| \begin{matrix} x^4 - y^4 \to 0 \\ e^{x^4-y^4} - 1 \sim x^4 - y^4 \end{matrix} \right| = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} (x^2 + y^2) = 0 .$$

8. Дослідіть на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}, & \text{якщо } x - y \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } \ x - y = 0 \end{cases}$$

у точці $(0;0)$.

Розв'язання. Розглянемо границю даної функції вздовж координатної осі ординат. Для цього покладемо $x = 0$, тоді $\lim\limits_{\substack{x=0,\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{x-y} = -1$. Оскільки знайдена границя відмінна від значення функції у точці $(0;0)$: $-1 \neq 0$, то робимо висновок про те, що дана функція у точці $(0;0)$ розривна.

9. Дослідіть на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{якщо } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } \ x = y = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана функція визначена у кожній точці площини *Oxy*. Крім того,

$$\lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \left| \sin(x^2+y^2) \sim x^2 + y^2 \right| = \lim_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1 = f\left(0;\,0\right),$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{\sin(x_0^2+y_0^2)}{x_0^2+y_0^2} \text{ для випадку } x_0^2 + y_0^2 \neq 0 .$$

Згідно з означенням неперервності (1.1) функція $f(x,y)$ неперервна у кожній точці площини *Oxy*.

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть і зобразіть на площині Oxy область визначення функцій.

1. $z = \ln(y - x^2 + 3x - 2)$.

2. $z = \sqrt{(x-1)(y-x^2)}$.

3. $z = \arcsin(x^2 + 4y^2)$.

4. $z = \operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\operatorname{ctg}\pi y$.

5. $z = (\ln(5 - x^2 - y^2))^{-1/2}$.

6. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{1}{x^2 - y^2}$.

Знайдіть і зобразіть у просторі $Oxyz$ область визначення функцій.

7. $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \sqrt{x}$.

8. $u = \sqrt[4]{(x^2 + y^2 - 1)(z^2 - 1)}$.

9. $u = \ln(1 - x^2) + \ln(4 - y^2) + \ln(9 - z^2)$.

10. $u = \arccos x + \arccos 2y + \arccos z^2$.

Обчисліть границю або доведіть, що вона не існує.

11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x + 2y}{x + 6y}$.

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$.

13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x + y)}{x^2 + y^2}$.

14. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to \infty}} \dfrac{\operatorname{arctg}(xy)}{x^2 + y^2}$.

15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 2}} \dfrac{\operatorname{tg}(xy)}{xy^2}$.

16. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to 1}} \dfrac{\sin(x + 2y)}{2xy - 3}$.

17. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to 1}} e^{\frac{xy}{x^2 + y^2}}$.

18. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to \infty}} xe^{-(x^2 + y^2)}$.

Дослідіть функції на неперервність.

19. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$.

20. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - xy + 2y^2}$.

21. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x + \sin y}{x + y}, & \text{якщо } x + y \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x + y = 0. \end{cases}$

22. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & \text{якщо}\quad x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{якщо}\quad x=y=0.\end{cases}$

Знайдіть точки чи лінії розриву функцій.

23. $z=\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **24.** $z=\dfrac{x-y}{x^3+y^3}$. **25.** $z=\dfrac{\sin(x+y)}{\sin(y-x)}$.

Відповіді

1. Рис. 1.6. **2.** Рис. 1.7. **3.** Рис. 1.8. **11.** Не існує. **12.** 0. **13.** ∞. **14.** 0. **15.** $1/2$. **16.** 0. **17.** 1. **18.** 0. **19.** Неперервна при всіх значеннях x та y за винятком точок прямої $y=x$. **20.** Неперервна при всіх значеннях x та y за винятком точки (0; 0). **21.** Неперервна при всіх значеннях x та y. **22.** Неперервна при всіх значеннях x та y. **23.** (**0; 0**) — точка розриву. **24.** Пряма $y=-x$ — лінія розриву. **25.** Сім'я прямих $y=x+\pi n,\ n\in z$ — лінії розриву.

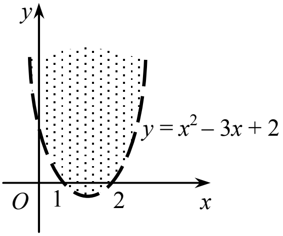

Рис. 1.6

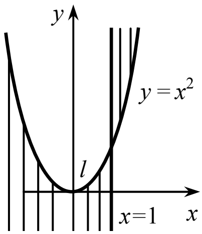

Рис. 1.7

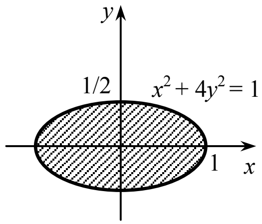

Рис. 1.8

Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Знайдіть і зобразіть на площині Oxy область визначення функції $z(x,y)$.

1.1.1. $z=\ln(x-y)\arccos(x^2+y^2)$. **1.1.2.** $z=\sqrt{x^2-y^2}\,\ln x$.

1.1.3. $z=\sqrt{4-x^2-y^2}\,\ln(x-y)$. **1.1.4.** $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{2x}$.

1.1.5. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}+\sqrt{1-x^2-y^2}$. **1.1.6.** $z=\arcsin\dfrac{x}{x-y}$.

1.1.7. $z=\arccos\dfrac{1}{xy}+(4-x^2-y^2)^{-1/2}$.

1.1.8. $z=\sqrt{\dfrac{9x^2+4y^2-36}{36-4x^2-9y^2}}$.

1.1.9. $z=\ln(9-x^2-y^2)\ln(x^2-1)$.

1.1.10. $z=\dfrac{\sqrt{y-x^2}}{\ln(x+y-1)}$.

1.1.11. $z=\ln\sin x+\ln\cos y$.

1.1.12. $z=\ln(\sin x\sin y)$.

1.1.13. $z=\arcsin\dfrac{y}{x^2}\ln(2-|x|)$.

1.1.14. $z=\sqrt[4]{\dfrac{x^2+y^2-1}{16-x^2-y^2}}$.

1.1.15. $z=\sqrt{y-\sqrt{-x}}+\ln(4-y^2)$.

1.1.16. $z=\ln\dfrac{x^2+y^2}{x+2y}$.

1.1.17. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}\arccos y$.

1.1.18. $z=\sqrt{4-|y|}\ln\sin\pi x$.

1.1.19. $z=\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}-\sqrt{yx}$.

1.1.20. $z=\dfrac{\ln(1-|y|)}{\arcsin x}$.

1.1.21. $z=\arccos\dfrac{x^2+y^2}{e^2}+\arcsin\ln x$.

1.1.22. $z=\ln(y(9-x^2))$.

1.1.23. $z=\ln((x+y)\ln(y-x))$.

1.1.24. $z=\dfrac{\sqrt{y-\ln x}}{x-y}$.

1.1.25. $z=\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}\ln(9-x^2-y^2)$.

1.1.26. $z=\ln(1-xy)\ln(x+y)$.

1.1.27. $z=\operatorname{ctg}\pi x+\arccos\dfrac{x^2+y^2}{2}$.

1.1.28. $z=\ln(x(1-x^2-y^2))$.

1.1.29. $z=((x^2+y^2-1)(x+y))^{1/2}$.

1.1.30. $z=(-\ln(x^2+y^2))^{1/2}$.

1.2. Обчисліть границю або доведіть, що вона не існує.

1.2.1. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{-x+2y}{3x-4y}$.

1.2.2. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{x^2+2xy+3y^2}{x^2+y^2}$.

1.2.3. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.

1.2.4. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{x+6y}{6x-y}$.

1.2.5. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{x^2-xy+2y^2}{x^2+y^2}$.

1.2.6. $\lim\limits_{\substack{x\to0,\\ y\to0}}\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$.

1.2.7. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x+5y}{4x+3y}$.

1.2.8. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-3xy+5y^2}{x^2+y^2}$.

1.2.9. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to \infty}} \dfrac{\operatorname{arctg}(x+y)}{x^2+2y^2}$.

1.2.10. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x}{y}$.

1.2.11. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^6}-e^{y^6}}{x^2-y^2}$.

1.2.12. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{4+y}{3x-5y}$.

1.2.13. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{2x^2-5xy+2y^2}{x-2y}$.

1.2.14. $\lim\limits_{\substack{x\to 3,\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(2xy)}{x^2y+\sin y}$.

1.2.15. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+xy-2y^2}{x-y}$.

1.2.16. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

1.2.17. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} y}$.

1.2.18. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2}-1}{e^{y^2}-1}$.

1.2.19. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-xy-2y^2}{x+y}$.

1.2.20. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 2}} \dfrac{\sin(xy)}{\operatorname{tg}(xy^2)}$.

1.2.21. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^2}-e^{y^2}}{x-y}$.

1.2.22. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{2-\sqrt{4-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$.

1.2.23. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$.

1.2.24. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to \infty}} \dfrac{\operatorname{arcctg}(xy)}{x^2+4y^2}$.

1.2.25. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{x+y}{3x+4y}$.

1.2.26. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$.

1.2.27. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

1.2.28. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^x-1}{e^y-1}$.

1.2.29. $\lim\limits_{\substack{x\to 0,\\ y\to 0}} \dfrac{e^x-1}{y}$.

1.2.30. $\lim\limits_{\substack{x\to \infty,\\ y\to \infty}} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-y)}{3x^2+2y^2}$.

Тема 2. **ПОХІДНІ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛИ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ**

Частинний і повний прирости функції двох змінних. Частинні похідні функції кількох змінних. Повний диференціал функції кількох змінних і його застосування до наближених обчислень. Частинні похідні і диференціали вищих порядків.

Література: [2, розділ 1, п. 1.2], [3, розділ 6, §2], [4, розділ 6, §16], [6, розділ 6, п. 6.1], [7, розділ 8, §5 — 12], [9, §44].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Частинний і повний прирости функції кількох змінних

Нехай на деякій множині D задано функцію $z = f(x, y)$ і точку $M(x, y) \in D$.

Повним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці M називають функцію

$$\boxed{\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).}$$

Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ у точці M, який відповідає приросту Δx аргумента x, називають функцію

$$\boxed{\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).}$$

За аналогією,

$$\boxed{\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)} \text{ —}$$

частинний приріст за змінною y.

Зауважимо, що повний приріст функції $z = f(x, y)$ — це функція двох змінних x та y, тоді як приріст $\Delta_x z$ — функція однієї змінної x, а $\Delta_y z$ — функція змінної y. У загальному випадку

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z .$$

2.2. Частинні похідні функції кількох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$.

Якщо існує границя

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},}$$

то її називають *частинною похідною* функції $f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ *за змінною* x і позначають z'_x, f'_x, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.

За аналогією,

$$\boxed{z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}} \text{ —}$$

частинна похідна функції $f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ *за змінною* y.

> Щоб знайти частинну похідну $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, потрібно взяти звичайну похідну функції $z = f(x, y)$ за змінною x, вважаючи змінну y сталою. Аналогічно, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — це похідна за змінною y функції $z = f(x, y)$ при фіксованому значенні x. Звідси випливає, що частинні похідні знаходять за звичайними правилами диференціювання функції однієї змінної.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ може існувати m частинних похідних: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_m}$.

Частинну похідну $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ знаходять, як звичайну похідну функції $u(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ за змінною x_k, вважаючи решту змінних сталими.

Частинні похідні складеної функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, де $x_i = x_i\ (t_1, t_2, \ldots, t_k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, знаходять за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_1},$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial t_k}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_k}+\ldots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial t_k}.$$

Зокрема, якщо $z=f(u,v)$, де $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$, то

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.} \qquad (1.2)$$

Для функції $z=f(u,v)$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$, маємо тільки похідну за змінною x:

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}.}$$

Цю формулу називають формулою для обчислення *повної похідної* $\frac{dz}{dx}$ (на відміну від частинної похідної $\frac{\partial z}{\partial x}$).

Якщо функція $u(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ задана неявно співвідношенням

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_m,\ u(x_1,x_2,\ldots,x_m))=0,$$

причому $\frac{\partial F}{\partial u}\neq 0$, тоді частинні похідні можна обчислити за формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial u}},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_m}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_m}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Наприклад, якщо $F(x,y,z(x,y))=0$, то

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad (\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0).} \qquad (1.3)$$

2.3. Повний диференціал функції кількох змінних та його застосування до наближених обчислень

Розглянемо повний приріст функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$:

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

Функцію $z = f(x, y)$ називають *диференційовною* у точці $M(x, y)$, якщо її повний приріст у цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y, \qquad (1.4)$$

де A і B — деякі незалежні від Δx та Δy числа, а $\varepsilon_1(\Delta x, \Delta y) \to 0$, $\varepsilon_2(\Delta x, \Delta y) \to 0$, якщо $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Диференціалом dz функції $z = f(x, y)$ називають головну лінійну відносно Δx та Δy частину її приросту, тобто

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна у точці $M(x, y)$, то

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.$$

У випадку, коли x, y – незалежні змінні, $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, тоді

$$\boxed{dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.} \qquad (1.5)$$

Формулу (1.4) тепер можна записати у вигляді

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

звідки випливає наближена рівність

$$\Delta z \approx dz$$

або

$$\boxed{f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Delta y.} \qquad (1.6)$$

Ця наближена рівність тим точніша, чим менші величини Δx та Δy. Формулу (1.6) застосовують до наближених обчислень значень функцій, оскільки *диференціал функції обчислити простіше, ніж її повний приріст.*

Для функції $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ повний диференціал обчислюють за формулою

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m.$$

Диференціал складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, обчислюють за формулою

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \tag{1.7}$$

де $dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{dx}{\partial v} dv$, $dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{dy}{\partial v} dv$.

Порівнявши формули (1.5) і (1.7), дійдемо висновку, що повний диференціал функції $z = f(x, y)$ має властивість *інваріантності* (незмінності), тобто його форма не змінюється незалежно від того, чи є x і y незалежними змінними, чи диференційовними функціями змінних u та v. Проте ці формули однакові лише за формою, а по суті — різні, бо у формулі (1.5) dx і dy — диференціали незалежних змінних, а у формулі (1.7) dx і dy — повні диференціали функцій $x = x(u, v)$ і $y = y(u, v)$.

2.4. Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $z = f(x, y)$ задана в області D і має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ в усіх точках $(x, y) \in D$. Тоді ці похідні можна розглядати як нові функції, задані в області D.

Якщо існує частинна похідна за x від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$, то її називають частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначають одним із символів: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, z''_{xx}, або $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f''_{xx}.

Отже, за означенням

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \text{ або } z''_{xx} = (z'_x)'_x.}$$

Аналогічно визначають похідну другого порядку від функції $z = f(x, y)$ за змінною y:

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \text{ або } z''_{yy} = (z'_y)'_y.}$$

Якщо існує частинна похідна від функції $\frac{\partial z}{\partial x}$ за змінною y, то цю похідну називають *мішаною* частинною похідною другого порядку від функції $z = f(x, y)$ і позначають $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, z''_{xy}.

Отже, за означенням

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \text{ або } z''_{xy} = (z'_x)'_y.}$$

Для функції двох змінних $z = f(x, y)$ може існувати чотири похідні другого порядку, серед яких дві похідні мішані.

Теорема (*про мішані похідні*). Якщо в околі точки (x, y) функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, то вони рівні між собою.

Для функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ може існувати m^2 частинних похідних другого порядку: $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k}\right)$, $i, k = 1, 2, \ldots, m$.

Аналогічно вводяться поняття частинних похідних третього і вищих порядків.

Другим диференціалом $d^2 z$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від першого диференціала dz, тобто

$$\boxed{d^2 z = d(dz).}$$

Якщо x, y — незалежні змінні, тоді

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \tag{1.8}$$

Диференціалом n-го порядку $d^n z$ функції $z = f(x, y)$ у точці $M(x, y)$ називають диференціал від диференціала (n – 1)-го порядку $d^{n-1} z$, тобто

$$\boxed{d^n z = d(d^{n-1} z).} \tag{1.9}$$

У випадку, коли x, y — незалежні змінні, формулу (1.9) можна записати так:

$$d^n z = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial k^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k} ,$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Символічний запис цієї формули такий:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f .$$

Зауважимо, що для диференціалів другого і вищих порядків не виконується властивість інваріантності диференціала, тобто їхня форма змінюється залежно від того, є x і y незалежними змінними чи диференційовними функціями змінних u та v.

2.5. Формула Тейлора для функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ має в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$ неперервні частинні похідні до (n + 1)-го порядку включно. Тоді для довільної точки $M(x, y)$ із цього околу справжується *формула Тейлора*

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x, y) + R_{n+1}(x, y) ,$$

де залишковий член $R_{n+1}(x, y)$ у формі Лагранжа має вигляд

$$R_{n+1}(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 +$$

$$+ \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0)) , \ 0 < \theta < 1 .$$

При $x_0 = y_0 = 0$ формулу Тейлора називають *формулою Маклорена*.

Через диференціали формулу Тейлора записують так:

$$\boxed{\begin{gathered} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0, y_0) + R_{n+1}. \end{gathered}}$$

Формулу Тейлора використовують у наближених обчисленнях. Абсолютну похибку цих наближень оцінюють через залишковий член R_{n+1}.

Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть повний і частинний прирости функції $z = x^2 + xy - 2y$ у точці $M(0;1)$ при $\Delta x = 2$, $\Delta y = -1$.

Розв'язання. Обчислимо значення $z(0;1)$:

$$z(0;1) = 0^2 + 0\cdot 1 - 2\cdot 1 = -2,$$

нові значення змінних будуть такі:

$$x+\Delta x = 0+2 = 2,\ y+\Delta y = 1-1 = 0;\ z(x+\Delta x, y+\Delta y) = z(2;0) = 4,$$
$$z(x+\Delta x, y) = z(2;1) = 4,\ z(x, y+\Delta y) = z(0;0) = 0.$$

Отже,

$$\Delta z(0;1) = 4-(-2) = 6,\ \Delta_x z = 4-(-2) = 6,\ \Delta_y z = 0-(-2) = 2.$$

2. Знайдіть частинні похідні функцій:

а) $z = x^5y^2 + 2y^3 - x - 4$; б) $u = x\sin(yz) + (x+y^2+z^3)^5$;

в) $z = x^{\ln y}$; г) $u = x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x} + z^3 2^{x-z}$.

Розв'язання. Маємо:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y^2 - 1$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2yx^5 + 6y^2$;

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin(yz) + 5(x+y^2+z^3)^4$,

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = x\cos(yz)\cdot z + 10y(x+y^2+z^3)^4$,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x\cos(yz)\cdot y + 15z^2(x+y^2+z^3)^4\ ;$$

в) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (\ln y)\cdot x^{\ln y - 1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^{\ln y}\cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{y} = x^{\ln y}\cdot \dfrac{\ln x}{y}$;

г) $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg}\dfrac{y}{x} + x\dfrac{1}{\cos^2(y/x)}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) + z^3 2^{x-z}\ln 2$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x\frac{1}{\cos^2(y/x)}\frac{1}{x} = \frac{1}{\cos^2(y/x)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 2^{x-z} - z^3 2^{x-z}\ln 2 = 2^{x-z}(3z^2 - z^3)\ln 2\ .$$

3. Знайдіть частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої неявно рівнянням

$$x^2 + y^2z^2 + xyz = 0\ .$$

Розв'язання. За формулами (1.3) дістаємо

$$F \equiv x^2 + y^2z^2 + xyz\ ,\ \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + yz\ ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^2 + xz\ ,\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2zy^2 + xy\ .$$

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz}{2zy^2 + xy},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz^2 + xz}{2zy^2 + xy}.$$

4. Знайдіть частинні похідні функції

$$z = f(x + 2y, x^2y)\ .$$

Розв'язання. Маємо складену функцію $z = f(u, v)$, де $u = x + 2y$, $v = x^2y$. За формулами (1.2) знаходимо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}2xy,\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}x^2.$$

5. Знайдіть частинні похідні функції

$$z = (2x + y)^{\frac{x}{y}}\ .$$

Розв'язання. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln z = \frac{x}{y}\ln(2x + y)\ ;\ (\ln z)'_x = (\frac{x}{y}\ln(2x + y))'_x\ ;$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y}\ln(2x+y)+\frac{x}{y}\frac{2}{2x+y}\ ;\ \frac{\partial z}{\partial x}= z\left[\frac{1}{y}\ln(2x+y)+\frac{x}{y}\frac{2}{2x+y}\right].$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x}= (2x+y)^{\frac{x}{y}}\ \frac{1}{y}\left[\ln(2x+y)+\frac{2x}{2x+y}\right].$$

Частинну похідну $\frac{\partial z}{\partial y}$ знаходимо так само:

$$(\ln z)'_y=(\frac{x}{y}\ln(2x+y))'_y\ ;\ \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\ln(2x+y)+\frac{x}{y}\frac{1}{2x+y}\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y^2}(2x+y)^{\frac{x}{y}}\left[-\ln(2x+y)+\frac{y}{2x+y}\right].$$

6. Знайдіть повний диференціал функцій:

а) $z=e^x y^3$; б) $u=x\arcsin y+z^4$.

Розв'язання.

а) $dz=(e^x y^3)'_x dx+(e^x y^3)'_y dy=e^x y^3 dx+3e^x y^2 dy$;

б) $\frac{\partial u}{\partial x}=\arcsin y$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=4z^3$;

$$du=\arcsin y dx+\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}dy+4z^3 dz .$$

7. Обчисліть наближено $(0,92)^3(1,04)^2$.

Розв'язання. Застосуємо формулу (1.6) для функції $f(x,y)=x^3y^2$. Покладемо $x+\Delta x=0,92,\ \ y+\Delta y=1,04,\ \ x=1$, $y=1$. Тоді $f(1;1)=1$, $\Delta x=0,92-1=$ $=-0,08,\ \ \Delta y=1,04-1=0,04.$ Знайдемо частинні похідні функції $f(x,y)$ у точці $(1;1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2\ ,\ \frac{\partial f(1,1)}{\partial x}=3\ ;\ \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y\ ,\ \frac{\partial f(1,1)}{\partial y}=2\ .$$

Отже,

$$(0{,}92)^3(1{,}04)^2\approx 1+3(-0{,}08)+2\cdot 0{,}04=0{,}84\ .$$

8. Обчисліть наближено $\sin^2 51^\circ \cos 5^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо допоміжну функцію $z = \sin^2 x \cos y$. Необхідно обчислити $z\left(\frac{17}{60}\pi;\ \frac{\pi}{36}\right)$. Покладемо $x + \Delta x = \frac{17\pi}{60}$, $y + \Delta y = \frac{\pi}{36}$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$, тоді $\Delta x = \frac{\pi}{30}$, $\Delta y = \frac{\pi}{36}$. Оскільки

$$z\left(\frac{\pi}{4}; 0\right) = \sin^2 \frac{\pi}{4} \cos 0 = \frac{1}{2}; \quad \frac{\partial z(\pi/4,0)}{\partial x} = \sin 2x \cos y\Big|_{\substack{x=\pi/4,\\ y=0}} = 1;$$

$$\frac{\partial z(\pi/4,0)}{\partial y} = -\sin^2 x \sin y\Big|_{\substack{x=\pi/4,\\ y=0}} = 0,$$

то

$$z\left(\frac{17}{60}\pi;\ \frac{\pi}{36}\right) \approx \frac{1}{2} + 1\cdot\frac{\pi}{30} + 0\cdot\frac{\pi}{36} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{30} \approx 0{,}6.$$

9. Знайдіть частинні похідні другого порядку функцій:

а) $z = 2x^4 y^3 + \sin 2y - \frac{x^2}{y}$; б) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3 y^3 - 2\frac{x}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 6x^4 y^2 + 2\cos 2y + \frac{x^2}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(8x^3 y^3 - 2\frac{x}{y}\right) = 24x^2 y^3 - \frac{2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x^4 y^2 + 2\cos 2y + \frac{x^2}{y^2}\right) = 12x^4 y - 4\sin 2y - 2\frac{x^2}{y^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(8x^3 y^3 - 2\frac{x}{y}\right) = 24x^3 y^2 + \frac{2x}{y^2};$$

б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}}$,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}}(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}-x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}}{x^2-y^2}=\frac{-y^2}{\left(x^2-y^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=\frac{-x^2}{\left(x^2-y^2\right)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\right)=x\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)^{-1/2}=$$

$$=x\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-y^2)^{-3/2}(-2y)=\frac{xy}{\left(x^2-y^2\right)^{3/2}}.$$

10. Покажіть, що функція $z=x^2\ln y$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\ln y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cdot\frac{1}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\ln y\right)=\frac{2x}{y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{y}\right)=\frac{2x}{y},$$

що і потрібно було довести.

11. Знайдіть частинні похідні $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}$ і $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$ функції $u=x^4+$ $+xy^3+x\cos y\sin z$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}=4x^3+y^3+\cos y\sin z,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=12x^2,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=24x;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3+y^3+\cos y\sin z)=3y^2-\sin y\sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(3y^2-\sin y\sin z)=6y-\cos y\sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\,(3y^2-\sin y \sin z)=-\sin y \cos z\,.$$

12. Знайдіть частинні похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функції, заданої неявно рівнянням $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язання. Послідовно дістаємо:

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z};\ 2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{z}\right)=-\frac{z-x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{z^2}=-\frac{z-x\left(-\dfrac{x}{z}\right)}{z^2}=-\frac{z^2+x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{z}\right)=-x\frac{-\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=x\frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{z^2}=x\frac{-\dfrac{y}{z}}{z^2}=\frac{-xy}{z^3}.$$

13. Знайдіть диференціал другого порядку функції $z=(3x-2y)^4$ у точці $M(3;4)$.

Розв'язання. Обчислюємо похідні другого порядку даної функції у точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4(3x-2y)^3\cdot 3=12(3x-2y)^3,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4(3x-2y)^3(-2)=-8(3x-2y)^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(12(3x-2y)^3)=36(3x-2y)^2\cdot 3=108(3x-2y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}(-8(3x-2y)^3)=-24(3x-2y)^2(-2)=48(3x-2y)^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(12(3x-2y)^3)=36(3x-2y)^2\cdot(-2)=-72(3x-2y)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z(M)}{\partial x^2}=108(3x-2y)^2\Big|_{\substack{x=3,\\ y=4}}=108,\ \frac{\partial^2 z(M)}{\partial y^2}=48,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-72.$$

Підставивши одержані значення у формулу (1.8), остаточно дістанемо

$$d^2z(M) = 108dx^2 - 144dxdy + 48dy^2.$$

14. Знайдіть d^2u, якщо $u = x^3y + xz^2$.

Розв'язання. Для функції $u = f(x, y, z)$, де x, y, z — незалежні змінні, другий диференціал записують так:

$$d^2u = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2x;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 3x^2;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 2z;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 0.$$

Отже,

$$d^2u = 6xydx^2 + 2xdz^2 + 6x^2dxdy + 4zdxdz.$$

15. Знайдіть d^2z у точці $M(-2; 0; 1)$, якщо функція $z(x, y)$ задовольняє рівняння $x + y^2 + z + z^3 = 0$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$F = x + y^2 + z + z^3;\ \frac{\partial F}{\partial x} = 1;\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 1 + 3z^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{1+3z^2};\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{1+3z^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(-\frac{1}{1+3z^2}\right) = \frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(1+3z^2)^2} = -\frac{6z}{(1+3z^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{2y}{1+3z^2}\right) = -2\left(\frac{1}{1+3z^2} - \frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(1+3z^2)^2}\right) = \frac{-2}{1+3z^2} - \frac{24yz}{(1+3z^2)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{1}{1+3z^2}\right) = \frac{6z\dfrac{\partial z}{\partial y}}{(1+3z^2)^2} = -\frac{12yz}{(1+3z^2)^3}.$$

У точці $M(-2;0;1)$ маємо

$$\frac{\partial^2 z(M)}{\partial x^2}=-\frac{3}{32},\ \frac{\partial^2 z(M)}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z(M)}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\ d^2 z(M)=-\frac{3}{32}dx^2-\frac{1}{2}dy^2.$$

16. Перевірте, що функція $u=f(x+at)+g(x-at)$, де $f(x+at)$, $g(x-at)$ — довільні двічі диференційовні функції, задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Розв'язання. Позначимо $\omega_1=x+at$, $\omega_2=x-at$. Використовуючи правило диференціювання складеної функції, знаходимо частинні похідні функції u:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial\omega_1}\cdot(x+at)'_x+\frac{\partial g}{\partial\omega_2}\cdot(x-at)'_x=\frac{\partial f}{\partial\omega_1}+\frac{\partial g}{\partial\omega_2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial\omega_1}\cdot(x+at)'_t+\frac{\partial g}{\partial\omega_2}\cdot(x-at)'_t=a\left(\frac{\partial f}{\partial\omega_1}-\frac{\partial g}{\partial\omega_2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\omega_1}+\frac{\partial g}{\partial\omega_2}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial\omega_1^2}(x+at)'_x+\frac{\partial^2 g}{\partial\omega_2^2}(x-at)'_x=\frac{\partial^2 f}{\partial\omega_1^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial\omega_2^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial\omega_1}-\frac{\partial g}{\partial\omega_2}\right)=a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega_1^2}(x+at)'_t-\frac{\partial^2 g}{\partial\omega_2^2}(x-at)'_t\right)=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\omega_1^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial\omega_2^2}\right).$$

Підставивши одержані значення похідних у вихідне рівняння, прийдемо до тотожності.

17. Розвиньте за формулою Маклорена до членів третього порядку включно функцію $f(x,y)=e^{x+y^2}$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=e^{x+y^2};\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=2ye^{x+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=e^{x+y^2}(2+4y^2);\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=e^{x+y^2}(8y^3+12y).$$

У точці $(0; 0)$ маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=1;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}=\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}=2;\quad f(0;\ 0)=1;\quad df(0;\ 0)=dx;$$

$$d^2 f(0;\ 0)=dx^2+2dy^2;\quad d^3 f(0;\ 0)=dx^3+6dxdy^2,$$

де $dx=x-0=x$, $dy=y-0=y$.

Отже, в околі точки $(0; 0)$ справджується формула

$$f(x,y)=f(0;0)+df(0;0)+\frac{1}{2!}d^2 f(0;0)+\frac{1}{3!}d^3 f(0;0)+R_4=$$

$$=1+x+\frac{1}{2}(x^2+2y^2)+\frac{1}{6}(x^3+6xy^2)+R_4.$$

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайдіть повний і частинний прирости функції $z=x^2y$ у точці $M(0;1)$, якщо: а) $\Delta x=1$, $\Delta y=2$; б) $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}5$.

2. Знайдіть повний приріст і повний диференціал функції $z=x^2+y^2-3xy$ при переході від точки $M(1;1)$ до точки $M_1(1,2;\ 0,9)$.

Знайдіть частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z(x,y)$.

3. $z=x^4y+\sqrt{x}-2y^6+3$.

4. $z=\sin(2x+3y)-xy$.

5. $z=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

6. $z=\ln(x^2-y^2)$.

7. $z=2^{\cos x}\arcsin y$.

8. $z=\frac{\ln(x-3y)}{y+2x}$.

9. $z=x^{x+y}$.

10. $z=(x^2+y^2)^{2x-5y}$.

11. $z=f(x^2-y^2)$.

12. $z=f(x+y,\ \frac{x}{y})$.

13. $e^z+e^{x-y}=e^{y+z}$.

14. $x^2+y^2+z^2=2z$.

Покажіть, що функція $z(x, y)$ задовольняє рівняння.

15. $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2$.

16. $z = \sqrt{y}\sin\dfrac{x}{y}$, $2x\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$.

17. $z = f(x^2 + y^2)$, $y\dfrac{\partial z}{\partial x} = x\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразів.

18. $\sqrt{(7,84)^2 + (6,1)^2}$. **19.** $\ln(1 + (1,07)^2 - (0,95)^3)$.

20. $(1,06)^{3,08}$. **21.** $\operatorname{tg} 10^\circ \sin 85^\circ$. **22.** $\operatorname{arctg}\dfrac{1,12}{0,97}$.

Знайдіть диференціал dz функцій.

23. $z = x + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **24.** $z = \sin z + x + 2y$.

25. $z = 2^{xy}(x - y)$. **26.** $x + y + z = \ln z$.

Знайдіть частинні похідні другого порядку функції $z(x, y)$.

27. $z = (x + 2y)^5 + \sin(3x - y)$. **28.** $z = x^y + y^x$.

29. $z = 5x^7 y - 2xy^4 + 3y - 5x + 2$.

Знайдіть частинні похідні другого порядку функції $u(x, y, z)$.

30. $u = x^3 + y^2 + xz^4 - 2yz + 3(x - y)^5$.

31. $u = x^y + y^z + z^x$. **32.** $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$.

Розвиньте за формулою Тейлора функцію $z(x, y)$ в околі точки $M(x_0, y_0)$, знайшовши члени до третього порядку включно.

33. $z = \operatorname{tg}(xy)$, $M(0;\ 1)$.

34. $z = e^x \ln(1 + y)$, $M(0;\ 0)$.

35. $z = x^3 + 2x^2 y - xy^2 + 3y^3$, $M(1;\ 1)$.

36. $\ln z + z + x - y = 1$, $M(1;\ 1;\ 1)$.

Відповіді

1. а) $\Delta_x z = 1$, $\Delta_y z = 0$, $\Delta z = 3$; б) $\Delta_x z = 0{,}01$, $\Delta_y z = 0$, $\Delta z = 0{,}015$. **2.** $\Delta z = 0{,}01$, $dz = -0{,}1$. **3.** $z'_x = 4x^3 y + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $z'_y = x^4 - 12y^5$. **5.** $z'_x = 0$, $z'_y = 0$. **6.** $z'_x = 2x/(x^2 - y^2)$, $z'_y = -2y/(x^2 - y^2)$. **7.** $z'_x = -\sin x \cdot 2^{\cos x} \ln 2 \cdot \arcsin y$, $z'_y = \frac{2^{\cos x}}{\sqrt{1-y^2}}$. **9.** $z'_x = x^{x+y}(\ln x + 1 + y/x)$, $z'_y = x^{x+y} \ln x$. **10.** $z'_x = 2(x^2 + y^2)^{2x-5y} \ln(x^2 + y^2) + 2x(x^2 + y^2)^{2x-5y-1} \times (2x - 5y)$, $z'_y = -5(x^2 + y^2)^{2x-5y} \ln(x^2 + y^2) + 2y(x^2 + y^2)^{2x-5y-1}(2x - 5y)$. **11.** $z'_x = f'(w)2x$, $z'_y = -2yf'(w)$, де $w = x^2 - y^2$. **12.** $z'_x = f'_u + f'_v / y$, $z'_y = f'_u - f'_v x / y^2$, де $u = x + y$, $v = x / y$. **13.** $z'_x = \frac{e^{x-y}}{e^z(e^y - 1)}$, $z'_y = \frac{e^{y+z} - e^{x-y}}{e^z(1 - e^y)}$. **14.** $z'_x = \frac{x}{1-z}$, $z'_y = \frac{y}{1-z}$. **18.** 9,878. **19.** 0,29. **20.** 1,18. **21.** 0,175. **22.** 0,86. **23.** $\frac{1}{x^2 + y^2}[(x^2 + y^2 - y)dx + xdy]$. **24.** $dz = (dx - 2dy)/(1 - \cos z)$. **25.** $dz = 2^{xy}((1 + y(x - y)\ln 2)dx + (x(x - y)\ln 2 - 1)dy)$. **26.** $\frac{1}{1-z}[dx + dy]$. **27.** $z''_{xx} = 20(x + 2y)^3 - 9\sin(3x - y)$, $z''_{yy} = 80(x + 2y)^3 - \sin(3x - y)$, $z''_{xy} = 40(x + 2y)^3 + 3\sin(3x - y)$. **28.** $z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2} + y^x \ln^2 y$, $z''_{xy} = x^{y-1} + y^{x-1} + xy^{x-1}\ln y + yx^{y-1}\ln x$, $z''_{yy} = x(x-1)y^{x-2} + x^y \ln^2 x$. **29.** $z''_{xx} = 210x^5 y$, $z''_{yy} = -24xy^2$, $z''_{xy} = 35x^6 - 8y^3$. **30.** $u''_{xx} = 6x + 60(x-y)^3$, $u''_{yy} = 2 + 60(x-y)^3$, $u''_{zz} = 12xz^2$, $u''_{xy} = -60(x-y)^3$, $u''_{xz} = 4z^3$, $u''_{yz} = -2$. **34.** $y + \frac{1}{2}(2xy - y^2) + \frac{1}{6}(3x^2 y - 3xy^2 + 2y^3)$. **35.** $5 + 6(x-1) + 9(y-1) + \frac{1}{2}[10(x-1)^2 + 4(x-1)(y-1) + 16(y-1)^2] + \frac{1}{6}[6(x-1)^3 + 12(x-1)^2(y-1) - 6(x-1)(y-1)^2 + 18(y-1)^3]$.

Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Знайдіть частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ та повний диференціал dz функції $z(x, y)$.

2.1.1. а) $z = 3x^6 + 2x^2 y^5 - 4x + 5y^3$; б) $z = xy \log_y x$.

2.1.2. а) $z = -x^4 + 3xy^4 - 5x^3 + 2$; б) $z = \operatorname{tg} \ln(x^2 - y^2)$.

2.1.3. а) $z = -3x^3 + 2x^3 y^5 - 5y^2 + 1$; б) $z = \arcsin 2^{x/y}$.

2.1.4. а) $z = 7x^8 y - 32xy^4 - 3y + 5$; б) $z = (\arcsin x)^y$.

2.1.5. а) $z = 6x^6 y^3 - 2xy^3 + 4x - 3$; б) $z = xy^3 \ln\sin(x - 2y)$.

2.1.6. а) $z = 2x^4 - y^3 - 3xy^4 + 4y + 2$; б) $z = \sin^3 x \cos(x + 3y)$.

2.1.7. а) $z = x^3 - 2y^4 + x^5 y + 7x - 1$; б) $z = (y + x)\,\mathrm{arctg}\sqrt{xy}$.

2.1.8. а) $z = -x^2 y^4 - 2x + y^8 + 2x - 6$; б) $z = 3^{x-y}\ln(x^2 + y^2)$.

2.1.9. а) $z = -3xy^2 + x^3 y - 3y + 3$; б) $z = \mathrm{arcctg}\dfrac{x}{\ln y}$.

2.1.10. а) $z = 5x^5 y^2 - x + y^6 + 10$; б) $z = \arccos\dfrac{\ln x}{\sqrt{y}}$.

2.1.11. а) $z = 7x^4 y^2 - 3y^3 + 3x - 4$; б) $z = e^{xy^2}(x^2 - y)$.

2.1.12. а) $z = -4x^4 y^5 - 6x + y^4 - 8$; б) $z = 4^{x^2+y^2}(2x^4 - y^4)$.

2.1.13. а) $z = -x^2 y^3 - 4x - 3y^2 + 7$; б) $z = \sin^5(x^3 + xy - y^3)$.

2.1.14. а) $z = 2x^7 y^4 + 3x^2 - y^4 - 1$; б) $z = \cos^3(x^2 - y^2)$.

2.1.15. а) $z = -x^4 y^4 + 5x^6 - 3y^3 - 2$; б) $z = (e^x \cos y + e^{\sin y})^3$.

2.1.16. а) $z = 4x^2 y^2 - 2x^5 - y + 10$; б) $z = 2^{(x+y)\sin(x-y)}$.

2.1.17. а) $z = -x^9 y^4 + 2x^3 + 4y^3 + 7$; б) $z = \dfrac{y\ln x}{x\ln y}$.

2.1.18. а) $z = 3x^2 y^5 + 7x^3 - y^{-2} - 5$; б) $z = \dfrac{y^2\ln x}{x\ln(y^2 + 1)}$.

2.1.19. а) $z = 5x^3 y^{-3} - 2x^2 + y^4 + 4$; б) $z = \dfrac{y^2 + x^2}{(x + y)^2}$.

2.1.20. а) $z = -x^4 y^2 - 2x\sqrt{y} + 4x - 2$; б) $z = \dfrac{\ln(x - 2y)}{\ln(y + 2x)}$.

2.1.21. а) $z = 4x^3 y^2 + 7\sqrt{x} - y^5 - 6$; б) $z = x(\sin x)^{\cos y}$.

2.1.22. а) $z = -x^7 y^6 + 6x^3\sqrt{y} + 4x^3$; б) $z = (x + y^2)\sqrt{x + 4y}$.

2.1.23. а) $z = x^4 y^2 - x^2 + 4y^{-3} - 8$; б) $z = \dfrac{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{ctg}\,y}{x + y}$.

2.1.24. а) $z = -2x^2 y^5 - \sqrt{2x}\,y^3 + 4y$; б) $z = \dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,y}{x^2 + y^2}$.

2.1.25. а) $z = 3x^4 y^5 + 5x - 2y^4 + 2$; б) $z = \dfrac{\ln(x - y)}{\ln(x^3 + y^3)}$.

2.1.26. а) $z = 4x^{-2} y^{-3} - 5x - 4y^5 + 8$; б) $z = \dfrac{\ln\ln(x\,\mathrm{ctg}\,y)}{x^2}$.

2.1.27. а) $z = 9x^{-2}y^6 + 3x^4 - 2y + 3$; б) $z = \sqrt{\sin^2 x - \cos^2 y}$.

2.1.28. а) $z = -x^2y^{-3} + 8y^3 + 6x - 1$; б) $z = \sqrt{\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, y}$.

2.1.29. а) $z = 3x^3y^5 - 6xy^2 + 2x - 7$; б) $z = \sin(\ln(2x + 3y))$.

2.1.30. а) $z = 4x^3y^7 + 4xy^2 + 4y - 6$; б) $z = \ln\cos(4x - 3y)$.

2.2. Знайдіть частинні похідні функції $z = f(u, v)$, де u і v мають вигляд:

2.2.1. $u = x^2 + y^2$, $v = x - y$.
2.2.2. $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.
2.2.3. $u = x + y$, $v = x / y$.
2.2.4. $u = xy$, $v = x + 3y$.
2.2.5. $u = 2x - 3y$, $v = xy$.
2.2.6. $u = 2x + y$, $v = xy^2$.
2.2.7. $u = 2xy$, $v = x^2 - y$.
2.2.8. $u = x + y^2$, $v = x - 4y$.
2.2.9. $u = \sqrt{x} + y$, $v = x - \sqrt{y}$.
2.2.10. $u = x^3 + y^3$, $v = x + y$.
2.2.11. $u = x^2 - 2y$, $v = 2x - y$.
2.2.12. $u = xy$, $v = x^3 - y^3$.
2.2.13. $u = x^4 + y$, $v = x - y^2$.
2.2.14. $u = \sqrt{x + y}$, $v = x^2 + y^2$.
2.2.15. $u = \sqrt{x} - y$, $v = 2x + y^2$.
2.2.16. $u = x^2y$, $v = 2x + 5y$.
2.2.17. $u = x^2 - y^2$, $v = xy^{-1}$.
2.2.18. $u = x^3 - y^3$, $v = xy$.
2.2.19. $u = x^2y$, $v = 2x + 7y$.
2.2.20. $u = x^2 + 2y^2$, $v = xy^2$.
2.2.21. $u = 2^x + 2^y$, $v = x + y$.
2.2.22. $u = \sin x - y$, $v = xy$.
2.2.23. $u = x^2y^{-2}$, $v = 3x - y$.
2.2.24. $u = x^4 - y^4$, $v = x - y$.
2.2.25. $u = \sin xy$, $v = 2x - 3y$.
2.2.26. $u = xy^{-2}$, $v = xy^2$.
2.2.27. $u = x^2 - y^3$, $v = xy$.
2.2.28. $u = x + 4y$, $v = x^2 / y$.
2.2.29. $u = \mathrm{tg}(xy)$, $v = x + 2y$.
2.2.30. $u = 2x + 7y$, $v = x^2y$.

2.3. Знайти диференціал dz функції $z(x, y)$ у точці M.

2.3.1. $x + 2y + z + e^z = 0$, $M(1; -1; 0)$.

2.3.2. $x^2 - y + z + \ln z = 0$, $M(0; 1; 1)$.

2.3.3. $\sin(x + y) + \sin(y - z) = 1$, $M(0; \pi/2; \pi/2)$.

2.3.4. $\sin(x + y + z) + z = 1$, $M(\pi/4; \pi/4; 0)$.

2.3.5. $e^{x+z} + e^{y+z} = 2$, $M(0; 0; 0)$.

2.3.6. $2xy + yz + z^3 = 0$, $M(-1; 1; 1)$.

2.3.7. $xyz + e^z = x$, $M(1; 2; 0)$.

2.3.8. $x - y - z = \operatorname{tg} z$, $M(2;\ 2;\ 0)$.

2.3.9. $e^{xyz} = z$, $M(0;\ 1;\ 1)$.

2.3.10. $\ln z + \ln x = y - 1$, $M(1;\ 1;\ 1)$.

2.3.11. $xyz = \ln z$, $M(0;\ 1;\ 1)$.

2.3.12. $x + 4y - z = e^z$, $M(-3;\ 1;\ 0)$.

2.3.13. $\sin z + \cos(x - y + z) = 1$, $M(\pi/2;\ \pi/2;\ 0)$.

2.3.14. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 4z$, $M(8;\ 1;\ 1)$.

2.3.15. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 2\cos z$, $M(\pi/4;\ \pi/4;\ 0)$.

2.3.16. $x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5 = 0$, $M(-2;\ 1;\ 0)$.

2.3.17. $x^2 + y^2 - z^2 + xz + 4y - 4 = 0$, $M(1;\ 1;\ 2)$.

2.3.18. $2x^2 - y^2 + 2z^2 + xy + xz - 3 = 0$, $M(1;\ 2;\ 1)$.

2.3.19. $4y^2 - z^2 + 4xy - xz + 4z - 10 = 0$, $M(1;\ -2;\ 1)$.

2.3.20. $x^2 - 2y^2 + z^2 + xz - 4y - 13 = 0$, $M(3;\ 1;\ 2)$.

2.3.21. $y^2 + z^2 + x - 3z = 0$, $M(1;\ 1;\ 1)$.

2.3.22. $y^2 + z^2 - xy - z(y + x) = 0$, $M(1;\ 2;\ 1)$.

2.3.23. $2(x^4 + y^4 + z^4) - 3xyz = 0$, $M(1/2;\ 1/2;\ 1/2)$.

2.3.24. $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z - 1 = 0$, $M(\pi/4;\ 0;\ \pi/4)$.

2.3.25. $e^x + e^y + e^z = 3e^{x+y+z}$, $M(0;\ 0;\ 0)$.

2.3.26. $e^{\sin x} + e^{\sin y} + e^{\cos z} - 3 = 0$, $M(0;\ 0;\ \pi/2)$.

2.3.27. $x^y + y^z + z^x - 12 = 0$, $M(3;\ 2;\ 1)$.

2.3.28. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 4 = 0$, $M(1;\ 1;\ 1)$.

2.3.29. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + xyz - 8 = 0$, $M(1;\ 1;\ 4)$.

2.3.30. $2^x + 2^y + 2^z + 1 = 2^{x+y+z}$, $M(0;\ 1;\ 2)$.

2.4. Знайдіть другий диференціал d^2u функції $u(x, y, z)$.

2.4.1. $u = x \sin y \cos z$.

2.4.2. $u = (x - 2y + 3z)^5$.

2.4.3. $u = e^x \sin(y + 2z)$.

2.4.4. $u = \ln(xy) \cdot z^2$.

2.4.5. $u = x^2 y \operatorname{tg} z$.

2.4.6. $u = \cos(x - y) \ln z$.

2.4.7. $u = 2^{x-y} \operatorname{ctg} z$.

2.4.8. $u = (xy + 2z)^4 y$.

2.4.9. $u = \cos(xyz)$.

2.4.10. $u = (x - 2y)^z$.

2.4.11. $u = e^{x^2+y^2} z^2$.

2.4.12. $u = \ln(x^2 + y^2 - z)$.

2.4.13. $u = z \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

2.4.14. $u = \sin(x^2 + y^2 + z)$.

2.4.15. $u = \ln x \cdot e^{y-z}$.

2.4.16. $u = (2x - 3y)^z$.

2.4.17. $u = 3^{\sin x}(y - 2z)^3$.

2.4.18. $u = (\ln x)^{y-z}$.

2.4.19. $u = e^{x-y+\ln\cos z}$.

2.4.20. $u = \operatorname{tg}(xy) \cdot 2^{-z}$.

2.4.21. $u = \operatorname{ctg} z \cdot \ln(x^2 + y^2)$.

2.4.22. $u = \operatorname{arctg}(x + y - z)$.

2.4.23. $u = x \operatorname{arctg}(y / z)$.

2.4.24. $u = (2^y + 2^z)\ln x$.

2.4.25. $u = y \ln\sin(x + z)$.

2.4.26. $u = x\cos(y^2 + 3z)$.

2.4.27. $u = \sin(x + z)\cos y$.

2.4.28. $u = e^{x^2+2y-z}$.

2.4.29. $u = (x - y)^{\operatorname{tg} z}$.

2.4.30. $u = x^{2y+3z}$.

2.5. Обчисліть наближено за допомогою повного диференціала.

2.5.1. $(0{,}97)^4(0{,}95)^{-2}$.

2.5.2. $(0,94)^2(0,98)^{-3}$.

2.5.3. $\sqrt{(3{,}1)^2 + (3{,}9)^2}$.

2.5.4. $\sqrt[3]{(1{,}94)^3 + (4{,}06)^2 + 3}$.

2.5.5. $\sin 5° \cos 80°$.

2.5.6. $\sin 6° \operatorname{tg} 48°$.

2.5.7. $\sqrt{\sin 8° + 4\cos 5°}$.

2.5.8. $\sqrt{(5,85)^2 + (8,1)^2}$.

2.5.9. $\sqrt{(4,75)^2 + (11,8)^2}$.

2.5.10. $\operatorname{arctg}\dfrac{1,08}{1,04}$.

2.5.11. $\operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 50°$.

2.5.12. $\sin 27° \cos 4°$.

2.5.13. $\sqrt{(2{,}94)^3 - (1{,}2)^2 - 1}$.

2.5.14. $\sqrt[4]{(6,9)^2 + (4,8)^2 + 7}$.

2.5.15. $\sqrt{\sin 85° + 3\cos 6°}$.

2.5.16. $e^{0{,}15} \cdot (3{,}05)^{-2}$.

2.5.17. $\sin 6° \cos 8°$.

2.5.18. $e^{0{,}1} \cdot \sin 85°$.

2.5.19. $\operatorname{arctg}\dfrac{1,1}{0,96}$.

2.5.20. $\operatorname{arctg}(0,97 \cdot 1,08)$.

2.5.21. $\sqrt[4]{(2{,}9)^2 + (2{,}05)^2 + 3}$.

2.5.22. $\sqrt[5]{(2{,}9)^4 - (3{,}86)^3 + 15}$.

2.5.23. $((1{,}86)^3 + (0{,}94)^3)^2$.

2.5.24. $\sqrt[3]{(2{,}05)^4 - (3{,}04)^2 + 1}$.

2.5.25. $(1{,}04)^3 \cdot (0{,}96)^{-1/3}$.

2.5.26. $\operatorname{ctg} 40° \operatorname{ctg} 47°$.

2.5.27. $\operatorname{ctg} 41° + \operatorname{ctg} 51°$.

2.5.28. $\sqrt[5]{(4{,}92)^2 + (2{,}94)^2 - 2}$.

2.5.29. $\operatorname{arctg}\dfrac{1,03}{0,98}$.

2.5.30. $((1{,}96)^4 - (1{,}92)^4)^2$.

Тема 3. **ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ**

Дотична площина та нормаль до поверхні. Похідна за напрямом. Градієнт функції кількох змінних. Екстремум функції двох змінних. Найбільше і найменше значення функції кількох змінних.

Література: [3, розділ 6, §3], [4, розділ 6, §20], [6, розділ 6], [7, розділ 8, §14—18], [9, §45—46].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Дотична площина та нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці дотику $M_0(x_0, y_0, z_0)$ називають площину, що містить у собі всі дотичні прямі в точці M_0 до кривих, що лежать на поверхні і проходять через точку M_0.

Нормаллю до поверхні у точці M_0 називають пряму, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини в цій точці.

Рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні подано у таблицях 1.1 та 1.2.

Таблиця 1.1

Рівняння поверхні	Рівняння дотичної площини до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0$
$z = f(x, y)$	$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$

Таблиця 1.2

Рівняння поверхні	Рівняння нормалі до поверхні
$F(x, y, z) = 0$	$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}}$
$z = f(x, y)$	$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{-1}$

3.2. Похідна за напрямом. Градієнт функції кількох змінних

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена і неперервна в околі точки $M(x, y, z)$. Задамо у точці M одиничний вектор $\vec{l} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, який утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно кути α, β, γ. Візьмемо на прямій, яка проходить через точку M у напрямі вектора $\vec{l}$, точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ (рис. 1.9). Позначимо довжину MM_1 через Δl.

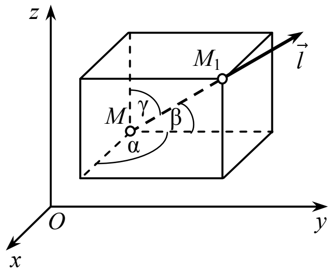

Рис. 1.9

Тоді

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}.$$

Похідною функції $u(x, y, z)$ за напрямом вектора $\vec{l}$ називають границю відношення $\dfrac{\Delta u}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$, якщо вона існує, і позначають $\dfrac{\partial u}{\partial l}$, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{u(M_1) - u(M)}{\Delta l}.$$

Похідну функції $u(x, y, z)$ у напрямі вектора $\vec{l} = \{l_x, l_y, l_z\}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,}\,, \tag{1.10}$$

де $\cos\alpha = \dfrac{l_x}{|\vec{l}\,|}$, $\cos\beta = \dfrac{l_y}{|\vec{l}\,|}$, $\cos\gamma = \dfrac{l_z}{|\vec{l}\,|}$ — напрямні косинуси вектора $\vec{l}$, $|\vec{l}\,| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2 + l_z^2}$ — довжина вектора $\vec{l}$.

Похідна за напрямом узагальнює поняття частинної похідної. Так, якщо $\vec{l} = \{1; 0; 0\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$; якщо $\vec{l} = \{0; 1; 0\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; якщо $\vec{l} = \{0; 0; 1\}$, то $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial z}$.

Градієнтом функції $u = f(x, y, z)$ у точці $M(x, y, z)$ називають вектор, координатами якого є частинні похідні функції $u(x, y, z)$, обчислені в точці M, тобто

$$\operatorname{grad} u(M) = \frac{\partial u(M)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u(M)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u(M)}{\partial z}\vec{k},$$

або

$$\operatorname{grad} u(M) = \left\{\frac{\partial u(M)}{\partial x}, \frac{\partial u(M)}{\partial y}, \frac{\partial u(M)}{\partial z}\right\}.$$

Між градієнтом і похідною за напрямом існує такий зв'язок:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l} = |\operatorname{grad} u| \cdot |\vec{l}\,| \cdot \cos\varphi,$$

де φ — кут між градієнтом функції $u(x, y, z)$ і напрямним вектором $\vec{l}$. З цієї формули випливає, що похідна $\frac{\partial u}{\partial l}$ набуває найбільшого значення тоді, коли $\cos\varphi = 1$, тобто тоді, коли напрям вектора $\vec{l}$ збігається з напрямом градієнта, при цьому найбільше значення похідної $\frac{\partial u}{\partial l}$ дорівнює модулю градієнта функції $u = f(x, y, z)$ обчисленого в точці M, тобто

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3.3. Екстремум функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ (або $z = f(M)$) визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$.

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 *локальний максимум* (*мінімум*), якщо існує такий окіл точки M_0, при якому для всіх відмінних від M_0 точок цього околу виконується нерівність

$$f(M) < f(M_0) \quad (f(M) > f(M_0)).$$

Точки локального максимуму та мінімуму називають точками локального екстремуму.

Означення локального екстремуму можна сформулювати ще й так.

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 локальний екстремум, якщо у достатньо малому околі точки M_0 приріст функції $\Delta z(M_0)$ зберігає сталий знак, а саме: якщо $\Delta z(M_0) > 0$, то M_0 — точка локального мінімуму, якщо ж $\Delta z(M_0) < 0$, то M_0 — точка локального максимуму.

Далі поняття екстремуму та локального екстремуму будемо ототожнювати.

Наведемо приклади, які ілюструють поняття екстремуму.

1. Функція $z = x^2 + y^2$ досягає мінімуму в точці (0; 0), причому $z_{\min} = 0$ (рис. 1.10). Справді, вираз $x^2 + y^2$ завжди невід'ємний і обертається в нуль тільки при $x = y = 0$. Отже, приріст $\Delta z\,(0;\ 0) > 0$.

2. Функція $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ має в точці (0; 0) максимум, причому $z_{\max} = 2$ (рис. 1.11). Тут $\Delta z\,(0;\ 0) < 0$.

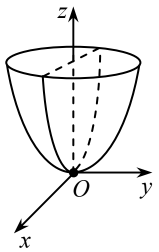

Рис. 1.10

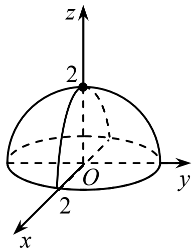

Рис. 1.11

Сформулюємо необхідні та достатні умови існування локального екстремуму.

Теорема 1 (*необхідна умова локального екстремуму*). Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ локальний екстремум, то в цій точці частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ дорівнюють нулю або не існують.

Зокрема, якщо $z = f(x, y)$ — диференційовна функція і $M_0(x_0, y_0)$ — точка екстремуму, то в цій точці виконується умова

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0,$$

тобто

$$dz(x_0, y_0) = 0. \tag{1.11}$$

Точку $M_0(x_0, y_0)$, яка задовольняє умову (1.11), називають *стаціонарною* точкою функції $z = f(x, y)$.

Стаціонарні точки та точки, в яких частинні похідні не існують, називають *критичними* (або точками можливого екстремуму).

Теорема 2 (*достатня умова локального екстремуму*). Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — стаціонарна точка функції $z = f(x, y)$. Позначимо

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \ C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}, \ \Delta = AC - B^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta > 0$, $A > 0\,(C > 0)$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка мінімуму;
2) якщо $\Delta > 0$, $A < 0\,(C < 0)$, то $M_0(x_0, y_0)$ — точка максимуму;
3) при $\Delta < 0$ екстремум не існує;
4) при $\Delta = 0$ питання про екстремум відкрите.

3.4. Умовний екстремум

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$ за умови, що її аргументи зв'язані між собою співвідношенням

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{1.12}$$

яке визначає на площині Oxy деяку лінію L і називається *рівнянням зв'язку.* Нехай координати точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють рівняння зв'язку (1.12), тобто точка M_0 лежить на лінії L.

Функція $z = f(M)$ має в точці M_0 *умовний мінімум* (*максимум*) за умови зв'язку (1.12), якщо існує такий окіл точки M_0, що для довільної точки $M(x, y)$ ($M \neq M_0$) із цього околу, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується нерівність

$$f(M) > f(M_0) \ (f(M) < f(M_0)).$$

Отже, умовний мінімум (максимум) — це найменше (найбільше) значення функції в точці M_0 відносно тільки тих точок із деякого околу точки M_0, які належать лінії L.

Наприклад, умовний мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y = 1$ досягається у точці $M_0(1/2; 1/2)$, тоді як безумовний екстремум — у точці $O(0; 0)$ (рис. 1.12).

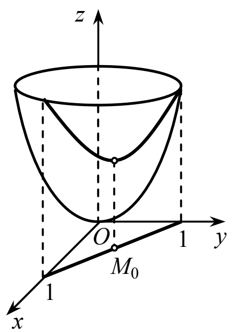

Рис. 1.12

Точки умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$, аргументи якої задовольняють умову (1.12), знаходять так: якщо рівняння зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ можна розв'язати, наприклад, відносно змінної y: $y = g(x)$, то, підставляючи у функцію $z = f(x, y)$ замість y значення $g(x)$, дістаємо функцію однієї змінної $z = f(x, g(x))$. Оскільки умова зв'язку врахована, то задача відшукання умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції однієї змінної.

Так, у наведеному вище прикладі із рівняння зв'язку одержуємо $y = 1 - x$. Тоді

$$z = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Оскільки $z' = 4x - 2$, $z'' = 4 > 0$, то $x = \dfrac{1}{2}$ — точка мінімуму функції z, причому $z_{\min} = \dfrac{1}{2}$. Знаходимо координату y : $y = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Отже, умовний мінімум функції $z = x^2 + y^2$ за умови $x + y - 1 = 0$ досягається у точці $M_0(1/2; 1/2)$.

Коли ж рівняння зв'язку допускає параметризацію:

$$x = x(t), \ y = y(t),$$

тобто

$$\varphi(x(t),\ y(t)) \equiv 0\,,$$

задача відшукання умовного екстремуму зводиться до задачі на звичайний екстремум функції $z = f(x(t), y(t))$.

Проте не завжди рівняння зв'язку можна параметризувати або розв'язати відносно якоїсь змінної. У цьому разі застосовують *метод множників Лагранжа,* суть якого полягає в тому, що задача умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$ замінюється задачею відшукання звичайного екстремуму функції Лагранжа:

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),} \tag{1.13}$$

де λ — множник Лагранжа, який не залежить від x і y.

Зазначимо, що в довільній точці $M(x, y)$, координати якої задовольняють рівняння зв'язку, виконується рівність:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y)\,.$$

Для відшукання точок можливого екстремуму функції (1.13) необхідно розв'язати систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,,\ \ \frac{\partial L}{\partial y} = 0\,,\ \ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi = 0 \tag{1.14}$$

відносно незалежних змінних x, y та λ. Якщо x_0, y_0, λ_0 — один із розв'язків системи (1.14), то $M_0(x_0, y_0)$ — критична точка функції $z = f(x, y)$ за умови, що $\varphi(x, y) = 0$. Далі досліджують знак другого диференціала d^2L функції Лагранжа, враховуючи співвідношення

$$d\varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy = 0\,.$$

Якщо $d^2L(M_0) > 0$, то M_0 — точка умовного мінімуму. Якщо $d^2L(M_0) < 0$, то M_0 — точка умовного максимуму.

3.5. Найбільше і найменше значення функції кількох змінних

Нехай у замкненій та обмеженій області D задано неперервну функцію $z = f(x, y)$. Згідно з теоремою Вейєрштрасса функція z досягає свого найбільшого та найменшого значень.

Відшукання цих значень здійснюють за таким алгоритмом:

1. Знаходять усі точки можливого екстремуму функції z, які належать області D. Це — *стаціонарні* точки і точки, в яких не існує хоча б одна частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ або $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знаходять усі точки межі області D, в яких може бути екстремум. Для цього необхідно скористатися одним із методів відшукання умовного екстремуму.

3. Знаходять точки перетину різних гладких частин межі.

4. Обчислюють значення функції z у відібраних точках, після чого вибирають серед них найбільше та найменше значення.

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z = x^2 y + xy^3$ у точці $(2;\ 1)$.

Розв'язання. За умовою $x_0 = 2$, $y_0 = 1$. Знаходимо аплікату точки дотику $z_0 = 6$. Обчислюємо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ у точці дотику:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2;\ \frac{\partial z(2;1)}{\partial x} = 5;\ \frac{\partial z(2;1)}{\partial y} = 10.$$

Підставивши ці значення у відповідні формули з таблиць 1.1 і 1.2, дістанемо рівняння дотичної площини

$$z - 6 = 5(x-2) + 10(y-1), \text{ або } 5x + 10y - z - 14 = 0$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y-1}{10} = \frac{z-6}{-1}.$$

2. Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні

$$x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 z^3 = 4$$

у точці $M_0(1;\ 1;\ 1)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами, вміщеними у таблицях 1.1 та 1.2. Маємо

$$F = x^3 + y^3 + z^3 + xy^2z^3 - 4\,;\ \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2z^3\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2xyz^3\,;\ \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + 3xy^2z^2\,;$$

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x} = 4\,;\ \frac{\partial F(M_0)}{\partial y} = 5\,;\ \frac{\partial F(M_0)}{\partial z} = 6\,.$$

Отже, рівняння дотичної площини

$$4(x-1)+5(y-1)+6(z-1)=0\text{, або } 4x+5y+6z-15=0\,,$$

рівняння нормалі —

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{6}\,.$$

3. Обчисліть похідну функції $u = x^2y + xy^2z + z^3$ у точці $M(0;1;-1)$ за напрямом вектора $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

Розв'язання. Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{l}$:

$$\vec{l} = \{-2,\ 1,\ 2\}\,,\ |\vec{l}| = \sqrt{4+1+4} = 3\,,\ \cos\alpha = -\frac{2}{3},\ \cos\beta = \frac{1}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3}\,.$$

Обчислимо частинні похідні даної функції в точці $M(0;1;-1)$:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x} = 2xy + y^2z\big|_M = -1\,;\ \frac{\partial u(M)}{\partial y} = x^2 + 2xyz\big|_M = 0\,;$$

$$\frac{\partial u(M)}{\partial z} = xy^2 + 3z^2\big|_M = 3\,.$$

Підставивши одержані значення у формулу (2.10), дістанемо

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (-1)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 0\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3}\,.$$

Зазначимо, що функція $u(x,y,z)$ у точці M у напрямі вектора $\vec{l}$ зростає, оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial l} > 0$.

4. Знайдіть кут між градієнтами функції $u = \dfrac{\sqrt{xy}}{z}$, які обчислені в точках $M_1(2;\ 2;\ 1)$ та $M_2(1;\ 1;\ -1)$.

Розв'язання. Кут між векторами $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$ знайдемо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}.$$

У нашому випадку $\vec{a}_1 = grad\ u(M_1)$, $\vec{a}_2 = grad\ u(M_2)$. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{y}{x}},\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2z}\sqrt{\frac{x}{y}},\ \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{z^2}\sqrt{xy},$$

$$\vec{a}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{a}_2 = -\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} - \vec{k};$$

$$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot(-1)}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 4}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отже,

$$\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

5. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^2 - 2y^3 - 2x + 6y.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $z(x, y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -6y^2 + 6.$$

Необхідна умова екстремуму (2.11) набуває вигляду

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ -6y^2 + 6 = 0, \end{cases}$$

звідки дістаємо дві точки можливого екстремуму: $M_1(1; 1)$ і $M_2(1; -1)$.

З'ясуємо виконання достатньої умови локального екстремуму у знайдених точках.

Знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -12y.$$

У точці $M_1(1; 1)$ маємо:

$$A = 2,\ B = 0,\ C = -12,\ \Delta = 2\cdot(-12) - 0 = -24 < 0.$$

Оскільки $\Delta < 0$, то в точці $M_1(1;1)$ екстремум відсутній.

Точці $M_2(1;-1)$ відповідають значення

$$A = 2\ ,\ B = 0\ ,\ C = 12\ ,\ \Delta = 24 > 0\ .$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A > 0$, то в точці $M_2(1;-1)$ функція сягає мінімуму, причому $z_{\min} = z(1;-1) = -3$.

6. Дослідіть на екстремум функцію

$$z = x^3 + xy^2 + x^2 y.$$

Розв'язання. За необхідною умовою екстремуму маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2xy = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо єдину стаціонарну точку $M(0;0)$.

Частинні похідні другого порядку мають вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 2y\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y + 2x\ ,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\ .$$

У точці $M(0;0)$ усі похідні другого порядку обертаються в нуль, тобто $A = B = C = \Delta = 0$. Теорема **2** не дає відповіді про існування екстремуму у точці *М*. Проведемо додаткове дослідження. Значення функції у точці $M(0;0)$ дорівнює нулю: $z(0;0) = 0$. На прямій $y = 0$ $z = x^3$. При $x > 0$ $z(x;\ 0) = x^3 > 0$, а при $x < 0$ $z(x;\ 0) = x^3 < 0$. Отже, в довільному околі точки $M(0;0)$ функція набуває як додатних, так і від'ємних значень. Це означає, що в цій точці функція $z(x,y)$ не має локального екстремуму.

7. Знайдіть умовний екстремум функції $u = x^2 + y^2 + 2z^2$, якщо $x - y + z = 1$.

Розв'язання. Виразимо з умови зв'язку змінну *z*:

$$z = 1 - x + y$$

і підставимо її значення у функцію $u(x,y,z)$. У результаті прийдемо до задачі про безумовний екстремум функції двох змінних x та y :

$$u = x^2 + y^2 + 2(1 - x + y)^2.$$

Знайдемо точки можливого екстремуму одержаної функції:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 4(1 - x + y) = 0 \ ; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 4(1 - x + y) = 0 \ ;$$

$$\begin{cases} x - 2(1 - x + y) = 0, \\ y + 2(1 - x + y) = 0; \end{cases} \begin{cases} y = -x, \\ 5x = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 2/5, \\ y = -2/5. \end{cases}$$

Отже, функція $u(x, y)$ має єдину стаціонарну точку $M\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

Частинні похідні другого порядку функції $u(x, y)$ такі:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -4 \ ; \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6 \ .$$

Оскільки $\Delta(M) = 6 \cdot 6 - (-4)^2 = 20 > 0$ та $A = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6 > 0$, то у точці $M\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}\right)$ ця функція досягає мінімуму. Знаходимо координату z: $z = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$.

Отже, функція $u = x^2 + y^2 + 2z^2$ за умови $x - y + z = 1$ має у точці $M_1\left(\frac{2}{5}; -\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ мінімум, причому $u_{\min} = u(M_1) = \frac{2}{5}$.

8. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 3x + 2y^3$ за умови $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x \geq 0$.

Розв'язання. Зручно записати умову зв'язку, яка геометрично є правою частиною еліпса, у параметричній формі:

$$x = 2\cos t \ , \ y = \sin t \ , \ t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Тоді функція $z(x, y)$ набуде вигляду $z(t) = 6\cos t + 2\sin^3 t$.

Досліджуємо цю функцію на екстремум:

$$z'(t) = -6\sin t + 6\sin^2 t \cos t = 3\sin t(\sin 2t - 2) \ ;$$

$$\sin t(\sin 2t - 2) = 0, \quad \sin t = 0, \ t = \pi n, \ n \in Z \ .$$

За умовою $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $t = 0$ — єдина стаціонарна точка, переходячи через яку похідна змінює знак із «+» на «–». Отже, $t = 0$ — точка максимуму функції $z(t)$. Знаходимо $x_{\max} = 2\cos 0 = 2$, $y_{\max} = \sin 0 = 0$, $z_{\max} = 6$.

Таким чином, точка $(2; 0)$ — точка умовного максимуму функції $z = 3x + 2y^3$ на кривій $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,\ x \geq 0$.

9. Знайдіть умовний екстремум функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Розв'язання. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L = 8 - 2x - 4y + \lambda(x^2 + 2y^2 - 12),$$

необхідні умови екстремуму якої мають вигляд:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = -2 + 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -4 + 4\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 12 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda x = 1, \\ \lambda y = 1, \\ x^2 + 2y^2 = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1/\lambda, \\ y = 1/\lambda, \\ \lambda^2 = 1/4, \end{cases}$$

звідки знаходимо дві критичні точки: якщо $\lambda = 1/2$, то $x = y = 2$; якщо $\lambda = -1/2$, то $x = y = -2$. Отже, точки $M_1(2; 2)$, $M_2(-2; -2)$ — точки можливого екстремуму функції $z = 8 - 2x - 4y$ за умови, що $x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Перейдемо до перевірки достатніх умов існування екстремуму.

Знаходимо d^2L:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 4\lambda; \ \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0;$$

$$d^2L = 2\lambda dx^2 + 2 \cdot 0 dxdy + 4\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + 2dy^2).$$

При $\lambda = 1/2$ виконується нерівність $d^2L > 0$, значить точка $M_1(2; 2)$ є точкою умовного мінімуму; при $\lambda = -1/2$ $d^2L < 0$, тобто точка $M_2(-2; -2)$ є точкою умовного максимуму. Знаходимо

$$z_{\min} = z(2; 2) = -4, \ z_{\max} = z(-2; -2) = 20.$$

10. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + xy + 2y^2$ в області $D = \{(x, y) \big| x \le 1,\ y \le x+1,\ y \ge |x| - 1\}$.

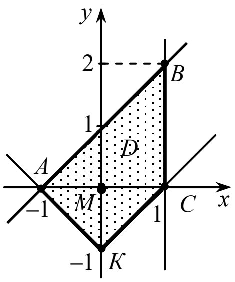

Рис. 1.13

Розв'язання. Знайдемо спочатку стаціонарні точки функції $z(x, y)$. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Отже, $M(0; 0)$ — єдина стаціонарна точка даної функції, ця точка належить області *D* (рис. 1.13).

Переходимо до дослідження функції на межі області *D*, яка складається із чотирьох відрізків *AB*, *BC*, *CK* і *KA*.

Рівняння відрізка *AB*: $y = x + 1, x \in [-1; 1]$, на цьому відрізку функція має вигляд:

$$z = x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 4x^2 + 5x + 2 ,$$

мінімум якої досягається в точці $x = -5/8$. Оскільки $-5/8 \in [-1; 1]$, то точка $M_1(-5/8;\ 3/8)$ належить відрізку AB .

На відрізку *BC*: $x = 1, y \in [0; 2]$ функція набуває вигляду

$$z = 1 + y + 2y^2 ,$$

її точка мінімуму — $y = -1/4 \notin [0; 2]$, тобто точка $M_2(1;\ -1/4)$ не належить відрізку BC . Виключаємо цю точку з подальшого розгляду.

Розглянемо функцію на відрізку *KC*: $y = x - 1, x \in [0; 1]$. Маємо

$$z = x^2 + x(x-1) + 2(x-1)^2 = 4x^2 - 5x + 2 ,$$

її точка мінімуму — $x = 5/8 \in [0; 1]$. Цьому значенню відповідає точка $M_2(5/8;\ -3/8)$ відрізка *KC*.

Нарешті, на межі *KA*: $y = -x - 1, x \in [-1; 0]$ функція

$$z = x^2 + x(-x-1) + 2(-x-1)^2 = 2x^2 + 3x + 2$$

має мінімум при $x = -3/4 \in [-1; 0]$, тобто точка $M_3(-3/4; -1/4) \in KA$.

Обчислимо значення функції $z(x, y)$ у відібраних точках *M*, M_1, M_2, M_3, а також у точках A, B, C та *K*:

$$z(M)=0,\ z(M_1)=7/16,\ z(M_2)=7/16,\ z(M_3)=7/8,\ z(A)=1,$$
$$z(B)=11,\ z(C)=1,\ z(K)=2.$$

Отже,

$$\max_D z(x, y)=z(1;\ 2)=11;\ \min_D z(x, y)=z(0;\ 0)=0.$$

Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Напишіть рівняння дотичної площини та нормалі, проведеної до поверхні $z(x, y)$ у точці *M*.

1. $z=x^2+3y^2$, $M(2;\ 1)$.

2. $\sin^2 x+\sin^2 y+\cos^2 z=2$, $M(\pi/2, \pi/4, \pi/4)$.

3. $xyz=e^{x+y+z}+1$, $M(2;\ -1;\ -1)$.

4. $x^2-3x+y^2+2xy+2xz-2zy+2=z^2$, в точках перетину з віссю Ox.

5. Знайдіть похідну функції $u=xy^2+z^3-xyz$ у точці $M(1;\ 1;\ 2)$ у напрямку вектора, який утворює з координатними осями Ox і Oy відповідно кути $\alpha=60°$ і $\beta=45°$.

6. Знайдіть похідну функції $z=\ln(x^2+y^2)$ в точці $M(2;\ 1)$ в напрямі до точки $N(6;\ 4)$.

7. Знайдіть похідну функції $z=x^2-3xy+2y^2$ у точці $M(1;\ 1)$ за напрямом її градієнта.

8. Знайдіть градієнт функції $u=ze^{x-y+2z}$ у точці $M(1; 0; 0)$.

9. Знайдіть точки, в яких градієнт функції $z=\ln(x-y^{-1})$ дорівнює $\vec{i}+\vec{j}$.

10. Знайдіть кут між градієнтами функції $z=\operatorname{arctg}(x/y)$ у точках $M_1(1;\ 1)$ та $M_2(-1; -1)$.

Знайдіть екстремуми функцій.

11. $z=x^2-4xy+5y^2-2x+10y$.

12. $z=x^3+3xy^2-15x-12y$.

13. $z=x^2+xy+y^2-4\ln x-10\ln y$.

14. $z=2x^4+xy^3$.

15. $z=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$.

16. $z=e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

Знайдіть умовний екстремум функції $u(x, y, z)$.

17. $u = x^2 - y^2$, якщо $x + 2y - 6 = 0$.
18. $u = xyz$, якщо $x + y + z = 6$.
19. $u = 4x^2 + y^2$, якщо $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} - 4 = 0$.
20. $u = xy^2z^2$, якщо $x + 4y - 2z - 10 = 0$.
21. $u = 16 - 10x - 24y$, якщо $x^2 + y^2 - 169 = 0$.
22. $u = 4x^2 + 2y^2 + z^2$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z(x, y)$ у вказаній області *D*.

23. $z = x^2 - xy + y^2 - 3x + 3y$, $D = \{(x, y) |\ x \ge 0, y \le 0, x - y \le 3\}$.

24. $z = x^3 + y^3 - 3x - 9y + 9$, $D = \{(x, y) |\ |x| + |y| \le 3\}$.

25. $z = 3x^2 + 3y^2 - x - y$, $D = \{(x, y) |\ x \le 5,\ y \ge 0,\ y \le x - 1\}$.

26. $z = 2x^2y - x^3y - x^2y^2$, $D = \{(x, y) |\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 6\}$.

27. $z = 4 - 2x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) \big|\ y \ge 0, y \le \sqrt{1 - x^2}\}$.

Відповіді

1. $4x + 6y - z - 7 = 0$, $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z-7}{-1}$. **2.** $y - z = 0$, $\dfrac{x - \pi/2}{0} = \dfrac{y - \pi/4}{1} = \dfrac{z - \pi/4}{-1}$. **3.** $y + z + 2 = 0$, $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+1}{3}$. **4.** $M_1(1;\ 0;\ 0)$, $x - y - 2z - 1 = 0$, $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$; $M_2(2;0;0)$, $x + 2y + 4z - 2 = 0$, $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{4}$. **5.** 5 або – 6. **6.** $22/25$. **7.** 2. **8.** $grad u = e\vec{k}$. **9.** (2; 1), (0; –1). **10.** $180°$. **11.** (–5;–3) — точка локального мінімуму. **12.** (2; 1) — точка локального мінімуму, (–2; –1) — точка локального максимуму. **13.** (1; 2) — точка локального мінімуму. **17.** (–2; 14) — точка умовного мінімуму. **18.** $u_{max} = f(2;\ 2;\ 2) = 8$. **21.** (5; 12) — точка умовного мінімуму, (–5; –12) — точка умовного максимуму. **23.** $z_{min} = f(1; -1) = -3$, $z_{max} = f(0;\ 0) = 4$. **24.** $z_{min} = f(-3;\ 0) = -9$, $z_{max} = f(3;\ 0) = 27$. **25.** $z_{min} = f(1/6;\ 1/6) = -1/6$, $z_{max} = f(5;\ 4) = 114$. **26.** $z_{min} = 0$, $z_{max} = f(1;\ 0{,}5) = 0{,}25$. **27.** $z_{min} = f(1;\ 0) = f(-1;\ 0) = 2$, $z_{max} = f(0;\ 0) = 4$.

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Складіть рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z(x, y)$ у точці M:

3.1.1. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$, $M(2;\ 2)$.

3.1.2. $z = \dfrac{x^2 - xy + y^2}{x + y}$, $M(1;\ 2)$.

3.1.3. $z = \sin(e^{x-y} - 1)$, $M(1; 1)$.

3.1.4. $z = \dfrac{x}{y(x + y)}$, $M(2;\ -1)$.

3.1.5. $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2 + 10}$, $M(1;\ 4)$.

3.1.6. $z = \ln(x^2 - y^2 - 4)$, $M(3; 2)$.

3.1.7. $z = \operatorname{arctg}(e^{x^2 - 2xy})$, $M(2;\ 1)$.

3.1.8. $z = e^{x^2 - 3xy + 2y^2}$, $M(1; 1)$.

3.1.9. $z = (x - y^2)e^{x^2 + y}$, $M(1; -1)$.

3.1.10. $z = x^3 y^2 + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $M(1; 1)$.

3.1.11. $z = (x^2 + y^2 - x)e^{xy}$, $M(1;\ 0)$.

3.1.12. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{x - y}$, $M(2; 0)$.

3.1.13. $z = \sqrt{x^3 - y^2 + 3x + 2y}$, $M(1; 2)$.

3.1.14. $z = \sqrt[3]{x^4 + y^4 + 10}$, $M(1; 2)$.

3.1.15. $z = \sqrt[4]{x^3 - xy + y^3}$, $M(1; -1)$.

3.1.16. $z = \dfrac{x - xy + y}{x^2 + y^2}$, $M(1; 0)$.

3.1.17. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x^3 + y^3}$, $M(1;\ 1)$.

3.1.18. $z = \dfrac{x - y}{x^3 + y^3}$, $M(1;\ 1)$.

3.1.19. $z = (x^3 - 2xy)e^{x+y}$, $M(1; -1)$.

3.1.20. $z = e^{x^2 - x - y + y^2}$, $M(1;\ 0)$.

3.1.21. $z = \ln(2x^2 - 7y^2)$, $M(2;\ 1)$.

3.1.22. $z = \sqrt{3x^2 - y}$, $M(2; 3)$.

3.1.23. $z = \sqrt{x^2 + 2y^2 - 2x - 1}$, $M(2; 1)$.

3.1.24. $z = (x^2 + 4xy - y^2 - 3)^3$, $M(1;\ 1)$.

3.1.25. $z = xy + \sqrt{x^2 + y^2}$, $M(-3;\ 4)$.

3.1.26. $z = \ln(x^2 - 3xy + y^2 + 2)$, $M(2;\ 1)$.

3.1.27. $z = (x + 2y)\sqrt{x^2 + y^2}$, $M(1; 0)$.

3.1.28. $z = \operatorname{arctg}(\cos x + \sin y)$, $M\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{6}\right)$.

3.1.29. $z = \sqrt[3]{x^2 + 3xy - 4x + 3y - 1}$, $M(1; 2)$.

3.1.30. $z = \ln(x^2 - 3xy - y - 2)$, $M(4;\ 1)$.

3.2. Знайдіть кут між градієнтами функцій u і v у точці M.

3.2.1. $u = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} / y)$, $v = \ln(x^2 + \sqrt{y})$, $M(1; 1)$.

3.2.2. $u = \sqrt{3x^2 + 4y^2 + z^2}$, $v = \sqrt[4]{2x + 5y + 3z}$, $M(1; 1; 3)$.

3.2.3. $u = \arcsin(xy)$, $v = \arccos(xy)$, $M(3; 1/4)$.

3.2.4. $u = x^2 + y^2 + z^2$, $v = x^2 - 4y + z^2$, $M(1; 1; 1)$.

Знайдіть кут між градієнтами функції u, обчисленими в точках M_1 та M_2.

3.2.5. $u = xy^2 z^4$, $M_1(1; 2; 1)$, $M_2(1; -1; 0)$.

3.2.6. $u = \sqrt{xy} \cdot z^{-2}$, $M_1(4; 1; 1)$, $M_2(1; 9; -1)$.

3.2.7. $u = \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz} + \sqrt[3]{xz}$, $M_1(1; 8; 1)$, $M_2(1;\ 1;\ 1)$.

3.2.8. $u = \operatorname{arctg}(x + y^2 z)$, $M_1(1; 1; 1)$, $M_2(0; 1; 2)$.

Знайдіть похідну функції u в точці M_1 у напрямку до точки M_2.

3.2.9. $u = \sqrt{x^2 + xy + y^3}$, $M_1(1; 0)$, $M_2(2; 1)$.

3.2.10. $u = \ln(x^2 - 3x + y^2)$, $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2; 2)$.

3.2.11. $u = e^{x^2 y}(x + y)^2$, $M_1(0; 1)$, $M_2(-1; 2)$.

3.2.12. $u = \sin^2 x \cos 2y$, $M_1(\pi / 4;\ \pi / 3)$, $M_2(\pi / 3;\ 0)$.

Знайдіть похідну функції u в точці M_1 у напрямку її градієнта, обчисленого в цій точці.

3.2.13. $u = \sqrt[3]{x + y^2 + z^3}$, $M_1(3; 4; 2)$.

3.2.14. $u = \sqrt{x^2 + y^2}\ (x^2 + z^2)^{-1/2}$, $M_1(3; 4; -4)$.

3.2.15. $u = \ln(\sqrt{xy} + \sqrt{yz})$, $M_1(1; 4; 1)$.

3.2.16. $u = \operatorname{arcctg}(xy^2 z)$, $M_1(1; -1; 2)$.

Знайдіть $\operatorname{grad} u$ та $|\operatorname{grad} u|$ функції u в точці M.

3.2.17. $u = xy^2 z^{-3} + \sqrt{x} \cdot (yz)^{-1}$, $M(1; -2; 2)$.

3.2.18. $u = \sqrt{xyz} + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2}$, $M(1; 4; 1)$.

3.2.19. $u = \ln(x^3 + y^3 + z^3)$, $\qquad M(1; -1; 2)$.

3.2.20. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\qquad M(6; -2; 3)$.

Знайдіть точки, для яких виконується умова $\operatorname{grad} u = \vec{a}$.

3.2.21. $u = x^2 + xy + yz + xz$, $\qquad \vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

3.2.22. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 3xy + 2y + xz$, $\quad \vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{k}$.

3.2.23. $u = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + z^2$, $\qquad \vec{a} = 4\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$.

3.2.24. $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - xy + 2x - 4z$, $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$.

Знайдіть точки, в яких $|\operatorname{grad} u| = b$.

3.2.25. $u = \ln(x^2 + y^2)$, $b = 2$. $\qquad$ **3.2.26.** $u = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $b = 3$.

3.2.27. $u = \sqrt{x + 2y}$, $b = 1$.

Знайдіть похідну функції u у точці M у напрямку її радіус-вектора.

3.2.28. $u = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{yz}}$, $M(1; 1; 2)$. $\qquad$ **3.2.29.** $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $M(1; 2; -2)$.

3.2.30. $u = \ln\sin(x + 2yz)$, $M(0; \pi/6; 1)$.

3.3. Дослідіть функцію $z = f(x, y)$ на екстремум.

3.3.1. $z = 4x + \dfrac{y^2}{x} + 2y + y^2$.

3.3.2. $z = \ln(xy) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y}$.

3.3.3. $z = 3 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

3.3.4. $z = x^2 + 8xy + 20y^2 - 20y - 1$.

3.3.5. $z = \ln(x^4 y) + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} - 3x$.

3.3.6. $z = \ln(xy^2) + \dfrac{5y + 6x}{xy}$.

3.3.7. $z = 9x + \dfrac{y^2}{x} + 6y + 3y^2 + 2$.

3.3.8. $z = 2x - y + \dfrac{1}{x}(y + \ln x + 1)$.

3.3.9. $z = 27x^3 + 18xy^2 - 153x - 72y$.

3.3.10. $z = 3x^2 + y^2 - 3x + 3xy - 3y$.

3.3.11. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

3.3.12. $z = x^3 + y^3 - 5x^2y + 3xy^2 + 5x + 5y$.

3.3.13. $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + y^2)$.

3.3.14. $z = 6x - x^2 - xy - y^2$.

3.3.15. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

3.3.16. $z = \dfrac{x^2}{y^3} - 2x - \dfrac{1}{y} - 2y - 2$.

3.3.17. $z = x^2 + 5y^2 + 2x + 4xy - 6y$.

3.3.18. $z = x^3 + y^3 - 2x^2y + 3xy^2 - 7x - 7y$.

3.3.19. $z = \ln(x^2y) + \dfrac{4y + 3x}{xy}$.

3.3.20. $z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.

3.3.21. $z = 2\,\mathrm{arctg}\,x + 2\,\mathrm{arctg}\,y - \ln(x^2 + 1)(y^2 + 1)$.

3.3.22. $z = 2y\sqrt{3x} - 8y^2 - 3x + 28y$.

3.3.23. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$.

3.3.24. $z = (x + y)\ln(x + y) + x^2$.

3.3.25. $z = xy(6 - x - y)$.

3.3.26. $z = (x + 2y)\ln(x + 2y) + 4y^2$.

3.3.27. $z = 27x^3 + 8y^3 - 18xy$.

3.3.28. $z = x^3 + y^3 - 3xy^2 - 9x + 9y$.

3.3.29. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x$.

3.3.30. $z = 4\,\mathrm{arctg}\,x + 2\,\mathrm{arctg}\,y - \ln(x^2 + 1)(y^2 + 1)$.

3.4. Знайдіть умовний екстремум функції $u(x, y, z)$.

3.4.1. $u = x + 2y$, якщо $4x^2 + 9y^2 = 36$.

3.4.2. $u = 16x^2 + y^2$, якщо $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{2}{y} - 4 = 0$.

3.4.3. $u = x - 2y + z$, якщо $x + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

3.4.4. $u = xy + yz + zx$, якщо $x + y + z - 1 = 0$.

3.4.5. $u = x + y + xyz$, якщо $x + y + z - 1 = 0$.

3.4.6. $u = xy^2z^2$, якщо $x + 2y - 2z - 5 = 0$.

3.4.7. $u = x^2 + 5y^2$, якщо $\frac{4}{x} - \frac{20}{y} - 3 = 0$.

3.4.8. $u = x^2yz^2$, якщо $2x + y + 2z - 5 = 0$.

3.4.9. $u = y - \ln(2 + x^2)$, якщо $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

3.4.10. $u = 18 + 3x - 4y$, якщо $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

3.4.11. $u = xyz$, якщо $x^2 + y^2 - z - 1 = 0$.

3.4.12. $u = 2x^2 + y^2 + z^2$, якщо $x^2 + z^2 - xy + 6x + 9y = 0$.

3.4.13. $u = x - 2y + 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

3.4.14. $u = x + y$, якщо $9x^2 + 16y^2 = 144$.

3.4.15. $u = xy^2z^3$, якщо $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

3.4.16. $u = x^2yz^3$, якщо $2x - y + 3z - 6 = 0$.

3.4.17. $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

3.4.18. $u = 2x^2 + y^2$, якщо $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + 3 = 0$.

3.4.19. $u = \frac{2}{x} + \frac{1}{y}$, якщо $\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$.

3.4.20. $u = xy$, якщо $x^2 + y^2 = 8$.

3.4.21. $u = x^2y^2z$, якщо $x + 2y + 2z = 0$.

3.4.22. $u = 2x + y + 3xyz$, якщо $2x + y + 3z - 1 = 0$.

3.4.23. $u = x + y + z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 3 = 0$.

3.4.24. $u = x^3 - 8y^3 + 8z^3$, якщо $x - 2y + 2z = 0$.

3.4.25. $u = 2x^2 + 5y^2 + z^2 + 2x$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

3.4.26. $u = \frac{2}{x} + \frac{3}{y}$, якщо $\frac{4}{x^2} + \frac{9}{y^2} = 1$.

3.4.27. $u = x + y$, якщо $9x^2 + y^2 = 9$.

3.4.28. $u = x - 6y + 2z$, якщо $x + 9y^2 - 4z^2 - 1 = 0$.

3.4.29. $u = 3 - 4x - 2y$, якщо $2x^2 + y^2 - 12 = 0$.

3.4.30. $u = \dfrac{4y^2 + 3x^2 + 8}{x^2 + y^2 + 2}$, якщо $x - y^2 - 1 = 0$.

3.5. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $z(x, y)$ у замкненій області $\overline{D}$:

3.5.1. $z = 3x^2 + y^2 - 2xy - 4x,\ \ \overline{D} = \{(x, y)\big|\ -1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le x + 1\}$.

3.5.2. $z = x^3 - 12xy + y^3$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 2\}$.

3.5.3. $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ y \ge 0,\ x \ge -3, x + y \le -1\}$.

3.5.4. $z = xy(3 - x - y)$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \ge 0, y \ge -2, x + y \le 6\}$.

3.5.5. $z = x^3 + 3y^2$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ x^2 + y^2 \le 4\}$.

3.5.6. $z = x^2 - y^2 + 3xy - 5x - y,\ \ \overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \le 3,\ y \le 2,\ 2x + y \ge 0\}$.

3.5.7. $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$, $\overline{D} = \{(x, y)\big| x \le 3,\ \ y \ge 0,\ \ y \le x + 1\}$.

3.5.8. $z = (x - y)^2 + y^2 + 2x$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \le 0, y \le 0, x + y + 4 \ge 0\}$.

3.5.9. $z = 2x^3 + 3y^2$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

3.5.10. $z = x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x + 4y,\ \ \overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \le 2,\ \ y \le x + 1,\ \ y \ge 0\}$.

3.5.11. $z = 2x^2 - y^2 - 3xy - x + 5y,\ \ \overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + 2y \le 4\}$.

3.5.12. $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 10\}$.

3.5.13. $z = x^2 + 3xy + 2y^2$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ y \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge x - 2\}$.

3.5.14. $z = x^2 + 2y^2 - 3x - 5y + xy,\ \ \overline{D} = \{(x, y)\big|\ x \le 2,\ y \le 2,\ x + y \ge 0\}$.

3.5.15. $z = x^3 + 2y^2 - x$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ x^2 + y^2 \le 16\}$.

3.5.16. $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ y \ge 0,\ \ x \ge 0,\ \ x + y \le 3\}$.

3.5.17. $z = 3x^2 + y^3 + 4$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$.

3.5.18. $z = x^4 - 2x^2y^2 + y^3$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ y \ge x^2, y \le 4\}$.

3.5.19. $z = x^3 + 3x^2y + y^3$, $\overline{D} = \{(x, y)\big| - 3 \le x \le 3, - 5 \le y \le 5\}$.

3.5.20. $z = 2x^2 - 5xy + y^2$, $\overline{D} = \{(x, y)\big|\ y \ge -3,\ x \ge 0,\ x + y \le 1\}$.

3.5.21. $z = 2x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 4y$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid x \geq -1,\ y \geq 0,\ x + y \leq 3\}$.

3.5.22. $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

3.5.23. $z = \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{y} + x - y + 1$, $\bar{D} = \left\{(x, y) \,\middle|\, \dfrac{1}{2} \leq x \leq 3, \dfrac{1}{3} \leq y \leq 2\right\}$.

3.5.24. $z = 4x - 4y - x^2 - y^2$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid x + y \leq 2,\ y \geq 0,\ x \geq 0\}$.

3.5.25. $z = x^2 + xy - 2$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid y \geq 4x^2 - 4, y \leq 0\}$.

3.5.26. $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

3.5.27. $z = x^2 + 2xy - 10$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid y \leq 2,\ y \geq x^2 - 2\}$.

3.5.28. $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid x \leq 0,\ y \geq 0,\ y \leq x + 3\}$.

3.5.29. $z = 5x^2 - 3xy + y^2$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}$.

3.5.30. $z = x^2 + 2xy - 1$, $\bar{D} = \{(x, y) \mid y \leq 0, y \geq x^2 - 4\}$.

Тема 4. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Поняття комплексного числа. Дії над комплексними числами в алебраїчній формі. Геометричне зображення комплексних чисел. Модуль і аргумент комплексного числа. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі.

Література: [2, розділ 1, стор. 18—25], [3, розділ 7, §1], [4, §3], [5, розділ 3, §6], [6, розділ 7, розділ 7, §1—§8], [8, 1 част., розділ 6].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Поняття комплексного числа

Вираз

$$\boxed{z = a + bi,}$$

де a і b — дійсні числа, $i = \sqrt{-1}$ — уявна одиниця ($i^2 = -1$), називають комплексним числом. Таку форму запису комплексного числа називають *алгебраїчною*, число a — дійсною частиною комплексного числа z, а b — уявною частиною z і позначають

$$\boxed{a = \operatorname{Re} z, \ \ b = \operatorname{Im} z.}$$

Позначення дійсної й уявної частин комплексного числа z походить від французьких слів: *reel* — дійсний, *imaginaire* — уявний.

Два комплексні числа $z = a + bi$ і $\overline{z} = a - bi$ називають *спряженими*.

Комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ рівні між собою ($z_1 = z_2$) тоді і тільки тоді, коли рівні їхні дійсні та уявні частини, тобто $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$.

Комплексне число $z = a + bi$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $a = b = 0$.

Поняття «більше—менше» для комплексних чисел не існує.

4.2. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі

Дії над комплексними числами $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$ виконують за такими правилами:

1) додавання:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i;$$

2) віднімання:

$$z_1 - z_2 = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)i;$$

3) множення:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i;$$

4) ділення ($z_2 \neq 0$):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

4.3. Геометричне зображення комплексних чисел. Модуль і аргумент комплексного числа

Між множиною C усіх комплексних чисел і всіма точками площини існує взаємно однозначна відповідність, іншими словами, кожному комплексному числу $z = a + bi$ ставиться у відповідність точка площини (a, b), і навпаки, кожній точці з координатими (a, b) ставиться у відповідність комплексне число $z = a + bi$. На рисунку 1.14 комплексне число $z = a + bi$ зображається точкою $M(a, b)$. Таку площину умовно називають комплексною площиною змінної z, вісь Ox — дійсною, а вісь Oy — уявною віссю. Комплексне число $z = a + bi$ можна також зображувати вектором, початок якого міститься у точці O (0; 0), а кінець — у точці $M(a, b)$.

Якщо $b = 0$, тоді комплексне число $z = a + 0 \cdot i = a$ стає дійсним числом. Отже, дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел, їх позначають точками осі Ox.

Якщо $a = 0$, то комплексні числа $z = 0 + bi = bi$ називають суто уявними; такі числа зображають точками осі Oy.

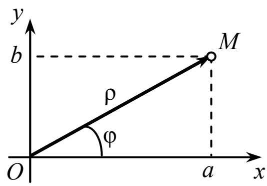

Рис. 1.14

Довжину ρ вектора $\overrightarrow{OM}$ називають *модулем* комплексного числа і позначають $|z|$. З рис. 1.14 зрозуміло, що

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.} \quad (1.15)$$

Кут φ між додатним напрямом осі Ox і вектором $\overrightarrow{OM}$, який відповідає комплексному числу $z = a + bi$, називають *аргументом* комплексного числа z ($z \neq 0$) і позначають $\varphi = \arg z$.

Кожне ненульове комплексне число має безліч аргументів. Усі вони задаються формулою

$$\boxed{\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},}$$

де $\operatorname{Arg} z$ — загальне значення аргументу;

$\arg z$ — *головне значення аргументу*, яке задовольняє умову

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

Головне значення аргументу комплексного числа $z = a + bi$ можна визначити за таким правилом:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{якщо } a > 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{якщо } a < 0, b \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{якщо } a < 0, b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } a = 0, b < 0. \end{cases} \quad (1.16)$$

Відшукання аргументу комплексного числа рекомендуємо розпочинати з геометричного зображення цього числа.

4.4. Тригонометрична форма комплексного числа

З рисунка 1.14 видно, що $a = \rho\cos\varphi$, $b = \rho\sin\varphi$. Тоді комплексне число $z = a + bi$ можна подати у вигляді

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi).} \tag{1.17}$$

Праву частину формули (1.17) називають тригонометричною формою комплексного числа *z*.

4.5. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Нехай $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Знайдемо добуток

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$$
$$= \rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Висновок. Під час множення комплексних чисел їхні модулі перемножують, а аргументи додають.

Піднесення комплексного числа, заданого у тригонометричній формі, до *n*-го степеня, де $n \in N$, виконують за формулою Муавра:

$$\boxed{z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).} \tag{1.18}$$

Ділення комплексних чисел, заданих у тригонометричній формі:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).}$$

Корінь степеня *n*, де *n* — ціле додатне число, з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ добувають за формулою:

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),} \tag{1.19}$$

де $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Отже, існує n різних значень кореня n-го степеня з числа z. Усім цим значенням відповідають точки площини, які лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у початку координат і є вершинами правильного n-кутника.

4.6. Показникова форма комплексного числа

За формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi .$$

Звідси випливає, що комплексне число, записане у тригонометричній формі, можна подати ще й так:

$$\boxed{z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\, e^{i\varphi}.}$$

Вираз $|z|\, e^{i\varphi}$ називають *показниковою* формою комплексного числа z.

Нехай $z_1 = |z_1|\, e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2|\, e^{i\varphi_2}$. Тоді:

1) $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|\, e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$;

2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;

3) $z^n = |z|^n\, e^{in\varphi}$.

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Нехай $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 4 - 3i$. Виконайте дії:

а) $z_1 + z_2$; б) $3z_1 - 2z_2$; в) $z_1 z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$; д) $(z_1)^3$.

Розв'язання. а) $z_1 + z_2 = (3+i) + (4-3i) = 7 - 2i$;

б) $3z_1 - 2z_2 = 3(3+i) - 2(4-3i) = 9 + 3i - 8 + 6i = 1 + 9i$;

в) $z_1 z_2 = (3+i)(4-3i) = 12 + 4i - 9i - 3i^2 = 12 - 5i + 3 = 15 - 5i$;

г) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+i}{4-3i} = \dfrac{(3+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \dfrac{12 + 4i + 9i + 3i^2}{16 - 9i^2} =$

$= \dfrac{9 + 13i}{25} = \dfrac{9}{25} + \dfrac{13}{25} i$;

д) $(z_1)^3 = (3+i)^3 = 27 + 27i + 9i^2 + i^3 = 27 + 27i - 9 - i = 18 + 26i$.

2. Обчисліть $i^{18}+i^{25}+i^{36}+i^{-1}$.

Розв'язання. Враховуючи рівності $i^2=-1,\quad i^3=-i,\quad i^4=1$, маємо

$$i^{18}+i^{25}+i^{36}+i^{-1}=i^{16+2}+i^{24+1}+i^{36}-i=$$
$$=(i^4)^4\cdot i^2+(i^4)^6\cdot i+(i^4)^9-i=i^2+i+1-i=0\,.$$

3. Знайдіть дійсну та уявну частини комплексного числа

$$z=\frac{(3-2i)^2}{2i+1}+(i-1)^3\,.$$

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$z=\frac{9-12i+4i^2}{2i+1}+i^3-3i^2+3i-1=\frac{5-12i}{2i+1}-i+3+3i-1=$$
$$=\frac{(5-12i)(2i-1)}{(2i+1)(2i-1)}+2i+2=\frac{10i+24-5+12i}{-5}+2i+2=\frac{12i+9}{-5}\,.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=-\dfrac{9}{5}$, $\operatorname{Im} z=-\dfrac{12}{5}$.

4. Знайдіть модуль й головне значення аргументу комплексних чисел, запишіть ці числа у тригонометричній формі:

а) $z_1=3$; б) $z_2=2i$; в) $z_3=-1$;

г) $z_4=1+i$; д) $z_5=1-i\sqrt{3}$; е) $z_6=-2-i$.

Розв'язання. Вказаним числам відповідають на площині точки M_1-M_6 (рис. 1.15).

За формулами (1.15) — (1.17) дістаємо:

а) $|z_1|=3,\ \varphi_1=0,\quad z_1=3(\cos 0+i\sin 0)$;

б) $|z_2|=2,\ \varphi_2=\dfrac{\pi}{2},\quad z_2=2(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2})$;

в) $|z_3|=1,\ \varphi_3=\pi,\quad z_3=\cos\pi+i\sin\pi$;

г) $|z_4|=\sqrt{2},\ \varphi_4=\dfrac{\pi}{4},\quad z_4=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$;

д) $|z_5|=\sqrt{1+3}=2,\ \varphi_5=\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\dfrac{\pi}{3}$,

$$z_5=2(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}))\,;$$

е) $|z_6|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\ \varphi_6=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}-\pi,\quad z_6=\sqrt{5}(\cos\varphi_6+i\sin\varphi_6)$.

5. Знайдіть $(-\sqrt{3}+i)^{13}$.

Розв'язання. Запишемо дане число у тригонометричній формі (рис. 1.16):

$$\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2,\ \cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\varphi=\frac{1}{2},\ \varphi=\frac{5\pi}{6},$$

$$z=-\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}).$$

За формулою Муавра дістанемо

$$(-\sqrt{3}+i)^{13}=2^{13}(\cos 13\cdot\frac{5\pi}{6}+i\sin 13\cdot\frac{5\pi}{6})=$$

$$=2^{13}(\cos(10\pi+\frac{5\pi}{6})+i\sin(10\pi+\frac{5\pi}{6})=2^{13}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})=4096(-\sqrt{3}+i).$$

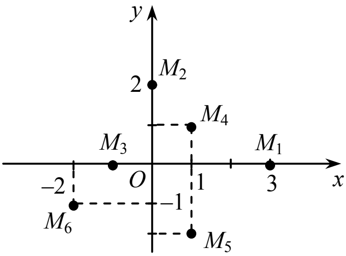

Рис. 1.15

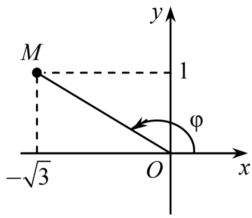

Рис. 1.16

6. Розв'яжіть рівняння $z^4+16=0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $z^4=-16$. Тепер подамо число –16 у тригонометричній формі: $-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$.

Використовуючи формулу (1.19), дістаємо

$$\sqrt[4]{-16}=2\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Послідовно визначаємо усі чотири корені даного рівняння:

$$z_1=2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_2=2\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{4}\right)=2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}+i\sqrt{2},$$

$$z_3 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2},$$

$$z_4 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

З погляду геометрії одержані корені — вершини квадрата, вписаного у коло радіуса 2 (рис. 1.17).

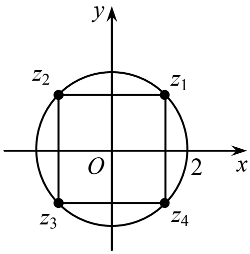

Рис. 1.17

7. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Розв'язання. Маємо квадратне рівняння з від'ємним дискримінантом: $D = 16 - 4\cdot 5 = -4$. Значить рівняння має пару комплексно-спряжених коренів:

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{-4}}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2+i,$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{-4}}{2} = 2-i.$$

8. Розв'яжіть рівняння $|z| - 2z = -1 - 8i$.

Розв'язання. Невідоме число z запишемо в алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Тоді

$$\sqrt{x^2+y^2} - 2x - 2yi = -1 - 8i.$$

З умови рівності комплексних чисел одержуємо систему двох рівнянь із двома невідомими:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - 2x = -1, \\ -2y = -8, \end{cases}$$

розв'язок якої $x = 3$, $y = 4$. Отже, шукане число $z = 3 + 4i$.

9. Нехай $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$. Виконайте дії:

а) $z_1 z_2$; б) $(z_1)^6$.

Розв'язання:

а) $z_1 z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\cdot 3e^{i\frac{\pi}{3}} = 6e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)} = 6e^{i\frac{\pi}{2}} = 6(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 6i$;

б) $(z_1)^6 = (2e^{i\frac{\pi}{6}})^6 = 64e^{i\pi} = -64$.

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Виконайте дії:

1. $(2+5i)+(2-2i)$. **2.** $(1-i)^2$. **3.** $(3-4i)(3+4i)$.

4. $i+i^{11}+i^{21}+i^{31}+i^{41}$. **5.** $(2-3i)(4-i)$. **6.** $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot i^4$.

7. $\dfrac{1}{i^3}+\dfrac{1}{i^5}$. **8.** $\dfrac{1+i}{i}$. **9.** $\dfrac{2-3i}{4+5i}$. **10.** $\dfrac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}$.

11. $\dfrac{(1-2i)(2+i)}{3-2i}$. **12.** $\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$. **13.** $(1-i)^3-(1+i)^3$.

14. $\dfrac{1}{1+2i}+\dfrac{1}{2-i}$. **15.** $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$. **16.** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

Знайдіть модуль, головне значення аргументу комплексних чисел, зобразіть їх на комплексній площині і запишіть у тригонометричній і показниковій формах:

17. $z=-i$. **18.** $z=1-i\sqrt{3}$. **19.** $z=-\sqrt{3}+i$. **20.** $z=-4+4i$.

Виконайте дії і запишіть результати в алгебраїчній формі.

21. $2(\cos 18^\circ+i\sin 18^\circ)\cdot 3(\cos 27^\circ+i\sin 27^\circ)$.

22. $(5+5i)(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)$.

Піднесіть до вказаного степеня, результат запишіть в алгебраїчній формі.

23. $(1+i)^{20}$. **24.** $(\sqrt{3}+i)^{10}$. **25.** $\left(\sqrt[5]{2}(\cos 6^\circ+i\sin 6^\circ)\right)^{30}$.

Знайдіть в алгебраїчній формі всі значення коренів.

26. $\sqrt[6]{1}$ **27.** $\sqrt[3]{1}$. **28.** $\sqrt[4]{-1}$. **29.** $\sqrt[3]{i}$. **30.** $\sqrt[4]{\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ}$.

Знайдіть усі розв’язки рівнянь.

31. $z^3+27=0$. **32.** $z^4-81=0$.

33. $z^6+64=0$. **34.** $z^4+9z^2+20=0$.

Відповіді

1. $4+3i$. **2.** $-2i$. **3.** 25. **4.** i. **5.** $5-14i$. **6.** -1. **7.** 0. **8.** $1-i$. **9.** $-\frac{7}{41}-\frac{22}{41}i$.

10. $\frac{1}{68}+\frac{21}{68}i$. **11.** $\frac{18}{13}-\frac{1}{13}i$. **12.** $0,5-0,5i\sqrt{3}$. **13.** $-4i$. **14.** $0,6-0,2i$. **15.** i.

16. $-2+1,5i$. **17.** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. **18.** $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. **19.** $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

20. $4(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$. **21.** $3\sqrt{2}(1+i)$. **22.** $2,5(1+i\sqrt{3})$. **23.** -1024. **24.** $512(1-i\sqrt{3})$.

25. -64. **27.** 1; $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **28.** $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$. **29.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i), -i$. **30.** $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$, $\pm\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **31.** -3, $\frac{3}{2}(1\pm i\sqrt{3})$. **32.** $\pm 3; \pm 3i$. **33.** $\pm 2i$; $\pm(\sqrt{3}+i)$; $\pm(\sqrt{3}-i)$.

34. $\pm 3i$; $\pm i\sqrt{5}$.

Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Знайдіть дійсні та уявні частини комплексних чисел.

1.1.1. $z=\frac{2-i}{i+2}+(i-1)^4$.

1.1.2. $z=\frac{2+i}{3i-1}+(2i-1)^3$.

1.1.3. $z=\frac{(2-i)^3}{(i+2)^2}+2i+3$.

1.1.4. $z=\frac{1-i^5}{(i+1)^5}$.

1.1.5. $z=\frac{1-i}{i+1}-\frac{2-3i}{1-2i}$.

1.1.6. $z=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4+\frac{1}{i}$.

1.1.7. $z=\frac{(1-i)(2+3i)}{2i+1}+i^{12}$.

1.1.8. $z=\frac{(2+i)^4}{(2i-1)(i+2)}$.

1.1.9. $z=\frac{(4-i)(2i+1)}{i}+i^{21}$.

1.1.10. $z=\frac{(2-i)^4}{(2i-3)(i+4)}$.

1.1.11. $z=\frac{(2+i)(4+5i)}{2i-1}+i^{32}$.

1.1.12. $z=\frac{2-i}{i+2}-\frac{3-4i}{2-3i}$.

1.1.13. $z=\frac{(1-i)^4}{(3i-1)(i+3)}$.

1.1.14. $z=\left(\frac{2+i}{2-i}\right)^4+\frac{2}{i^3}$.

1.1.15. $z=\dfrac{4+i}{4i-1}+(i-2)^3$.

1.1.16. $z=\dfrac{(1-i^3)(2+i)}{(i+2)^4}$.

1.1.17. $z=\dfrac{(1-i^9)(3+i)}{(i-3)^3}$.

1.1.18. $z=\dfrac{(4-i)(2+5i)}{3i+1}+i^{51}$.

1.1.19. $z=\dfrac{1+2i}{i+2}+\dfrac{2-i}{1-2i}$.

1.1.20. $z=\dfrac{(1-2i)^4}{(i+3)(3i+1)}$.

1.1.21. $z=\left(\dfrac{3-i}{3+i}\right)^4-\dfrac{1}{i^7}$.

1.1.22. $z=\dfrac{(1+2i)^4}{(i+4)(4i+1)}$.

1.1.23. $z=\dfrac{(1+3i)(5-2i)}{4i-1}-i^{46}$.

1.1.24. $z=\dfrac{3-2i}{2i+3}+\dfrac{4-3i}{2-i}$.

1.1.25. $z=\dfrac{(i-1)(2i+5)}{(3-i)^4}$.

1.1.26. $z=\left(\dfrac{1+2i}{1-2i}\right)^4+\dfrac{i^{18}}{2i}$.

1.1.27. $z=\dfrac{-2+i}{i-3}+(3i-1)^3$.

1.1.28. $z=\dfrac{(1+i^{11})(2+3i)}{(2i-1)^2}$.

1.1.29. $z=\dfrac{1+3i}{(i+2)^2}+\dfrac{3-i}{(2-i)^2}$.

1.1.30. $z=\dfrac{i}{(i+1)^3}+i^{111}\cdot(2-i)^2$.

1.2. Використовуючи формулу Муавра, знайдіть дійсні та уявні частини комплексних чисел.

1.2.1. $(1-\sqrt{3}i)^8$.

1.2.2. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{11}$.

1.2.3. $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$.

1.2.4. $(1+\sqrt{3}i)^{12}$.

1.2.5. $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$.

1.2.6. $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{11}$.

1.2.7. $(1-i)^{16}$.

1.2.8. $(\sqrt{3}-i)^7$.

1.2.9. $(-1+i)^{20}$.

1.2.10. $(-1-i)^{18}$.

1.2.11. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2i}\right)^7$.

1.2.12. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^9$.

1.2.13. $(1-i)^{13}$.

1.2.14. $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^{13}$.

1.2.15. $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{10}$.

1.2.16. $(\sqrt{3}+i)^{13}$.

1.2.17. $(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{12}$.

1.2.18. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)^8$.

1.2.19. $(-\sqrt{3}-i)^{14}$.

1.2.20. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}i}\right)^{8}$.

1.2.21. $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^{10}$.

1.2.22. $(2-2i)^{8}$.

1.2.23. $(-1-\sqrt{3}i)^{9}$.

1.2.24. $(2-2\sqrt{3}i)^{7}$.

1.2.25. $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{9}$.

1.2.26. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{14}$.

1.2.27. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}i}\right)^{12}$.

1.2.28. $(2\sqrt{3}-2i)^{6}$.

1.2.29. $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^{8}$.

1.2.30. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2i}\right)^{10}$.

1.3. Знайдіть усі корені з комплексного числа.

1.2.1. $\sqrt[4]{-16}$.

1.2.2. $\sqrt[3]{-8}$.

1.2.3. $\sqrt[4]{81}$.

1.2.4. $\sqrt[3]{-1+i}$.

1.2.5. $\sqrt[6]{-729}$.

1.2.6. $\sqrt[5]{32}$.

1.2.7. $\sqrt[6]{64}$.

1.2.8. $\sqrt[3]{-125}$.

1.2.9. $\sqrt[3]{64i}$.

1.2.10. $\sqrt[4]{-256}$.

1.2.11. $\sqrt[4]{81i}$.

1.2.12. $\sqrt[3]{125i}$.

1.2.13. $\sqrt[3]{-64i}$.

1.2.14. $\sqrt[3]{-1-i}$.

1.2.15. $\sqrt[4]{-81}$.

1.2.16. $\sqrt[3]{27i}$.

1.2.17. $\sqrt[3]{-27}$.

1.2.18. $\sqrt[4]{256}$.

1.2.19. $\sqrt[3]{-8i}$.

1.2.20. $\sqrt[6]{-64}$.

1.2.21. $\sqrt[6]{4096}$.

1.2.22. $\sqrt[3]{-8+8i}$.

1.2.23. $\sqrt[3]{-216}$.

1.2.24. $\sqrt[4]{625}$.

1.2.25. $\sqrt[4]{-625}$.

1.2.26. $\sqrt[3]{-216i}$.

1.2.27. $\sqrt[4]{-1/16}$.

1.2.28. $\sqrt[3]{216i}$.

1.2.29. $\sqrt[6]{-4096}$.

1.2.30. $\sqrt[3]{8i}$.

Модуль 2

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Загальна характеристика модуля. У цьому розділі вивчаються методи інтегрування, застосування визначених інтегралів.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

Тема 1. Невизначений інтеграл.
Тема 2. Многочлени. Раціональні функції.
Тема 3. Інтегрування раціональних виразів.
Тема 4. Інтегрування тригонометричних функцій.
Тема 5. Інтегрування ірраціональних функцій.
Тема 6. Визначений інтеграл.
Тема 7. Невласні інтеграли.
Тема 8. Застосування визначеного інтеграла.

Базисні поняття. **1.** Первісна. **2.** Невизначений інтеграл. **3.** Інтегральна сума. **4.** Визначений інтеграл. **5.** Невласний інтеграл. **6.** Збіжність невласного інтеграла.

Основні задачі. **1.** Знаходження невизначених інтегралів. **2.** Обчислення визначених інтегралів. **3.** Застосування визначених інтегралів. **4.** Дослідження невласних інтегралів.

ЩО ПОВИНЕН ЗНАТИ ТА ВМІТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Первісна.
1.2. Невизначений інтеграл, властивості.
1.3. Таблиця невизначених інтегралів.
1.4. Методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), інтегрування частинами).
1.5. Задача про площу криволінійної трапеції.
1.6. Означення визначеного інтеграла, властивості.

1.7. Інтеграл із змінною верхньою межею, формула Ньютона—Лейбніца.

1.8. Невласні інтеграли першого і другого роду.

1.9. Обчислення площ, мас, координат центрів мас плоских областей; довжин дуг плоских кривих, об'ємів тіл.

2. Знання на рівні доведень та виведень

2.1. Властивості невизначеного та визначеного інтегралів.

2.2. Формули заміни змінної, інтегрування частинами.

2.3. Формула Ньютона—Лейбніца.

2.4. Обчислення довжини дуги плоскої кривої.

2.5. Обчислення об'єму тіла за заданим поперечним перерізом.

2.6. Обчислення об'ємів тіл обертання.

3. Уміння в розв'язанні задач

3.1. Зводити інтеграли до табличних, використовуючи властивості лінійності і внесення функції під знак диференціала.

3.2. Застосовувати потрібну заміну в інтегралах відомих типів.

3.3. Інтегрувати найпростіші вирази, що містять квадратний тричлен.

3.4. Інтегрувати частинами. Знати класи функцій, які інтегрують частинами.

3.5. Інтегрувати раціональні дроби.

3.6. Інтегрувати ірраціональні вирази.

3.7. Інтегрувати тригонометричні функції.

3.8. Обчислювати визначений інтеграл, використовуючи формулу Ньютона—Лейбніца, заміну змінної, інтегрування частинами.

3.9. Обчислювати чи досліджувати на збіжність невласні інтеграли.

3.10. Обчислювати площу, масу, координати центра мас плоскої області, довжину дуги плоскої кривої, об'єм тіла.

Тема 1. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Поняття первісної і невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів. Методи інтегрування: безпосереднє інтегрування, метод підстановки (заміни змінної), інтегрування частинами. Класи функцій, які інтегрують частинами.

Література: [1, розділ 6, п. 6.1—6.3], [2, розділ 2, п. 2.1], [3, розділ 7, § 1], [4, розділ 7, § 22], [6, розділ 8], [7, розділ 10, § 1—6], [9, § 29—30].

Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Функцію $F(x)$ називають *первісною* функції $f(x)$ на проміжку (a,b), якщо $F(x)$ диференційовна на (a,b) і

$$F'(x) = f(x),\ x \in (a,b).$$

Сукупність усіх первісних $F(x)+C,\quad C \in R$ функції $f(x)$ на (a,b) називають *невизначеним інтегралом* функції $f(x)$ і записують так:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Термін «інтеграл» походить від латинського слова *integralis* — цілісний.
Символ ∫ (курсивне *s*) — початкова літера слова *summa* (сума).
Властивості невизначеного інтеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. **2.** $\int dF(x) = F(x) + C$.

3. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$. **4.** $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $\lambda = \text{const}$.

5. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

6. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ — довільна функція, що має неперервну похідну, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Зокрема,

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.} \qquad (2.1)$$

Тут a і b — довільні сталі, $a \neq 0$.

Остання властивість (її називають *інваріантністю формули інтегрування*) дуже важлива. Вона означає, що та чи інша формула для невизначеного інтеграла справджується незалежно від того, є змінна інтегрування незалежною змінною чи довільною функцією від неї, що має неперервну похідну.

Операцію відшукання невизначеного інтеграла від функції називають *інтегруванням* цієї функції.

1.2. Таблиця основних інтегралів

Інтеграли цієї таблиці називаються табличними, і їх треба знати з двох причин. По-перше, мета існуючих методів інтегрування полягає в тому, щоб звести шуканий інтеграл до табличного. Отже, табличний інтеграл треба вміти розпізнавати. По-друге, внаслідок інваріантності кожен табличний інтеграл «породжує» безліч інтегралів, що легко відшукуються на основі табличного.

Нехай $u(x)$ — довільна функція, що має на деякому проміжку неперервну похідну $u'(x)$. Тоді на цьому проміжку справджуються такі формули, зведені у табл. 2.1:

Таблиця 2.1

1. $\int 0du = C$.	**2.** $\int du = u + C$.
3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.	**4.** $\int \frac{du}{u} = \ln\|u\| + C.$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.	**6.** $\int e^u du = e^u + C$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.	**8.** $\int \cos u du = \sin u + C$.
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.	**10.** $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.
11. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$.	**12.** $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\|\frac{u-a}{u+a}\right\| + C$.
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.	**14.** $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C.$
15. $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$	**16.** $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C$.
17. $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.	**18.** $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.
19. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln\|\cos u\| + C.$	**20.** $\int \operatorname{ctg} u du = \ln\|\sin u\| + C.$
21. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\| + C.$	**22.** $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\|\operatorname{tg}(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4})\| + C.$

Основні методи інтегрування:

1. Метод безпосереднього інтегрування.
2. Метод підстановки (заміни змінної).
3. Метод інтегрування частинами.

1.3. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод базується на використанні таблиці інтегралів, властивостей лінійності інтеграла та інваріантності формул інтегрування.

1.4. Метод підстановки (заміни змінної). Внесення функції під знак диференціала

Суть методу підстановки полягає в уведенні нової змінної. При знаходженні інтеграла $\int f(x)\,dx$ застосовують підстановки таких двох видів:

$$1)\ \boxed{x = \varphi(t);} \qquad 2)\ \boxed{\omega(x) = t.}$$

Тут $\varphi(t)$, $\omega(x)$ — неперервно-диференційовні функції.

У першому випадку $dx = \varphi'(t)dt$ і

$$\int f(x)dx = \int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt\,.$$

Другу підстановку доцільно виконувати, якщо підінтегральний вираз можна подати у вигляді

$$f(x)dx = g\left(\omega(x)\right)\cdot\omega'(x)dx,$$

тоді

$$\int f(x)dx = \int g(\omega(x))\cdot\omega'(x)dx = \int g(\omega(x))d\,\omega(x) = \int g(t)dt\,. \qquad (2.2)$$

У цьому випадку функція $\omega'(x)$ *вводиться під знак диференціала*:

$$\boxed{\omega'(x)dx = d(\omega(x)) = dt\,.}$$

Підстановки слід підбирати так, щоб одержані інтеграли були табличними або зводились до простіших інтегралів.

Спільним в обох способах введення нової змінної є зворотний перехід від змінної t до змінної x.

Загальних методів підбору підстановок не існує. Але є широкі класи функцій, для яких будуть указані спеціальні типи підстановок.

1.5. Метод інтегрування частинами

Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні.

Тоді

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Цю формулу називають *формулою інтегрування частинами*. Вона дає змогу перейти від інтеграла $\int udv$ до інтеграла $\int vdu$.

Для відшукування інтеграла $\int f(x)dx$ за частинами вираз $f(x)dx$ намагаються подати у вигляді udv так, щоб інтеграл $\int vdu$ набував простішого вигляду порівняно з даним інтегралом.

Деякі типи інтегралів, які зручно знаходити методом інтегрування частинами:

1) інтеграли вигляду

$$\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx,$$

де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах за u слід узяти множник $P(x)$, а за dv — вираз, що залишився;

2) інтеграли вигляду

$$\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\operatorname{arctg} xdx,$$

де $P(x)$ — многочлен. У цих інтегралах слід взяти $dv = P(x)dx$, а за u — вираз, що залишився;

3) інтеграли вигляду

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta xdx, \int e^{\alpha x}\cos\beta xdx,$$

де α, β — дійсні числа. Після двократного застосування методу інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. З цього рівняння знаходять інтеграл.

Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

І. Знайдіть інтеграли, використовуючи метод безпосереднього інтегрування

1. $\int (2x^3 + \frac{1}{x} - 1)dx$.

Розв'язання.

$$\int (2x^3 + \frac{1}{x} - 1)dx = 2\int x^3 dx + \int \frac{1}{x} dx - \int dx =$$

$$= 2(\frac{x^{3+1}}{3+1} + C_1) + \ln|x| + C_2 - x + C_3 = \frac{x^4}{2} + \ln|x| - x + C.$$

При кожному інтегруванні виникають проміжні довільні сталі: C_1, C_2, C_3, але тоді $2C_1 + C_2 + C_3 = C$ — також є довільною сталою. Тому надалі стала C означатиме суму всіх проміжних сталих.

2. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx$.

Розв'язання. Нагадаємо формули $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$, $\frac{1}{\sqrt[m]{x^n}} = x^{-\frac{n}{m}}$. Тоді

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx - \int x^{-\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-2/3+1} - \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-3/2+1} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + C = 3\sqrt[3]{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + C .$$

3. $\int 3^x e^x dx$.

Розв'язання. Оскільки $a^x b^x = (ab)^x$, то

$$\int 3^x e^x dx = \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} + C .$$

4. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2 + 2x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$.

Розв'язання:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|\, x+\sqrt{1+x^2}\,| + C$;

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{9/4-x^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{3} + C$.

5. $\int \frac{dx}{1+\cos 2x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + C$.

6. $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}} \right| + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)dx}{\sin^2 x \cos^2 x} =$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

8. $\int \frac{x^3+1}{x+1} dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x^3+1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} dx =$

$$= \int (x^2-x+1)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + C.$$

9. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$.

Розв'язання. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos x)dx = \frac{1}{2}(x+\sin x) + C$.

10. $\int \frac{4^x-4}{2^x+2} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{4^x-4}{2^x+2} dx = \int \frac{(2^x-2)(2^x+2)}{2^x+2} dx = \int (2^x-2)dx = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x + C.$$

11. $\int \frac{dx}{1+9x^2}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+9x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1/9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{(1/3)^2+x^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x + C.$$

12. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз є неправильним дробом, тому потрібно виділити цілу частину дробу. Маємо

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx = \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

У прикладах 13—16 використовуємо формулу (2.1).

13. $\int \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + C.$

14. $\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$.

15. $\int (2x-1)^5 dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-1)^6}{6} + C = \frac{(2x-1)^6}{12} + C$.

16. $\int \frac{xdx}{x+2} = \int \frac{(x+2)-2}{x+2}dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x+2} = x - 2\ln|x+2| + C$.

II. Знайдіть інтеграли, використовуючи метод заміни змінної або внесення функції під знак диференціала

17. $\int x\sqrt{2-x}dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $\sqrt{2-x} = t$. Тоді

$$2-x = t^2,\ x = 2-t^2,\ dx = -2tdt,$$

$$\int x\sqrt{2-x}dx = \int (2-t^2)\cdot t\cdot(-2t)\,dt = 2\int (t^4-2t^2)\,dt = \frac{2}{5}t^5 - \frac{4}{3}t^3 + C.$$

Після повернення до змінної x одержимо

$$\int x\sqrt{2-x}dx = \frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} - \frac{4}{3}\sqrt{(2-x)^3} + C.$$

18. $\int \frac{dx}{1-e^x}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $1-e^x=t$. Тут зручно знайти не dx, а dt: $dt=-e^x dx$ і, оскільки $-e^x=t-1$, то $dt=(t-1)dx$, або $dx=\frac{dt}{t-1}$.

Далі маємо

$$\int \frac{dx}{1-e^x}=\int \frac{dt}{t(t-1)}=\int \frac{t-(t-1)}{t(t-1)}dt=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt=\int \frac{d(t-1)}{t-1}-\int \frac{dt}{t}=$$

$$=\ln|t-1|-\ln|t|+C=\ln e^x-\ln\left|1-e^x\right|+C=x-\ln\left|1-e^x\right|+C.$$

19. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$.

Розв'язання. Застосуємо заміну $x=2\sin t$, $dx=2\cos t dt$. При цьому

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2 t}=2\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cos t.$$

Тоді

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx=\int 2\cos t\cdot 2\cos t dt=4\int \cos^2 t dt=$$

$$=2\int (1+\cos 2t)\,dt=2t+\sin 2t+C.$$

Перейдемо до змінної x:

$$\sin t=\frac{x}{2},\ t=\arcsin\frac{x}{2},\ \sin 2t=2\sin t\cos t=$$

$$=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\cdot\frac{x}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2},$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$$

Вміючи достатньо диференціювати і знаючи таблиці інтегралів, змінну t у формулі (2.2) можна не вводити, *а зразу вносити відповідну функцію під знак диференціала.* При цьому часто використовують такі перетворення диференціала:

$dx=d(x+b)$, b — стала,

$dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, a, b — сталі,

$xdx=\frac{1}{2}d(x^2)$, $\quad \frac{dx}{x}=d(\ln x)$,

$$\cos x dx = d(\sin x), \quad \sin x dx = -d(\cos x),$$
$$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x), \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x).$$

20. $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Розв'язання. Оскільки $xdx = \frac{1}{2}d(1+x^2)$, запишемо інтеграл так:

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{1+x^2}\,d(1+x^2).$$

Враховуючи табличний інтеграл $\int u^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$, дістанемо

$$\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{\frac{1}{2}}d(1+x^2) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.$$

21. $\int x^3 e^{-x^4}dx$.

Розв'язання. Знайдемо диференціал $d(-x^4) = -4x^3dx$, звідси дістаємо $x^3dx = -\frac{1}{4}d(-x^4)$, тоді

$$\int x^3e^{-x^4}dx = -\frac{1}{4}\int e^{-x^4}d(-x^4) = -\frac{1}{4}e^{-x^4} + C.$$

22. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Розв'язання. Враховуючи співвідношення $d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$, подамо інтеграл у вигляді

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int\frac{d\ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

Дістали табличний інтеграл $\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$. Отже,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C.$$

23. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C$.

24. $\int \frac{e^x}{1-e^x}dx$.

Розв'язання. Знайдемо $d(1-e^x) = -e^x dx$, тоді

$$\int \frac{e^x}{1-e^x}dx = -\int \frac{d(1-e^x)}{1-e^x} = -\ln\left|1-e^x\right| + C.$$

25. $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ і $d \sin x = \cos x dx$, то

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

26. $\int \frac{2xdx}{4+x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо диференціал $d(4+x^2) = 2xdx$, тоді

$$\int \frac{2xdx}{4+x^2} = \int \frac{d(4+x^2)}{4+x^2} = \ln(4+x^2) + C.$$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$.

Розв'язання. Враховуючи рівність $d(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} = 2\int \frac{d\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} = -2\int \frac{d(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = -2\ln\left|\sqrt{x}-1\right| + C.$$

28. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{\cos x}} = -\int \frac{d\cos x}{\sqrt{\cos x}} = -2\sqrt{\cos x} + C$.

29. $\int \sin 2x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ і $\sin x dx = -d(\cos x)$, то

$$\int \sin 2x \cos^4 x dx = \int 2\sin x \cos^5 x dx = -2\int \cos^5 x d(\cos x) =$$

$$= -2\frac{\cos^6 x}{6} + C = -\frac{\cos^6 x}{3} + C .$$

30. $\int \frac{x^3 dx}{4+x^8}$.

Розв'язання. Внесемо x^3 під знак диференціала, тоді

$$\int \frac{x^3 dx}{4+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{4+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{2^2+(x^4)^2} = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{2} + C .$$

31. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

Розв'язання. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{\sqrt{1-(x^3)^2}} = \frac{1}{3}\arcsin(x^3) + C$.

32. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{(1+x^2)-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx -$$

$$-\int \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{(1+x^2)^3}} =$$

$$= \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| - \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} d(1+x^2) = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + C = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C .$$

33. $\int \frac{x+(\arcsin 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int \frac{x+(\arcsin 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx + \int \frac{(\arcsin 2x)^3}{\sqrt{1-4x^2}}dx =$$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}}dx + \frac{1}{2}\int (\arcsin 2x)^3\, d\arcsin 2x =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{1-4x^2} + \frac{1}{8}(\arcsin 2x)^4 + C\,.$$

III. **Знайдіть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами**

34. $\int x\ln(x+1)dx$.

Розв'язання. Відзначимо, що $(\ln(x+1))' = \dfrac{1}{x+1}$ — раціональний дріб.

Цей факт є вирішальним для подальших дій. Покладемо $u=\ln(x+1)$, $dv = xdx$, тоді $du = \dfrac{dx}{x+1}$, $v = \dfrac{x^2}{2}$. Після застосування формули інтегрування частинами дістанемо

$$\int x\ln(x+1)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2-1+1}{x+1}dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\,.$$

35. $\int \arcsin x dx$.

Розв'язання. Покладемо $u = \arcsin x$, $dv = dx$, тоді $du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $v = x$.

Після цього дістанемо

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C\,.$$

36. $\int xe^{2x}dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$u = x\,,\ dv = e^{2x}dx\,,\ du = dx\,,\ v = \frac{1}{2}e^{2x}\,,$$

$$\int xe^{2x}dx = x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\,.$$

Зауваження 1. Іноді формулу інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

37. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx$.

Розв'язання. Покладемо $u = x^2 - 2x + 5,$ $dv = e^{-x}dx,$ тоді $v = -e^{-x}$, $du = (2x - 2)dx,$ після чого дістанемо

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx = -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} + 2\int (x - 1)e^{-x}dx\,.$$

Останній інтеграл знову інтегруємо частинами:

$$u = x - 1\,,\ dv = e^{-x}dx\,,\ du = dx\,,\ v = -e^{-x}\,,$$

$$\int (x-1)e^{-x}dx = -(x-1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x-1)e^{-x} - e^{-x} + C_1 == -xe^{-x} + C_1.$$

Отже,

$$\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}dx = -(x^2 - 2x + 5)e^{-x} - 2xe^{-x} + C = -(x^2 + 5)e^{-x} + C\,.$$

Зауваження 2. Якщо $P(x)$ — многочлен, то

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx = Q(x)e^{\alpha x} + C\,,$$

де $Q(x)$ — многочлен того самого степеня, що й $P(x)$. Ця обставина дає можливість застосовувати для знаходження інтегралів указаного типу *метод невизначених коефіцієнтів*, суть якого стане зрозумілою з наступного прикладу.

38. $\int (x^3 + 18)e^{2x}dx$.

Розв'язання. $\int (x^3 + 18)e^{2x}dx = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^{2x} + C_1$,
де A, B, C, D — невідомі коефіцієнти.

Продиференціюємо обидві частини рівності за змінною *x*:

$$(x^3+18)e^{2x} = (3Ax^2+2Bx+C)e^{2x} + 2(Ax^3+Bx^2+Cx+D)e^{2x},$$

тоді

$$x^3+18 = (3Ax^2+2Bx+C) + 2(Ax^3+Bx^2+Cx+D),$$

$$x^3+18 = 2Ax^3+(3A+2B)x^2+(2B+2C)x+C+2D,$$

звідси, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях *x*, дістанемо систему рівнянь

$$1=2A,\ 0=3A+2B,\ 0=2B+2C,\ 18=C+2D,$$

її розв'язок $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{3}{4}$, $D=\frac{69}{8}$.

Отже,

$$\int (x^3+18)e^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{69}{8}\right)e^{2x}+C_1.$$

Зауваження 3. При знаходженні деяких інтегралів після двократного застосування формули інтегрування частинами утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

39. $\int \cos\ln x dx$.

Розв'язання. Покладемо $u=\cos\ln x$, $dv=dx$. Тоді

$$du=-\sin\ln x\frac{dx}{x},\ v=x,\ \int\cos\ln x dx = x\cos\ln x+\int\sin\ln x dx.$$

Останній інтеграл знову інтегруємо частинами:

$$u=\sin\ln x,\ dv=dx,\ du=\cos\ln x\frac{dx}{x},\ v=x,$$

$$\int\sin\ln x dx = x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx.$$

Остаточно дістаємо

$$\int\cos\ln x dx = x\cos\ln x+x\sin\ln x-\int\cos\ln x dx,$$

тобто

$$\int\cos\ln x dx = \frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$$

IV. Виведіть рекурентні формули для відшукання наступних інтегралів:

40. $J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, $n \in N$, $n > 1$.

Розв'язання. Покладемо $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$. Тоді

$$du = -\frac{2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx, \; v = x,$$

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx =$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx - 2na^2\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx.$$

Отже,

$$J_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n - 2na^2 J_{n+1},$$

або

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{a^2}J_n.} \qquad (2.3)$$

Одержана рекурентна формула дає можливість поступово знаходити інтеграли J_n для будь-якого значення *n*, починаючи з $n = 1$.

Наприклад,

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \text{ — табличний інтеграл;}$$

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a^2}J_1 =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C \text{ і т. д.}$$

41. $J_{n,-m} = \int \frac{\sin^n x}{\cos^m x}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний вираз розіб'ємо на частини $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \frac{\sin x}{\cos^m x}dx$. Знайдемо

$$du=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x dx\ ,$$

$$v=\int\frac{\sin x}{\cos^m x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^m x}=\frac{1}{(m-1)\cos^{m-1}x}\ (m\neq 1),$$

$$J_{n,-m}=\frac{\sin^{n-1}x}{(m-1)\cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}\int\frac{\sin^{n-2}x}{\cos^{m-2}x}dx\ .$$

Отже,

$$J_{n,-m}=\frac{\sin^{n-1}x}{(m-1)\cos^{m-1}x}-\frac{n-1}{m-1}J_{n-2,\,2-m}\ .$$

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть інтеграли, використовуючи безпосереднє інтегрування.

1. $\int(x-1)(2x+3)dx$. **2.** $\int\frac{x^3-8}{x-2}dx$. **3.** $\int\sqrt{x\sqrt{x}}dx$.

4. $\int\frac{x^2+2x-3}{\sqrt[3]{x}}dx$. **5.** $\int\sqrt[4]{x^3}(1-\sqrt{x})dx$. **6.** $\int\frac{x-1}{\sqrt{x}-x}dx$.

7. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$. **8.** $\int\mathrm{tg}^2\,xdx$. **9.** $\int(2\,\mathrm{ctg}\,x-1)(2\,\mathrm{ctg}\,x+1)dx.$

10. $\int\frac{1+5\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$. **11.** $\int\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x^2+1}dx$. **12.** $\int\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$.

13. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$. **14.** $\int e^x(3-e^{-x})dx$. **15.** $\int\frac{x^4}{x^2+1}dx$.

16. $\int\frac{6^{x-1}+8^x}{2^x}dx$. **17.** $\int\frac{dx}{4+9x^2}$. **18.** $\int\frac{dx}{\sqrt{9-16x^2}}$.

19. $\int\frac{\sqrt{3-x}+\sqrt{3+x}}{\sqrt{9-x^2}}dx.$ **20.** $\int(\sqrt[3]{x}-1)(2\cdot\sqrt[4]{x}+3)dx$.

Знайдіть інтеграли, використовуючи метод заміни змінної або внесення функції під знак диференціала.

21. а) $\int\sin^3 xd(\sin x)$; б) $\int\sin^3 x\cos xdx$; в) $\int\cos^3 2x\sin 2xdx$.

22. а) $\int \ln^3 x d(\ln x)$; б) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

23. а) $\int 2^{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x)$; б) $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}$.

24. $\int (3x-4)^6 dx$. **25.** $\int \sqrt[3]{2x+5} dx$. **26.** $\int \sqrt[8]{3-x} d(3x)$.

27. $\int \frac{x dx}{5+x^2}$. **28.** $\int \frac{x^2 dx}{4+x^3}$. **29.** $\int \frac{(2x-4)dx}{5+4x-x^2}$.

30. $\int \frac{x dx}{4+x^4}$. **31.** $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **32.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

33. $\int \frac{(3x^2+1)dx}{\sqrt{x^3+x+1}}$. **34.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^6}}$. **35.** $\int \frac{\sin x dx}{4-\sqrt{\cos x}}$.

36. $\int \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$. **37.** $\int \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$. **38.** $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$. **39.** $\int x^2 e^{x^3} dx$.

40. $\int e^{\sin \sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$. **41.** $\int \frac{\sqrt{\frac{x-1}{x}} dx}{x^2}$. **42.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

43. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x(x+1)}$. **44.** $\int \frac{dx}{e^x+1}$. **45.** $\int \frac{\sqrt{x} dx}{1+x}$.

46. $\int x \operatorname{tg}(x^2-1) dx$. **47.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}$. **48.** $\int \frac{(2x+7)dx}{(3x-2)^3}$.

49. $\int (1-2x)^{99} x dx$. **50.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$. **51.** $\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$.

52. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **53.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **54.** $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$. **56.** $\int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{x^4}$. **57.** $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$.

58. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. **59.** $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}$. **60.** $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$.

Знайдіть інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

61. $\int x\cos 4x dx$. **62.** $\int (2x-5)\sin 2x dx$. **63.** $\int (x+3)e^x dx$.

64. $\int (x^3-2x^2+4)e^{2x} dx$. **65.** $\int (x^3+x^2-3x-1)\cos x dx$.

66. $\int x^2 2^x dx$. **67.** $\int \ln(2x-1)dx$. **68.** $\int \sqrt{x}\ln x dx$.

69. $\int \ln(x^2+4)dx$. **70.** $\int x\ln(x-1)dx$. **71.** $\int x\ln(x^2+1)dx$.

72. $\int x^{\frac{1}{3}}\ln^2 x dx$. **73.** $\int \ln^2 x dx$. **74.** $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

75. $\int x\arcsin x dx$. **76.** $\int x tg^2 x dx$. **77.** $\int x\cos^2 x dx$.

78. $\int \arccos x dx$. **79.** $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx$. **80.** $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$.

81. $\int e^x \cos 2x dx$. **82.** $\int \sin\ln x dx$. **83.** $\int e^{px}\sin qx dx$.

84. $\int \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx$. **85.** $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx$. **86.** $\int \arcsin^2 x dx$.

87. $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{x^3} dx$. **88.** $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$. **89.** $\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Доведіть рекурентні формули.

90. $J_n = \int (a^2-x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1} J_{n-1}$.

91. $J_n = \int (\ln x)^n dx = x(\ln x)^n - nJ_{n-1}$.

92. $J_n = \int x^p (\ln x)^n dx = \frac{x^{p+1}(\ln x)^n}{p+1} - \frac{n}{p+1} J_{n-1}$.

93. $J_n = \int (\operatorname{tg} x)^n dx = \frac{1}{n-1}(\operatorname{tg} x)^{n-1} - J_{n-2}$.

Відповіді

1. $\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}-3x+C$. **2.** $\frac{1}{3}x^3+x^2+4x+C$. **3.** $\frac{4}{7}x^{7/4}+C$. **4.** $\frac{3}{8}x^{8/3}+\frac{6}{5}x^{5/3}-$ $-\frac{9}{2}x^{2/3}+C$. **5.** $\frac{4}{7}x^{7/4}-\frac{4}{9}x^{9/4}+C$. **6.** $-x-2\sqrt{x}+C$. **7.** $(x-\sin x)/2+C$. **8.** $\operatorname{tg} x-$

$-x+C$. **9.** $-4\operatorname{ctg}x-5x+C$. **10.** $\dfrac{\operatorname{tg}x+5x}{2}+C$. **11.** $\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+\operatorname{arctg}x+C$.

12. $\arcsin\dfrac{x}{4}+C$. **13.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+C$. **14.** $3e^x-x+C$. **15.** $\dfrac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arctg}x+C$.

16. $\dfrac{3^x}{6\ln 3}+\dfrac{4^x}{\ln 4}+C$. **17.** $\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{2}+C$. **18.** $\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{4x}{3}+C$. **19.** $2\sqrt{3+x}-2\sqrt{3-x}+C$.

20. $x(-3+\dfrac{9}{4}\sqrt[3]{x}-\dfrac{8}{5}\sqrt[4]{x}+\dfrac{24}{19}\sqrt[12]{x^7})+C$. **21.** а) $\dfrac{\sin^4 x}{4}+C$; б) $\dfrac{\sin^4 x}{4}+C$; в) $-\dfrac{1}{8}\cos^4 2x+C.$

22. а) $\dfrac{\ln^4 x}{4}+C$; б) $\dfrac{\ln^4 x}{4}+C$. **23.** а) $\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}}{\ln 2}+C$; б) $\dfrac{2^{\operatorname{tg}x}}{\ln 2}+C$. **24.** $\dfrac{(3x-4)^7}{21}+C$.

25. $\dfrac{3}{8}\cdot\sqrt[3]{(2x+5)^4}+C$. **26.** $-\dfrac{9}{4}\cdot\sqrt[3]{(3-x)^4}+C$. **27.** $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+5)+C$. **28.** $\dfrac{1}{3}\ln(x^3+4)+C$.

29. $-\ln\left|5+4x-x^2\right|+C$. **30.** $\dfrac{1}{4}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}+C$. **31.** $\dfrac{1}{2}\arcsin x^2+C$. **32.** $-\dfrac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$.

33. $2\sqrt{x^3+x+1}+C$. **34.** $\dfrac{1}{3}\ln\left|x^3+\sqrt{1+x^3}\right|+C$. **35.** $-8\ln(4-\sqrt{\cos x})-2\sqrt{\cos x}+C$.

36. $-2\cos\sqrt{x}+C$. **37.** $-2\ln\left|\cos\sqrt{x}\right|+C$. **38.** $\dfrac{2}{3}\times(\ln x)^{3/2}+C.$ **39.** $\dfrac{1}{3}e^{x3}+C$.

40. $e^{\sin\sqrt{x}}+C$. **41.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^3}+C$. **42.** $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})+C$. **43.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$.

44. $x-\ln(e^x+1)+C.$ **45.** $2\sqrt{x}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. **46.** $-\dfrac{1}{2}\ln\left|\cos(x^2-1)\right|+C$. **47.** $\dfrac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+$

$+\dfrac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$. **48.** $-\dfrac{2}{9(3x-2)}-\dfrac{25}{18(3x-2)^2}+C$. **49.** $-\dfrac{(1-2x)^{100}}{200}+C.$

50. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$. **51.** $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C$. **52.** $3\left(\dfrac{t^2}{2}-2t+\ln|t|\right)+C$, где

$t=1+\sqrt[3]{x+1}$. **53.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$. **54.** $\dfrac{1}{2}\arcsin x-\dfrac{x}{2}\times\sqrt{1-x^2}+C$. **55.** $\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2}{x}+C$.

56. $-\dfrac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}+C$. **57.** $\dfrac{81}{8}\arcsin\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{8}\sqrt{9-x^2}\times(9-2x^2)+C$. **58.** $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C$.

59. $\dfrac{4}{7}\sqrt[4]{(1+e^x)^7}-\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{(1+e^x)^3}+C$. **60.** $\ln\left|\operatorname{arctg}x\right|+C$. **61.** $\dfrac{x}{4}\sin 4x+\dfrac{1}{16}\cos 4x+C$.

62. $\dfrac{5-2x}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$. **63.** $(x+2)e^x+C$. **64.** $\left(\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{7}{4}x^2+\dfrac{7}{4}x+\dfrac{9}{8}\right)e^{2x}+C$.

65. $(3x^2+2x-9)\cos x+(x^3+x^2-9x-3)\sin x+C$. **66.** $\dfrac{x^2\ln^2 2-2x\ln 2+2}{\ln^3 2}2^x+C$.

67. $x\ln(2x-1)-x-\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C$. **68.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x-\frac{4}{9}x\sqrt{x}+C$. **69.** $x\ln(x^2+4)-2x+$ $+4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}+C$. **70.** $\frac{x^2}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$. **71.** $\frac{1}{2}[(x^2+1)\ln\times$ $\times(x^2+1)-x^2-1]+C$. **72.** $\frac{3}{32}\sqrt[3]{x^4}(8\ln^2 x-12\ln x+9)+C$. **73.** $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$. **74.** $\frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,x-\frac{x}{2}+C$. **75.** $\frac{2x^2-1}{4}\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+C$. **76.** $x\,\mathrm{tg}\,x-\frac{x^2}{2}+$ $+\ln|\cos x|+C$. **77.** $\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$. **78.** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$. **79.** $\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{arctg}\,x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$. **80.** $-\frac{2\ln^2 x+2\ln x+1}{4x^2}+C$. **81.** $\frac{1}{5}e^x(2\sin 2x+$ $+\cos 2x)+C$. **82.** $\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$. **83.** $\frac{e^{px}(p\sin qx-q\cos qx)}{p^2+q^2}+C$. **84.** $\frac{x}{2\cos^2 x}-$ $-\frac{1}{2}\mathrm{tg}x+\tilde{N}$. **85.** $\frac{x-2}{x+2}e^x+C$. **86.** $x\arcsin^2 x+2\arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}-2x+C$. **87.** $-\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{2x^2}-$ $-\frac{\mathrm{arctg}x}{x}-\frac{\mathrm{arctg}^2 x}{2}+\ln|x|-\frac{\ln(1+x^2)}{2}+C.$ **88.** $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C.$ **89.** $-\arcsin x\times$ $\times\sqrt{1-x^2}+x+C.$

Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Знайдіть інтеграли.

1.1.1. $\int\frac{x^2-3x+2}{\sqrt[4]{x}}dx$.

1.1.2. $\int\sqrt[4]{x^7}(2-\sqrt{x})dx$.

1.1.3. $\int\sqrt[5]{x^3}(4+3\sqrt{x})dx$.

1.1.4. $\int\sqrt[3]{x^2}(1-\sqrt[4]{x})dx$.

1.1.5. $\int\sqrt[5]{x^4}(1+\sqrt[3]{x})dx$.

1.1.6. $\int\sqrt[6]{x^5}(3-\sqrt[3]{x})dx$.

1.1.7. $\int\frac{x^3+1}{\sqrt[7]{x^2}}dx$.

1.1.8. $\int\frac{\sqrt{x}-x+1}{\sqrt[3]{x^4}}dx$.

1.1.9. $\int\frac{x+\sqrt{x}-2}{\sqrt[5]{x^4}}dx$.

1.1.10. $\int\sqrt[3]{x^7}(5-\sqrt[5]{x})dx$.

1.1.11. $\int(\sqrt[5]{x^4}+1)\cdot\sqrt[3]{x^4}\,dx$.

1.1.12. $\int\sqrt[4]{x^5}(2-\sqrt[6]{x})dx$.

1.1.13. $\int\sqrt[3]{x^8}(1+\sqrt[3]{x})dx$.

1.1.14. $\int(\sqrt[4]{x^9}+1)\cdot\sqrt[3]{x^2}\,dx$.

1.1.15. $\int \sqrt[7]{x^5}(1-\sqrt[7]{x})dx$.

1.1.16. $\int \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

1.1.17. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-x^2+2}{\sqrt[3]{x^4}}dx$.

1.1.18. $\int \frac{x^4+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

1.1.19. $\int \sqrt[3]{x^7}(3+\sqrt[4]{x})dx$.

1.1.20. $\int \sqrt[3]{x^4}(1+\sqrt[5]{x})dx$.

1.1.21. $\int \sqrt[5]{x^3}(5-\sqrt{x})dx$.

1.1.22. $\int \frac{x\sqrt{x}+4}{\sqrt[3]{x^4}}dx$.

1.1.23. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-2x^3+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

1.1.24. $\int \frac{x^2+\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x^7}}dx$.

1.1.25. $\int \sqrt[4]{x^9}(1-\sqrt{x})dx$.

1.1.26. $\int (\sqrt[5]{x}+2)\cdot\sqrt[3]{x^2}\,)dx$.

1.1.27. $\int \sqrt[4]{x^3}(3-\sqrt[3]{x})dx$.

1.1.28. $\int \frac{x^2\cdot\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx$.

1.1.29. $\int \frac{\sqrt[3]{x}-3x^2+1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

1.1.30. $\int \frac{x^4+\sqrt{x}-2}{\sqrt[4]{x^3}}dx$.

1.2. Знайдіть інтеграли.

1.2.1. $\int \frac{2-3x}{x^2+2}dx$.

1.2.2. $\int \frac{3-5x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.2.3. $\int \frac{8-13x}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

1.2.4. $\int \frac{6x+1}{2x^2-1}dx$.

1.2.5. $\int \frac{x-2}{\sqrt{2-x^2}}dx$.

1.2.6. $\int \frac{3-7x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

1.2.7. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{2x^2+1}}dx$.

1.2.8. $\int \frac{1+x}{\sqrt{2-x^2}}dx$.

1.2.9. $\int \frac{3x+2}{2x^2+1}dx$.

1.2.10. $\int \frac{1-5x}{25x^2+1}dx$.

1.2.11. $\int \frac{4x-3}{3x^2-4}dx$.

1.2.12. $\int \frac{5x+1}{\sqrt{x^2-6}}dx$.

1.2.13. $\int \frac{x-3}{9x^2+7}dx$.

1.2.14. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$.

1.2.15. $\int \frac{4-2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$.

1.2.16. $\int \frac{5-x}{x^2+2}dx$.

1.2.17. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{4x^2+1}}dx$.

1.2.18. $\int \frac{5-4x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.2.19. $\int \frac{5x-1}{\sqrt{x^2-3}}dx$.

1.2.20. $\int \frac{1-3x}{4x^2-1}dx$.

1.2.21. $\int \frac{x-5}{3-2x^2}dx$.

1.2.22. $\int \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx$. **1.2.23.** $\int \frac{2x-7}{x^2-5}dx$. **1.2.24.** $\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-1}}dx$.

1.2.25. $\int \frac{1+3x}{\sqrt{x^2+1}}dx$. **1.2.26.** $\int \frac{x-5}{x^2+7}dx$. **1.2.27.** $\int \frac{3-7x}{x^2+1}dx$.

1.2.28. $\int \frac{8-2x}{3x^2+1}dx$. **1.2.29.** $\int \frac{3x+7}{\sqrt{x^2+4}}dx$. **1.2.30.** $\int \frac{2x-1}{\sqrt{3x^2-4}}dx$.

1.3. Знайдіть інтеграли.

1.3.1. $\int \sin^2(1-x)dx$.

1.3.2. $\int \sin^3(1-2x)dx$.

1.3.3. $\int (1-2\sin x)^2\, dx$.

1.3.4. $\int \cos^3(5x-1)dx$.

1.3.5. $\int \cos^3(1+3x)dx$.

1.3.6. $\int (3-\sin 2x)^2 dx$.

1.3.7. $\int \sin^2 \frac{3x}{2} dx$.

1.3.8. $\int (\cos x+3)^2 dx$.

1.3.9. $\int \cos^3(2x+3)dx$.

1.3.10. $\int \sin^3 \frac{4x}{5} dx$.

1.3.11. $\int (1-\cos 2x)^2 dx$.

1.3.12. $\int \sin^2(2x-1)dx$.

1.3.13. $\int \sin^3 6xdx$.

1.3.14. $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$.

1.3.15. $\int \sin^2(4x-3)dx$.

1.3.16. $\int \cos^2(1-2x)dx$.

1.3.17. $\int (1+2\cos x)^2\, dx$.

1.3.18. $\int \cos^2 3xdx$.

1.3.19. $\int \sin^2(2x-1)dx$.

1.3.20. $\int \sin^2(1-x)dx$.

1.3.21. $\int (1-3\cos x)^2\, dx$.

1.3.22. $\int \cos^2 \frac{2x}{5} dx$.

1.3.23. $\int \sin^3(5x-1)dx$.

1.3.24. $\int \cos^2(3-x)dx$.

1.3.25. $\int \cos^2(2x+1)dx$.

1.3.26. $\int \cos^3 4xdx$.

1.3.27. $\int \cos^2 7xdx$.

1.3.28. $\int (\sin x-5)^2 dx$.

1.3.29. $\int \sin^3 4xdx$.

1.3.30. $\int \sin^2 \frac{3x}{4} dx$.

Тема 2. МНОГОЧЛЕНИ. РАЦІОНАЛЬНІ ФУНКЦІЇ

Многочлен, корінь многочлена. Основна теорема алгебри. Розкладання многочлена на множники. Дробові раціональні функції. Правильні і неправильні раціональні дроби. Елементарні дроби. Розкладання неправильного дробу у суму многочлена і правильного раціонального дробу. Розкладання правильного раціонального дробу на елементарні дроби.

Література: [1, розділ 4], [3, розділ 7, § 1], [4, розділ 7, § 22], [6, розділ 7], [7, розділ 10, § 7—8], [8, 1 част., розділ 7, § 31].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Многочлени. Розкладання многочленів на множники

Многочленом (*поліномом*, або *цілою раціональною функцією*) n-го степеня називають функцію вигляду

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

де n — натуральне число (*степінь* многочлена), $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$ — довільні сталі.

Число x_0, для якого $P_n(x_0) = 0$, називають *коренем многочлена* $P_n(x)$.

Теорема 1 Якщо x_0 — корінь многочлена $P_n(x)$, то многочлен ділиться без остачі на лінійний множник $x - x_0$, тобто справедлива формула

$$\boxed{P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x),}$$

де $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степеня $n - 1$.

Теорема 2 (***Безу***)**.** Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - \lambda$ дорівнює значенню многочлена $P_n(x)$ при $x = \lambda$, тобто $P_n(\lambda)$.

Теорема Безу дає змогу знайти остачу від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $x - \lambda$, проте за її допомогою не можна знайти частку від цього ділення.

Теорема 3 (*основна теорема алгебри*). Довільний многочлен ненульового степеня має принаймні один корінь — дійсний або комплексний.

Теорема 4 Довільний многочлен $P_n(x)$ можна подати у вигляді

$$\boxed{P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),}$$

де $x_1, x_2, \cdots, x_n$ — корені многочлена, a_0 — коефіцієнт многочлена при x^n.

Зокрема,

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),}$$

де x_1, x_2 — корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Якщо $P_n(x)$ ділиться без остачі на $(x - x_0)^k$, але не ділиться на $(x - x_0)^{k+1}$, то x_0 називають коренем многочлена $P_n(x)$ кратності *k*.

У такому разі

$$P_n(x) = (x - x_0)^k Q_{n-k}(x),\ Q_{n-k}(x_0) \neq 0.$$

Якщо многочлен $P_n(x)$ має корені $x_1, x_2, \cdots, x_m$ $(m \leq n)$, кратність яких відповідно k_1, $k_2, \ldots, k_m$, то його можна розкласти на множники:

$$\boxed{P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_m)^{k_m}.} \tag{*}$$

Теорема 5 Многочлен $P_n(x)$ тотожно рівний нулю тоді і тільки тоді, коли всі його коефіцієнти рівні нулю.

Теорема 6 Многочлени $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ і $Q_n(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n.$$

Теорема 7 Якщо многочлен $P_n(x)$ з дійсними коефіцієнтами має комплексний корінь $a + bi$, то спряжене число $a - bi$ — теж його корінь, причому корені $a + bi$ і $a - bi$ мають однакову кратність.

Розглянемо добуток

$$(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = ((x - a) - bi)((x - a) + bi) = (x - a)^2 + b^2 =$$
$$= x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

де $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Отже, якщо многочлен $P_n(x)$ має пару комплексно-спряжених коренів $a \pm bi$, то у розкладі многочлена на множники (див. (*)) добуток $(x-(a+bi))(x-(a-bi))$ можна замінити квадратним тричленом x^2+px+q з дійсними коефіцієнтами і від'ємним дискримінантом.

Таким чином, якщо коефіцієнти многочлена — дійсні числа, то, об'єднуючи множники з комплексно-спряженими коренями, можна розкласти цей многочлен у добуток лінійних і квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами.

Теорема 8 Довільний многочлен з дійсними коефіцієнтами можна подати у вигляді добутку лінійних і квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами, тобто

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{s_1} \ldots (x^2+p_mx+q_m)^{s_m} .$$

При цьому $k_1+k_2+\ldots+k_r+2(s_1+s_2+\ldots+s_m)=n$, $D_i = p_i^2-4q_i<0, i=\overline{1,m}$.

2.2. Дробово-раціональні функції

Дробово-раціональною функцією (або *раціональним дробом*) називають функцію вигляду

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени відносно x степенів n і m відповідно.

Раціональний дріб називають *правильним*, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, тобто $n<m$; якщо $n \geq m$, то раціональний дріб називають *неправильним*.

Довільний неправильний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можна подати у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)}, \quad k<m .$$

Тут $P_{n-m}(x)$ — ціла частина даного дробу (многочлени степеня $n-m$), $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб.

Цілу частину неправильного дробу можна дістати, наприклад, виконавши ділення многочлена $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$ «кутом».

Елементарними раціональними дробами називають раціональні дроби таких чотирьох типів:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a}; \quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n}; \quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де a, p, q, A, M, N — дійсні числа, $n = 2, 3, \ldots$, $D = p^2 - 4q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Структура розкладу правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ у суму елементарних дробів визначається таким правилом.

Якщо знаменник $Q_m(x)$ правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ розкладено на множники за формулою:

$$Q_m(x) = a_0(x-a)^{\alpha} \ldots (x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\mu} \ldots (x^2+lx+s)^{\nu},$$

де $\alpha + \ldots + \beta + 2(\mu + \ldots + \nu) = m$, причому фігуруючі тут лінійні та квадратичні множники різні і, крім того, тричлени не мають дійсних коренів, тоді цей дріб можна подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \ldots + \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{B_1}{x-b} + \ldots + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} +$$
$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{M_{\mu}x+N_{\mu}}{(x^2+px+q)^{\mu}} + \ldots + \frac{L_1x+S_1}{x^2+lx+s} + \ldots + \frac{L_{\nu}x+S_{\nu}}{(x^2+lx+s)^{\nu}},$$

де $A_1, \ldots, A_{\alpha}$, $B_1, \ldots, B_{\beta}$, $M_1, N_1 \ldots, M_{\mu}, N_{\mu}$, $L_1, S_1 \ldots, L_{\nu}, S_{\nu}$ — деякі дійсні сталі, що підлягають визначенню.

Іншими словами, структура розкладу правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ у суму елементарних дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$, а саме:

1) простому дійсному кореню $x = a$, тобто лінійному множнику $x - a$, відповідає дріб $\frac{A}{x-a}$;

2) дійсному кореню $x = b$ кратності m, тобто множнику $(x-b)^m$, відповідає сума дробів

$$\frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_m}{(x-b)^m} ;$$

3) парі комплексно спряжених коренів $\alpha \pm \beta i$ кратності один, тобто множнику $x^2 + px + q$, де $p = -2\alpha$, $q = \alpha^2 + \beta^2$, $p^2 - 4q < 0$, відповідає дріб $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$;

4) парі комплексно спряжених коренів $\alpha \pm \beta i$ кратності k, тобто множнику $(x^2 + px + q)^k$ відповідає сума дробів

$$\frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{M_k x + N_k}{(x^2+px+q)^k} .$$

Невідомі коефіцієнти (їхня загальна кількість дорівнює степеню знаменника) знаходять, наприклад, за *методом невизначених коефіцієнтів* (*порівняння коефіцієнтів*) *чи конкретних значень аргументу*, суть яких стане зрозумілою з наступних прикладів.

Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розкладіть на множники многочлени:

а) $P_2(x) = 3x^2 + x - 14$; б) $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$;

в) $P_4(x) = x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12$ **.**

Розв’язання: а) розв’язавши квадратне рівняння $3x^2 + x - 14 = 0$, дістанемо корені $x_1 = 2, x_2 = -\dfrac{7}{3}$. Тоді

$$P_2(x) = 3(x-2)(x+\frac{7}{3}) = (x-2)(3x+7) ;$$

б) $P_3(x) = x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) = (x+2)(x+1)(x-1)$.

в) скористаємося таким твердженням.

Якщо многочлен $P_n(x)$ із цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є серед дільників вільного члена a_n.

Дільники вільного члена : $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 12$. Оскільки

$$P_4(2) = 16 - 8 - 24 + 28 - 12 = 0,$$

то $P_4(x) = (x-2)Q_3(x)$.

Виконаємо ділення $P_4(x)$ на $x-2$:

$$\begin{array}{l|l}
-\underline{\begin{array}{l} x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 \\ x^4 - 2x^3 \end{array}} & x-2 \\ \cline{2-2}
\quad -\underline{\begin{array}{l} x^3 - 6x^2 \\ x^3 - 2x^2 \end{array}} & x^3 + x^2 - 4x + 6 \\
\qquad -\underline{\begin{array}{l} -4x^2 + 14x \\ -4x^2 + 8x \end{array}} & \\
\qquad\qquad -\underline{\begin{array}{l} 6x - 12 \\ 6x - 12 \end{array}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0\,. &
\end{array}$$

Отже,

$$P_4(x) = (x-2)(x^3 + x^2 - 4x + 6).$$

Число $x = -3$ — корінь многочлена $Q_3(x) = x^3 + x^2 - 4x + 6$, бо $Q_3(-3) =$ $= -27 + 9 + 12 + 6 = 0$. Виконавши ділення $Q_3(x)$ на $x + 3$, дістанемо остаточний розклад

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 14x - 12 = (x-2)(x+3)(x^2 - 2x + 2).$$

2. Розкладіть дріб $\dfrac{x^4 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4}$ у суму многочлена і правильного раціонального дробу.

Розв'язання. Запишемо чисельник дробу у такому вигляді:

$$x^4 + 2x^2 - 3x + 2 = x^2(x^2 + 4) - 2x^2 - 3x + 2 =$$
$$= x^2(x^2 + 4) - 2(x^2 + 4) - 3x + 10.$$

Тоді

$$\frac{x^4+2x^2-3x+2}{x^2+4}=\frac{x^2(x^2+4)-2(x^2+4)-(3x-10)}{x^2+4}=x^2-2-\frac{3x-10}{x^2+4}.$$

3. Розкладіть у суму елементарних дробів раціональний дріб

$$\frac{3x^2-21x}{x^3-3x^2-6x+8}.$$

Розв'язання. Корені многочлена $Q_3(x)=x^3-3x^2-6x+8$ — дійсні різні числа –2; 1 та 4. Тоді $Q_3(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$. Запишемо розклад

$$\frac{3x^2-21x}{x^3-3x^2-6x+8}=\frac{3x^2-21x}{(x+2)(x-1)(x-4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4},$$

звідси

$$\frac{3x^2-21x}{(x+2)(x-1)(x-4)}=\frac{A(x-1)(x-4)+B(x+2)(x-4)+C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-4)}.$$

Невідомі сталі *A*, *B* і *C* визначаємо так. Прирівняємо чисельники останньої формули:

$$3x^2-21x=A(x-1)(x-4)+B(x+2)(x-4)+C(x+2)(x-1).$$

Два многочлени тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x рівні. Розкривши дужки у правій частині і прирівнявши відповідні коефіцієнти, дістанемо систему рівнянь

$$x^2:\ A+B+C=3;\quad x:\ -5A-2B+C=-21;\quad x^0: 4A-8B-2C=0,$$

її розв'язок $A=3$, $B=2$, $C=-2$.

Таким чином,

$$\frac{3x^2-21x}{(x+2)(x-1)(x-4)}=\frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-4}.$$

4. Розкладіть у суму цілої частини і елементарних дробів вираз

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}.$$

Розв'язання. Степінь чисельника вищий за степінь знаменника, отже, дріб неправильний. Тому спочатку виділимо цілу частину дробу:

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=\frac{x(x^3-x^2-2x)+x^3-x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=$$

$$=\frac{x(x^3-x^2-2x)+(x^3-x^2-2x)-x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1-\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}.$$

Тепер записуємо розклад правильного дробу $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ на елементарні дроби:

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}.$$

Звідси

$$x+2=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Для визначення коефіцієнтів A, B, C застосуємо *метод окремих значень аргументу*.

Якщо рівність виконується при всіх значеннях аргументу, то вона справджується при будь-яких конкретних значеннях цього аргументу. Зручніше за x вибирати корені знаменника, оскільки вони обертають у нуль частину доданків. Так, при $x=0$ дістанемо $2=-2A$, тобто $A=-1$; якщо $x=2$, то $4=6B$, $B=2/3$, і, нарешті, якщо $x=-1$, то $1=3C$, $C=1/3$. Тоді

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{3(x-2)}+\frac{1}{3(x+1)}.$$

Остаточно дістанемо

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}=x+1+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}.$$

5. Розкладіть у суму елементарних дробів правильний раціональний дріб $\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}$.

Розв'язання. Знаменник $(x-1)(x+1)^2$ має простий дійсний корінь $x=1$ і дійсний корінь $x=-1$ кратності два.

Отже, розклад на елементарні дроби має вигляд

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2},$$

звідси дістанемо тотожність

$$x^2+2=A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)\,.$$

Послідовно покладаючи $x=1$ та $x=-1$, одержимо значення $A=\frac{3}{4}$, $C=-\frac{3}{2}$. Далі прирівняємо коефіцієнти при x^2: $A+B=1$, тоді $B=\frac{1}{4}$.

Отже,

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{3}{4(x-1)}+\frac{1}{4(x+1)}-\frac{3}{2(x+1)^2}\,.$$

6. Розкладіть у суму елементарних дробів правильний раціональний дріб $\frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}$.

Розв'язання. Оскільки $(x+1)(x^3+1)=(x+1)(x+1)(x^2-x+1)=(x+1)^2\times$ $\times(x^2-x+1)$ і множник x^2-x+1 не має дійсних коренів, то розклад підінтегрального дробу буде таким:

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{A}{(x+1)^2}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}\,.$$

Тоді

$$x^2=A(x^2-x+1)+B(x^2-x+1)(x+1)+(Cx+D)(x+1)^2\,.$$

Підставивши у рівність значення кореня знаменника $x=-1$, дістанемо $3A=1$ або $A=\frac{1}{3}$. Далі, розкривши у правій частині останньої рівності дужки і прирівнявши коефіцієнти при x^3, x^2 та x^0, дістанемо систему для визначення інших коефіцієнтів:

$$\left.\begin{aligned} x^3 &: \; B+C=0 \\ x^2 &: \; A+2C+D=1 \\ x^0 &: \; A+B+D=0. \end{aligned}\right\}$$

Її розв'язок такий: $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{1}{3}$, $D=0$.

Отже,

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}\right).$$

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розкладіть на множники многочлени:

1. $P_2(x) = x^2 - 2x - 8$.

2. $P_2(x) = 2x^2 - x - 10$.

3. $P_3(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

4. $P_5(x) = x^5 - 16x$.

5. $P_4(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$.

6. $P_4(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 5x + 3$.

Розкладіть у суму цілої частини й елементарних дробів вирази:

7. $\dfrac{x^3+1}{x^2+5x+6}$.

8. $\dfrac{x^3-x+1}{x^2+x+1}$.

9. $\dfrac{x^3}{x+2}$.

Розкладіть у суму елементарних дробів вирази:

10. $\dfrac{x^2-6x-7}{(x^2+4x-5)(x-3)}$.

11. $\dfrac{x^4-4x^3+8x^2-4}{(x+1)(x^2-2x)^2}$.

12. $\dfrac{8x^3+2x-2}{x^4-1}$.

Відповіді

1. $(x+2)(x-4)$. **2.** $(x+2)(2x-5)$. **3.** $(x+1)(x^2+1)$. **4.** $x(x+2)(x-2)(x^2+4)$. **5.** $(x+1)(x-1)^2(x-2)$. **6.** $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)$. **7.** $x-5+\dfrac{26}{x+3}-\dfrac{7}{x+2}$. **8.** $x-1+\dfrac{-x+2}{x^2+x+1}$. **9.** $x^2-2x+4-\dfrac{8}{x+2}$. **10.** $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x+5}$. **11.** $\dfrac{1}{(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}$.
12. $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3x+1}{x^2+1}$.

Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Розкладіть на множники многочлени:

2.1.1. $P_3(x) = x^3 + x^2 - 2x - 8$.

2.1.2. $P_3(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$.

2.1.3. $P_3(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

2.1.4. $P_3(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$.

2.1.5. $P_3(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$.

2.1.6. $P_3(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$.

2.1.7. $P_3(x)=x^3+3x^2+6x-10$.

2.1.8. $P_3(x)=2x^3-7x^2+8x-3$.

2.1.9. $P_3(x)=3x^3+4x^2-2x-5$.

2.1.10. $P_3(x)=2x^3+3x^2-6x-7$.

2.1.11. $P_4(x)=x^4+3x^2-4$.

2.1.12. $P_4(x)=x^4+2x^2-8$.

2.1.13. $P_4(x)=x^4-2x^3-x^2+2x$.

2.1.14. $P_4(x)=2x^4+7x^2-9$.

2.1.15. $P_3(x)=x^3+6x^2+13x+10$.

2.1.16. $P_4(x)=5x^4-3x^2-8$.

2.1.17. $P_4(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$.

2.1.18. $P_4(x)=4x^4-4x^2+1$.

2.1.19. $P_3(x)=4x^3+x^2-3x-2$.

2.1.20. $P_3(x)=9x^4+6x^2+1$.

2.1.21. $P_3(x)=x^3+3x^2-2x-8$.

2.1.22. $P_3(x)=x^3-x^2-4x-6$.

2.1.23. $P_3(x)=x^3+2x^2+5x+24$.

2.1.24. $P_3(x)=2x^3+x^2-3x+6$.

2.1.25. $P_3(x)=-x^3-7x^2+6x+2$.

2.1.26. $P_4(x)=2x^4+3x^2-5$.

2.1.27. $P_3(x)=3x^3+x^2-9x-10$.

2.1.28. $P_4(x)=4x^4-20x^2+25$.

2.1.29. $P_3(x)=-x^3-x^2+11x+3$.

2.1.30. $P_4(x)=9x^4+12x^2+4$.

Тема 3. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Інтегрування елементарних раціональних дробів. Інтегрування раціональних функцій.

Література: [1, розділ 6, п. 6.4], [2, розділ 2, п. 2.1], [3, розділ. 7, § 1], [4, розділ 7, § 22], [6, розділ 8], [7, розділ 10, § 7—9], [9, § 31].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Інтегрування елементарних дробів

Нагадаємо (див. с. 102), що *елементарними* називають такі раціональні дроби:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};\quad \text{II. } \frac{A}{(x-a)^n};\quad \text{III. } \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

де a, p, q, A, M, N — дійсні числа, $n = 2,\ 3,\ \dots,$ $D = p^2 - 4q < 0$, тобто квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Розглянемо інтеграли від елементарних дробів:

I. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

II. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C$ ($n \neq 1$).

III. Розглянемо спочатку інтеграл

$$\boxed{J_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}}\ (a \neq 0).$$

Виконаємо перетворення квадратного тричлена:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2\right],$$

де $\pm m^2 = -\dfrac{b^2}{4a^2} + \dfrac{c}{a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = -\dfrac{D}{4a^2}$. Знак перед m^2 протилежний знаку дискримінанта D. Тоді

$$J_1 = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \pm m^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{z^2 \pm m^2},$$

де $z = x + \dfrac{b}{2a}$.

Можливі такі три випадки:

1) якщо $D < 0$, то $J_1 = \dfrac{1}{am}\operatorname{arctg}\dfrac{z}{m} + C$;

2) якщо $D = 0$, то $J_1 = -\dfrac{1}{az} + C$;

3) якщо $D > 0$, то $J_1 = \dfrac{1}{2am}\ln\left|\dfrac{z-m}{z+m}\right| + C$.

Розглянемо тепер інтеграл більш загального вигляду

$$\boxed{J_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx.}$$

Виділимо у чисельнику похідну від знаменника, після чого розіб’ємо інтеграл у суму двох інтегралів:

$$J_2 = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{(2ax+b)\cdot\frac{A}{2a} + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}\,dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)J_1 = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)J_1,$$

де інтеграл J_1 розглянутий вище.

Звідси випливає, що інтеграл третього типу $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ ($p^2-4q<0$) можна знайти за формулою

$$\boxed{\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.}$$

IV. Інтеграл $I_n = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, де $n>1$, $p^2-4q<0$ заміною $x+\frac{p}{2}=t$ зводиться до двох інтегралів:

$$I_n = M\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}\,dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n},\quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Перший із цих інтегралів можна знайти безпосередньо, а другий — за рекурентною формулою (2.3).

3.2. Інтегрування раціональних дробів

Нехай треба знайти $\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — многочлени відносно x степенів n і m відповідно.

Якщо дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ неправильний, що досягається при $n \ge m$, то необхідно спочатку подати його у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{P_k(x)}{Q_m(x)},\ k < m.$$

Тут $P_{n-m}(x)$ — ціла частина даного дробу (многочлен степеня $n-m$), інтеграл від якого знаходять безпосередньо; $\dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ — правильний раціональний дріб. Отже, інтегрування дробово-раціональної функції після виділення цілої частини зводиться до інтегрування правильного раціонального дробу, який, у свою чергу, зводиться до інтегрування елементарних дробів.

Правило розкладу правильного раціонального дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ у суму елементарних дробів розглянуто на с. 102.

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Знайдіть інтеграли, скориставшись виділенням повного квадрата.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$.

Розв'язання. Нагадаємо формулу $x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$. Тут виділено повний квадрат $(x+a)^2$. У нашому випадку маємо

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 3}$.

Розв'язання. Оскільки $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2$ і $dx = \dfrac{1}{2} d(2x+1)$, то

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2 + (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

3. $\int \frac{dx}{9x^2-6x+1}$.

Розв'язання. Знайдемо $D=36-4\cdot 9=0$, отже, $9x^2-6x+1=(3x-1)^2$ і

$$\int \frac{dx}{9x^2-6x+1}=\int \frac{dx}{(3x-1)^2}=\frac{1}{3}\int \frac{d(3x-1)}{(3x-1)^2}=-\frac{1}{3(3x-1)}+C.$$

4. $\int \frac{dx}{x^2-2x-8}$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Виділимо повний квадрат: $x^2-2x-8=(x-1)^2-9$, тоді

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-8}=\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-3^2}=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-1-3}{x-1+3}\right|+C=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C.$$

Другий спосіб. Оскільки $x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$,

$$\frac{1}{(x+2)(x-4)}=\frac{1}{6}\frac{(x+2)-(x-4)}{(x+2)(x-4)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right),$$

тоді

$$\int \frac{dx}{x^2-2x-8}=\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-4}-\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}=\frac{1}{6}\ln|x-4|-\frac{1}{6}\ln|x+2|+C=$$
$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|+C.$$

5. $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат:

$$2x^2+x-1=2\left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right)==2\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right).$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2}\int \frac{d(x+1/4)}{(x+1/4)^2-(3/4)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\ln\left|\frac{x+1/4-3/4}{x+1/4+3/4}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1/2}{x+1}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{2x-1}{x+1}\right|+C_1.$$

6. $\int \frac{2x-3}{12x-9x^2-2}dx$.

Розв'язання. Враховуючи співвідношення $(12x-9x^2-2)' = 12-18x$, запишемо чисельник підінтегральної функції так:

$$2x-3 = -\frac{1}{9}(12-18x)+\frac{12}{9}-3 = -\frac{1}{9}(12-18x)-\frac{5}{3} .$$

Тоді

$$\int \frac{2x-3}{12x-9x^2-2}dx = -\frac{1}{9}\int \frac{(12-9x^2-2)'}{12x-9x^2-2}dx - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{12x-9x^2-2} =$$

$$= -\frac{1}{9}\ln\left|12x-9x^2-2\right| + \frac{5}{27}J_1 ,$$

де $J_1 = \int \frac{dx}{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{2}{9}} = \int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3x-2-\sqrt{2}}{3x-2+\sqrt{2}}\right|+C$.

Знайдіть інтеграли, використовуючи розкладання підінтегральної функції на елементарні дроби.

7. $I = \int \frac{3x^2-21x}{x^3-3x^2-6x+8}dx$.

Розв'язання. Маємо підінтегральну функцію

$$\frac{P_2(x)}{Q_3(x)} = \frac{3x^2-21x}{x^3-3x^2-6x+8} .$$

Корені многочлена $Q_3(x) = x^3-3x^2-6x+8$ — дійсні різні числа –2; 1 та 4. Тоді $Q_3(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$. Запишемо розклад

$$\frac{3x^2-21x}{x^3-3x^2-6x+8} = \frac{3x^2-21x}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-4} .$$

У прикладі **3** (див. с. 105) встановлено, що

$$\frac{3x^2-21x}{(x+2)(x-1)(x-4)} = \frac{3}{x+2}+\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-4} ,$$

після чого дістанемо

$$I = 3\int\frac{dx}{x+2} + 2\int\frac{dx}{x-1} - 2\int\frac{dx}{x-4} = 3\ln|x+2| + 2\ln|x-1| - 2\ln|x-4| + C\,.$$

8. $I = \int\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}dx\,.$

Розв'язання. Степінь чисельника вищий за степінь знаменника, тобто дріб неправильний. Тому даний дріб слід розкласти у суму цілої частини і елементарних дробів.

У прикладі **4** (див. с. 106) показано, що

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x+1+\frac{1}{x}-\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x+1)}\,.$$

Тоді

$$I = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \int\frac{dx}{x} - \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2} - \frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \ln|x| -$$

$$-\frac{2}{3}\ln|x-2| - \frac{1}{3}\ln|x+1| + C\,.$$

9. $\int\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx\,.$

Розв'язання. Під знаком інтеграла стоїть правильний раціональний дріб, знаменник якого має простий дійсний корінь $x=1$ і дійсний корінь $x=-1$ кратності два.

Враховуючи результати прикладу **5** (див. с. 107), маємо тотожність

$$\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)^2}\,.$$

Отже,

$$\int\frac{x^2+2}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} =$$

$$= \frac{3}{4}\ln|x-1| + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + C\,.$$

10. $I = \int\frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}dx\,.$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі потрібно розкласти підінтегральну функцію (правильний раціональний дріб) у суму елементарних дробів.

У прикладі **6** (див. с. 107) встановлено розклад

$$\frac{x^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}+\frac{x}{x^2-x+1}\right).$$

Отже,

$$\int\frac{x^2}{(x+1)(x^3+1)}dx=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{xdx}{x^2-x+1}=$$

$$=-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}I_1,$$

де

$$I_1=\int\frac{xdx}{x^2-x+1}=\int\frac{xdx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=t,\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+\frac{1}{2})dt}{t^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\int\frac{tdt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln(t^2+\frac{3}{4})+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Отже,

$$I=-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

11. $I=\int\frac{x^3+2x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2+x+1)}dx$.

Розв'язання. Тричлени, що стоять у знаменнику, мають дві пари комплексно-спряжених коренів кратності один, тому підінтегральну функцію записуємо у вигляді

$$\frac{x^3+2x^2+5x+1}{(x^2+3)(x^2+x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Звідси

$$x^3+2x^2+5x+1=(Ax+B)(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+3).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{ll} x^3: & A+C=1, \\ x^2: & A+B+D=2, \\ x: & A+B+3C=5, \\ x^0: & B+3D=1, \end{array}\right\}$$

її розв'язок $A=\frac{1}{7}$, $B=\frac{16}{7}$, $C=\frac{6}{7}$, $D=-\frac{3}{7}$.

Отже,

$$I=\int\frac{\frac{1}{7}x+\frac{16}{7}}{x^2+3}dx+\int\frac{\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{7}I_1+\frac{3}{7}I_2,$$

де

$$I_1=\int\frac{x+16}{x^2+3}dx=\int\frac{xdx}{x^2+3}+16\int\frac{dx}{x^2+3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{x^2+3}+$$

$$+16\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\frac{16}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{2x-1}{x^2+x+1}dx=\int\frac{(2x+1)-2}{x^2+x+1}dx=\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-2\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\int\frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1}-2\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\ln(x^2-x+1)-\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

Отже,

$$I=\frac{1}{14}\ln(x^2+3)+\frac{16}{7\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+\frac{3}{7}\ln(x^2-x+1)-\frac{4\sqrt{3}}{7}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

12. $\displaystyle\int\frac{x^4-2x^3+12x^2-20x+10}{(x-1)(x^2-2x+2)^3}dx$.

Розв'язання. Для спрощення обчислень виконаємо спочатку заміну $x=t+1$, в результаті дістанемо інтеграл вигляду

$$I=\int\frac{t^4+2t^3+12t^2+2t+1}{t(t^2+1)^3}dt.$$

Знаменник має один простий дійсний корінь $t=0$ та пару комплексно-спряжених коренів $t=\pm i$, кратності три, тоді

$$\frac{t^4+2t^3+12t^2+2t+1}{t(t^2+1)^3}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}+\frac{Dt+E}{(t^2+1)^2}+\frac{Ft+K}{(t^2+1)^3}.$$

Звідси

$$t^4+2t^3+12t^2+2t+1=A(t^2+1)^3+(Bt+C)(t^2+1)^2t+$$
$$+(Dt+E)(t^2+1)t+(Ft+K)t,$$

або

$$t^4+2t^3+12t^2+2t+1=A(t^6+3t^4+3t^2+1)+(Bt^2+Ct)(t^4+2t^2+1)+$$
$$+(Dt^2+Et)(t^2+1)+Ft^2+Kt,$$

Покладемо $t=0$, дістанемо $A=1$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях t, дістанемо систему рівнянь

$$A+B=0,\;\; C=0,\;\; 3A+2B+D=1,\;\; 2C+E=2,$$
$$3A+B+D+F=12,\;\; C+E+K=2,\;\; A=1,$$

розв'язуючи яку, знайдемо $A=1$, $B=-1$, $D=C=K=0$, $E=2$, $F=10$.

Тоді

$$I=\int\frac{dt}{t}-\int\frac{tdt}{t^2+1}+\int\frac{2dt}{(t^2+1)^2}+\int\frac{10tdt}{(t^2+1)^3}=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)+2I_1+10I_2,$$

де

$$I_1=\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\left|\begin{aligned}&t=\operatorname{tg} z,\\ &dt=\frac{dz}{\cos^2 z}\end{aligned}\right|=\int\frac{dz}{\cos^2 z\left(\dfrac{1}{\cos^2 z}\right)^2}=$$
$$=\int\cos^2 z\,dz=\frac{1}{2}\int(1+\cos 2z)dz=\frac{1}{2}\left(z+\frac{\sin 2z}{2}\right)+C_1=$$
$$=\frac{1}{2}\left(z+\frac{\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg}^2 z}\right)+C_1=\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} t+\frac{t}{t^2+1}\right)+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{tdt}{(t^2+1)^3}=\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^3}=-\frac{1}{4(t^2+1)^2}+C_2.$$

Отже,

$$I = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 2I_1 + 10I_2 = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) +$$

$$+ \operatorname{arctg} t + \frac{t}{t^2+1} - \frac{5}{2(t^2+1)^2} + C\,,$$

де $t = x - 1$.

13. $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3-3x^2+6x-7}dx$.

Розв'язання. У даному прикладі немає потреби розкладати підінтегральну функцію на елементарні дроби, оскільки можна помітити, що $x^2-2x+2 = \frac{1}{3}(x^3-3x^2+6x-7)'$. Тоді

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x^3-3x^2+6x-7}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-3x^2+6x-7)}{x^3-3x^2+6x-7} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x^3-3x^2+6x-7| + C\,.$$

$\boxed{\text{Т.3}}$ ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть інтеграли, використовуючи виділення повного квадрата.

1. $\int \frac{dx}{x^2+6x}$. **2.** $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$. **3.** $\int \frac{dx}{x^2+8x+20}$.

4. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-4x+3}$. **5.** $\int \frac{(2x+3)dx}{x^2+2x+10}$. **6.** $\int \frac{dx}{2x^2+5x-7}$.

7. $\int \frac{(3x+4)dx}{3x^2-x-4}$. **8.** $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-2e^x+6}$. **9.** $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 2\sin x + 2}$.

Знайдіть інтеграли, використовуючи розклад підінтегрального дробу у суму елементарних дробів.

10. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-3)}$. **11.** $\int \frac{x^3 dx}{(x+2)(x-4)}$.

12. $\int \frac{x^2-4x}{x^2+5x-6}dx$.

13. $\int \frac{(x^2-10x+7)dx}{(x+1)(x-2)(x-5)}$.

14. $\int \frac{(2x-3)dx}{(x-1)^2(x-3)}$.

15. $\int \frac{dx}{x^4+2x^3+x^2}$.

16. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$.

17. $\int \frac{1-2x+5x^2-2x^3}{(x-1)^4(x^2+1)}dx$.

18. $\int \frac{1+x^3}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

19. $\int \frac{1+x^4}{x^3-x^2+x-1}dx$.

20. $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$.

21. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

22. $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$.

23. $\int \frac{xdx}{(1+x^2)^3(4+x^2)}$.

Відповіді

1. $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x}{x+6}\right|+C$. **2.** $-\frac{1}{x-2}+C$. **3** $\frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+4}{2}+C$. **4.** $\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+3\right|+C$. **5.** $\ln\left|x^2+2x+10\right|+\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x+1}{3}+C$. **6.** $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x-1}{2x+7}\right|+C$. **7.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{(3x-4)^8}{x+1}\right|+C$. **8.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\times$ $\times\text{arctg}\frac{e^x-1}{\sqrt{5}}+C$. **9.** $\text{arctg}(\sin x-1)+C$. **10.** $\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$. **11.** $\frac{1}{2}(x+2)^2+\frac{4}{3}\ln|x+2|+$ $+\frac{32}{3}\ln|x-4|+C$. **12.** $x-\frac{3}{7}\ln|x-1|-\frac{60}{7}\ln|x+6|+C$. **13.** $\ln\left|\frac{(x+1)(x-2)}{(x-5)}\right|+C$. **14.** $\frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|-$ $-\frac{1}{2(x-1)}+C$. **15.** $2\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+C$. **16.** $\frac{1}{2}\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{4+x^2}}+\frac{1}{4}\text{arctg}\frac{x}{2}+C$. **17.** $-\frac{1}{3(x-1)^3}+$ $+\frac{1}{x-1}+\text{arctg}\,x+C$. **18.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+3|+\frac{9}{2}\text{arctg}(x-2)-\frac{3x-5}{2(x^2-4x+3)}+C$. **19.** $\frac{x^2}{2}+x+$ $+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{1+x^2}}-\text{arctg}\,x+C.$ **20.** $-\frac{1}{4x^4}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2}+C$. **21.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+$ $+\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$ **22.** $\frac{3}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}+\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{2+x^2}}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\text{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{2}+C.$ **23.** $\frac{1}{54}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4}\right)+$ $+\frac{1}{18(x^2+1)}-\frac{1}{12(x^2+1)^2}+C.$

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Знайдіть невизначені інтеграли, використовуючи виділення повного квадрата у знаменнику підінтегрального виразу.

3.1.1. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+4}$.

3.1.2. $\int \frac{dx}{x^2-4x+10}$.

3.1.3. $\int \frac{dx}{2x^2-7x+3}$.

3.1.4. $\int \frac{dx}{2x^2+x-6}$.

3.1.5. $\int \frac{dx}{9x^2+6x+2}$.

3.1.6. $\int \frac{dx}{4x^2-4x+3}$.

3.1.7. $\int \frac{dx}{2x^2-11x+2}$.

3.1.8. $\int \frac{dx}{2x^2+x+2}$.

3.1.9. $\int \frac{dx}{3x^2-12x+3}$.

3.1.10. $\int \frac{dx}{2x^2+3x}$.

3.1.11. $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

3.1.12. $\int \frac{dx}{2x-3-4x^2}$.

3.1.13. $\int \frac{dx}{3x^2-8x-3}$.

3.1.14. $\int \frac{dx}{8-2x-x^2}$.

3.1.15. $\int \frac{dx}{5x-6-x^2}$.

3.1.16. $\int \frac{dx}{x^2+4x+25}$.

3.1.17. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+30}$.

3.1.18. $\int \frac{dx}{3x^2-9x+6}$.

3.1.19. $\int \frac{dx}{2x^2-2x+5}$.

3.1.20. $\int \frac{dx}{x^2-3x}$.

3.1.21. $\int \frac{dx}{x^2-6x+11}$.

3.1.22. $\int \frac{dx}{2x^2-8x+16}$.

3.1.23. $\int \frac{dx}{x^2+8x+11}$.

3.1.24. $\int \frac{dx}{x^2-8x+21}$.

3.1.25. $\int \frac{dx}{5x^2-10x+25}$.

3.1.26. $\int \frac{dx}{2x^2+6x+3}$.

3.1.27. $\int \frac{dx}{x^2-6x+8}$.

3.1.28. $\int \frac{dx}{1-2x-x^2}$.

3.1.29. $\int \frac{dx}{x^2+3x+6}$.

3.1.30. $\int \frac{dx}{x^2+5x+1}$.

3.2. Знайдіть невизначені інтеграли, використовуючи виділення повного квадрата у знаменнику підінтегрального виразу.

3.2.1. $\int \frac{x+1}{x^2+3x-4}dx$.

2.2.2. $\int \frac{x+6}{3x^2+2x+1}dx$.

3.2.3. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x-1}dx$.

3.2.4. $\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx$.

3.2.5. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$.

3.2.6. $\int \frac{3x-2}{5x^2+3x-2}dx$.

3.2.7. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}dx$.

3.2.8. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}dx$.

3.2.9. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}dx$.

3.2.10. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+10}dx$.

3.2.11. $\int \frac{x-4}{x^2-2x-3}dx$.

3.2.12. $\int \frac{4x+8}{x^2+6x+10}dx$.

3.2.13. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+6}dx$.

3.2.14. $\int \frac{x}{x^2+2x-8}dx$.

3.2.15. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}dx$.

3.2.16. $\int \frac{2x-1}{x^2-8x+7}dx$.

3.2.17. $\int \frac{2-x}{x^2+4x-5}dx$.

3.2.18. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x-9}dx$.

3.2.19. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2}dx$.

3.2.20. $\int \frac{x-4}{3x^2+x}dx$.

3.2.21. $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6}dx$.

3.2.22. $\int \frac{x-3}{4x^2+4x+5}dx$.

3.2.23. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+7}dx$.

3.2.24. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-3}dx$.

3.2.25. $\int \frac{x+2}{x^2-x-2}dx$.

3.2.26. $\int \frac{3x-2}{x^2+8x+17}dx$.

3.2.27. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1}dx$.

3.2.28. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+10}dx$.

3.2.29. $\int \frac{x-4}{x^2-x+1}dx$.

3.2.30. $\int \frac{x}{x^2-8x+20}dx$.

3.3. Знайдіть невизначені інтеграли, використовуючи розклад підінтегральної функції на елементарні дроби.

3.3.1. $\int \frac{3x^2 + 20x + 9}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

3.3.2. $\int \frac{12}{(x^2 - 4x + 3)(x - 2)} dx$.

3.3.3. $\int \frac{43x - 67}{(x^2 - x - 12)(x - 1)} dx$.

3.3.4. $\int \frac{2x^2 + 8x + 9}{(x^2 + x - 2)(x + 3)} dx$.

3.3.5. $\int \frac{12x}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$.

3.3.6. $\int \frac{2x - 7}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx$.

3.3.7. $\int \frac{x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 5x + 6)(x - 1)} dx$.

3.3.8. $\int \frac{5x + 17}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

3.3.9. $\int \frac{6x^2 + 6x - 6}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} dx$.

3.3.10. $\int \frac{37x - 85}{(x^2 + 2x - 3)(x - 3)} dx$.

3.3.11. $\int \frac{3x^2 + 3x - 24}{(x^2 - x - 2)(x - 3)} dx$.

3.3.12. $\int \frac{6x^2 - 4x + 30}{(x^2 - 2x - 3)(x - 2)} dx$.

3.3.13. $\int \frac{3x^2 - 15}{(x^2 + 5x + 6)(x - 1)} dx$.

3.3.14. $\int \frac{x^2 - 19x + 6}{(x^2 + 5x + 6)(x - 1)} dx$.

3.3.15. $\int \frac{6x}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx$.

3.3.16. $\int \frac{4x^2 + 32x + 52}{(x^2 + 6x + 5)(x + 3)} dx$.

3.3.17. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x^2 + 2x - 3)(x + 2)} dx$.

3.3.18. $\int \frac{x}{(x^2 + 2x - 3)(x + 2)} dx$.

3.3.19. $\int \frac{x^2}{(x^2 + 8x + 15)(x + 1)} dx$.

3.3.20. $\int \frac{6x^2}{(x^2 + 3x + 2)(x - 1)} dx$.

3.3.21. $\int \frac{6x^4}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$.

3.3.22. $\int \frac{2x^2 - 26}{(x^2 + 4x + 3)(x + 5)} dx$.

3.3.23. $\int \frac{2x^2 + 12x - 6}{(x^2 + 8x + 15)(x + 1)} dx$.

3.3.24. $\int \frac{20x^2}{(x^2 + 2x - 3)(x - 4)} dx$.

3.3.25. $\int \frac{x - 7}{(x^2 - 5x + 6)(x + 1)} dx$.

3.3.26. $\int \frac{6x - 21}{(x^2 + x - 2)(x + 1)} dx$.

2.3.27. $\int \frac{2x^4-3}{(x^2-5x+4)(x+3)}dx$.

3.3.28. $\int \frac{7x^2-17x}{(x^2-2x-3)(x-2)}dx$.

3.3.29. $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx$.

3.3.30. $\int \frac{3x^2-17x+2}{(x^2+5x+6)(x-1)}dx$.

3.4. Знайдіть невизначені інтеграли, використовуючи розклад підінтегральної функції на елементарні дроби.

3.4.1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$.

3.4.2. $\int \frac{x^3-2x^2-2x+1}{x^3-x^2}dx$.

3.4.3. $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)(x-1)}dx$.

3.4.4. $\int \frac{x+2}{x^3-x^2}dx$.

3.4.5. $\int \frac{4x^4+8x^3-3x-3}{x^3+2x^2+x}dx$.

3.4.6. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$.

3.4.7. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx$.

3.4.8. $\int \frac{4x^2}{(x^2-2x+1)(x+1)}dx$.

3.4.9. $\int \frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}dx$.

3.4.10. $\int \frac{1}{x^3+x^2}dx$.

3.4.11. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.4.12. $\int \frac{x^2+x+2}{x^3+x^2}dx$.

3.4.13. $\int \frac{3x^2+2}{x(x+1)^2}dx$.

3.4.14. $\int \frac{4x^4+8x^3-1}{(x^2+x)(x+1)}dx$.

3.4. 15. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.4.16. $\int \frac{1}{x^3-x^2}dx$.

3.4.17. $\int \frac{x^3-3}{(x^2-1)(x-1)}dx$.

3.4.18. $\int \frac{6x-2x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.4.19. $\int \frac{x^3-4x^2-1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.4.20. $\int \frac{4x^4+8x^3-2}{x(x+1)^2}dx$.

3.4.21. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)}dx$.

3.4.22. $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}dx$.

3.4.23. $\int \frac{x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$.

3.4.24. $\int \frac{3x^2-7x+2}{(x^2-x)(x-1)}dx$.

3.4.25. $\int \frac{4x}{(x^2-1)(x+1)}dx$.

3.4.26. $\int \frac{2x^3+4x+3}{x^3+x^2}dx$.

3.4.27. $\int \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}dx$.

3.4.28. $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$.

3.4.29. $\int \frac{3x-x^2-2}{x(x+1)^2}dx$.

3.4.30. $\int \frac{4x^3+2x^2+1}{x(x-1)^2}dx$.

3.5. Знайдіть невизначені інтеграли, використовуючи розклад підінтегральної функції на елементарні дроби.

3.5.1. $\int \frac{3x+13}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$.

3.5.2. $\int \frac{12-6x}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$.

3.5.3. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8}dx$.

3.5.4. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$.

3.5.5. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$.

3.5.6. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$.

3.5.7. $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$.

3.5.8. $\int \frac{9(x-1)dx}{(x^2-4x+13)(x+1)}$.

3.5.9. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$.

3.5.10. $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$.

3.5.11. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$.

3.5.12. $\int \frac{(4x-10)dx}{(x^2-2x+10)x}$.

3.5.13. $\int \frac{6-9x}{x^3+8}dx$.

3.5.14. $\int \frac{(x^2-13x+40)dx}{(x^2-4x+13)(x+1)}$.

3.5.15. $\int \frac{4x^2+x+10}{x^3+8}dx$.

3.5.16. $\int \frac{6x}{x^3-1}dx$.

3.5.17. $\int \frac{(x^2+4x+20)dx}{(x^2-4x+13)(x+1)}$.

3.5.18. $\int \frac{3x^2+2x+1}{x^3-1}dx$.

3.5.19. $\int \frac{8}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$.

3.5.20. $\int \frac{(4x^2+38)dx}{(x^2-2x+2)(x+2)}$.

3.5.21. $\int \frac{19x-x^2-34}{(x^2-4x+13)(x+1)}dx$.

3.5.22. $\int \frac{2x^2+7x}{x^3-8}dx$.

3.5.23. $\int \frac{36}{(x^2-2x+10)(x+2)}dx$.

3.5.24. $\int \frac{5x+13}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$.

3.5.25. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x^2-2x+5)(x+2)}dx$.

3.5.26. $\int \frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

3.5.27. $\int \frac{x^2+23}{(x^2+2x+5)(x+1)}dx$.

3.5.28. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x^2+2x+5)(x-1)}dx$.

3.5.29. $\int \frac{5x^2+17x+36}{(x^2+6x+13)(x+1)}dx$.

3.5.30. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+5)(x-1)}dx$.

Тема 4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Методи інтегрування тригонометричних функцій. Універсальна тригонометрична підстановка. Частинні випадки раціоналізації інтегралів від тригонометричних функцій.

Література: [1, розділ 6, п. 6.5], [2, розділ 2, п. 2.1], [4, розділ 7, § 22], [6, розділ 8], [7, розділ 10, § 12], [9, § 32].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R — раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, за допомогою *універсальної тригонометричної підстановки*

$\boxed{\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t}$ зводять до інтегралів від раціональних функцій. При цьому використовують співвідношення:

$$\boxed{\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt\,.}$$

За допомогою запровадженої підстановки зручно знаходити інтеграли вигляду

$$\int\frac{dx}{a\cos x+b\sin x+c}\,. \tag{*}$$

Проте застосування універсальної підстановки часто приводить до раціональних дробів з великими степенями. Тому в багатьох випадках використовують інші підстановки. Наведемо деякі з них.

4.2. Частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій

4.2.1. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ залежно від властивості підінтегральної функції зручно раціоналізувати такими підстановками (див. табл. 2.2):

Таблиця 2.2

№	Властивість підінтегральної функції $R(\sin x,\cos x)$	Підстановка
1	непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$	$\cos x=t$
2	непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$	$\sin x=t$
3	парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно: $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$	$\mathrm{tg}\,x=t$

Зокрема, інтеграли $\int R(\sin x)\cos x dx$, $\int R(\cos x)\sin x dx$, $\int R(\mathrm{tg}\,x)dx$ інтегрують підстановками $\sin x=t$, $\cos x=t$, $\mathrm{tg}\,x=t$ відповідно.

4.2.2. Інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ залежно від значень m і n знаходять так (див. табл. 2.3):

Таблиця 2.3

№	Властивість підінтегральної функції $\sin^m x \cos^n x$	Підстановка
1	m — ціле додатне непарне число	$\cos x = t$
2	n — ціле додатне непарне число	$\sin x = t$
3	m, n — цілі додатні парні числа	формули зниження степеня: $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$
4	m, n — цілі парні числа, але хоча б одне з них від'ємне; m і n — цілі непарні від'ємні числа	$\operatorname{tg} x = t$

4.2.3. Інтеграли вигляду

$$\int \sin mx \cos nx dx, \int \sin mx \sin nx dx, \int \cos mx \cos nx dx$$

інтегрують шляхом застосування формул перетворення добутку тригонометричних функцій у їх суму:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x].$$

4.2.4. Інтеграли вигляду

$$\int \operatorname{tg}^n x dx, \text{ або } \int \operatorname{ctg}^n x dx,$$

де n — ціле додатне число, можуть бути знайдені за допомогою застосування формул $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\operatorname{ctg}^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$, або ж за допомогою заміни $\operatorname{tg} x = t$ ($\operatorname{ctg} x = t$).

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Знайдіть інтеграли

1. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду (*). Отже, виконаємо заміну $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$. Тоді

$$\int \frac{dx}{5-3\cos x}=\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(5-3\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int \frac{dt}{\left(5+5t^2-3+3t^2\right)}=$$

$$=\int \frac{dt}{1+4t^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t)+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. $\int \sin^5 x\cos x dx$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sin x=t$. Тоді

$$\int \sin^5 x\cos x dx=\int \sin^5 x d(\sin x)=\int t^5 dt=\frac{t^6}{6}+C=\frac{\sin^6 x}{6}+C.$$

3. $\int \sin 2x\cos 6x dx$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 2x\cos 6x=\frac{1}{2}(\sin 8x-\sin 4x)$, то

$$\int \sin 2x\cos 6x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 4x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{8}\cos 4x+C.$$

4. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}$ парна відносно $\sin x$ та $\cos x$ одночасно:

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{(-\sin x)^3(-\cos x)}=\frac{1}{\sin^3 x\cos x}=R(\sin x,\cos x).$$

Тому даний інтеграл зводиться до вигляду $\int R(\operatorname{tg} x)d\operatorname{tg} x$. Враховуючи співвідношення $d\operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ та $1+\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, одержуємо

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x \cos^4 x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^3 x} + \int \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\left|\operatorname{tg} x\right| + C.$$

5. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Виконаємо підстановку $\cos x = t$ (див. табл. 2.3). Маємо:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^4 x \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^4 x d\cos x = -\int (1-t^2)^2 t^4 dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)t^4 dt = -\int (t^4 - 2t^6 + t^8)\, dt =$$

$$= -\frac{t^5}{5} + \frac{2}{7}t^7 - \frac{t^9}{9} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{7}\cos^7 x - \frac{\cos^9 x}{9} + C.$$

6. $\int \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Оскільки $m=0,\ n=4$ — парне, то застосуємо формулу зниження степеня:

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}(1+\cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Тоді

$$\int \cos^4 x dx = \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

7. $\int 32 \sin^6 x \cos^4 x dx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$32\sin^6 x\cos^4 x = (2\sin x\cos x)^4\cdot 2\sin^2 x = \sin^4 2x(1-\cos 2x) =$$

$$= \sin^4 2x - \sin^4 2x\cos 2x = \frac{1}{4}(1-\cos 4x)^2 - \sin^4 2x\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}(1-2\cos 4x+\cos^2 4x) - \sin^4 2x\cos 2x =$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{8}(1+\cos 8x) - \sin^4 2x\cos 2x\,.$$

Тоді

$$\int 32\sin^6 x\cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int\cos 4x dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int\cos 8x dx -$$

$$-\int\sin^4 2x\cos 2x dx = \frac{x}{4}-\frac{1}{8}\int\cos 4x d(4x)+\frac{x}{8}+\frac{1}{64}\int\cos 8x d(8x) -$$

$$-\frac{1}{2}\int\sin^4 2x d(\sin 2x) = \frac{3x}{8}-\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x-\frac{1}{10}\sin^5 2x + C\,.$$

8. $\int\sin^5 xdx$.

Розв'язання. $\int\sin^5 xdx = \int\sin^4 x\sin xdx = \int(1-\cos^2 x)^2\sin xdx =$

$$= \int(1-\cos^2 x)^2 d(-\cos x) = |\cos x = t| = -\int(1-t^2)^2 dt =$$

$$= -\int(1-2t^2+t^4)\,dt = -t+\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}+C = -\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C\,.$$

9. $\int\mathrm{tg}^5 xdx$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення

$$\int\mathrm{tg}^5 xdx = \int\mathrm{tg}\,x\cdot(\mathrm{tg}^2 x)^2 dx = \int\mathrm{tg}\,x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^2 dx = \int\frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^4 x}dx -$$

$$-2\int\frac{\mathrm{tg}\,x}{\cos^2 x}dx + \int\mathrm{tg}\,xdx = \int\frac{\sin x}{\cos^5 x}dx - 2\int\mathrm{tg}\,xd\,\mathrm{tg}\,x + \int\frac{\sin x}{\cos x}dx =$$

$$= -\int\frac{d\cos x}{\cos^5 x} - \mathrm{tg}^2 x - \int\frac{d\cos x}{\cos x} = \frac{1}{4\cos^4 x} - \mathrm{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C\,.$$

10. $\int\frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$$

парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно:

$$R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} = R(\sin x, \cos x).$$

Тому зведемо даний інтеграл до інтеграла відносно змінної $\operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x + 1)^2 \cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x + 1)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2} = -\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} + C.$$

11. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x dx}{(1 - \sin x)^3}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $R(\sin x, \cos x) = \dfrac{\cos^3 x}{(1 - \sin x)^3}$ непарна відносно $\cos x$:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos x)^3}{(1 - \sin x)^3} = -\frac{\cos^3 x}{(1 - \sin x)^3} = -R(\sin x, \cos x).$$

Тому

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{(1 - \sin x)^3} = \left| \begin{array}{l} \sin x = t, \\ \cos x dx = dt, \\ \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^2}{(1 - t)^3} dt = \int \frac{1 + t}{(1 - t)^2} dt =$$

$$= \int \frac{(t - 1) + 2}{(t - 1)^2} dt = \int \frac{dt}{t - 1} + 2\int \frac{dt}{(t - 1)^2} = \ln|t - 1| - \frac{2}{t - 1} + C =$$

$$= \ln|\sin x - 1| - \frac{2}{\sin x - 1} + C.$$

12. $\displaystyle\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Тоді

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1 + t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \int \frac{2-\dfrac{2t}{1+t^2}}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 4\int \frac{\left(t^2+1\right)-t}{(t^2+1)(t^2+3)}dt =$$

$$= 4\int \frac{1}{t^2+3}dt - 2\int \frac{dt^2}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} -$$

$$-\int \frac{(t^2+3)-(t^2+1)}{(t^2+1)(t^2+3)}dt^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + \int \frac{d(t^2+3)}{t^2+3} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{3}} - \ln(t^2+1) + \ln(t^2+3) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно дістанемо

$$\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + \ln(2+\cos x) + C.$$

13. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, можна скористатися універсальною тригонометричною підстановкою $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$. Покажемо, як цей інтеграл можна знайти іншим способом. Виконаємо перетворення:

$$\frac{\sin x}{1+\sin x} = \frac{\sin x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{\sin x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} + 1.$$

Тоді

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx =$$

$$= -\int \frac{d\cos x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x + x + C = \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

14. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = \int \frac{(1-\cos^2 x)\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}.$$

Оскільки $\sin x dx = -d(\cos x)$, то, запровадивши заміну $\cos x = t$, дістанемо

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} = -\int \frac{(1-t^2)dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt[3]{t^4}} - \int \frac{dt}{\sqrt[3]{t^4}} = \int t^{\frac{2}{3}} dt - \int t^{-\frac{4}{3}} dt =$$

$$= \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + 3t^{-\frac{1}{3}} + C = \frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + 3\cos^{-\frac{1}{3}} x + C.$$

15. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

Розв'язання. Застосування підстановок (наприклад, універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$) недоцільне, оскільки можна помітити, що $\cos x - \sin x = (\sin x + \cos x)'$. Тоді

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \ln|\sin x + \cos x| + C .$$

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть інтеграли від тригонометричних функцій.

1. $\int \sin^3 x \sin 2x dx$. **2.** $\int \cos^4 x dx$. **3.** $\int \sin^3 x dx$.

4. $\int \operatorname{tg}^4 x dx$. **5.** $\int \operatorname{ctg}^6 x dx$. **6.** $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$.

7. $\int \sin 6x \sin 4x dx$. **8.** $\int \cos 9x \sin 5x dx$. **9.** $\int \sin 6x \cos^2 x dx$.

10. $\int \frac{dx}{1-\operatorname{ctg} x}$. **11.** $\int \frac{\sin x + 2\cos 2x}{\cos x - \sin 2x} dx$. **12.** $\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx$.

13. $\int \frac{dx}{4+3\operatorname{tg} x}$. **14.** $\int \frac{dx}{8-4\sin x + 7\cos x}$. **15.** $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}$.

16. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^3 x}$. **17.** $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$. **18.** $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos x}$.

19. $\int \sin x \sin 4x \cos 7x dx$. **20.** $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^3 x}$. **21.** $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

22. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. **23.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$. **24.** $\int \frac{dx}{4+\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} x}$.

Відповіді

1. $\frac{2}{5}\sin^5 x + C$. **2.** $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$. **3.** $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$. **4.** $-\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$. **5.** $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C$. **6.** $-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$. **7.** $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{20}\sin 10x + C$. **8.** $\frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{28}\cos 14x + C$. **9.** $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{32}\cos 8x - \frac{1}{16}\cos 4x + C$. **10.** $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\cos x - \sin x\right| + C$. **11.** $C - \ln\left|\cos x - \sin 2x\right|$. **12.** $\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos x + \sin x\right| + C$. **13.** $\frac{4}{25}x + \frac{3}{25}\ln\left|4\cos x + 3\sin x\right| + C$. **14.** $\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}\right| + C$. **15.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x + C$. **16.** $\frac{\sin x}{2\cos^2 x} - \frac{2}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{5}{2}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2})\right| + C$. **17.** $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln\left|\sin x\right| + C$. **18.** $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x - \operatorname{ctg}^2 x - \ln\left|\operatorname{ctg} x\right| + C$. **19.** $\frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{40}\sin 10x + \frac{1}{16}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin 12x - \frac{1}{8}\sin 2x + C$. **20.** $-\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$. **21.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8})\right| + C$. **22.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{acrtg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C$. **23.** $4\cdot\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + C$. **24.** $\frac{4}{25}x - \frac{3}{25}\ln\left|\operatorname{tg} x + 2\right| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \frac{3}{25}\ln\left|\cos x\right| + C$.

Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Знайдіть інтеграли від тригонометричних функцій.

4.1.1. а) $\int \cos^4 3x \sin^2 3x dx$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 + 4\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\int \cos 3x \cos x dx$.

4.1.2. а) $\int \cos^3 x \sqrt[5]{\sin^4 x} dx$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x dx}{4 + \operatorname{tg}^2 2x}$; в) $\int \sin x \cos 4x dx$.

4.1.3. а) $\int \cos^3 x \sin^8 x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^7 x}$; в) $\int \cos 7x \cos 5x dx$.

4.1.4. а) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}}$; б) $\int \frac{dx}{1 + 16\sin^2 x}$; в) $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

4.1.5. а) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$; б) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^6 x}$; в) $\int \sin 3x \sin 2x dx$.

4.1.6. а) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$; в) $\int \sin 3x \cos x dx$.

4.1.7. а) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$; б) $\int \frac{dx}{7 + 8\sin x + 6\cos x}$; в) $\int \sin 9x \cos x dx$.

4.1.8. а) $\int \frac{3\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$; б) $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{9 - 4\operatorname{tg}^2 x}$; в) $\int \cos 2x \cos 3x dx$.

4.1.9. а) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[5]{\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{(3 - \sin x) dx}{3 + \cos x}$; в) $\int \sin 5x \sin 7x dx$.

4.1.10. а) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{9 + \cos^2 x}$; в) $\int \sin 4x \cos 2x dx$.

4.1.11. а) $\int \sqrt[8]{\cos^5 x} \sin^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{2 + 5\cos^2 x}$; в) $\int \sin x \cos 9x dx$.

4.1.12. а) $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$; б) $\int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^5 x}$; в) $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

4.1.13. а) $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{1 + 4\operatorname{tg} x}$; в) $\int \cos 5x \cos x dx$.

4.1.14. а) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$; в) $\int \cos 4x \cos 3x dx$.

4.1.15. а) $\int \cos^4 x \sin^5 x dx$; б) $\int \sin^{-5} x \cos^{-5} x dx$; в) $\int \sin 3x \sin 8x dx$.

4.1.16. а) $\int \cos^4 x \sin^6 x dx$; б) $\int \frac{(2 - 3\sin x) dx}{3 + 2\cos x}$; в) $\int \sin 6x \sin 5x dx$.

4.1.17. а) $\int \cos^2 2x \sin^4 2x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$; в) $\int \cos 3x \cos 7x dx$.

4.1.18. а) $\int \cos^3 x \sin^3 x dx$; б) $\int \frac{dx}{4 - \sin^2 x}$; в) $\int \cos 4x \cos 9x dx$.

4.1.19. а) $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x}}$; б) $\int \frac{dx}{4 + 4\sin x + 3\cos x}$; в) $\int \sin 7x \cos 2x dx$.

4.1.20. а) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^3 x}$; в) $\int \sin 4x \sin 12x dx$.

4.1.21. а) $\int \frac{\cos^3 2x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 2x}}$; б) $\int \frac{(3+\sin x)dx}{4+3\cos x}$; в) $\int \sin 8x \cos 2x dx$.

4.1.22. а) $\int \frac{\sin^3 2x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$; б) $\int \frac{dx}{6+8\sin x+5\cos x}$; в) $\int \sin x \sin 11x dx$.

4.1.23. а) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$; б) $\int \frac{dx}{16+\operatorname{tg} x}$; в) $\int \sin 12x \cos 6x dx$.

4.1.24. а) $\int \frac{3\cos^3 x dx}{\sin^4 x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^6 x}$; в) $\int \cos 11x \cos 2x dx$.

4.1.25. а) $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$; в) $\int \sin 8x \sin 3x dx$.

4.1.26. а) $\int \sqrt[5]{\cos^3 x} \sin^5 x dx$; б) $\int \frac{dx}{25-\cos^2 x}$; в) $\int \cos 5x \cos 8x dx$.

4.1.27. а) $\int \cos^5 x \sin^4 x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^7 x \cos^3 x}$; в) $\int \sin 6x \cos 4x dx$.

4.1.28. а) $\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx$; б) $\int \frac{(2+\sin x)dx}{4+\cos x}$; в) $\int \cos 4x \cos 13x dx$.

4.1.29. а) $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$; б) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+\cos x}$; в) $\int \sin 13x \cos 3x dx$.

4.1.30. а) $\int \sin^3 x \cos^8 x dx$; б) $\int \frac{dx}{\sin^9 x \cos^5 x}$; в) $\int \sin 16x \sin 2x dx$.

Тема 5. ІНТЕГРУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Інтегрування квадратичних ірраціональностей. Інтегрування деяких ірраціональних виразів. Інтегрування диференціальних біномів. Підстановки Ейлера. Метод М. Остроградського.

Література: [1, розділ 6, п. 6.6], [2, розділ 2, п. 2.1], [3, розділ 7, § 1], [4, розділ 7, § 22], [6, розділ 8], [7, розділ 10, § 10—11], [9, 1 част., § 33].

$\boxed{\text{Т.5}}$ ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

5.1. Інтегрування виразів, що містять квадратичні ірраціональності

Інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \ (a \neq 0, \ D \neq 0)$$

знаходять за тією самою схемою, що й інтеграли J_1 та J_2, розглянуті на с. 110—111, тобто спочатку доцільно під радикалом виділити повний квадрат і зробити заміну $\boxed{x+\frac{b}{2a}=t}$. При цьому перший інтеграл зводиться до одного з табличних інтегралів

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 \pm m^2}} = \ln\left|z+\sqrt{z^2 \pm m^2}\right| + C \text{, якщо } a>0,$$

або

$$\int \frac{dz}{\sqrt{m^2 - z^2}} = \arcsin\frac{z}{m} + C \text{, якщо } a<0,$$

а другий інтеграл — до суми двох табличних інтегралів.

5.2. Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt[m_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_1}}, \sqrt[m_2]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_2}}, \ldots, \sqrt[m_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n_k}}\right)dx$$

раціоналізуються підстановкою $\boxed{\frac{ax+b}{cx+d}=t^{\lambda}}$, де λ — найменше спільне кратне чисел $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Зокрема, інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt[m]{x^n})dx$ раціоналізуються підстановкою $\boxed{x=t^m}$.

5.3. Інтегрування диференціальних біномів.

Вираз вигляду $\boxed{x^m(a+bx^n)^p,}$ де m, n, p — раціональні сталі, а a і b — довільні сталі, називають *диференціальним біномом*.

Інтеграл від диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ виражається через інтеграл від раціональної функції лише у таких трьох випадках (див. табл. 2.4):

Таблиця 2.4

№	Властивість чисел p, m, n	Заміна
1	p — ціле число	$x=t^{\lambda}$, де λ — найменший спільний знаменник дробів m і n
2	$\dfrac{m+1}{n}$ — ціле число	$a+bx^n=t^r$, де r — знаменник дробу p
3	$\dfrac{m+1}{n}+p$ — ціле число	$ax^{-n}+b=t^r$, де r — знаменник дробу p

Зауваження. Щоб уникнути громіздких перетворень у третьому випадку, радимо скористатися формулою $a+bx^n=x^n(ax^{-n}+b)$.

5.4. Підстановки Ейлера

Інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ виражається через раціональні функції за допомогою таких підстановок (див. табл. 2.5):

Таблиця 2.5

№	Властивість коефіцієнтів тричлена ax^2+bx+c	Заміна
1	$a>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$
2	$c>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$
3	$D=a^2-4ac>0$	$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$, де α — один із дійсних коренів тричлена ax^2+bx+c

Зауваження. У разі застосування підстановок Ейлера в усіх трьох випадках після того, як вибрана відповідна заміна, потрібно обидві частини рівності піднести до квадрата. З одержаної рівності після спрощень знайти вираз для x, dx, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ та підставити ці значення під знак інтеграла.

5.5. Інтеграли вигляду

$$\int \frac{dx}{(x+m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

доцільно знаходити за допомогою оберненої заміни $\boxed{x+m=\frac{1}{t}}$.

5.6. Інтеграли вигляду

$$\int \frac{f(x)dx}{F(x)\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $\frac{f(x)}{F(x)}$ — раціональна функція, слід розпочинати з розкладу виразу $\frac{f(x)}{F(x)}$ у суму елементарних дробів.

5.7. Метод М. Остроградського

Якщо $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, де $P_n(x)$ — многочлен степеня n, тоді

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = P_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

де $P_{n-1}(x)$ — многочлен степеня $n-1$ з невизначеними коефіцієнтами, а λ — деяке невідоме число.

Коефіцієнти многочлена $P_{n-1}(x)$ та число λ визначають за допомогою диференціювання останньої рівності.

5.8. Інтегрування інтегралів вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ *за допомогою тригонометричних підстановок*

За допомогою підстановки $x = t - \dfrac{b}{2a}$ даний інтеграл зводиться до одного з випадків, поданих у табл. 2.6. Одержані інтеграли за допомогою відповідних замін зводяться до інтегралів вигляду

$$\int R(\sin z, \cos z)dz \text{ , або } \int R(\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z)dz \text{ .}$$

Таблиця 2.6

№	Інтеграл	Заміна
1	$\int R(t, \sqrt{t^2+m^2})dt$	$t = m\operatorname{tg} z$, або $t = m\operatorname{ctg} z$, або $t = m\operatorname{sh} z$
2	$\int R(t, \sqrt{t^2-m^2})dt$	$t = \dfrac{m}{\cos z}$, або $t = \dfrac{m}{\sin z}$, або $t = m\operatorname{ch} z$
3	$\int R(t, \sqrt{m^2-t^2})dt$	$t = m\sin z$, $t = m\cos z$, $t = m\operatorname{th} z$

Т.5 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Знайдіть інтеграли

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-2x^2}}$.

Розв'язання. Запишемо окремо процес виділення повного квадрата:

$$1-x-2x^2 = -2\left(x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right) = -2\left[\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\right] = 2\left[\frac{9}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right].$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x-2x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{2\left[\frac{9}{16}-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(x+1/4)}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(x+\frac{1}{4}\right)^2}} =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x+1/4}{3/4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x+1}{3}+C\,.$$

2. $\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}$.

Розв'язання. Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну від знаменника. Оскільки $(4x^2+4x+17)'=8x+4$, то запишемо чисельник підінтегральної функції так:

$$x-2=\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{4}{8}-2=\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2}=\frac{1}{8}(4x^2+4x+17)'-\frac{5}{2}\,.$$

Тоді

$$\int\frac{(x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\int\frac{(\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2})dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2+4x+17)}{\sqrt{4x^2+4x+17}}-$$

$$-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+17}}=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+17}-\frac{5}{4}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+16}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+17}-\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+17}\right|+C.$$

Тут ми скористалися табличними інтегралами $\int\frac{du}{2\sqrt{u}}=\sqrt{u}+C$ та $\int\frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+C$.

3. $\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Розв'язання. Найменше спільне кратне чисел два та три дорівнює числу шість, тому виконаємо заміну $x=t^6$, $dx=6t^5dt$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\frac{t^2}{t^3+t^4}6t^5dt=6\int\frac{t^4}{t+1}dt=6\int\frac{(t^4-1)+1}{t+1}dt=$$

$$=6\int\frac{(t^2+1)(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=6\int(t^2+1)(t-1)dt+6\int\frac{dt}{t+1}=$$

$$=6\int(t^3-t^2+t-1)dt+6\int\frac{dt}{t+1}=\frac{3}{2}t^4-2t^3+3t^2-6t+6\ln|t+1|+C=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt{x}+3\cdot\sqrt[3]{x}-6\cdot\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C\,.$$

4. $\int\frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$.

Розв'язання. Застосуємо заміну $\frac{2-x}{2+x}=t^3$. Звідси

$$x=\frac{2-2t^3}{1+t^3},\ 2-x=\frac{4t^3}{1+t^3},\ dx=-\frac{12t^2dt}{(1+t^3)^2}\,.$$

Отже,

$$\int\frac{2}{(2-x)^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx=-\int 2\left(\frac{1+t^3}{4t^3}\right)^2\cdot t\cdot\frac{12t^2}{(1+t^3)^2}dt=-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^3}=$$

$$=\frac{3}{4t^2}+C=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2}+C\,.$$

5. $\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx$.

Розв'язання. Тут дробово-лінійна функція $\frac{ax+b}{cx+d}$ звелась просто до лінійної функції $1+x$. Покладемо $1+x=t^4$, тоді $x=t^4-1$, $dx=4t^3dt$.

Отже,

$$\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{1+x}}dx=\int\frac{(t^4-1)^2+t^2}{t}\cdot 4t^3dt=4\int\left((t^4-1)^2+t^2\right)t^2dt=$$

$$=4\int(t^{10}-2t^6+t^2+t^4)dt=\frac{4}{11}t^{11}-\frac{8}{7}t^7+\frac{4}{3}t^3+\frac{4}{5}t^5+C=$$

$$=\frac{4}{11}\sqrt[4]{(1+x)^{11}}-\frac{8}{7}\sqrt[4]{(1+x)^7}+\frac{4}{3}\sqrt[4]{(1+x)^3}+\frac{4}{5}\sqrt[4]{(1+x)^5}+C\,.$$

6. $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5} = (x-1)(x+2)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$, то підінтегральний вираз — раціональна функція від x та $\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}$. Тому виконуємо підстановку $\dfrac{x+2}{x-1}=t^4$. Звідси

$$x=\frac{t^4+2}{t^4-1},\ x-1=\frac{3}{t^4-1},\ x+2=\frac{3t^4}{t^4-1}\ dx=-\frac{12t^3dt}{(t^4-1)^2}.$$

Тоді

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)\cdot\sqrt[4]{\dfrac{x+2}{x-1}}}=$$

$$=\int\frac{t^4-1}{3}\cdot\frac{t^4-1}{3t^4}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{-12t^3}{(t^4-1)^2}dt=-\frac{4}{3}\int\frac{dt}{t^2}=\frac{4}{3t}+C=\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C.$$

Інтегрування диференціальних біномів

7. $\int\sqrt{x}(3-\sqrt[3]{x})^2dx$.

Розв'язання. Маємо найпростіший випадок, структура підінтегрального виразу дає можливість провести інтегрування без заміни:

$$\int\sqrt{x}(3-\sqrt[3]{x})^2dx=\int x^{\frac{1}{2}}(9-6x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})dx=\int(9x^{\frac{1}{2}}-6x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{7}{6}})dx=$$

$$=6x^{\frac{3}{2}}-\frac{36}{11}x^{\frac{11}{6}}+\frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}}+C.$$

8. $\int\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}-1}}{\sqrt{x}}dx$.

Розв'язання. Запишемо даний інтеграл у вигляді

$$\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}-1}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}-1)^{\frac{1}{3}}dx.$$

Тут $p=\dfrac{1}{3}$, $m=-\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{4}$. Оскільки $\dfrac{m+1}{n}=\dfrac{-1/2+1}{1/4}=2$ — ціле число, то маємо другий випадок (табл. 2.4). Виконаємо заміну $x^{\frac{1}{4}}-1=t^3$, бо знаменник p дорівнює 3. Далі маємо

$$x=(t^3+1)^4,\ dx=12(t^3+1)^3t^2dt,$$

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{4}}-1)^{\frac{1}{3}}dx=\int (t^3+1)^{4(-\frac{1}{2})}(t^3)^{\frac{1}{3}}\cdot 12(t^3+1)^3t^2dt=$$

$$=12\int (t^3+1)t^3dt=\frac{12}{7}t^7+3t^4+C=\frac{12}{7}\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}-1)^7}+3\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}-1)^4}+C.$$

9. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді

$$I=\int\frac{dx}{x^{11}\cdot\sqrt{1+x^4}}=\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Тут $p=-\dfrac{1}{2}$, $m=-11$, $n=4$. Оскільки $\dfrac{m+1}{n}+p=-3$ — ціле число, то маємо третій випадок з табл. 2.4. Інтегрування починаємо з винесення множника x^4 з-під знака кореня:

$$I=\int\frac{dx}{x^{11}\cdot x^2\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{dx}{x^{13}\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}.$$

Виконаємо заміну $x^{-4}+1=t^2$, $-4x^{-5}dx=2tdt$, звідси $x^{-4}=t^2-1$, $x^{-5}dx=-\dfrac{1}{2}tdt$. Чисельник і знаменник під знаком інтеграла множимо на x^{-5}, дістаємо

$$I=\int\frac{x^{-5}dx}{x^8\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{x^{-5}dx}{(x^{-4})^{-2}\cdot\sqrt{x^{-4}+1}}=\int\frac{-\frac{1}{2}tdt}{(t^2-1)^{-2}\cdot\sqrt{t^2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\int (t^2-1)^2dt=-\frac{1}{2}\int (t^4-2t^2+1)dt=-\frac{1}{10}t^5+\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+C=$$

$$=-\frac{1}{10}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^5}+\frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x^4}{x^4}\right)^3}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}}+C.$$

Підстановки Ейлера

10. $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. Тут $a=1>0$, застосуємо підстановку

$$\sqrt{x^2+2x+2}=t+x .$$

Тоді

$$x^2+2x+2=t^2+2tx+x^2,\ 2x+2=t^2+2tx,\ x=\frac{t^2-2}{2(1-t)},$$

$$dx=\frac{-t^2+2t-2}{2(1-t)^2}dt,\ 1+\sqrt{x^2+2x+2}=1+t+\frac{t^2-2}{2(1-t)}=-\frac{t^2}{2(1-t)} .$$

Після цього приходимо до інтеграла

$$\int\frac{dx}{1+\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{(-t^2+2t-2)}{2(1-t)^2}\cdot\frac{2(1-t)}{(-t^2)}dt=$$
$$=\int\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}dt .$$

Розкладемо тепер підінтегральну функцію на елементарні дроби:

$$\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}=\frac{t^2+2(1-t)}{(1-t)t^2}=\frac{1}{1-t}+\frac{2}{t^2}.$$

Отже,

$$\int\frac{t^2-2t+2}{(1-t)t^2}dt=2\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{1-t}=-\frac{2}{t}-\ln|t-1|+C .$$

Повертаючись до змінної x, дістаємо відповідь

$$\int\frac{dx}{1+\cdot\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{2}{x-\sqrt{x^2+2x+2}}-\ln\left|1+x-\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C .$$

11. $I=\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}$.

Розв'язання. Покладемо $x+1=\frac{1}{t}$, $dx=-\frac{dt}{t^2}$, дістанемо

$$I=-\int\frac{1}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+4\left(\frac{1}{t}-1\right)+2}}\frac{dt}{t^2}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}}=-\arcsin\frac{t-1}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=-\arcsin\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\sqrt{2}}+C=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}(x+1)}+C.$$

Метод М. Остроградського

12. $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

Розв'язання. В чисельнику стоїть многочлен другого степеня, тому

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=(Ax+B)\sqrt{x^2+x+1}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Продиференціюємо обидві частини рівності за змінною x:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+x+1}}=A\sqrt{x^2+x+1}+\frac{(Ax+B)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

звідси після зведення до спільного знаменника дістаємо

$$2x^2=2A(x^2+x+1)+(Ax+B)(2x+1)+2\lambda.$$

Застосовуючи метод порівняння коефіцієнтів, дістаємо

$$x^2:\ 4A=2,\ A=\frac{1}{2};\qquad x:\ 3A+2B=0,\ B=-\frac{3}{4};$$

$$x^0:\ 2A+B+2\lambda=0,\ \lambda=-\frac{1}{8}.$$

Отже,

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}},$$

де $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}=\int\frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}}=\ln\left|x+1/2+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$.

Зауваження. Інтеграл

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = \int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$$

заміною $\frac{1}{x-\alpha} = t$ зводиться до інтеграла $\int \frac{P_n(t)dt}{\sqrt{at^2+bt+c}}$.

13. $I = \int \frac{dx}{(x+2)^3 \cdot \sqrt{x^2+4x}}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $x+2 = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{dt}{t^2}$. Тоді

$$\int \frac{dx}{(x+2)^3 \cdot \sqrt{x^2+4x}} = \int \frac{dx}{(x+2)^3 \cdot \sqrt{(x+2)^2-4}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3} \cdot \sqrt{\frac{1}{t^2}-4}} = -\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-4t^2}}.$$

Згідно з методом Остроградського маємо

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-4t^2}} = (At+B)\sqrt{1-4t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}.$$

Звідси після диференціювання дістанемо

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-4t^2}} = A\sqrt{1-4t^2} - \frac{(At+B) \cdot 4t}{\sqrt{1-4t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-4t^2}},$$

або

$$t^2 = A(1-4t^2) - 4t(At+B) + \lambda.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях t, знайдемо $A = -\frac{1}{8}$, $B = 0$, $\lambda = \frac{1}{8}$.

Отже,

$$\int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1-4t^2}} = -\frac{1}{8} t\sqrt{1-4t^2} + \frac{1}{16}\arcsin 2t + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно дістаємо

$$I = -\frac{1}{8(x+2)}\sqrt{1-\frac{4}{(x+2)^2}} + \frac{1}{16}\arcsin\frac{2}{x+2} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+4x}}{8(x+2)^2} + \frac{1}{16}\arcsin\frac{2}{x+2} + C.$$

Інтегрування ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок

14. $I = \int \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{(x+1)^2}dx$.

Розв'язання. Виділимо повний квадрат підкореневого виразу: $3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2$. Тепер зрозуміло, що можна виконати підстановку $x+1 = 2\sin t$, $dx = 2\cos t dt$. Тоді

$$I = \int \frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{(x+1)^2} = \int \frac{\sqrt{4-4\sin^2 t}}{4\sin^2 t}2\cos t dt = \int \frac{2\cos t}{4\sin^2 t}2\cos t dt =$$

$$= \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C.$$

Щоб перейти до змінної x, зауважимо, що $\sin t = \frac{x+1}{2}$. Звідси

$$t = \arcsin\frac{x+1}{2},\ \operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-\frac{(x+1)^2}{4}}}{\frac{x+1}{2}} = \frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+1}.$$

Остаточно дістаємо

$$I = -\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+1} - \arcsin\frac{x+1}{2} + C.$$

15. $I = \int \frac{\sqrt{x^2+25}dx}{x^8}$.

Розв'язання. Зробимо заміну $x = 5\operatorname{tg} t$, тоді

$$dx=\frac{5dt}{\cos^2 t},\ \sqrt{x^2+25}=\sqrt{(5\operatorname{tg} t)^2+25}=\frac{5}{\cos t},$$

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2+25}dx}{x^8}=\int\frac{\frac{5}{\cos t}\cdot\frac{5dt}{\cos^2 t}}{\operatorname{tg}^8 t}=25\int\frac{\cos^5 t dt}{\sin^8 t}=$$

$$=25\int\frac{(1-\sin^2 t)^2 d\sin t}{\sin^8 t}=25\int\left(\frac{1}{\sin^8 t}-\frac{2}{\sin^6 t}+\frac{1}{\sin^4 t}\right)d\sin t=$$

$$=25\left(-\frac{1}{7\sin^7 t}+\frac{2}{5\sin^5 t}-\frac{1}{3\sin^3 t}\right)+C\,.$$

Повернемося до змінної x:

$$\operatorname{tg} t=\frac{x}{5};\ \ 1+\left(\frac{5}{x}\right)^2=\frac{1}{\sin^2 t},\ \frac{x^2+25}{x^2}=\frac{1}{\sin^2 t},\ \sin t=\frac{x}{\sqrt{x^2+25}}\,.$$

Отже,

$$I=25\left(-\frac{\sqrt{(x^2+25)^7}}{7x^7}+\frac{2}{5}\frac{\sqrt{(x^2+25)^5}}{x^7}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(x^2+25)^3}}{x^3}\right)+C.$$

Т.5 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть інтеграли.

1. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$. **2.** $\int\frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. **3.** $\int\frac{(3x-5)dx}{\sqrt{2x^2-12x+15}}$.

4. $\int\frac{(6x+1)dx}{\sqrt{x-x^2}}$. **5.** $\int\frac{(2\sin x-1)\cos x dx}{\sqrt{5+4\sin x-\sin^2 x}}$. **6.** $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

7. $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3}$. **8.** $\int\frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. **9.** $\int\sqrt{\frac{x-3}{x}}\cdot\frac{dx}{x}$.

10. $\int\frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$. **11.** $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}dx$. **12.** $\int\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}+1}}{\sqrt{x}}dx$.

13. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}dx$. **14.** $\int \frac{x^7}{\sqrt{1+x^2}}dx$. **15.** $\int \frac{dx}{x(1+x^3)^{1/4}}$.

16. $\int \frac{dx}{x+\cdot\sqrt{x^2-x+4}}$. **17.** $\int \sqrt{x}(1+2\sqrt[6]{x})^3dx$. **18.** $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

19. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. **20.** $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. **21.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(6x-8-x^2)^3}}$.

22. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-2x+2}}$. **23.** $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{6x-x^2-5}}$. **24.** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}}$.

25. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **26.** $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{2+x-x^2}}$. **27.** $\int \frac{(2x^2-3x)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

28. $\int \frac{\sqrt{2x+x^2}}{x^2}dx$. **29.** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}dx$. **30.** $\int \frac{xdx}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Відповіді

1. $\ln\left|x+3+\sqrt{x^2+6x+11}\right|+C$. **2.** $\arcsin\frac{x-1}{2}+C$. **3.** $\frac{3}{2}\sqrt{2x^2-12x+15}+$ $+2\sqrt{2}\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+15/2}|+C$. **4.** $-6\sqrt{x-x^2}+4\arcsin(2x+1)+C$. **5.** $-2\sqrt{5+4t-t^2}+$ $+3\arcsin(\frac{t-2}{3})+C$, де $t=\sin t$. **6.** $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C$. **7.** $\frac{3}{16}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}-$ $-\frac{3}{28}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}+C$. **8.** $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\,\mathrm{arctg}\sqrt[6]{x}+C$. **9.** $-2t-\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$, де $t=\sqrt{\frac{x-3}{x}}$.
10. $\ln|x|+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\cdot\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\cdot\sqrt[5]{x^2}}-10\ln\left|1+\sqrt[10]{x}\right|+C$. **11.** $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$.
12. $\frac{12}{7}\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}+1)^7}-3\sqrt[3]{(\sqrt[4]{x}+1)^4}+C$. **13.** u^3-3u+C, де $u=(1+x^{2/3})^{1/2}$. **14.** $\frac{t^7}{7}-\frac{3}{5}t^5+$ $+t^3-t+C$, де $t=\sqrt{1+x^2}$. **15.** $\frac{2}{3}\mathrm{arctg}\sqrt[4]{1+x^3}+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x^3}-1}{\sqrt[4]{1+x^3}+1}\right|+C$. **16.** $8\ln\left|8-x+\right.$ $\left.+\sqrt{x^2-x+4}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|1-2x+\sqrt{x^2-x+4}\right|+C$. **17.** $-\frac{1}{2}\ln\left|t-1\right|+8\ln\left|2t+1\right|-\frac{15}{2}\ln\left|t+1\right|+\frac{5}{t+1}+C$, де $t=\frac{\sqrt{x^2-x+4}+2}{x}$. **18.** $\frac{1}{6}\ln\frac{u^2+u+1}{(u-1)^2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$, де $u=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$.
19. $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2+2x+5}-\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C$. **20.** $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C$.

21. $\dfrac{x-2}{2\sqrt{6x-8-x^2}}-\dfrac{\sqrt{6x-8-x^2}}{2(x-2)}+C$. **22.** $\dfrac{x+3}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\dfrac{1}{2}\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+2}\right|+C.$

23. *Вказівка*. Зробіть заміну $\dfrac{1}{x-1}=t.$ **24.** $-\ln\left|\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+C$. **25.** $\dfrac{1}{48}(12x^3-56x^2+95x-10)\times$ $\times\sqrt{x^2+4x+5}-\dfrac{455}{48}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+5}\right|+C.$ **26.** *Вказівка*. Зробіть заміну $\dfrac{1}{x}=t$.

27. $x\sqrt{x^2-2x+5}-5\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}\right|+C.$ **28.** $-2\sqrt{\dfrac{x+2}{x}}-\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}\right|+C.$ *Вказівка*. Виконайте заміну $x=\dfrac{1}{t}.$ **29.** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2(1+x^2)}}{x+\sqrt{2(1+x^2)}}\right|-\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}\right|+C.$ *Вказівка*. Виконайте заміну $x=\operatorname{tg}t.$ **30.** *Вказівка*. Домножте чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз $x+\sqrt{x^2-1}$.

Т.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

5.1. Знайдіть інтеграли від квадратичних ірраціональностей.

5.1.1. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$. **5.1.2.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$. **5.1.3.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$.

5.1.4. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$. **5.1.5.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2+8x-2x^2}}$. **5.1.6.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

5.1.7. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-2x-x^2}}$. **5.1.8.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+6x-x^2}}$. **5.1.9.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-10x+4}}$.

5.1.10. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x+3-x^2}}$. **5.1.11.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x^2-8x+3}}$. **5.1.12.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

5.1.13. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{4x^2-x+4}}$. **5.1.14.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$. **5.1.15.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

5.1.16. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{3x+2-x^2}}$. **5.1.17.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+10}}$. **5.1.18.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

5.1.19. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{16x^2-8x+3}}$. **5.1.20.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$. **5.1.21.** $\int\dfrac{dx}{\sqrt{2-x-2x^2}}$.

5.1.22. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+3}}$. **5.1.23.** $\int \frac{dx}{\sqrt{5-6x-9x^2}}$. **5.1.24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2x^2}}$.

5.1.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$. **5.1.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **5.1.27.** $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x-x^2}}$.

5.1.28. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x+9}}$. **5.1.29.** $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x-x^2}}$. **5.1.30.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

5.2. Знайдіть інтеграли від квадратичних ірраціональностей.

5.2.1. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+4x+5}}$. **5.2.2.** $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{7-2x-x^2}}$. **5.2.3.** $\int \frac{(5x+2)dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

5.2.4. $\int \frac{(7x-3)dx}{\sqrt{6+2x-x^2}}$. **5.2.5.** $\int \frac{(3-x)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. **5.2.6.** $\int \frac{(2-3x)dx}{\sqrt{x^2-4x+6}}$.

5.2.7. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+8x+18}}$. **5.2.8.** $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$. **5.2.9.** $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{6-4x-x^2}}$.

5.2.10. $\int \frac{(5x+4)dx}{\sqrt{x^2+8x+17}}$. **5.2.11.** $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$. **5.2.12.** $\int \frac{(3x-5)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$.

5.2.13. $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$. **5.2.14.** $\int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$. **5.2.15.** $\int \frac{(3x+1)dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$.

5.2.16. $\int \frac{(4-x)dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$. **5.2.17.** $\int \frac{(7x+4)dx}{\sqrt{11-4x-x^2}}$. **5.2.18.** $\int \frac{(9x+1)dx}{\sqrt{5-2x-x^2}}$.

5.2.19. $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$. **5.2.20.** $\int \frac{(3x-7)dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$. **5.2.21.** $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+6x+11}}$.

5.2.22. $\int \frac{(2-x)dx}{\sqrt{14-4x-x^2}}$. **5.2.23.** $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{x^2+8x+20}}$. **5.2.24.** $\int \frac{(3-4x)dx}{\sqrt{x^2+4x+7}}$.

5.2.25. $\int \frac{(5-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$. **5.2.26.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$. **5.2.27.** $\int \frac{(-x+5)dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$.

5.2.28. $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{21-8x-x^2}}$. **5.2.29.** $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}}$. **5.2.30.** $\int \frac{(x-4)dx}{\sqrt{13-6x-x^2}}$.

5.3. Знайдіть інтеграли, використовуючи тригонометричну заміну змінної.

5.3.1. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}dx$. **5.3.2.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$. **5.3.3.** $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x}dx$.

5.3.4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}dx$. **5.3.5.** $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$. **5.3.6.** $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$.

5.3.7. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}dx$. **5.3.8.** $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$. **5.3.9.** $\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4}dx$.

5.3.10. $\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^4}dx$. **5.3.11.** $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}dx$. **5.3.12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$.

5.3.13. $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$. **5.3.14.** $\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx$. **5.3.15.** $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}dx$.

5.3.16. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **5.3.17.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. **5.3.18.** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2}dx$.

5.3.19. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$. **5.3.20.** $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx$. **5.3.21.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

5.3.22. $\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$. **5.3.23.** $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$. **5.3.24.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$.

5.3.25. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+9)^3}}$. **5.3.26.** $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x^4}dx$. **5.3.27.** $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$.

5.3.28. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{9-x^2}}$. **5.3.29.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$. **5.3.30.** $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$.

5.4. Знайдіть інтеграли від ірраціональних функцій, використовуючи відповідну заміну змінної.

5.4.1. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{(1+\sqrt[3]{x+1})\sqrt{x+1}}dx$. **5.4.2.** $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{(\sqrt[3]{x+1}+1)\sqrt{x+1}}dx$.

5.4.3. $\int \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$.

5.4.4. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.

5.4.5. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

5.4.6. $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}dx$.

5.4.7. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}dx$.

5.4.8. $\int \frac{\sqrt{x-1}-2\sqrt[3]{x-1}}{2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$.

5.4.9. $\int \frac{\sqrt[6]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}}dx$.

5.4.10. $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

5.4.11. $\int \frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{x+3}}dx$.

5.4.12. $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

5.4.13. $\int \frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

5.4.14. $\int \frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx.$

5.4.15. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}dx.$

5.4.16. $\int \frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-1}dx$.

5.4.17. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$.

5.4.18. $\int \frac{\sqrt[6]{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}-\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

5.4.19. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+1)}dx$.

5.4.20. $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}}dx$.

5.4.21. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}dx$.

5.4.22. $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5.4.23. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

5.4.24. $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[6]{x}+1)}dx$.

5.4.25. $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

5.4.26. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5.4.27. $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

5.4.28. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$.

5.4.29. $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$.

5.4.30. $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Тема 6. **ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

Означення, умови існування, геометричний зміст, властивості. Обчислення визначених інтегралів. Формула Ньютона—Лейбніца. Методи інтегрування визначених інтегралів.

Література: [1, розділ 7], [3, розділ 7, § 2], [4, розділ 7, §23], [5, розділ 6], [6, розділ 9, п. 9.1, 9.2], [7, розділ 11, § 1—6] [9, § 35—39].

Т.6 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

6.1. Означення та умови існування

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на *n* довільних частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ і виберемо на кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i (рис. 2.1). Складемо суму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Цю суму називають *інтегральною сумою* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Позначимо через λ довжину найбільшого частинного відрізка Δx_i.

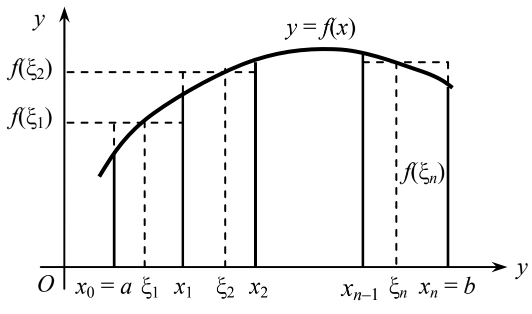

Рис. 2.1

Визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називають скінченну границю інтегральної суми при $\lambda \to 0$ за умови, що вона не залежить від способу розбиття відрізка $[a,b]$ і вибору точок ξ_i, і позначають так:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .}$$

Геометричний зміст визначеного інтеграла. Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ — невід'ємна і неперервна функція, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої вертикальними прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), віссю Ox і графіком функції $y = f(x)$.

Функцію $f(x)$ називають *інтегровною на відрізку* $[a,b]$, якщо існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Визначений інтеграл існує:

1) для кожної функції $f(x)$, обмеженої на відрізку $[a,b]$ і такої, що має не більше ніж скінченне число точок розриву;

2) для обмеженої і монотонної на відрізку $[a,b]$ функції;

3) для неперервної на відрізку $[a,b]$ функції.

6.2. Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ ($a < b$) і $f(x) \ge 0$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0 .$$

2. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ ($a < b$) і $m \le f(x) \le M$, $x \in [a;b]$, тоді

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) .$$

3. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a;b]$ ($a < b$) і $f(x) \le g(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx .$$

4. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ ($a<b$), тоді

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx .$$

5. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a;b]$ ($a<b$) і $m \le f(x) \le M$, $x \in [a;b]$, тоді існує $\mu \in (a;b)$ таке, що

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) .$$

Зокрема, якщо $f(x)$ неперервна на $[a;b]$, то існує таке число $c \in [a;b]$, що виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) ,$$

число $f(c)$ називають *середнім значенням* функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

6. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

7. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

8. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

9. $\int_a^b \lambda_1 f(x)dx \pm \int_a^b \lambda_2 g(x)dx = \lambda_1 \int_a^b f(x)dx \pm \lambda_2 \int_a^b g(x)dx$.

10. За будь-якого розміщення точок a, b, c

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx ,$$

якщо $f(x)$ інтегровна на кожному з проміжків.

11. а) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx,$ якщо $f(x)$ — парна функція;

б) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, якщо $f(x)$ — непарна функція.

12. Якщо $f(x)$ — інтегровна на $[a,b]$ і $x \in [a,b]$, то

а) $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ визначена і неперервна на $[a,b]$;

б) $\frac{d}{dx}\Phi(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x)$ в кожній точці x неперервності функції $f(x)$.

6.3. Обчислення визначених інтегралів

6.3.1. Формула Ньютона—Лейбніца

Правило обчислення визначеного інтеграла встановлює *теорема Ньютона—Лейбніца.*

Нехай $F(x)$ — деяка з первісних функцій для $f(x)$ на $[a,b]$, тоді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Цей факт записують так:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).}$$

Останню формулу називають *формулою Ньютона—Лейбніца*, або основною формулою інтегрального числення.

При обчисленні визначених інтегралів, як і невизначених, використовують методи *безпосереднього* інтегрування, *заміни змінної* та *інтегрування частинами*.

6.3.2. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $x = \varphi(t)$ задовольняє умови:

1) однозначна та неперервна на проміжку $[\alpha; \beta]$ і має на цьому проміжку неперервну похідну $\varphi'(t)$;

2) значення функції $x = \varphi(t)$ при зміні t на відрізку $[\alpha; \beta]$ не виходять за межі відрізка $[a; b]$;

3) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді для будь-якої неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $f(x)$ справджується формула заміни змінної у визначеному інтегралі

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Часто замість заміни $\boxed{x=\varphi(t)}$ застосовують підстановку $\boxed{t=\psi(x)}$. В цьому випадку межі α та β визначаються безпосередньо за формулами $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$.

6.3.3. Формула інтегрування частинами

Якщо u та v — функції від x, що мають неперервні похідні, тоді

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

або

$$\boxed{\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.}$$

Т.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Обчисліть визначені інтеграли, використовуючи безпосереднє інтегрування.

1. $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}dx=-\int_0^1\sqrt[3]{1-x}d(1-x)=-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-x)^4}\Big|_0^1=-\frac{3}{4}(0-1)=\frac{3}{4}$.

2. $\int_1^e \frac{\ln x-1}{x}dx=\int_1^e\frac{\ln x}{x}dx-\int_1^e\frac{dx}{x}=\int_1^e \ln x d\ln x-\int_1^e\frac{dx}{x}=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_1^e-\ln x\Big|_1^e=$

$=\frac{1}{2}-0-(1-0)=-\frac{1}{2}$.

3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}d(1+\mathrm{tg}\,x)=$

$$=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

4. $$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin xdx+\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}(-\sin x)dx=$$

$$=-\cos x\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\cos x\Bigg|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=-(-1-0)+(0-(-1))=2.$$

5. Знайдіть середнє значення функції $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$ на проміжку [2; 3].

Розв'язання. З теореми про середнє значення (властивість **5**) випливає рівність

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

де $f(c)$ — середнє значення функції $f(x)$ на $[a;b]$, $c\in[a;b]$.

У цьому випадку

$$f(c)=\frac{1}{3-2}\int_2^3\frac{dx}{x^2-x+1}=\int_2^3\frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\frac{5}{\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{3})=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Тут ми застосували формулу $\operatorname{arctg}\alpha-\operatorname{arctg}\beta=\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}$.

6. Не обчислюючи інтеграла, доведіть рівність

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(x^4-x^2)\operatorname{tg}xdx=0.$$

Розв'язання. Оскільки межі інтегрування симетричні відносно нуля, то згідно з властивістю **11** достатньо показати, що підінтегральна функція $f(x)=(x^4-x^2)\,\mathrm{tg}\,x$ непарна. Маємо:

$$f(-x)=((-x)^4-(-x)^2)\,\mathrm{tg}(-x)=-(x^4-x^2)\,\mathrm{tg}\,x=-f(x),$$

тобто $f(x)$ — непарна функція.

7. Чи можна обчислити підстановкою $x=\sin t$ інтеграл

$$\int_0^2 x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx.$$

Розв'язання. Змінній t на проміжку $(-\infty;\infty)$ відповідає змінна x на відрізку $[-1;1]$, тоді як проміжок інтегрування — відрізок $[0;2]$. Тому даний інтеграл за допомогою заміни $x=\sin t$ обчислити неможливо.

Обчисліть визначені інтеграли, використовуючи заміну змінної.

8. $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання. Скористаємося універсальною тригонометричною підстановкою $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=t$. Тоді

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{2+\cos x}=\left|\begin{array}{l|l}\begin{array}{l}\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,\ x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\end{array} & \begin{array}{c|c|c} x & 0 & \dfrac{\pi}{2}\\ \hline t & 0 & 1\end{array}\end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1\frac{2dt}{(1+t^2)\left(2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt3}=\frac{\pi}{3\sqrt3}.$$

9. $\displaystyle\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{e^x-1}=t$, визначаємо межі змінної t:

$$\alpha=\sqrt{e^0-1}=0,\ \beta=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=2.$$

Знайдемо

$$e^x=t^2+1,\ e^x dx=2tdt,\ dx=\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Тоді

$$\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx=\int_0^2\frac{(t^2+1)\cdot t}{t^2+4}\cdot\frac{2tdt}{t^2+1}=2\int_0^2\frac{t^2}{t^2+4}dt=2\int_0^2\frac{t^2+4-4}{t^2+4}dt=$$

$$=2\int_0^2(1-\frac{4}{t^2+4})dt=2(t-2\operatorname{arctg}\frac{t}{2})\Big|_0^2=4-\pi.$$

Обчисліть визначені інтеграли, використовуючи метод інтегрування частинами.

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin xdx$.

Розв'язання. Використавши двічі формулу інтегрування частинами, дістанемо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin xdx=\begin{vmatrix}u=x^2, & dv=\sin xdx,\\ du=2xdx, & v=-\cos x\end{vmatrix}=-x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos xdx=\begin{vmatrix}u=x, & dv=\cos xdx,\\ du=dx, & v=\sin x\end{vmatrix}=2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=$$

$$=\pi+2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi-2.$$

11. $\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$.

Розв'язання. Покладемо $u=\arcsin x$, $dv=\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$. Тоді $du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v=2\sqrt{1+x}$. Отже,

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx=2\sqrt{1+x}\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{2\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}}dx=2\sqrt{2}\arcsin 1-$$

$$-2\arcsin 0-2\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\pi\sqrt{2}+4\sqrt{1-x}\Big|_0^1=\pi\sqrt{2}-4.$$

12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx$ (n – натуральне число).

Розв'язання.

$$J_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx = \left| \begin{matrix} u = \sin^{n-1} x, & dv = \sin xdx, \\ du = (n-1)\sin^{n-2} x\cos xdx, & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\cos x \sin^{n-1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} xdx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} xdx = (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} xdx - (n-1)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n xdx .$$

Отже,

$$J_n = (n-1)J_{n-2} - (n-1)J_n ,$$

звідси

$$J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2} .$$

Якщо $n = 2k-1$ — непарне число, то одержана рекурентна формула зводить обчислення J_n до інтеграла $J_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin xdx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.

Тоді

$$J_{2k-1} = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} = \frac{(2k-2)(2k-4)\ldots\cdot 4\cdot 2}{(2k-1)(2k-3)\ldots\cdot 5\cdot 3} \ (k \in N).$$

Якщо $n = 2k$ — парне число, то одержана рекурентна формула зводить обчислення J_n до $J_0 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$.

Тоді

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots\cdot 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\ldots\cdot 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \ (k \in N).$$

Т.6 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть визначені інтеграли.

1. $\int_1^{16} \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx$. **2.** $\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{x^2+1} dx$. **3.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

4. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$. **5.** $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2} dx$. **6.** $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}$.

7. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$. **8.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$. **9.** $\int_2^{14} \frac{x}{\sqrt{2+x}} dx$.

10. $\int_{\ln 5}^{\ln 14} \frac{e^x\sqrt{e^x-5}}{e^x+1} dx$. **11.** $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$. **12.** $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2} dx$.

13. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx$. **14.** $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **15.** $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

16. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$. **17.** $\int_0^1 xe^{-x} dx$. **18.** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x dx$.

19. $\int_0^{e-2} \ln(x+2) dx$. **20.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$. **21.** $\int_1^e \ln^2 x dx$.

Доведіть рівності.

22. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\operatorname{tg} x}{1+\sin^2 x} dx = 0$. **23.** $\int_{-2}^{2} \frac{x\sin 3x+1}{\ln(1+x^4)} dx = 2\int_0^2 \frac{x\sin 3x+1}{\ln(1+x^4)} dx$.

24. Знайдіть середнє значення функції $f(x)=\sin^2 x$ на проміжку $[0; \pi]$.

Відповіді

1. 12. **2.** $\frac{26}{3}$. **3.** $\frac{\pi}{2}$. **4.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.** 1. **6.** $\ln\frac{4}{3}$. **7.** 3. **8.** $2-\frac{\pi}{2}$. **9.** $\frac{88}{3}$. **10.** $6-2\sqrt{6}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$. **12.** $\frac{\pi}{16}$. **13.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **14.** $\frac{1}{32}(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8)$. **15.** $\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$. **16.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. **17.** $1-2/e$. **18.** $\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}$. **19.** $2-2\ln 2$. **20.** $\frac{\pi}{36}(9-4\sqrt{3})+$ $+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **21.** $e-2$. **22.** *Вказівка*. Врахуйте непарність підінтегральної функції. **24.** $\frac{1}{2}$.

Т.6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Обчисліть визначені інтеграли, використовуючи заміну змінної.

1. $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$. **2.** $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}$. **3.** $\int\limits_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

4. $\int\limits_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$. **5.** $\int\limits_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$. **6.** $\int\limits_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$.

7. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. **8.** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$. **9.** $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}$.

10. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$. **11.** $\int\limits_{2/3}^{7/3} \frac{xdx}{\sqrt{3x+2}}$. **12.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$.

13. $\int\limits_0^{0.5\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$. **14.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **15.** $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{(1+x)^4}$.

16. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **17.** $\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. **18.** $\int\limits_0^{\sqrt[3]{7}} \frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^3}}$.

19. $\int\limits_2^5 \frac{x^2dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$. **20.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos xdx}{4+\sqrt{\sin x}}$. **21.** $\int\limits_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

22. $\int\limits_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\sqrt{1+e^{-2x}}}$. **23.** $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **24.** $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

25. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{\ln xdx}{x(1-\ln^2 x)}$. **26.** $\int\limits_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3dx}{(1+x^2)^{2/3}}$. **27.** $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

28. $\int\limits_0^{13} \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$. **29.** $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{4+e^x}}$. **30.** $\int\limits_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

Тема 7. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Невласні інтеграли першого і другого роду. Означення, обчислення, ознаки збіжності.

Література: [1, розділ 8], [3, розділ 7, §2], [6, розділ 9, п. 9.4], [7, розділ 11, § 7], [9, § 40].

Т.7 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Для практичного застосування важливе значення має розширення поняття визначеного інтеграла у випадку нескінченного проміжку інтегрування, а також якщо функція необмежена на скінченному відрізку інтегрування. Такі інтеграли називають *невласними інтегралами* відповідно *першого і другого роду.*

7.1. Невласні інтеграли першого роду

Нехай функція $f(x)$ задана на нескінченному проміжку $[a,\infty)$ та інтегровна на будь-якому скінченному відрізку $[a, A]$, $a < A < \infty$ (рис. 2.2).

Границю $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$ називають *невласним інтегралом першого роду* від функції $f(x)$ і позначають

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx .$$

Аналогічно визначають невласні інтеграли на проміжках $(-\infty,b]$ та $(-\infty,\infty)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx ,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^c f(x)dx + \lim_{A\to\infty}\int\limits_c^A f(x)dx ,$$

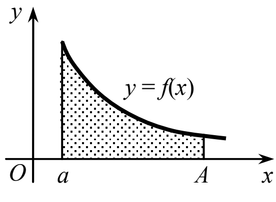

Рис. 2.2

де c — довільне дійсне число.

Якщо границі у правих частинах існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли називають *збіжними*. В іншому випадку — *розбіжними*.

У деяких випадках немає необхідності обчислювати інтеграл, а достатньо знати, збіжний він чи ні. Сформулюємо без доведення ознаки збіжності невласного інтеграла першого роду.

Теорема 1 Якщо на проміжку $[a;\infty)$ функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні і …ть умову $0 \le f(x) \le g(x)$ принаймні на проміжку $[a+\alpha;\infty)$, де

$\alpha \ge 0$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$ — розбіжність інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

Теорема 2 Якщо існує $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k$, $0 < k < \infty$ ($f(x) > 0$, $g(x) > 0$), то обидва інтеграли $\int_a^{\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{\infty} g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Теорема 3 Якщо інтеграл $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ збігається, то збігається й інтеграл $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

7.2. Невласні інтеграли другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку $[a, b)$. Точку $x = b$ назвемо *особливою* точкою функції $f(x)$, якщо $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$ (рис. 2.3). Крім того, нехай функція $f(x)$ інтегровна на кожному відрізку $[a, b-\varepsilon]$ при довільному $\varepsilon > 0$ ($b - \varepsilon > a$).

Границю $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ називають *невласним інтегралом другого роду* від функції $f(x)$ і позначають

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо $x = a$ — особлива точка, то невласний інтеграл визначають так:

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо $x = c$ — особлива точка, причому $a < c < b$ (рис. 2.4), тоді за означенням

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0} \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Якщо границі у правих частинах існують і скінченні, то відповідні невласні інтеграли називають *збіжними*. В іншому випадку — *розбіжними*.

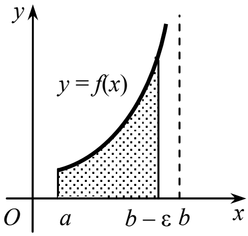

Рис. 2.3

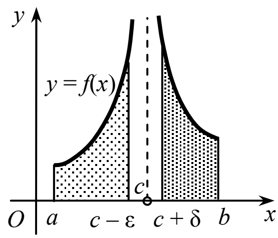

Рис. 2.4

Ознаки збіжності для невласних інтегралів другого роду.

Теорема 4 Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на $[a;b)$, мають особливу точку $x=b$ і задовольняють умову $0 \le f(x) \le g(x)$ принаймні на проміжку $[a+\alpha;b)$, де $0 \le \alpha < b$, то із збіжності інтеграла $\int_a^b g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, а із розбіжності інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність інтеграла $\int_a^b g(x)dx$.

Теорема 5 Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на проміжку $[a;b)$, мають особливу точку $x=b$, тоді, якщо існує границя

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = k\,,\ 0 < k < \infty\,,$$

то інтеграли $\int_a^b f(x)dx$ та $\int_a^b g(x)dx$ або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Теорема 6 Якщо $x=b$ — особлива точка функції $f(x)$ і інтеграл $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також збігається.

Т.7 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Обчисліть невласні інтеграли першого роду або встановіть їх розбіжність.

1. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Розв'язання. За означенням невласного інтеграла першого роду маємо

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_{1}^{A} = \lim_{A\to\infty} (\operatorname{arctg} A - \operatorname{arctg} 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Геометрично це означає, що площа необмеженої криволінійної трапеції скінченна і дорівнює $\frac{\pi}{4}$ (рисунок виконайте самостійно).

2. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$.

Розв'язання. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln|x| \Big|_{1}^{A} = \lim\limits_{A\to\infty} \ln|A| = \infty$.

Отже, інтеграл розбігається.

3. Дослідіть збіжність інтеграла $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ залежно від p.

Розв'язання. Випадок $p=1$ розглянуто в прикладі 2. Нехай $p \neq 1$, тоді

$$\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \int\limits_{1}^{A} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Bigg|_{1}^{A} = \lim_{A\to\infty} \frac{A^{-p+1}}{-p+1} + \frac{1}{p-1} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{якщо } p>1, \\ \infty, & \text{якщо } p<1. \end{cases}$$

Висновок. Невласний інтеграл першого роду $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ збігається для $p>1$ і розбігається для $p \le 1$.

4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-6x+10}$.

Розв'язання. Для зручності виконаємо заміну $x-3=t$, дістанемо інтеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2+1}.$$

За означенням

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\int_{-\infty}^{a}\frac{dt}{t^2+1}+\int_{a}^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a}\frac{dt}{t^2+1}+\lim_{B\to\infty}\int_{a}^{B}\frac{dt}{t^2+1},$$

де a — будь-яка точка з проміжку інтегрування.

Обчислимо кожну з границь, що стоять у правій частині:

$$\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a}\frac{dt}{t^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg} t\Big|_{A}^{a}=\operatorname{arctg} a-\lim_{A\to-\infty}\operatorname{arctg} A=\operatorname{arctg} a+\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{B\to\infty}\int_{a}^{B}\frac{dt}{t^2+1}=\lim_{B\to\infty}\operatorname{arctg} t\Big|_{a}^{B}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} a.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+1}=\pi,\ \text{тобто}\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-6x+10}=\pi.$$

5. $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

Розв'язання. $\displaystyle\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_{2}^{A}\ln x d(\ln x)=\lim_{A\to\infty}\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_{2}^{A}=\infty$.

Інтеграл розбіжний.

Дослідіть інтеграли на збіжність.

6. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x-\sin^2 x}$.

Розв'язання. На проміжку інтегрування справедлива нерівність $x-\sin^2 x\le x$, тому $\dfrac{1}{x-\sin^2 x}\ge\dfrac{1}{x}$. І оскільки $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$ — розбіжний ($p=1$), то і заданий інтеграл розбіжний (див. теорему **1**).

7. $\displaystyle\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^3}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $\dfrac{\cos x}{x^3}$ — знакозмінна при $x\ge 1$.

Оскільки $\left|\cos x\right| \le 1$, то $\left|\dfrac{\cos x}{x^3}\right| \le \dfrac{1}{x^3}$. Інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^3}$ збігається ($p = 3 > 1$), тому інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\cos x}{x^3} dx$ також збігається.

8. $\int\limits_1^{\infty} [\ln(1 + x^2) - 2\ln x] dx$.

Розв'язання. Запишемо інтеграл у вигляді

$$\int\limits_1^{\infty} \ln\frac{1 + x^2}{x^2} dx = \int\limits_1^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{x^2}) dx .$$

Оскільки $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ збігається ($p = 2 > 1$) і $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} = 1$, то заданий інтеграл також збігається.

9. $\int\limits_1^{2} \dfrac{dx}{x^2 + 2x - 3}$.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл від необмеженої функції, тут $x = 1$ — особлива точка. Тому

$$\int\limits_1^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 - 4} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right| \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \to 0} (\ln\frac{1}{5} - \ln\frac{\varepsilon}{4 + \varepsilon}) = \infty .$$

Інтеграл розбіжний.

10. Дослідіть на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{1} \dfrac{dx}{x^{\lambda}}$ залежно від λ.

Розв'язання. Інтеграл має особливість у точці $x = 0$. Нехай $\lambda \ne 1$. Тоді

$$\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\lambda}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right) =$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\lambda}, & \text{якщо } \lambda < 1, \\ \infty, & \text{якщо } \lambda > 1. \end{cases}$$

Для $\lambda = 1$ маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|x| \Big|_\varepsilon^1 = +\infty .$$

Висновок. Невласний інтеграл другого роду $\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$ збігається для $\lambda < 1$ і розбігається для $\lambda \geq 1$.

Зауваження. Невласні інтеграли другого роду $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, де $a < b$, збіжні при $\lambda < 1$ і розбіжні при $\lambda \geq 1$.

Справді, поклавши $\frac{x-a}{b-a} = t$ чи $\frac{b-x}{b-a} = t$, в обох випадках прийдемо до невласного інтеграла $(b-a)\int_0^1 \frac{dx}{x^\lambda}$.

11. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}} dx$.

Розв'язання. При $x \to 0$ підінтегральна функція є необмеженою. Враховуючи еквівалентність $\sqrt{1-\cos x} = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} \sim \sqrt{2}\,\frac{x}{2}$ при $x \to 0$, порівняємо підінтегральну функцію з функцією $g(x) = \frac{1}{x}$:

$$k = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \to 0} \frac{xe^x}{\frac{\sqrt{2}}{2}x} = \lim_{x \to 0} \sqrt{2}e^x = \sqrt{2} .$$

Оскільки $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ є розбіжним, то й вихідний інтеграл також розбіжний.

Т.7 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^6}$. **2.** $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2}}$. **3.** $\int_0^\infty e^{-3x} dx$.

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}$. **5.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+10}$. **6.** $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^2}$.

7. $\int_{0}^{\infty} xe^{-x^2} dx$. **8.** $\int_{0}^{\infty} x\sin xdx$. **9.** $\int_{1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx$.

10. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.** $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$. **12.** $\int_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

13. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln x}$. **14.** $\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^2 x}$. **15.** $\int_{0}^{1} x\ln xdx$.

Дослідіть збіжність інтегралів.

16. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^3}$. **17.** $\int_{1}^{\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx$. **18.** $\int_{1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)dx}{x}$. **19.** $\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$.

20. $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$. **21.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$. **22.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sin x}$. **23.** $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

Відповіді

1. $\frac{1}{5}$. **2.** Розбігається. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** Розбігається. **5.** $\frac{\pi}{3}$. **6.** $1-\ln 2$. **7.** $\frac{1}{2}$. **8.** Розбігається. **9.** $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$. **10.** $\frac{\pi}{2}$. **11.** Розбігається. **12.** $\frac{8}{3}$. **13.** Розбігається. **14.** 1. **15.** $-\frac{1}{4}$. **16.** Збігається. **17.** Розбігається. **18.** Розбігається. **19.** Розбігається. **20.** Збігається. **21.** Збігається. **22.** Розбігається. **23.** Збігається.

Т.7 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

7.1. Обчисліть невласні інтеграли першого роду або доведіть їх розбіжність.

7.1.1. $\int_{0}^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$. **7.1.2.** $\int_{1}^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$. **7.1.3.** $\int_{0}^{\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$.

7.1.4. $\int_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}}$. **7.1.5.** $\int_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$. **7.1.6.** $\int_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$.

7.1.7. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+16)^5}}$. **7.1.8.** $\int_4^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$. **7.1.9.** $\int_{-1}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}$.

7.1.10. $\int_{-1}^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4x+5}$. **7.1.11.** $\int_{1/2}^{\infty}\frac{dx}{4x^2+4x+5}$. **7.1.12.** $\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}2xdx}{4x^2+1}$.

7.1.13. $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{4x^2+4x+5}$. **7.1.14.** $\int_0^{\infty}\frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$. **7.1.15.** $\int_0^{\infty}\frac{3-x^2}{x^2+4}dx$.

7.1.16. $\int_1^{\infty}\frac{4dx}{x(1+\ln^2 x)}$. **7.1.17.** $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}4x}}{16x^2+1}dx$. **7.1.18.** $\int_0^{\infty}x\sin xdx$.

7.1.19. $\int_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{x^2-4x}$. **7.1.20.** $\int_{1/3}^{\infty}\frac{\pi dx}{(9x^2+1)\operatorname{arctg}^2 3x}$. **7.1.21.** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$.

7.1.22. $\int_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$. **7.1.23.** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(6x^2-5x+1)}$. **7.1.24.** $\int_0^{\infty}xe^{-3x}dx$.

7.1.25. $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x}$. **7.1.26.** $\int_0^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1}$. **7.1.27.** $\int_3^{\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2}$.

7.1.28. $\int_{e^2}^{\infty}\frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$. **7.1.29.** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{9x^2-9x+2}$. **7.1.30.** $\int_2^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

7.2. Обчисліть невласні інтеграли другого роду або доведіть їх розбіжність.

7.2.1. $\int_0^{1/3}\frac{e^3+1/x}{x^2}dx$. **7.2.2.** $\int_1^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$. **7.2.3.** $\int_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

7.2.4. $\int_{1/4}^{1}\frac{dx}{20x^2-9x+1}$. **7.2.5.** $\int_{1/3}^{1}\frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$. **7.2.6.** $\int_1^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

7.2.7. $\int_{1/2}^{1}\frac{\ln 2}{(1-x)\ln^2(1-x)}dx$. **7.2.8.** $\int_0^{2/3}\frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$. **7.2.9.** $\int_0^{1}\frac{xdx}{1-x^4}$.

7.2.10. $\int_0^{\pi/6}\frac{\cos 3xdx}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}$. **7.2.11.** $\int_0^{1}\frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}$. **7.2.12.** $\int_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

7.2.13. $\int_0^1 \frac{e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$. **7.2.14.** $\int_0^{\pi/2} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos 2x}dx$. **7.2.15.** $\int_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

7.2.16. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$. **7.2.17.** $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$. **7.2.18.** $\int_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

7.2.19. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **7.2.20.** $\int_0^{1/3} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$. **7.2.21.** $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

7.2.22. $\int_0^{\pi/2} \frac{3\sin^3 xdx}{\sqrt{\cos x}}$. **7.2.23.** $\int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$. **7.2.24.** $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

7.2.25. $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$. **7.2.26.** $\int_1^5 \frac{x^2dx}{\sqrt{31(x^3-1)}}$. **7.2.27.** $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

7.2.28. $\int_0^4 \frac{2xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$. **7.2.29.** $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$. **7.2.30.** $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

Тема 8. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення площ плоских фігур. Площа у прямокутних декартових координатах. Обчислення площі при параметричному заданні контура. Площа криволінійного сектора у полярних координатах.
Довжина дуги кривої. Об’єм тіла із заданим поперечним перерізом. Об’єм тіла обертання. Робота змінної сили. Координати центрів мас плоских областей та дуг кривих.

Література: [1, розділ 9], [2, розділ 2, п. 2.2], [4, розділ 7, § 24], [6, розділ 10], [7, розділ 12], [9, § 41].

Т.8 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

8.1. Обчислення площ плоских фігур

8.1.1. Площа у прямокутних декартових координатах

Нехай плоска фігура обмежена кривою $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, вертикальними прямими $x = a$, $x = b$ та

$y = 0$ — віссю абсцис (рис. 2.5). Тоді площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx.}$$

Якщо функція $f(x)$ скінченне число разів змінює знак на відрізку $[a; b]$ (рис. 2.6), тоді

$$S = \int_a^b \left| f(x) \right| dx \; .$$

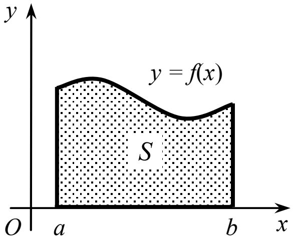

Рис. 2.5

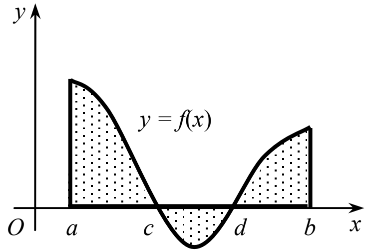

Рис. 2.6

Площу плоскої фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$ і кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \le f_2(x)$, $x \in [a; b]$ (рис. 2.7), обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx.}$$

Інколи прямі $x = a$, $x = b$ можуть вироджуватись у точку перетину кривих $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$ (рис. 2.8). У цьому випадку величини a і b знаходять як абсциси точок перетину вказаних кривих.

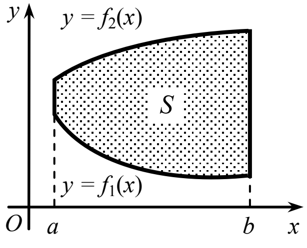

Рис. 2.7

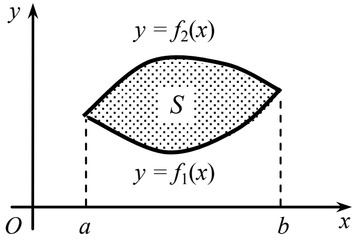

Рис. 2.8

В окремих випадках інтегрування зручніше проводити за змінною y. Так, якщо фігура обмежена прямими $y = c$, $y = d$ та кривими $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, де $g_1(y) \le g_2(y)$, $y \in [c; d]$ (див. рис. 2.9 і 2.10), то її площу обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]\,dy.}$$

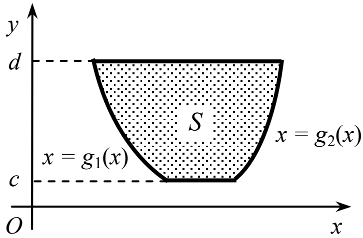

Рис. 2.9

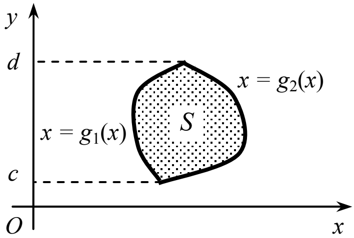

Рис. 2.10

8.1.2. Обчислення площі при параметричному заданні контура

Нехай крива $y = f(x)$ задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t) \ge 0$, $t \in [\alpha; \beta]$, тоді площу криволінійної трапеції, обмеженої цією кривою, прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$) та віссю абсцис (див. рис. 2.5), обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta y(t)dx(t) = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,}$$

де межі α та β задовольняють рівняння $x(\alpha) = a$, $y(\beta) = b$.

8.1.3. Площа криволінійного сектора у полярних координатах

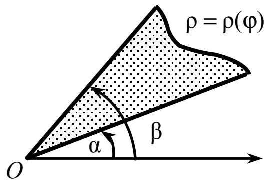

Рис. 2.11

Площу криволінійного сектора, обмеженого неперервною кривою $\rho = \rho(\varphi)$ та променями $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$ (рис. 2.11), обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,d\varphi.}$$

8.2. Довжина дуги кривої

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$ і похідна $f'(x)$ неперервна, то довжина дуги цієї кривої виражається інтегралом

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.}$$

Якщо крива задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$ і похідні $x'(t)$, $y'(t)$ неперервні на проміжку $[t_1; t_2]$, то довжину дуги кривої обчислюють за формулою

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt,}$$

де t_1, t_2 — значення параметра t, що відповідають кінцям дуги ($t_1 < t_2$).

Нарешті, якщо крива задана у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, то довжину дуги кривої визначають за формулою

$$\boxed{l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi,}$$

де φ_1, φ_2 — значення полярного кута φ в кінцях дуги $(\varphi_1 < \varphi_2)$.

8.3. Об'єми тіл

Нехай $S(x)$ — площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox у точці з абсцисою x, $x \in [a, b]$, причому $S(x)$ — неперервна функція на відрізку $[a, b]$ (рис. 2.12). Тоді об'єм тіла V виражається інтегралом

$$\boxed{V = \int_a^b S(x) dx.}$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції (рис. 2.13), обмеженої кривою $y = f(x)$ ($f(x) \ge 0$), віссю абсцис та прямими $x = a$ та $x = b$ $(a < b)$, визначається за формулою

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ($0 \le f_1(x) \le f_2(x)$) та прямими $x = a$, $x = b$ ($a < b$), обчислюють за формулою

$$V = \pi\int_a^b \left[f_2^2(x) - f_1^2(x) \right] dx.$$

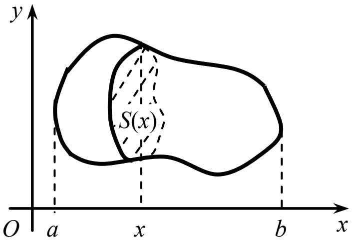

Рис. 2.12

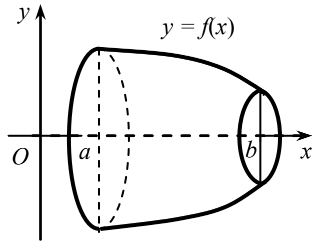

Рис. 2.13

Якщо крива задана параметрично чи у полярних координатах, то потрібно зробити відповідну заміну змінних у вказаних формулах.

8.4. Площа поверхні обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = f(x)$ ($a \le x \le b$), визначається за формулою

$$P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Якщо крива, що утворює поверхню обертання, задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$), тоді

$$P = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

8.5. Робота змінної сили

Нехай матеріальна точка M переміщується вздовж осі Ox під дією змінної сили $F = F(x)$, напрямленої паралельно до цієї осі. Роботу, яку виконує сила при переміщенні точки M з положення $x = a$ в положення $x = b$ ($a < b$), визначають за формулою

$$\boxed{A = \int_a^b F(x)dx.}$$

8.6. Координати центра мас

Координати центра мас однорідної дуги кривої $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ обчислюють за формулами

$$\boxed{x_c = \frac{\int_a^b x dl}{\int_a^b dl} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}, \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x)dl}{\int_a^b dl} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx}.}$$

Координати центра мас однорідної криволінійної трапеції кривої $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 2.5) визначають за формулами

$$\boxed{x_c = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.}$$

$\boxed{\text{Т.8}}$ ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2 - 3x$ та $y = 4$.

Розв'язання. Прирівнявши праві частини заданих рівнянь, знайдемо абсциси точок перетину параболи $y = x^2 - 3x$ з прямою $y = 4$ (рис. 2.14):

$$x^2 - 3x = 4\,; \quad x^2 - 3x - 4 = 0\,; \quad x = -1 \ \text{ та } \ x = 4\,.$$

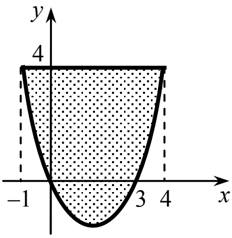

Рис. 2.14

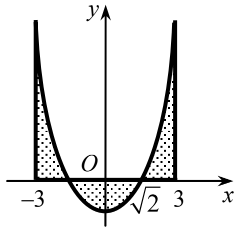

Рис. 2.15

Тоді

$$S=\int_{-1}^{4}\left[4-(x^2-3x)\right]dx=\int_{-1}^{4}\left[4-x^2+3x\right]dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=16-\frac{64}{3}+24-\left(-4+\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\right)=20\frac{5}{6}.$$

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривою $y=x^2-2$, прямими $x=-3$, $x=3$ та віссю абсцис (рис. 2.15).

Розв'язання. Фігура симетрична відносно осі Oy. Тому достатньо обчислити її площу на проміжку $[0;3]$ і результат помножити на два, тобто $S=2S_1$. Оскільки функція $y=x^2-2$ змінює на цьому проміжку свій знак, то записуємо

$$S_1=\int_0^3\left|x^2-2\right|dx=\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)dx+\int_{\sqrt{2}}^{3}(x^2-2)dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}}+$$

$$+\left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{3}=2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}+9-6-\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2}=3+\frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Отже,

$$S=2S_1=6+\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

3. Обчисліть площу фігури, обмеженої кривими $y=2+x^2$ та $(y-2)^3=x^2$ (див. рис. 2.16).

Розв'язання. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} y = 2 + x^2, \\ (y-2)^3 = x^2, \end{cases}$$

знайдемо абсциси точок перетину: $x = 0$, $x = \pm 1$.

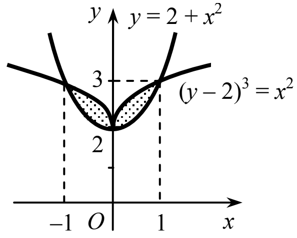

Рис. 2.16

Враховуючи симетричність фігури відносно осі ординат, маємо

$$S = 2\int_0^1 \left[\left(\sqrt[3]{x^2} + 2 \right) - \left(2 + x^2 \right) \right] dx = 2\int_0^1 \left[\sqrt[3]{x^2} - x^2 \right] dx =$$

$$= 2\left[\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - \frac{x^3}{3} \right] \Bigg|_0^1 = 2\left[\frac{3}{5} - \frac{1}{3} \right] = \frac{8}{15}.$$

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $y = x - 2$, $y = -x$ та кривою $y = \sqrt{x}$ (див. рис. 2.17).

Розв'язання. Пряма $x = 1$, що проходить через точку перетину прямих $y = x - 2$ та $y = -x$, ділить область на дві частини. Тоді $S = S_1 + S_2$, де S — шукана площа, S_1 — площа лівої частини фігури, обмеженої прямими $y = -x$, $x = 1$ та кривою $y = \sqrt{x}$, S_2 — площа правої частини фігури, обмеженої прямими $y = x - 2$, $x = 1$ та кривою $y = \sqrt{x}$. Маємо:

$$S_1 = \int_0^1 \left(\sqrt{x} + x \right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6};$$

$$S_2 = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - x + 2 \right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Bigg|_1^4 = \frac{16}{3} - 8 + 8 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{19}{6};$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{6} + \frac{19}{6} = 4.$$

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої параболами $x = y^2 - 2y - 3$ та $x = 5 + 4y - y^2$.

Розв'язання. Для зручності запишемо функції у вигляді $x+4=(y-1)^2$, $-(x-9)=(y-2)^2$ і виконаємо рисунок 2.18.

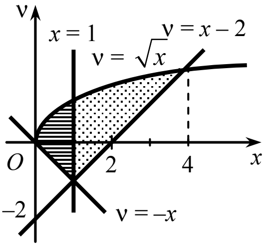

Рис. 2.17

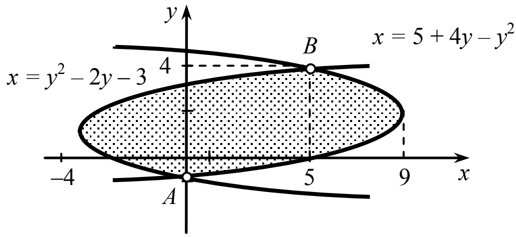

Рис. 2.18

Інтегрування проводимо за змінною y (при інтегруванні за змінною x область інтегрування слід розбити на три частини). Знайдемо ординати точок A і B, для чого розв'яжемо рівняння

$$y^2-2y-3=5+4y-y^2;\ y^2-3y-4=0;\ y_A=-1,\ y_B=4.$$

Тоді

$$S=\int_{-1}^{4}\left[5+4y-y^2-(y^2-2y-3)\right]dy=\int_{-1}^{4}\left[8+6y-2y^2\right]dy=$$

$$=8y+3y^2-\frac{2y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{4}=32+48-\frac{128}{3}-\left(-8+3+\frac{2}{3}\right)=\frac{125}{3}.$$

6. Знайдіть площу меншої частини еліпса $x=6\cos t,\ \ y=4\sin t,$ що відсікається прямою $y=2\sqrt{3}$ ($y\ge 2\sqrt{3}$).

Розв'язання. З рисунка 2.19 видно, що шукану площу можна подати у вигляді

$$S=2S_{MNC}=2(S_{ONCD}-S_{OMCD}).$$

Визначимо значення параметра t, які відповідають точкам N і C. Координата $x_N=0$, тому $\cos t=0$ і $t_N=\dfrac{\pi}{2}$. Точка C є точкою перетину прямої й еліпса, тому $2\sqrt{3}=4\sin t$, $\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $t_C=\dfrac{\pi}{3}$.

Площа прямокутника $OMCD$ така:

$$S_{OMCD}=OM\cdot MC=2\sqrt{3}\cdot 6\cos\frac{\pi}{3}=6\sqrt{3}.$$

Знайдемо тепер площу криволінійної трапеції $ONCD$:

$$S_{ONCD} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin t d(6\cos t) = -24\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t dt = 24\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$=12\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)dt = 12\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 12\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi+3\sqrt{3}\ .$$

Отже,

$$S = 2(2\pi+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}) = 4\pi-6\sqrt{3}\ .$$

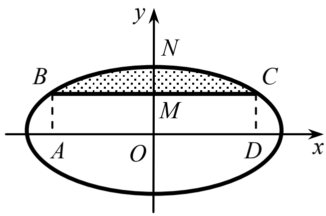

Рис. 2.19

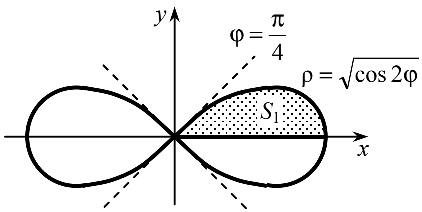

Рис. 2.20

7. Обчисліть площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2 =$ $= x^2 - y^2$ (рис. 2.20).

Розв'язання. Крива, що обмежує область, описується складним рівнянням. Для зручності перейдемо до полярних координат за формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, дістанемо

$$\rho^4 = \rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\text{ , звідки } \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}\ .$$

Враховуючи симетрію заданої фігури (рис. 2.20), маємо

$$S = 4S_1 = 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi\, d\varphi = \sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1\ .$$

8. Обчисліть площу фігури, що лежить поза колом $\rho = 3$ ($\rho \geq 3$) і обмежена кривою $\rho = 6\sin 3\varphi$.

Розв'язання. Оскільки функція $\rho = 6\sin 3\varphi$ має період $T = \frac{2\pi}{3}$, то при зміні кута φ від 0 до 2π радіус-вектор опише три однакові пелюстки кривої. При цьому допустимими для φ є ті значення, для яких виконується нерівність $\sin 3\varphi \ge 0$, що відповідає вимозі $\rho \ge 0$. Звідси

$$2\pi k \le 3\varphi \le \pi + 2\pi k \text{ , або } \frac{2\pi k}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \ k \in Z .$$

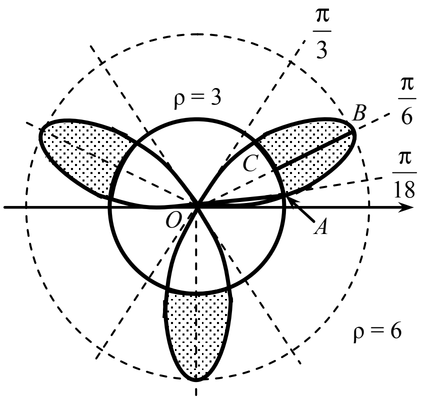

Рис. 2.21

Перша пелюстка описується при зміні кута φ від 0 до $\frac{\pi}{3}$ $(k=0)$, дві інші пелюстки одержуються при зміні кута φ від $\frac{2\pi}{3}$ до π $(k=1)$ та від $\frac{4\pi}{3}$ до $\frac{5\pi}{3}$ $(k=2)$ (рис. 2.21). При інших значеннях k дістанемо повтори.

Виключаючи з пелюсток частини, що належать кругу $\rho \le 3$, дістанемо фігуру, площу якої необхідно знайти. З умов симетрії випливає, що шукана площа $S = 6S_{ABCA}$.

Знайдемо полярні координати точок A та B: $6\sin 3\varphi = 3$, $\sin 3\varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi_A = \frac{\pi}{18}$. Точці B відповідає кут $\varphi_B = \frac{\pi}{6}$.

З рис. 2.21 видно, що $S_{ABCA} = S_{OABO} - S_{OACO}$, де $OACO$ — круговий сектор радіуса 3. Його площу обчислимо без інтегрування:

$$S_{OACO} = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{18}\right) = \frac{\pi}{2} .$$

Далі маємо

$$S_{OABO} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 36\sin^2 3\varphi d\varphi = 9\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = 9\left(\varphi - \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} = \pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} .$$

Тоді

$$S = 6\left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2}\right) = 3\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} .$$

Довжина дуги кривої

9. Обчисліть довжину дуги кривої $y^2 = x^3$, що розміщена всередині параболи $y^2 = 16x$.

Розв'язання. З огляду на симетрію даних кривих відносно осі Ox довжина всієї дуги кривої дорівнюватиме подвоєній довжині кривої, що міститься над віссю Ox (рис. 2.22). Із системи рівнянь

$$\begin{cases} y^2 = x^3, \\ y^2 = 16x \end{cases}$$

знайдемо абсциси точок O та A, тобто $x_O = 0$, $x_A = 4$.

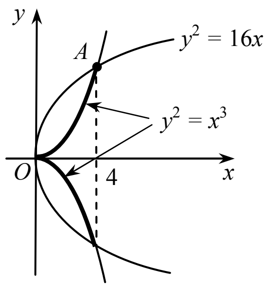

Рис. 2.22

Оскільки $y = x^{\frac{3}{2}}$, то $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, $(y')^2 = \frac{9}{4}x$.

Отже,

$$l = 2\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \int_0^4 \sqrt{4+9x}dx = \frac{1}{9}\int_0^4 \sqrt{4+9x}d(4+9x) =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(4+9x)^3}\Big|_0^4 = \frac{2}{27}(40\sqrt{40}-8) = \frac{16}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

10. Знайдіть довжину дуги однієї арки циклоїди

$$x = a(t-\sin t),\ \ y = a(1-\cos t).$$

Розв'язання. Як видно з рис. 2.23, одна арка циклоїди відповідає зміні параметра t від 0 до 2π.

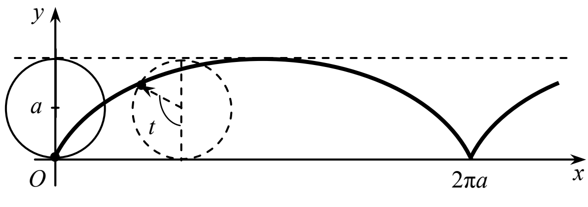

Рис. 2.23

Отже,

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a\,.$$

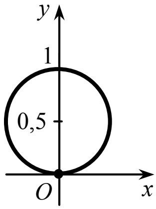

Рис. 2.24

11. Знайдіть довжину дуги кривої $\rho=\sin\varphi$ (рис. 2.24).

Розв'язання. Оскільки $\rho\ge 0$, то $0\le\varphi\le\pi$. Отже,

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^{\pi}d\varphi=\pi\,.$$

Зауваження. Покажемо, що геометричним образом рівняння $\rho=\sin\varphi$ є коло з центром у точці $(0;1/2)$ і радіусом $1/2$. Справді,

$$\rho^2=\rho\sin\varphi\,;\quad x^2+y^2=y\,;\quad x^2+(y-1/2)^2=1/4\,.$$

Об'єми тіл

12. Знайдіть об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=x^2+\dfrac{y^2}{4}$ і конусом $x^2+\dfrac{y^2}{4}=z^2$ (рис. 2.25).

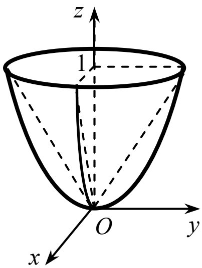

Рис. 2.25

Розв'язання. Потрібно обчислити об'єм тіла, яке міститься між стінками параболоїда та конуса. Тому

$$V=V_п-V_к\,,$$

де $V_п$ — об'єм параболоїда, обмеженого зверху площиною $z=1$ (це значення є коренем рівняння $z=z^2$), а $V_к$ — об'єм конуса, обмеженого зверху також площиною $z=1$.

Перетнемо тіло площиною, перпендикулярною до осі Oz. У перерізі параболоїда одержимо еліпс $\dfrac{x^2}{(\sqrt{z})^2}+\dfrac{y^2}{(2\sqrt{z})^2}=1$ з півосями $a=\sqrt{z}$, $a=2\sqrt{z}$; у перерізі конуса також дістанемо еліпс: $\dfrac{x^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{(2z)^2}=1$, його півосі z та $2z$. Як відомо, площа еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ дорівнює πab.

Тому

$$V = V_п - V_к = \pi\int_0^1 \sqrt{z}\cdot 2\sqrt{z}dz - \pi\int_0^1 z\cdot 2zdz = \pi\int_0^1 2zdz - \pi\int_0^1 2z^2 dz =$$

$$= \pi z^2\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\pi z^3\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

13. Криволінійна трапеція обмежена лініями $x^2 + y^2 = 1$, $y = \sqrt{2}x^2$, $x = 0$ ($x \geq 0$). Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням цієї трапеції а) навколо осі Ox (рис. 2.26); б) навколо осі Oy (рис. 2.27).

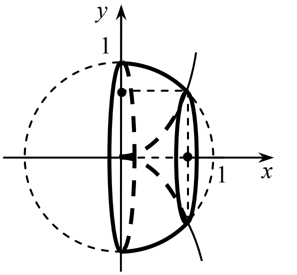

Рис. 2.26

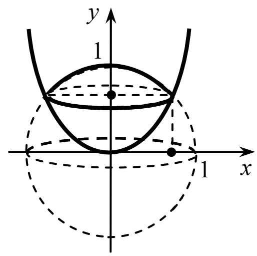

Рис. 2.27

Розв'язання. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = \sqrt{2}x^2, \\ x > 0, \end{cases}$$

дістанемо значення $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Далі маємо:

а) $V = \pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[(1 - x^2) - 2x^4\right]dx = \pi\left(x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{30}\pi$;

б) $V = \pi\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{y}{\sqrt{2}}dy + \pi\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (1 - y^2)\,dy = \pi\frac{y^2}{2\sqrt{2}}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \pi\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{16 - 7\sqrt{2}}{24}\pi$.

14. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої астроїдою $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (рис. 2.28).

Розв'язання. Шуканий об'єм дорівнює подвоєному об'єму, одержаному обертанням фігури OAB навколо осі Ox:

$$V = 2\pi\int_0^a y^2(x)dx.$$

Перейдемо до змінної t:

$$x = a\cos^3 t, \quad dx = -3a\cos^2 t\sin t dt, \quad y = a\sin^3 t.$$

Значенню $x = 0$ відповідає значення $t_B = \dfrac{\pi}{2}$, а значенню $x = a$ — значення $t_A = 0$.

Отже,

$$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (a\sin^3 t)^2(-3a)\cos^2 t\sin t dt = 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t\cos^2 t dt =$$

$$= 6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t(1-\sin^2 t)dt = 6\pi a^3\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt\right) =$$

$$= 6\pi a^3\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} - \frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{105}\pi a^3.$$

Тут ми використали рекурентну формулу

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx.$$

15. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо полярної осі фігури, обмеженої кривою $\rho = 2\cos^2\varphi$ (рис. 2.29).

Розв'язання. Шуканий об'єм дорівнює подвоєному об'єму, одержаному обертанням правої пелюстки навколо полярної осі (полярна вісь збігається з віссю Ox, а полюс — із початком координат), тобто $V = 2V_1$.

Перейдемо, як і у попередньому прикладі, до параметричного задання кривої, взявши за параметр t полярний кут φ:

$$x = \rho\cos\varphi = 2\cos^3\varphi = 2\cos^3 t,$$

$$y = \rho\sin\varphi = 2\cos^2\varphi\sin\varphi = 2\cos^2 t\sin t.$$

Значенню $x=0$ відповідає $t=\frac{\pi}{2}$, а значенню $x=2$ — значення $t=0$.

Тоді

$$V_1=\pi\int_a^b y^2(x)dx=\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(2\cos^2 t\sin t\right)^2\left(-6\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=-24\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^6 t\sin^3 t dt=24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\left(1-\cos^2 t\right)\sin t dt=$$

$$=-24\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^6 t-\cos^8 t\right)d\cos t=-24\pi\left(\frac{\cos^7 t}{7}-\frac{\cos^9 t}{9}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{21}\pi.$$

Отже,

$$V=2V_1=\frac{32}{21}\pi.$$

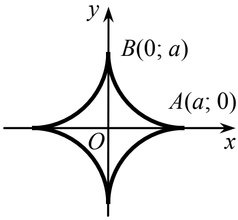

Рис. 2.28

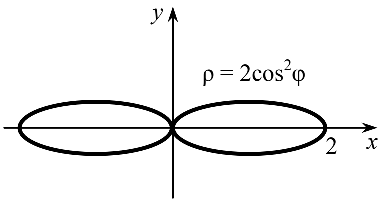

Рис. 2.29

Площа поверхні обертання

16. Знайдіть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox першої арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Розв'язання. Знайдемо похідні

$$x'=a(1-\cos t),\ y'=a\sin t.$$

Тоді

$$\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}=$$

$$=a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}=a\sqrt{2(1-\cos t)}=2a\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}}=$$

$$=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|=2a\sin\frac{t}{2},$$

оскільки на проміжку $[0; 2\pi]$ $\sin\frac{t}{2} \geq 0$. Далі знаходимо

$$P = 2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 8a^2\pi\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= -16a^2\pi\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\frac{t}{2})d\cos\frac{t}{2} = -16a^2\pi\left(\cos\frac{t}{2} - \frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

Т.8 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть площі фігур, обмежених кривими.

1. $xy = 4$, $y = 1$, $y = x + 3$.

2. $y = x^2 - 3x + 3$, $y = -x^2 + x + 9$.

3. $y^2 - 2y - 2x - 3 = 0$, $y - x + 1 = 0$.

4. $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \sin x - 2$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$. **5.** $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 17 - x^2$.

6. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 41$ (I чверть). **7.** $y = \frac{1}{1+x^2}$, $2y = x^2$.

8. $y = 0$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$. **9.** $\rho = 2\sin 2\varphi$.

10. $\rho = 4\cos 2\varphi$, $\rho = 2$ ($\rho \geq 2$). **11.** $\rho = 2 + \cos\varphi$.

12. $\rho = \sin^2\frac{\varphi}{2}$ (правіше від променя $\varphi = \frac{\pi}{2}$).

13. $\rho = \frac{4}{\cos(\varphi - \pi/6)}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

14. $(x^2 + y^2)^3 = 4xy(x^2 - y^2)$. **15.** $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

16. $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$. **17.** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $x = 1$ ($x \geq 1$).

18. $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $y = 1$ ($y \geq 1$).

Обчисліть довжини ліній.

19. $y = \ln x$ між точками $x = \sqrt{3}$ та $x = \sqrt{8}$.

20. $y = \ln(1 - x^2)$ між точками $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$.

21. $y = \ln \sin x$ між точками $x = \dfrac{\pi}{3}$ та $x = \dfrac{\pi}{2}$.

22. $y = \dfrac{x^2}{2}$ між точками $x = 0$ та $x = 1$.

23. $x = 9(t - \sin t)$, $y = 9(1 - \cos t)$ (довжину однієї арки циклоїди).

24. $x = 8\sin t + 6\cos t$, $y = 6\sin t - 8\cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

25. $x = \dfrac{t^3}{3} - t$, $y = t^2 + 2$, $0 \le t \le 3$.

26. $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin\sqrt{x}$.

27. $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

28. $\rho = \sin^3 \dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

29. $\rho = 1 + \cos\varphi$.

30. $\rho = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

31. $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$, $\dfrac{3}{4} \le \varphi \le \dfrac{4}{3}$.

32. Визначте об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}$ та площиною $z = 1$.

33. Визначте об'єм тіла, обмеженого однопорожнинним гіперболоїдом $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1$ та площинами $z = -1$ і $z = 2$.

Знайдіть об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox фігур, обмежених лініями.

34. $y = \dfrac{64}{16 + x^2}$, $8y = x^2$.

35. $y^2 = x$, $y = x^2$.

Відповіді

1. $4\ln 4 + 3/2$. **2.** $22\dfrac{2}{3}$. **3.** 18. **4.** π. **5.** 18. **6.** $\dfrac{41}{2}\arcsin\dfrac{9}{41} + 20\ln 0{,}8$. **7.** $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$. **8.** $\sqrt{2} - 1$. **9.** π. **10.** $4(\dfrac{\pi}{3} + \sqrt{3})$. **11.** $9\pi/2$. **12.** $(3\pi - 8)/32$. **13.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$. **14.** 1. **15.** $\pi\sqrt{2}$. **16.** $\dfrac{3}{8}\pi ab$. **17.** $\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **18.** $\dfrac{16}{3}\pi + 5\sqrt{3}$. **19.** $1 + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$. **20.** $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$. **21.** $\dfrac{1}{2}\ln 3$. **22.** $\dfrac{1}{2}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. **23.** 72. **24.** 5π. **25.** 12. **26.** 2. **27.** $5a[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2 + \sqrt{3})]$. **28.** $\dfrac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3})$. **29.** 8. **30.** $\dfrac{1}{3}((\pi^2 + 4)^{3/2} - 8)$. **31.** $\dfrac{5}{12} + \ln\dfrac{3}{2}$. **32.** $\sqrt{2}\pi$. **33.** 36π. 36π. **34.** $16\pi(3\pi + 10)/5$. **35.** $\dfrac{3}{10}\pi$.

Т.8 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

8.1. Обчисліть площі фігур, обмежених кривими.

8.1.1. $y = x^2 - 2x - 1$, $2y = 3x - 2$.

8.1.2. $4y = x^2$, $2y = 6 - x^2$.

8.1.3. $x = y^2 - 2y$, $x = -y^2 + 2y + 6$.

8.1.4. $y = x\sqrt{4 - x}$, $y = 0$.

8.1.5. $y = x^2 - 6x + 6$, $y = -x^2 + 2x$.

8.1.6. $x = y^2 - 2$, $y = -x$.

8.1.7. $y = x^2 + 4x + 2$, $y = 2 + x$.

8.1.8. $x = y^2 - 2y - 2$, $y = -x$.

8.1.9. $x = y^2 + 2y - 2$, $y = -2 - x$.

8.1.10. $y = x \operatorname{arctg} x$, $0 \le x \le 1$.

8.1.11. $y = \dfrac{1}{1 + \sqrt{x}}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

8.1.12. $y = x^2 + 5x$, $y = 7 - x$.

8.1.13. $x = y^2 - 2y - 1$, $y = 1 - x$.

8.1.14. $y = 3x - 4$, $y = -x^2$.

8.1.15. $x = y^2 + 2y - 1$, $y = -1 - x$.

8.1.16. $y^2 = 4 - x$, $x = y^2 - 2y$.

8.1.17. $y = x \operatorname{tg}^2 x$, $0 \le x \le \pi/4$.

8.1.18. $y = x^2 + 6x$, $y = -x^2$.

8.1.19. $y = \cos^3 x \sin 2x$, $0 \le x \le \pi/4$.

8.1.20. $y = x\cos^2 x$, $0 \le x \le \pi/2$.

8.1.21. $y = x\sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 2$.

8.1.22. $y = x\sin^2 x$, $0 \le x \le \pi/4$.

8.1.23. $y = \sin^4 x \sin 2x$, $0 \le x \le \pi/3$.

8.1.24. $y = x^2 - 4x + 2$, $y = 2 - x$.

8.1.25. $y = \dfrac{x}{1 + \sqrt{x}}$, $y = 0$, $0 \le x \le 1$.

8.1.26. $x = y^2 + 2y + 3$, $x = 8 - 2y$.

8.1.27. $y = 2x^2 - 12x + 16$, $y = x^2 - 5x + 4$.

8.1.28. $y = x^2 + 8x + 7$, $y = -x^2 - 2x - 5$.

8.1.29. $y = x\sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$, $0 \le x \le 3$.

8.1.30. $x = 2y^2 - 8y + 6$, $x = y^2 - 3y$.

8.2. Обчисліть площі фігур, межі яких задані у полярній системі координат.

8.2.1. $\rho = 1 + \cos\varphi$, $\rho = 1$ ($\rho \ge 1$).

8.2.2. $\rho = 2 + \cos\varphi$.

8.2.3. $\rho = 1 + \cos\varphi$, $\rho = 3/2$ ($\rho \le 3/2$).

8.2.4. $\rho = 2 - \sin\varphi$.

8.2.5. $\rho = 1 + \sin\varphi$, $\rho = 1/2$ ($\rho \ge 1/2$).

8.2.6. $\rho = 3 - \cos\varphi$.

8.2.7. $\rho = 1 - \sin\varphi$, $\rho = 1$ ($\rho \le 1$).

8.2.8. $\rho = 2 + \cos 2\varphi$.

8.2.9. $\rho = 1 - \cos\varphi$, $\rho = 1$ ($\rho \ge 1$).

8.2.10. $\rho = 3 + \sin 2\varphi$.

8.2.11. $\rho = 1 - \sin\varphi$, $\rho = 3/2$ ($\rho \ge 3/2$).

8.2.12. $\rho = 1 + 2\cos\varphi$.

8.2.13. $\rho = 2\cos 2\varphi$, $\rho = 1$ ($\rho \geq 1$).

8.2.14. $\rho = 1 + 2\sin\varphi$.

8.2.15. $\rho = 4\sin 2\varphi$, $\rho = 2$ ($\rho \geq 2$).

8.2.16. $\rho = \cos\varphi + \sin\varphi$.

8.2.17. $\rho = 6\cos 3\varphi$, $\rho = 3\sqrt{3}$ ($\rho \geq 3\sqrt{3}$).

8.2.18. $\rho = \cos\varphi - \sin\varphi$.

8.2.19. $\rho = 2\sin 3\varphi$, $\rho = \sqrt{3}$ ($\rho \geq \sqrt{3}$).

8.2.20. $\rho = \cos^2\varphi$.

8.2.21. $\rho = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi$.

8.2.22. $\rho = \sin^2\varphi$.

8.2.23. $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho = \sin\varphi$.

8.2.24. $\rho = 3 + 2\cos 2\varphi$.

8.2.25. $\rho = \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi = \pi/3$.

8.2.26. $\rho = \cos^2 2\varphi$.

8.2.27. $\rho = 1 + \operatorname{tg}\varphi$, $\varphi = \pi/4$.

8.2.28. $\rho = \cos\dfrac{\varphi}{2}$.

8.2.29. $\rho = 4\sin 2\varphi$, $\rho = 2\sqrt{3}$ ($\rho \geq 2\sqrt{3}$).

8.2.30. $\rho = 2 - \cos 2\varphi$.

8.3. Обчисліть площі фігур, межі яких задані параметрично.

8.3.1. $x = 4\sqrt{2}\cos^3 t,\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t,\ \ x = 2$ ($x \geq 2$).

8.3.2. $x = 16\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ x = 2$ ($x \geq 2$).

8.3.3. $x = 2\cos t,\ y = 6\sin t,\ \ y = 3$ ($y \geq 3$).

8.3.4. $x = 2(t - \sin t),\ y = 2(1 - \cos t),\ \ y = 3$ ($y \geq 3,\ 0 \leq x \leq 4\pi$).

8.3.5. $x = 16\cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ x = 2$, $x = 6\sqrt{3}$ ($2 \leq x \leq 6\sqrt{3}$).

8.3.6. $x = 6\cos t,\ y = 2\sin t,\ y = 1$, $y = \sqrt{3}$ ($1 \leq y \leq \sqrt{3}$).

8.3.7. $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t),\ \ y = 3$ ($y \geq 3,\ 0 \leq x \leq 6\pi$).

8.3.8. $x = 8\sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t,\ \ x = 4$ ($x \leq 4$).

8.3.9. $x = 2\sqrt{2}\cos t,\ y = 3\sqrt{2}\sin t,\ \ y = 3$ ($y \geq 3$).

8.3.10. $x = 6(t - \sin t),\ y = 6(1 - \cos t),\ \ y = 3,\ y = 9$ ($3 \leq y \leq 9,\ 0 \leq x \leq 2\pi$).

8.3.11. $x = 32\cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ \ x = 4$ ($x \geq 4$).

8.3.12. $x = 3\cos t,\ y = 8\sin t,\ \ y = 4$ ($y \geq 4$).

8.3.13. $x = 6(t - \sin t),\ y = 6(1 - \cos t),\ \ y = 0,\ y = 6$ ($0 \leq y \leq 6,\ 0 \leq x \leq 2\pi$).

8.3.14. $x = 8\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t,\ \ x = 3\sqrt{3}$ ($x \geq 3\sqrt{3}$).

8.3.15. $x = 6\cos t,\ y = 4\sin t,\ \ y = 2\sqrt{3}$ ($y \geq 2\sqrt{3}$).

8.3.16. $x = 10(t - \sin t),\ y = 10(1 - \cos t),\ \ y = 15$ ($15 \leq y,\ 0 \leq x \leq 6\pi$).

8.3.17. $x = 2\sqrt{2}\cos^3 t,\ y = \sqrt{2}\sin^3 t,\ \ x = -1$ ($x \leq -1$).

8.3.18. $x=\sqrt{2}\cos t,\ y=4\sqrt{2}\sin t,\quad y=-4\ (\ y\le -4\ ).$

8.3.19. $y=t-\sin t,\ x=1-\cos t,\quad x=1\ (1\le x\ ,0\le y\le 2\pi\ )\ .$

8.3.20. $x=9\cos t,\ y=4\sin t,\quad y=2\ (\ y\ge 2\ ).$

8.3.21. $x=8(t-\sin t),\ y=8(1-\cos t),\quad y=12\ (12\le y\ ,0\le x\le 6\pi\ )\ .$

8.3.22. $x=24\sin^3 t,\ y=2\cos^3 t,\quad x=9\sqrt{3}\ (\ x\ge 9\sqrt{3}\ ).$

8.3.23. $x=2(t-\sin t),\ y=2(1-\cos t),\quad y=2\ ,\ y=3\ (\ 2\le y\le 3\ ,0\le x\le 4\pi\ ).$

8.3.24. $x=4\sqrt{2}\cos^3 t,\ y=\sqrt{2}\sin^3 t,\quad x=-2\ (\ x\ge -2\ ).$

8.3.25. $x=2\sqrt{2}\cos t,\ y=5\sqrt{2}\sin t,\quad y=-5\ (\ y\ge -5\ ).$

8.3.26. $x=4(t-\sin t),\ y=4(1-\cos t),\quad y=6\ (\ 6\le y\ ,0\le x\le 4\pi\ )\ .$

8.3.27. $x=8\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\quad x=-1\ (\ x\le -1\ ).$

8.3.28. $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\quad x=-1\ ,\ x=1\ (\ -1\le x\le 1\ ).$

8.3.29. $x=8(t-\sin t),\ y=8(1-\cos t),\ y=4\ ,\ y=12\ (\ 4\le y\le 12\ ,\ 0\le x\le 2\pi\ ).$

8.3.30. $x=4\cos^3 t,\ y=8\sin^3 t,\ y=1$**,** $y=3\sqrt{3}\ (\ 1\le y\le 3\sqrt{3}\ ).$

8.4. Знайдіть довжину ліній, заданих явними рівняннями.

8.4.1. $y=\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\ ,\ x\in[0;1]\ .$

8.4.2. $y=\ln\dfrac{2}{x}\ ,x\in[\sqrt{3};\sqrt{8}]\ .$

8.4.3. $y=(x^2-2\ln x)/4\ ,\ x\in[1;2]\ .$

8.4.4. $y=\ln x\ ,x\in[\sqrt{3};\sqrt{15}]\ .$

8.4.5. $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x\ ,x\in[0;8/9]\ .$

8.4.6. $y=2+\operatorname{ch}x\ ,\ x\in[0;1]\ .$

8.4.7. $y=e^x-1\ ,\ x\in[\ln\sqrt{8};\ln\sqrt{15}]\ .$

8.4.8. $y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2},x\in[0;2]\ .$

8.4.9. $y=\ln\sin x\ ,\ x\in[\pi/3;\pi/2]\ .$

8.4.10. $y=3-\operatorname{ch}x\ ,x\in[0;1]\ .$

8.4.11. $y=1+\ln\cos x\ ,\ x\in[0;\pi/3]\ .$

8.4.12. $y=\arcsin e^{-x},\ x\in[0;1]\ .$

8.4.13. $y=\dfrac{\ln\sin 2x}{2}\ ,x\in[\pi/6;\pi/3]\ .$

8.4.14. $y=\ln\dfrac{7}{x}\ ,x\in[\sqrt{15};\sqrt{24}]\ .$

8.4.15. $y=\ln(1-x^2)\ ,x\in[0;1/4]\ .$

8.4.16. $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}\ ,x\in[1;3]\ .$

8.4.17. $y=\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x^3}}{3}\ ,\ x\in[0;4]\ .$

8.4.18. $y=\ln(x^2-1)\ ,x\in[3;4]\ .$

8.4.19. $y=-\ln\cos x,\ x\in[0;\ \pi/6]\ .$

8.4.20. $y=\dfrac{x^4}{32}+\dfrac{1}{x^2}\ ,x\in[1;2]\ .$

8.4.21. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 15/16]$.

8.4.22. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $x \in [0; 1/4]$.

8.4.23. $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 3/4]$.

8.4.24. $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{\sin 2x}{16} - \operatorname{tg} x$, $x \in [0; \pi/4]$.

8.4.25. $y = -\arccos\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2} + 2$, $x \in [1/9; 1]$.

8.4.26. $y = 1 - \arccos x + \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0; 9/16]$.

8.4.27. $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [0;\ 8/9]$.

8.4.28. $y = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{\ln\ln x}{4}$, $x \in [e; e^2]$.

8.4.29. $y = 4\arccos x - \sqrt{x - x^2}$, $x \in [0; 1/2]$.

8.4.30. $y = 3 - e^x$, $x \in [\ln\sqrt{15}; \ln\sqrt{24}]$.

8.5. Знайдіть довжину ліній, заданих параметричними рівняннями.

8.5.1. $x = e^t(\cos t + \sin t),\ y = e^t(\cos t - \sin t),\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.2. $x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t),\ \ 0 \le t \le \pi/2$.

8.5.3. $x = 4(2\cos t - \cos 2t),\ y = 4(2\sin t - \sin 2t),\ \ 0 \le t \le \pi$.

8.5.4. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi$.

8.5.5. $x = \sqrt{1 + t^2},\ y = \dfrac{1}{2}t\sqrt{1 + t^2} - \dfrac{1}{2}\ln(t + \sqrt{1 + t^2}),\ \ 0 \le t \le 1$.

8.5.6. $x = \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3}\ln t - \dfrac{4}{9}\sqrt{t^3},\ y = t\ln t - t,\ \ 1 \le t \le 3$.

8.5.7. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.8. $x = \ln(1 + \sin t) - \ln\cos t,\ y = \ln(1 - \cos t) - \ln\sin t,\ \ \pi/6 \le t \le \pi/3$.

8.5.9. $x = te^t(\sin t - \cos t) + e^t\cos t,\ y = te^t(\cos t + \sin t) - e^t\sin t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.10. $x = (1 - 2t^2)\cos 2t + 2t\sin 2t,\ y = (2t^2 - 1)\sin 2t + 2t\cos 2t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.11. $x = 5(t - \sin t),\ y = 5(1 - \cos t),\ 0 \le t \le \pi$.

8.5.12. $x = 2t - \sin 2t,\ y = 2\sin^2 t,\ 0 \le t \le \pi$.

8.5.13. $x = 2\operatorname{arctg} t,\ y = \ln(1 + t^2),\ \ 0 \le t \le 1$.

8.5.14. $x = \cos t + t \sin t,\ y = \sin t - t \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.15. $x = e^t \sin(t + \pi / 4),\ y = e^t \cos(t + \pi / 4),\ 0 \le t \le \pi$.

8.5.16. $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t),\ \pi \le t \le 3\pi$.

8.5.17. $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t,\ 0 \le t \le \pi / 3$.

8.5.18. $x = 6\cos^3 t,\ y = 6\sin^3 t,\ \pi / 2 \le t \le \pi$.

8.5.19. $x = e^t \cos(t - \pi / 4),\ y = e^t \sin(\pi / 4 - t),\ 0 \le t \le \pi$.

8.5.20. $x = 4\cos^3 t,\ y = 4\sin^3 t,\ \pi \le t \le 2\pi$.

8.5.21. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ 0 \le t \le \pi / 3$.

8.5.22. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi$.

8.5.23. $x = 2(\cos t + t\sin t),\ y = 2(\sin t - t\cos t),\ \ 0 \le t \le \pi$.

8.5.24. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ \ 0 \le t \le \pi$.

8.5.25. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t,\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t,\ \ \pi / 2 \le t \le 2\pi$.

8.5.26. $x = \ln(1 + \sin 2t) - \ln\cos 2t,\ y = \ln \operatorname{tg} t,\ \ \pi / 8 \le t \le \pi / 6$.

8.5.27. $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ \pi / 2 \le t \le \pi$.

8.5.28. $x = 7(t - \sin t),\ y = 7(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 4\pi$.

8.5.29. $x = 2t - \sin 2t,\ y = 2\cos^2 t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

8.5.30. $x = 8\sin^3 t,\ y = 8\cos^3 t,\ 0 \le t \le \pi$.

Модуль 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Загальна характеристика модуля. У цьому розділі вивчається математичний апарат для побудови математичних моделей у фізиці, техніці, економіці та інших науках.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку.
Тема 2. Диференціальні рівняння вищих порядків.
Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.
Тема 4. Системи диференціальних рівнянь.

Базисні поняття. **1.** Звичайне диференціальне рівняння. **2.** Задача Коші. **3.** Загальний, частинний розв'язок. **4.** Системи диференціальних рівнянь.

Основні задачі. **1.** Відшукання загального розв'язку диференціального рівняння. **2.** Відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння за заданою початковою умовою. **3.** Відшукання загального розв'язку системи диференціальних рівнянь. **4.** Побудова диференціального рівняння для конкретної фізичної задачі.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Звичайне диференціальне рівняння: форми запису, порядок, розв'язок, інтегральна крива.

1.2. Початкові умови. Задача Коші.

1.3. Теорема існування і єдиності розв'язку рівняння першого порядку.

1.4. Частинний, загальний, особливий розв'язки (інтеграли).

1.5. Типи диференціальних рівнянь першого порядку: диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними, однорідні рівняння, лінійні диференціальні рівняння першого порядку, рівняння Бернуллі, рівняння у повних диференціалах.

1.6. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку. Поле напрямів.

1.7. Частинний, загальний, особливий розв'язки рівняння n-го порядку.

1.8. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку, однорідні, неоднорідні.

1.9. Лінійно залежні і незалежні функції.

1.10. Визначник Вронського, його властивості.

1.11. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння.

1.12. Структура загального розв'язку неоднорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку.

1.13. Системи диференціальних рівнянь. Нормальна система звичайних диференціальних рівнянь. Лінійні однорідні і неоднорідні системи.

1.14. Початкові умови, задача Коші для системи.

1.15. Розв'язки системи, частинний, загальний.

2. Знання на рівні доведень та виведень

2.1. Розв'язання диференціальних рівнянь з відокремленими і відокремлюваними змінними, лінійних, однорідних, Бернуллі, у повних диференціалах.

2.2. Необхідна і достатня умова повного диференціала.

2.3. Методи Бернуллі і варіації довільної сталої розв'язання лінійного неоднорідного диференціального рівняння першого порядку.

2.4. Пониження порядку диференціального рівняння другого порядку.

2.5. Структура загального розв'язку лінійного диференціального рівняння.

2.6. Метод варіації довільних сталих для відшукання розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку.

2.7. Метод невизначених коефіцієнтів побудови розв'язку лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.

2.8. Метод виключення розв'язання систем диференціальних рівнянь.

3. Уміння в розв'язанні задач

3.1. Розв'язувати диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими і відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні однорідні та неоднорідні, Бернуллі, у повних диференціалах.

3.2. Розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку шляхом пониження порядку.

3.3. Розв'язувати диференціальні рівняння другого порядку методом варіації довільних сталих.

3.4. Розв'язувати однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами n-го порядку.

3.5. Розв'язувати неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною.

3.6. Розв'язувати лінійні системи диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

3.7. Розв'язувати задачу Коші для диференціальних рівнянь або систем на основі загального розв'язку.

3.8. Складати диференціальні рівняння за умовами фізичної або геометричної задачі у найпростіших випадках.

Тема 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Основні поняття та означення. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі. Диференціальні рівняння у повних диференціалах. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку.

Література: [2, розділ 3, п. 3.1], [4, розділ 8, § 25], [6, розділ 11, п. 11.1], [8, розділ 13, § 1—9], [10, § 1—2].

Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Основні поняття

Диференціальним рівнянням називають співвідношення, яке містить невідому функцію, її похідні (або диференціали) та незалежні змінні. Якщо шукана функція є функцією лише однієї незалежної змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*; якщо ж незалежних змінних дві або більше, то — рівнянням з *частинними похідними*. Надалі будемо розглядати звичайні диференціальні рівняння.

Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної невідомої функції, що входить у рівняння. Так, рівняння $y'' + xy' + 2y^4 = 0$ має другий порядок.

Диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$\boxed{F(x,\ y,\ y') = 0,} \tag{3.1}$$

яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = y(x)$ та її похідну y'. Рівняння (3.1) не розв'язане відносно похідної.

Рівняння вигляду

$$\boxed{y' = f(x, y)} \tag{3.2}$$

називають диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної, або рівнянням у нормальній формі.

Рівняння (3.2) можна записати ще й так:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),\ f(x, y)dx - dy = 0 .$$

Часто використовують симетричну форму запису диференціального рівняння першого порядку:

$$\boxed{M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,}$$

де $M(x, y), N(x, y)$ — відомі функції змінних x і y.

Розв'язком диференціального рівняння (3.1) або (3.2) на деякому інтервалі (a, b) називають диференційовну на цьому інтервалі функцію $y = \varphi(x)$, яка при підстановці у рівняння обертає його у тотожність, тобто

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \equiv 0 \quad \text{або} \quad \varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)),\ x \in (a, b) .$$

Процес відшукання розв'язку диференціального рівняння називають інтегруванням диференціального рівняння.

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ називають *інтегралом* рівняння (3.1) або (3.2), якщо воно неявно задає розв'язок $y = \varphi(x)$ цього рівняння.

Графік розв'язку $y = \varphi(x)$ називають *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

Теорема (*про існування і єдиність розв'язку*). Нехай функція $f(x,\ y)$ і її частинна похідна $f_y'(x,\ y)$ визначені і неперервні у відкритій області G площини Oxy і точка $(x_0, y_0) \in G$. Тоді існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умову

$$\varphi(x_0) = y_0 .$$

Геометрично теорема Коші стверджує, що через кожну точку $(x_0, y_0) \in G$ проходить єдина інтегральна крива.

Задачу відшукання розв'язку $y = \varphi(x)$ рівняння (3.2), який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0,$$

називають *задачею Коші.* З погляду геометрії розв'язати задачу Коші — означає виділити з множини інтегральних кривих ту, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Загальним розв'язком рівняння першого порядку називають функцію, $y = \varphi(x, C)$, яка залежить від довільної сталої C, і таку, що:

1) при довільному C вона є розв'язком даного рівняння;

2) для довільної початкової умови $y(x_0) = y_0$ існує єдине значення $C = C_0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє задану початкову умову.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено в неявному вигляді $\Phi(x, y, C) = 0,$ то такий розв'язок називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння першого порядку.

Розв'язок, який утворюється із загального розв'язку при фіксованій сталій C, називають *частинним.*

Розв'язок диференціального рівняння, в кожній точці якого порушується умова єдиності, називають *особливим розв'язком*.

Особливий розв'язок неможливо визначити із загального при жодному значенні сталої C.

1.2. Диференціальні рівняння з відокремленими і відокремлюваними змінними

Рівняння вигляду

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

називають диференціальним рівнянням з *відокремленими* змінними.

Загальний інтеграл такого рівняння має вигляд

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Диференціальне рівняння

$$\boxed{M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0}$$

називають рівнянням з *відокремлюваними* змінними. Поділивши це рівняння на добуток $N_1(y)M_2(x) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0 .$$

Зауваження. При діленні рівняння на $N_1(y)M_2(x)$, можна втратити деякі розв’язки, які знаходяться з рівняння

$$N_1(y)M_2(x) = 0 . \tag{3.3}$$

Тому слід перевірити, чи буде розв’язок рівняння (3.3) розв’язком вихідного диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння з *відокремлюваними* змінними записують ще в такому вигляді

$$\boxed{y' = f(x)g(y).}$$

1.3. Однорідні рівняння

Функцію $f(x, y)$ називають однорідною виміру m, якщо виконується умова

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) .$$

Наприклад, $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^2 - y^2}$ — однорідна функція нульового виміру, оскільки

$$f(tx, ty) = \frac{t^2x^2 + t^2y^2}{2t^2x^2 - t^2y^2} = \frac{t^2(x^2 + y^2)}{t^2(2x^2 - y^2)} = t^0 f(x, y) .$$

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називають *однорідним*, якщо функція $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

є однорідним, якщо $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції одного й того ж виміру.

Однорідне диференціальне рівняння завжди можна подати у вигляді

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Заміною $\boldsymbol{y = xu(x)}$, де $u(x)$ — невідома функція, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$$

зводиться до однорідного за допомогою підстановки $x = t + \alpha$, $y = v + \beta$, де t і v — нові змінні, α і β — розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} a_1\,\alpha + b_1\,\beta + c_1 = 0, \\ a_2\,\alpha + b_2\,\beta + c_2 = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

за умови, що визначник $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$. Якщо ж $\Delta = 0$, то підстановкою $z = a_1 x + b_1 y + c_1$ рівняння (3.4) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі

Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{3.5}$$

називають *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку*. Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння називають *лінійним неоднорідним*; якщо $Q(x) = 0$, то рівняння (3.5) набуває вигляду

$$y' + P(x)y = 0 \tag{3.6}$$

і називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку*.

Термін «лінійне рівняння» пояснюється тим, що невідома функція $y(x)$ і її похідна y' входять до рівняння у першому степені, тобто лінійно.

Рівняння (3.6) одночасно є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знайдемо його розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y\,;\ \frac{dy}{y} = -P(x)dx\,;\ \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx\,;$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln C\,,$$

звідси

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Для розв'язування неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь застосовують *метод Бернуллі* або *метод варіації довільної сталої*.

Метод Бернуллі. Розв'язок нелінійного рівняння (3.5) шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$, тобто

$$\boxed{y(x) = u(x)v(x).}$$

Після цього рівняння (3.5) набуває вигляду

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x),$$

або

$$\left(\frac{du}{dx} + P(x)u\right)v + u\frac{dv}{dx} = Q(x).$$

Підберемо функцію $u(x)$ так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю. Тоді рівняння (3.5) буде рівносильне системі рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} + P(x)u = 0, \\ u\dfrac{dv}{dx} = Q(x). \end{cases} \tag{3.7}$$

Перше рівняння цієї системи — лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Його частинний розв'язок такий:

$$u(x) = e^{-\int P(x)dx}.$$

Після цього друге рівняння системи (3.7) набуває вигляду:

$$\frac{dv}{dx}e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \; \frac{dv}{dx} = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \; v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.5) має вигляд:

$$\boxed{y = uv = Ce^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.} \tag{3.8}$$

Перший доданок у правій частині формули (3.8) є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (3.6), а другий доданок — частинним розв'язком неоднорідного рівняння (3.5).

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Розв'язок рівняння (3.5) шукають у вигляді

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{3.9}$$

При фіксованому значенні C цією формулою задається розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.6). Підставивши (3.9) у (3.5), дістанемо рівняння $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$. Звідси

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1 ,$$

де C_1 — довільна стала. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.5) задається формулою

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[C_1 + \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right],$$

яка збігається із формулою (3.8).

Зауваження. Деякі рівняння будуть лінійними, якщо за невідому функцію розглянути змінну x, а за незалежну — змінну y, тобто рівняння вигляду $x' + P(y)x = Q(y)$.

Рівняння Бернуллі має вигляд

$$\boxed{y' + P(x)y = Q(x)y^k,}$$

де k — дійсне число $(k \neq 0; 1)$. При $k = 0$ і $k = 1$ дане рівняння є лінійним.

Заміною $\boxed{z = y^{1-k}}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння. Або ж шукають його розв'язок у вигляді $\boxed{y = u(x)v(x).}$

1.5. Диференціальні рівняння у повних диференціалах

Диференціальне рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 , \tag{3.10}$$

у якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$du \equiv \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy,$$

називають *рівнянням у повних диференціалах*. У цьому випадку загальний інтеграл рівняння (3.10) має вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Для того, щоб рівняння (3.10) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.} \tag{3.11}$$

Функцію $u(x, y)$ можна дістати, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \end{cases}$$

або скористатися формулою

$$\boxed{u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dx.}$$

Якщо умова (3.11) не виконується, то у деяких випадках можна звести рівняння (3.10) до рівняння у повних диференціалах шляхом домноження його на так званий *інтегрувальний множник* $\mu(x, y)$. Для існування інтегрувального множника $\mu(x)$ необхідно, щоб вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ N$ був функцією лише змінної x. Тоді

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}. \tag{3.12}$$

Аналогічно, якщо вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) \Big/ M$ залежить лише від змінної y, то існує інтегрувальний множник $\mu(y)$, який знаходять за формулою

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy}.$$

1.6. Деякі застосування диференціальних рівнянь першого порядку

Диференціальні рівняння є математичними моделями багатьох фізичних, хімічних, біологічних та інших процесів. Вони складаються на основі законів, притаманних природі досліджуваних явищ, з урахуванням фізичного змісту похідної як швидкості зміни функції. У механіці це можуть бути закони Ньютона, в електротехніці — закони Кірхгофа, в теорії швидкостей хімічних реакцій — закон дії мас і т. п. Моделюючи геометричні задачі, використовують геометричний зміст похідної як кутовий коефіцієнт дотичної. Крім того, часто застосовують метод диференціалів, за яким нескінченно малий приріст шуканої величини замінюють наближено її диференціалом. Діставши диференціальне рівняння, шукають його загальний розв’язок. Якщо відомі початкові умови, то знаходять частинний розв’язок задачі. У міру необхідності визначають допоміжні параметри, використовуючи при цьому додаткові умови задачі. У результаті дістають аналітичний вираз загального закону досліджуваного явища, за яким можна виконати якісний аналіз, визначити необхідні числові значення величини тощо.

Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розв’яжіть рівняння

$$xydx + (1 - x^2)\ln ydy = 0 .$$

Розв’язання. Поділивши рівняння на добуток $y(1 - x^2) \neq 0$, дістанемо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{x}{1 - x^2}dx + \frac{\ln y}{y}dy = 0,$$

звідки після інтегрування дістанемо

$$-\frac{1}{2}\ln\left|1 - x^2\right| + \frac{1}{2}\ln^2 y = C . \tag{3.13}$$

Крім того, дане рівняння ще має особливий розв’язок $x = \pm 1$, який не можна одержати із загального інтеграла (3.13) при жодних значеннях *C*.

2. Знайдіть розв’язок рівняння $y' = \dfrac{y}{\sqrt{1 - x^2}}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = e$.

Розв'язання. Відокремимо змінні і проінтегруємо дане рівняння:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\sqrt{1-x^2}},\ \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ \ln|y|=\arcsin x+C .$$

Враховуючи початкову умову, знаходимо сталу C:

$$\ln e=\arcsin 0+C\Rightarrow C=1 .$$

Отже, $\ln|y|=\arcsin x+1$ — частинний інтеграл даного рівняння, що задовольняє початкову умову.

3. Знайдіть загальний інтеграл рівняння $y'=\dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)}$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Виконаємо такі дії:

$$y(1+x^2)\frac{dy}{dx}=x(1+y^2),\ \frac{ydy}{1+y^2}=\frac{xdx}{1+x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\ln C,\ 1+y^2=C(1+x^2)\ —$$

загальний інтеграл даного рівняння.

4. Розв'яжіть рівняння

$$y'=\frac{y^2}{xy-x^2}.$$

Розв'язання. Права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру. Отже, дане рівняння є *однорідним*.

Нехай $y=xu(x)$, тоді $\dfrac{dy}{dx}=x\dfrac{du}{dx}+u$. Підставивши ці значення у вихідне рівняння, матимемо:

$$x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2x^2}{x^2u-x^2},\ \ x\frac{du}{dx}+u=\frac{u^2}{u-1},\ \ x\frac{du}{dx}=\frac{u}{u-1},$$

$$\int\frac{u-1}{u}du=\int\frac{dx}{x},\ \ u-\ln|u|=\ln|x|+\ln C,\ \ u=\ln|Cxu|.$$

Замінивши змінну u на $\dfrac{y}{x}$, дістанемо загальний інтеграл вихідного рівняння: $y=x\ln|Cy|$.

5. Знайдіть загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = \frac{x+2y-3}{2x-2}.$$

Розв'язання. Дане рівняння зведемо до однорідного. Знайдемо визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$. Оскільки $\Delta \neq 0$, то зробимо заміну

$$x = t + \alpha, \quad y = v + \beta.$$

Для визначення коефіцієнтів α і β складаємо систему рівнянь (3.4):

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 3 = 0, \\ 2\alpha - 2 = 0, \end{cases}$$

її розв'язок — $\alpha = 1, \ \beta = 1$.

Отже,

$$x = t+1, \quad y = v+1, \ \frac{dy}{dx} = \frac{d(v+1)}{d(t+1)} = \frac{dv}{dt}.$$

Вихідне рівняння матиме вигляд:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{t+1+2v+2-3}{2t+2-2}, \text{ або } \frac{dv}{dt} = \frac{t+2v}{2t}.$$

Одержане рівняння є рівнянням з однорідною функцією. Розв'яжемо його.

$$v = ut, \quad u = u(t), \quad v' = u't + u.$$

Тоді

$$u't + u = \frac{t+2ut}{2t}; \ u't + u = \frac{1+2u}{2}; \ u't = \frac{1}{2}; \quad 2\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}; \quad 2du = \frac{dt}{t}.$$

З останнього рівняння знайдемо

$$u = \frac{1}{2}\ln|Ct|, \text{ або } v = \frac{1}{2}t\ln|Ct|.$$

Повернувшись до змінних *x* і *y*, дістанемо

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x-1)\ln|C(x-1)|, \text{ або } y = 1 + \frac{1}{2}(x-1)\ln|C(x-1)|.$$

6. Розв'яжіть рівняння

$$(2x+4y+3)dy - (x+2y+1)dx = 0.$$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$y' = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}.$$

Визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$. Тому покладемо $z = x+2y$. Далі маємо:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right), \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = \frac{z+1}{2z+3}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{4z+5}{2z+3},$$

$$\frac{2z+3}{4z+5}dz = dx, \quad \int\left(1 + \frac{1}{4z+5}\right)dz = 2\int dx, \quad z + \frac{1}{4}\ln|4z+5| = 2x + C/4,$$

$$4z + \ln|4z+5| = 8x + C,$$

$\ln|4x+8y+5| = 4x - 8y + C$ — загальний інтеграл вихідного рівняння.

7. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням першого порядку (див. формулу (3.5)). Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі:

$$y = u(x)v(x), \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} + \frac{uv}{x} = \frac{\sin x}{x}, \quad \left(\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right)v + u\frac{dv}{dx} = \frac{\sin x}{x},$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = -\dfrac{u}{x}, \\ u\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\sin x}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{du}{u} = -\dfrac{dx}{x}, \\ u\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{\sin x}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ \dfrac{dv}{dx} = \sin x; \end{cases} \quad \begin{cases} u = \dfrac{1}{x}, \\ v = -\cos x + C. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок даного рівняння такий:

$$y = \frac{1}{x}(C - \cos x).$$

8. Розв'яжіть рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y + y^2 = 0. \qquad (3.14)$$

Розв'язання. Зведемо дане рівняння до лінійного за допомогою підстановки $z = y^{-1}$. Тоді $y = \frac{1}{z}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$ і рівняння (3.14) набирає вигляду

$$-\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0,$$

або

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}z = 1. \qquad (3.15)$$

Розв'яжемо це рівняння *методом варіації довільної сталої*.

Спочатку знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2x}{x^2+1}z = 0, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2x}{x^2+1}dx, \quad \int\frac{dz}{z} = \int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1},$$

$$\ln|z| = \ln|C| + \ln(x^2+1), \quad z = C(x^2+1).$$

Згідно з методом варіації довільної сталої вважатимемо C невідомою функцією змінної x, тобто $C = C(x)$.

Тоді

$$z = C(x)(x^2+1), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dC}{dx}(x^2+1) + 2xC(x).$$

Підставимо ці вирази у рівняння (3.15):

$$\frac{dC}{dx}(x^2+1) + C(x)2x - \frac{2x}{x^2+1}C(x)(x^2+1) = 1,$$

звідки після спрощень дістанемо умову для визначення функції $C(x)$:

$$\frac{dC}{dx} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді

$$C(x) = \int\frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C_1 \quad (C_1 = \text{const}).$$

Таким чином,

$$1/y = z = (\operatorname{arctg} x + C_1)(x^2+1), \quad \text{або} \quad y = \frac{1}{(\operatorname{arctg} x + C_1)(x^2+1)} \text{ —}$$

загальний розв'язок вихідного рівняння.

Зауважимо, що дане рівняння, крім загального розв'язку, має ще особливий розв'язок $y = 0$.

9. Розв'яжіть рівняння

$$ye^x dx + (y + e^x)dy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах (див. умову (3.11)). У даному випадку

$$M(x, y) = ye^x, \quad N(x, y) = y + e^x; \quad \frac{\partial M}{\partial y} = e^x, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = e^x.$$

Отже, умова (3.11) виконується, значить існує така функція $u(x, y)$, яка задовольняє систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) = ye^x, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = y + e^x. \end{cases} \tag{3.16}$$

Проінтегруємо перше рівняння системи (3.16) за змінною x:

$$u = \int ye^x dx = ye^x + \varphi(y). \tag{3.17}$$

Залишилося конкретизувати функцію $\varphi(y)$. Продиференціюємо рівність (3.17) за y: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = e^x + \varphi'(y)$. Тепер прирівнюємо праві частини останньої формули і другого рівняння системи (3.16):

$$e^x + \varphi'(y) = y + e^x, \quad \varphi'(y) = y, \quad \varphi = \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Таким чином,

$$u = ye^x + \frac{y^2}{2} + C_1.$$

Остаточно $ye^x + \dfrac{y^2}{2} = C$ — загальний інтеграл даного рівняння ($C = \text{const}$).

10. Розв'яжіть рівняння

$$(x^2 \cos x - y)dx + xdy = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є дане рівняння рівнянням у повних диференціалах. Маємо:

$$M(x, y) = x^2 \cos x - y, \quad N(x, y) = x;$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, дане рівняння не є рівнянням у повних диференціалах.

Оскільки вираз $\left(\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}\right)\Big/N=-\dfrac{2}{x}$ залежить лише від x, то існує інтегрувальний множник $\mu(x)$, який шукаємо за формулою (3.12):

$$\mu(x)=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=1/x^2.$$

Домноживши дане рівняння на множник $\dfrac{1}{x^2}$, дістанемо рівняння у повних диференціалах

$$(\cos x-\frac{y}{x^2})dx+\frac{1}{x}dy=0.$$

Далі маємо:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\cos x-\dfrac{y}{x^2},\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{x};\end{cases}\qquad u=\frac{y}{x}+\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}+\varphi'(x),$$

$$\cos x-\frac{y}{x^2}=-\frac{y}{x^2}+\varphi'(x),\ \varphi'(x)=\cos x,\ \varphi(x)=\sin x+C_1.$$

Загальний інтеграл вихідного рівняння:

$$\frac{y}{x}+\sin x=C.$$

11. Крива $y=y(x)$ проходить через точку M (1; 2). Кожна дотична до цієї кривої перетинає пряму $y=1$ у точці з абсцисою, яка дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайдіть рівняння кривої.

Розв'язання. Нехай (x, y) — довільна точка на шуканій кривій (рис. 3.1). Рівняння дотичної, проведеної до цієї кривої у точці (x, y), має вигляд

$$Y-y=y'(X-x),$$

де X, Y — змінні координати точок дотичної. З умови, що дотична перетинає пряму $Y=1$ у точці з абсцисою $2x$, дістаємо диференціальне рівняння, яке задовольняє шукана крива:

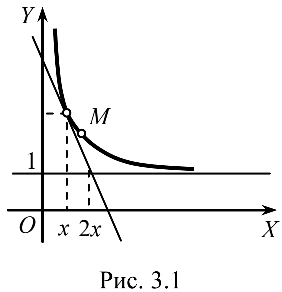

Рис. 3.1

$$1-y=y'(2x-x),\text{ або }x\frac{dy}{dx}=1-y.$$

Одержане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Далі маємо:

$$\frac{dy}{y-1}=-\frac{dx}{x},\ \ln|y-1|=-\ln|x|+\ln C,\ y-1=\frac{C}{x}.$$

З умови, що шукана крива проходить через точку $M(1;\ 2)$, знаходимо $C = 1$. Отже, $y=\frac{1}{x}+1$ — шукана крива (*гіпербола*).

12. Матеріальна точка масою в 1 кг рухається прямолінійно під дією сили, прямо пропорційної часу, що відраховується від моменту $t=0$, і обернено пропорційної швидкості руху точки. У момент $t=10$ с швидкість дорівнювала 50 м/с, а сила — 4 Н. Визначте швидкість матеріальної точки через 2 хв після початку руху?

Розв'язання. Згідно з другим законом Ньютона $F = ma$, де прискорення $a=\frac{dv}{dt}$. У нашому випадку $F=\frac{dv}{dt}$. З іншого боку, враховуючи дані задачі, цю силу можна подати у вигляді $F = k\frac{t}{v}$, де коефіцієнт пропорційності k задовольняє умову $4=k\frac{10}{50}$, звідки дістаємо $k = 20$. Прирівнюючи праві частини формул $F=\frac{dv}{dt}$ і $F=20\frac{t}{v}$, дістаємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$\frac{dv}{dt}=20\cdot\frac{t}{v}.$$

Дістали рівняння з відокремлюваними змінними. Його загальний розв'язок має вигляд

$$v=\sqrt{20t^2+C}.$$

За початковою умовою визначаємо сталу C: $50=\sqrt{20\cdot 100+C}$, звідси знайдемо $C = 500$.

Таким чином, швидкість руху точки виражається формулою $v= =\sqrt{20t^2+500}$. Через дві хвилини після початку руху швидкість цієї точки така:

$$v=\sqrt{20\cdot 120^2+500}=\sqrt{288500}=10\sqrt{2885}\ \text{(м/с)}.$$

13. У середовище з постійною температурою 20°C помістили тіло, нагріте до 100°C. Через 10 хв температура тіла зменшилась до 60°C. Через який час температура тіла стане 25°C?

Розв'язання. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t і θ — постійну температуру середовища. Експериментально встановлено, що швидкість охолоджування (або нагрівання) тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища.

Складаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-\theta)\,, \quad \text{де } k > 0\,.$$

У задачі відомо θ = 20°C і початкова умова T = 100°C при t = 0. Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{dT}{T-\theta} = -kdt\,,\ \ln|T-\theta| = -kt + \ln|c|\,,$$

звідки $T = \theta + ce^{-kt}$ — загальний розв'язок.

Константу C визначимо за початковою умовою:

$$100 = 20 + C \Rightarrow C = 80.$$

Тоді

$$T = 20 + 80e^{-kt}\,.$$

Враховуючи той факт, що при t = 10 хв температура тіла становила 60°C, визначаємо коефіцієнт пропорційності k: $60 = 20 + 80e^{-10k}$, звідки $k = \dfrac{\ln 2}{10}$.

Отже, закон охолодження тіла задається формулою

$$T = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t}\,.$$

Тепер визначаємо час, за який тіло охолоне до 25°C:

$$25 = 20 + 80e^{-\frac{\ln 2}{10}t}\,,\ \ \ln\frac{1}{16} = -\frac{\ln 2}{10}\cdot t\,,\ \ -4\ln 2 = -\frac{\ln 2}{10}\cdot t\,,\ \ t = 40 \text{ хв.}$$

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'яжіть диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

1. $xydx + (x+1)dy = 0$.

2. $xydx + (1+y^2)\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$.

3. $y' = 5\sqrt{y}$.

4. $y' + y^2 = 1$.

5. $x^2(y^3+5)dx+(x^3+5)y^2dy=0$.

6. $y'=3^{3x+2y}$.

7. $4yy'=-\operatorname{tg}x(4+y^4)$.

8. $\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

9*. $y'=3x+4y$.

10*. $y'(y+x)=1$.

Розв'яжіть задачі Коші.

11. $\dfrac{yy'}{x}+e^y=0$, $y(1)=0$.

12. $\operatorname{tg}y\,dx-x\ln x\,dy=0$, $x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=e$.

13. $\cos^2 x\sin^2 y\,dy+\sin x\cos^2 y\,dx=0$, $x(0)=0$.

Розв'яжіть диференціальні рівняння з однорідною правою частиною.

14. $y'+\dfrac{x^2+y^2}{xy}=0$.

15. $xydy-y^2dx=(x+y)^2e^{-\frac{y}{x}}dx$.

16. $(x-2y)dx-xdy=0$.

17. $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

18. $(x+y)dx+(y-x)dy=0$.

19. $(x^2-xy)dy+y^2dx=0$.

20. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$.

21. $y'=e^{\frac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}+1$.

Зведіть диференціальні рівняння до однорідних та розв'яжіть їх.

22. $y'=-\dfrac{2x+y-1}{x-2y+3}$.

23. $y'=\dfrac{x-2y+3}{2x-4y-1}$.

24. $(x-y)dx+(2y-x+1)dy=0$.

25. $(x+y+1)dx+(2y+2x-1)dy=0$.

Розв'яжіть лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

26. $y'+y=e^x$.

27. $y'-2xy=1-2x^2$.

28. $xy'+y=x^2+3x+2$.

29. $tdx+(x-t\sin t)dt=0$.

30. $2y\dfrac{dx}{dy}+x=2y^3$.

31. $y'+y\cos x=\sin x\cos x$.

32. $y'-4y=\cos x$.

33. $y'+y\operatorname{tg}x=\cos^2 x$.

34. $y'-\dfrac{2}{x}y=\dfrac{e^x(x-2)}{x}$.

35. $y'-y\operatorname{ctg}x=2x-x^2\operatorname{ctg}x$.

Розв’яжіть рівняння Бернуллі

36. $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$. **37.** $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

38. $xy' + 2y = \dfrac{2x\sqrt{y}}{\cos^2 x}$. **39.** $(1+x^2)y' - 2xy = 4\sqrt{(1+x^2)y} \cdot \operatorname{arctg} x$.

Розв’яжіть рівняння у повних диференціалах.

40. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

41. $(2xy + 3y^2)dx + (x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

42. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

43. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$.

44. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$.

45. $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \dfrac{x^3}{y}\right)dy$.

Зведіть рівняння до рівнянь у повних диференціалах та розв’яжіть їх.

46. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2ydy = 0$.

47. $(y + \ln x)dx - xdy = 0$.

48. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$.

Складіть та розв’яжіть диференціальні рівняння.

49. Швидкість розпаду радію пропорційна кількості радію, що не розпався. Кількість радію на початку процесу ($t = 0$) дорівнювала x_0. Відомо, що за 1600 років розпадається половина початкової кількості. Через скільки років кількість радію, що не розпався, складатиме 80 % від початкової кількості? Визначте, який відсоток радію збережеться через 300 років.

50. Припускаючи, що швидкість приросту населення пропорційна його наявній кількості, і знаючи, що населення країни на 1 січня 1962 року складало 200 млн, а приріст за 1962 рік дорівнював 2 %. Визначте кількість населення на 1 січня 2000 року.

51. Точка рухається по прямій із постійним прискоренням, що дорівнює $5\,\dfrac{\text{см}}{\text{сек}^2}$. У початковий момент $t = 0$ $v = 10\,\dfrac{\text{см}}{\text{сек}}$, а відстань від початку координат 30 см. Визначте закон руху точки.

52. Визначте форму дзеркала, що відображає всі промені, які виходять з однієї точки так, що після відображення вони паралельні заданому напрямку.

53. Згідно з законом Ньютона швидкість охолодження нагрітого тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Визначте, за який час тіло, нагріте до температури $300°$, занурене в рідину, температура якої $60°$, охолоне до $150°$, якщо вважати кількість рідини настільки великою, що її температура практично залишається без змін. При цьому відомо, що через 10 хвилин після початку процесу температура тіла дорівнює $200°$.

Відповіді

1. $y = C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$. **2.** $\sqrt{1+x^2} + \ln|y| + \dfrac{y^2}{2} = C$. **3.** $\dfrac{2}{5}\sqrt{y} = x + C$. **4.** $\dfrac{1}{2}\ln \times \left|\dfrac{1+y}{1-y}\right| = x + C$. **5.** $(y^3+5)(x^3+5)=C$. **6.** $3\cdot 3^{-2y} + 2\cdot 3^{3x} = C.$ **7.** $\operatorname{arctg} y^2 = \ln|\cos x| + C$. **8.** $\arcsin x + \arcsin y = C$. **9***. $y = Ce^{4x} - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{16}$. *Вказівка*. Виконайте заміну $4y + 3x = z(x)$. **10***. $y - \ln|x+y+1| = C$. *Вказівка*. Виконайте заміну $y + x = z(x)$. **11.** $x^2+1 = 2e^{-y}(y+1)$. **12.** $x = e^{\sin y}$. **13.** $\operatorname{tg} y - y + \dfrac{1}{\cos x} = 1$. **14.** $x^2(x^2+2y^2) = C$. **15.** $(x+y)\ln Cx = xe^{\frac{y}{x}}$. **16.** $y = (Cx-1)x,\ x=0$. **17.** $y = x\arcsin(Cx)$. **18.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)$. **19.** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$. **20.** $y = 2x\operatorname{arctg} Cx$. **21.** $e^{\frac{y}{x}} = \dfrac{Cx}{1-Cx}$. **22.** $x^2 + xy + 3y - x - y^2 = C$. **23.** $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6x + 2y = C$. **24.** $\dfrac{x^2}{2} + y^2 - xy + y = C$. **25.** $x+2y+3\ln|x+y-2| = C$. **26.** $y = Ce^{-x} + \dfrac{1}{2}e^x$. **27.** $y = Ce^{x^2} + x$. **28.** $y = \dfrac{c}{x} + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{3x}{2} + 2$. **29.** $x = \dfrac{c}{t} + \dfrac{\sin t}{t} - \cos t$. **30.** $x = \dfrac{c}{\sqrt{y}} + \dfrac{2}{7}y^3$. **31.** $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$. **32.** $y = Ce^{4x} + \dfrac{1}{17}(\sin x - 4\cos x)$. **33.** $y = C\cos x + \sin x\cos x$. **34.** $y = Cx^2 + e^x$. **35.** $y = C\sin x + x^2$. **36.** $y^{-3} = (C - 3\operatorname{tg} x)\cos^3 x,\ y = 0$. **37.** $y^3 = Cx^3 - 3x^2$. **38.** $\sqrt{y} = \operatorname{tg} x + \dfrac{C + \ln|\cos x|}{x}$. **39.** $y = (1+x^2)(\operatorname{arctg}^2 x + C)^2$. **40.** $3x^2y - y^3 = C$. **41.** $x^2y + 3y^2x - y^3 = C$. **42.** $\dfrac{x^2}{2} + x\sin y - \cos y = C$. **43.** $\dfrac{x^3}{3} + y^2x + yx + e^y = C$. **44.** $x^3y - \cos x - \sin y = C$. **45.** $x^3(1+\ln y) - y^2 = C$. **46.** $x^2 + \sin^2 y = Cx$. **47.** $y = Cx - \ln x - 1$. **48.** $y^2 = Cx^3 + x^2$. **49.** 515 років, 87,8 %. **50.** 428 млн. **51.** $\dfrac{5t^2}{2} + 10t + 30$. **52.** Дзеркало повинно мати форму параболоїда обертання. **53.** 18,5 хв.

Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Розв’яжіть диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

1.1.1. $3(x^2y^2+x^2)dx+(2y-x^3y)dy=0$.

1.1.2. $xe^y y'=e^{2y}+1$.

1.1.3. $y(4+x^2)dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$.

1.1.4. $y'=x4^{x+y}$.

1.1.5. $(x^2-y^2x^2)dx+(y^2-x^2y^2)dy=0.$

1.1.6. $\sqrt{1-x^2}\,dy-ydx=0$.

1.1.7. $x(1-y^2)dx-\sqrt{1-x^2}\,dy=0$.

1.1.8. $yy'+\sqrt{\dfrac{4+y^2}{4-x^2}}=0$.

1.1.9. $\cos ye^x dx+(1+e^{2x})\sin ydy=0$.

1.1.10. $xy'-4=y^2$.

1.1.11. $y'-x\cos^2 y\sin^2 x=0$.

1.1.12. $yy'(1+x^2)=1+y^2$.

1.1.13. $(1+y^4)dx-\sqrt{x}ydy=0$.

1.1.14. $(x-1)yy'=1+y^2$.

1.1.15. $y(1+2x)y'=(1-2x)$.

1.1.16. $x^2yy'+3=y^2$.

1.1.17. $y(1+x^2)y'+x(1+y^2)=0$.

1.1.18. $y'=\dfrac{y^3-1}{y^2x^2}$.

1.1.19. $ydy-x\sin x\sqrt{9-y^2}\,dx=0$.

1.1.20. $(1+x^3)y'=x^2(1+y)$.

1.1.21. $\sqrt{1+x^2}\,dy=\operatorname{tg} ydx$.

1.1.22. $x-xy^2=y'(4+x^2)$.

1.1.23. $(1+x^2)dy=\sqrt{1-y^{-2}}\,dx$.

1.1.24. $(1+x)yy'=e^{-y^2}$.

1.1.25. $\operatorname{tg} xdy+\sqrt{1-y}dx=0$.

1.1.26. $y'=2y\operatorname{ctg} x$.

1.1.27. $e^{1/y}y'=y^2x^2\ln x$.

1.1.28. $xx'=y\cos(y^2)\sqrt{1+x^2}$.

1.1.29. $e^{-\sin y}dx=x\cos y\ln xdy$.

1.1.30. $y^2dx+x\ln xdy=0$.

1.2. Розв’яжіть однорідні диференціальні рівняння.

1.2.1. $2y'=e^{y/x}+2y/x$.

1.2.2. $y'=\dfrac{x^2}{y^2}+2\dfrac{y}{x}$.

1.2.3. $y'=\dfrac{x+2y}{x-y}-1$.

1.2.4. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+2\dfrac{y}{x}-4$.

1.2.5. $(x+y)dx+(y-2x)dy=0$.

1.2.6. $(x^2+y^2)dx+x^2dy=0$.

1.2.7. $(y-2x)dx+(y+2x)dy=0$.

1.2.8. $2xydy=(x^2-y^2)dx$.

1.2.9. $(3y^2+2x^2)dx=(y^2-x^2)dy$.

1.2.10. $(2y-x)dx=(3x+y)dy$.

1.2.11. $y'=\dfrac{x+2y}{x-4y}$.

1.2.12. $xy'-y=x\,\mathrm{ctg}\,\dfrac{y}{x}$.

1.2.13. $(2x+3y)dx=(y+2x)dy$.

1.2.14. $2yxy'=x^2+y^2$.

1.2.15. $xy'=x\sin\dfrac{y}{x}+y$.

1.2.16. $xy'=xe^{2y/x}+y$.

1.2.17. $4xy+y^2=x(x+y)y'$.

1.2.18. $(x+2y)dy+(2x+y)dx=0$.

1.2.19. $(x^2-y^2)y'=2(y^2+xy)$.

1.2.20. $(2x^2+y^2)y'=y^2+2xy$.

1.2.21. $2x^2+y^2=2x^2y'$.

1.2.22. $xy'=y+x\sec(y/x)$.

1.2.23. $xy'=y(\ln^2(y/x)+1)$.

1.2.24. $x^2y'=y^2-2x^2$.

1.2.25. $(x-y)y'=x+2y.$

1.2.26. $xy'=y-xe^{y/x}$.

1.2.27. $xy'\sin(y/x)+x=y\sin(y/x)$.

1.2.28. $x^2y'+y^2=xyy'.$

1.2.29. $xy'-y=\sqrt{y^2+x^2}.$

1.2.30. $xy+y^2=(3x^2+xy)y'$.

1.3. Розв’яжіть лінійні неоднорідні диференціальні рівняння.

1.3.1. $(1-x^2)y'+2xy=x.$

1.3.2. $(4+x^2)y'-2xy=(4+x^2)^2$.

1.3.3. $y'-y/x=x\cos x$.

1.3.4. $y'-\dfrac{y}{x}=x^2e^{-x^2}$.

1.3.5. $(9-x^2)y'+2xy-x^3=0$.

1.3.6. $y'-2xy=\dfrac{xe^{x^2}}{x+1}$.

1.3.7. $y'-\dfrac{y}{x-1}=(x+1)^2$.

1.3.8. $y'\sin x-y\cos x=\cos^2 x$.

1.3.9. $x^2y'+y=e^{1/x}x$.

1.3.10. $(x^3-1)y'-3x^2y=x-1.$

1.3.11. $x^3y'+y=e^{\frac{1}{2x^2}}\sin 2x.$

1.3.12. $y'-y\,\mathrm{ctg}\,x=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

1.3.13. $x^2y'-y=\dfrac{1}{x^2}$.

1.3.14. $(x^4+1)y'-4x^3y=x.$

1.3.15. $y'+\dfrac{y}{x}=e^{-x^2}+\dfrac{1}{x^3}$.

1.3.16. $y'+2xy=x\sin xe^{-x^2}$.

1.3.17. $xy'+y=x\ln x+2$.

1.3.18. $xy'+2y=x\sqrt{x}$.

1.3.19. $y'\sin x - 3y\cos x = \sin 2x$.

1.3.20. $y' + 2y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x + \sin x$.

1.3.21. $(4 + x^2)y' + 2xy = 1$.

1.3.22. $xy' - 2y = x^2\sqrt{x+1}$.

1.3.23. $x^2 y' = e^{1/x}\sin(1/x) - y$.

1.3.24. $xy' + y = \sin x$.

1.3.25. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^{-3} x$.

1.3.26. $y' - y\sin x = 0.5\sin 2x$.

1.3.27. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$.

1.3.28. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 1/\cos x$.

1.3.29. $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin^2 x$.

1.3.30. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x$.

1.4. Розв’яжіть рівняння Бернуллі.

1.4.1. $xy' - 2y - x^2\sqrt{y} = 0$.

1.4.2. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = y^2$.

1.4.3. $y' + \dfrac{2xy}{x^2+1} + y^2 = 0$.

1.4.4. $xy' - y = x^2 y^4$.

1.4.5. $(1+x^2)y' - xy = y^2$.

1.4.6. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$.

1.4.7. $y' + \dfrac{y}{x-1} = xy^3$.

1.4.8. $xy' + 2y = y^2\ln x$.

1.4.9. $xy' - y = y^4$.

1.4.10. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5$.

1.4.11. $xy' - y = xy^3$.

1.4.12. $\sqrt{y}(y' + 2xy) = x$.

1.4.13. $xy' + y = xy^2\sin x$.

1.4.14. $(yx^2 - 2)y\,dx - x\,dy = 0$.

1.4.15. $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\ln^2 x$.

1.4.16. $y' + y\,\mathrm{ctg}\,x = y^3\cos x$.

1.4.17. $(4+x^2)y' - 2xy = x/y$.

1.4.18. $3y^2y' - y^3/x = \sqrt{x} + 1$.

1.4.19. $3xy' - y = (x^2+1)y^{-2}$.

1.4.20. $2(1+x^2)y' - 2xy = x/y$.

1.4.21. $2xy' + y = x^2 y^{-1}$.

1.4.22. $y' - \dfrac{4xy}{4+x^2} = 2\sqrt{y}(x+2)$.

1.4.23. $y' + \dfrac{2y}{x+1} + 2\sqrt{y} = 0$.

1.4.24. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$.

1.4.25. $xy' + y = y^2\ln x$.

1.4.26. $3x^2y' + xy + y^{-2} = 0$.

1.4.27. $xy' - 2y = 2x^3\sqrt{y}$.

1.4.28. $2y' - y\,\mathrm{tg}\,x + y^3\,\mathrm{tg}\,x = 0$.

1.4.29. $(1-x^2)y' - xy = xy^2$.

1.4.30. $y' + \dfrac{y}{x} = y^4(1-x^2)$.

1.5. Розв'яжіть задачі Коші.

1.5.1. $y'\sin x = y\ln^2 y$, $y(\pi/2) = e$.

1.5.2. $y' - 2y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x$, $y(0) = 1$.

1.5.3. $2(y - x) = (x + 2y)y'$, $y(1) = 0$.

1.5.4. $2y^2 + x^2 - x^2y' = 0$, $y(1) = 0$.

1.5.5. $y'(4 + x^2) = 4 + y^2$, $y(0) = 2$.

1.5.6. $(x^2 + 4)y' - 2xy = x$, $y(0) = 1$.

1.5.7. $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = x\ln x$, $y(e) = 0$.

1.5.8. $xy' = y\left(1 - \ln^2 \dfrac{y}{x}\right)$, $y(1) = e$.

1.5.9. $2(1 + e^x)yy' = e^{x-y^2}$, $y(0) = 0$.

1.5.10. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y(\pi/4) = 0{,}5$.

1.5.11. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \sin 2x\cos x$, $y(\pi/2) = 0$.

1.5.12. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = e^x\cos x$, $y(0) = 1$.

1.5.13. $\sin x\sin y y' = \cos x\cos^2 y$, $y(\pi/2) = 0$.

1.5.14. $y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0$, $y(1) = 1$.

1.5.15. $y' = 4 + y/x + (y/x)^2$, $y(1) = 2$.

1.5.16. $y'\sin^2 x = y + 1$, $y(\pi/4) = 1$.

1.5.17. $(x^2 + y^2)dy - 2xydx = 0$, $y(1) = 2$.

1.5.18. $y'\cos^2 x = y$, $y(\pi/4) = e$.

1.5.19. $2yy' = (y^2 - 1)\,\mathrm{ctg}\,x$, $y(\pi/2) = 0$.

1.5.20. $\mathrm{tg}\,ydx - x\ln xdy = 0$, $x(\pi/2) = e$.

1.5.21. $xy' - y/x = 1/x$, $y(1) = 0$.

1.5.22. $y' = \dfrac{y - x}{y + x}$, $y(1) = 0$.

1.5.23. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{1 + x^2}$, $y(1) = 0$.

1.5.24. $y' = \dfrac{-2y^2}{y^2 + x^2}$, $y(1) = 1$.

1.5.25. $y' + 3x^2y = 3x^5$, $y(0) = 1$.

1.5.26. $(x+y)y' = y-2x$, $y(1)=0$.

1.5.27. $xy' = y(1+\ln\frac{y}{x})$, $y(1)=e^e$.

1.5.28. $x^2y' - y^2 = 1$, $y(1)=0$.

1.5.29. $(x^2+1)y'x\,\text{tg}\,y$, $y(0)=\pi/6$.

1.5.30. $yy' + xe^{y^2} = 0$, $y(1)=0$.

1.6. Розв’яжіть рівняння у повних диференціалах.

1.6.1. $(4x^3y^3+3x^2y^2+2xy)dx + (3x^4y^2+2x^3y+x^2)dy = 0$.

1.6.2. $(4x^3y^2+3x^2y+2x)dx + (2x^4y+x^3+2y)dy = 0$.

1.6.3. $(\ln x+2xy^2)dx + (2x^2y+\ln y)dy = 0$.

1.6.4. $(\cos x\sin y+xe^x)dx + (\sin x\cos y+ye^y)dy = 0$.

1.6.5. $(\ln x+y)dx + (\ln y+x)dy = 0$.

1.6.6. $(\text{arctg}\,x+\ln y)dx + (y/(1+y^2)+x/y)dy = 0$.

1.6.7. $(2x\sin y+3x^2)dx + (x^2\cos y+1/y)dy = 0$.

1.6.8. $\left(3x^2e^y+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx + (x^3e^y+y^3)dy = 0$.

1.6.9. $(y+\sin x\cos^2 x)dx + (x+\cos y\sin^3 y)dy = 0$.

1.6.10. $(2x\cos(x^2+y^2)+x^2)dx + (2y\cos(x^2+y^2)+y)dy = 0$.

1.6.11. $(x(y+2)e^{xy}+2x)dx + (2x+x^2e^{xy})dy = 0$.

1.6.12. $(y\cos x+\cos y)dx + (\sin x-x\sin y+2y)dy = 0$.

1.6.13. $(2x\sin y+4x^3)dx + (x^2\cos y-\sin y)dy = 0$.

1.6.14. $\left(y-x\sqrt{1+x^2}\right)dx + \left(y\sqrt{y^2-1}+x\right)dy = 0$.

1.6.15. $(2xe^{x^2+y}+\cos x)dx + (e^{x^2+y}-\sin y)dy = 0$.

1.6.16. $\left(\frac{2x-1}{1+x}+2xy\right)dx + \left(\frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}+x^2\right)dy = 0$.

1.6.17. $\frac{\cos(\ln x)+\ln y}{x}dx + \frac{\ln x-\sin(\ln y)}{y}dy = 0$.

1.6.18. $(e^{x-y}+y^2+3x^2)dx+(2xy-e^{x-y})dy=0$.

1.6.19. $(2xe^{x^2+y^2}+3x^2)dx+(2ye^{x^2+y^2}-3y^2)dy=0$.

1.6.20. $(4x^3y^2+2xy^3)dx+(2yx^4+3x^2y^2+4y^3)dy=0$.

1.6.21. $(3x^2y+y^2+2x)dx+(x^3+2xy)dy=0$.

1.6.22. $(\sin x+y)dx+(y\cos y^2+x)dy=0$.

1.6.23. $\left(\ln x+e^{x+y}\right)dx+\left(e^x+e^y\right)e^y\,dy=0$.

1.6.24. $(2xe^y+y^3e^x+2)dx+(x^2e^y+3y^2e^x)dy=0$.

1.6.25. $(x^{-1}+2xy^2)dx+(y^{-1}+2x^2y)dy=0$.

1.6.26. $\left(4x^3\sin y+2x\cos y\right)dx+\left(x^4\cos y-x^2\sin y\right)dy=0$.

1.6.27. $\left(y^2+3x^2y^4+2x\right)dx+\left(2xy+4x^3y^3-3y^2\right)dy=0$.

1.6.28. $\left(\dfrac{y}{x}+\ln y+2x\right)dx+\left(\ln x+\dfrac{x}{y}+2y\right)dy=0$.

1.6.29. $\left(\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}+y\right)dx+\left(x-\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^3}}\right)dy=0$.

1.6.30. $\left(\sin^2 x+2xy^2\right)dx+\left(2x^2y-\cos^2 y\right)dy=0$.

1.7. Складіть диференціальні рівняння та розв’яжіть їх.

1.7.1. Знайдіть рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(2;2)$ і має ту властивість, що ордината точки перетину нормалі з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику.

1.7.2. Знайдіть криву, яка проходить через $M_0(2;1)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці кривої дорівнює квадрату ординати точки дотику.

1.7.3. Матеріальна точка масою *m* рухається прямолінійно під дією сили F, прямо пропорційної часу від початку руху і обернено пропорційної швидкості руху *v*. Встановіть залежність між швидкістю *v* і часом *t*, якщо $v=v_0$ при $t=0$.

1.7.4. Швидкість точки, яка рухається прямолінійно, пропорційна кубу часу (коефіцієнт пропорційності дорівнює *k*). Через 2 с після початку руху точка буде на відстані 12 м. Знайдіть закон руху точки (тобто залежність шляху від часу).

1.7.5. Знайдіть рівняння лінії, яка перетинає вісь ординат у точці $M_0(0;1)$, і кутовий коефіцієнт її дотичної в довільній точці дорівнює добутку абсциси на ординату точки дотику.

1.7.6. Знайдіть криву, яка проходить через точку $M_0(2;1)$, якщо сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, дорівнює 3.

1.7.7. У посудину, яка містить 10 л води, неперервно наливається зі швидкістю 2 л/хв розчин, у кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що наливається в посудину, перемішується з водою; утворена суміш витікає з посудини з тією самою швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хв?

1.7.8. Знайдіть криву, яка проходить через точку $M_0(0;2)$, якщо відрізок осі абсцис, який відтинається дотичною та нормаллю, проведеними з довільної точки кривої, дорівнює 4?

1.7.9. Посудина об'ємом 20 л містить повітря (80 % азоту та 20 % кисню). У посудину за кожну секунду надходить 0,1 л азоту, який неперервно змішується, і витікає така сама кількість суміші. Через який час у посудині буде 99 % азоту?

1.7.10. У посудину, яка містить 20 кг солі на 100 л суміші, кожну хвилину надходить 20 л води та витікає 10 л суміші. Визначте, яка кількість солі залишається в посудині через t хвилин.

1.7.11. Температура вийнятого з печі хліба протягом 20 хв падає від $100°$ до $60°$ С. Температура повітря $20°$ С. Визначте, через скільки часу від початку охолодження температура хліба стане $30°$ С, якщо швидкість охолодження тіла пропорційна різниці температур тіла та середовища.

1.7.12. Знайдіть криву, що проходить через точку $M_0(1;1/3)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці кривої втричі більший за кутовий коефіцієнт радіуса-вектора точки дотику.

1.7.13. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю v, що пропорційна квадрату часу. Знайдіть залежність між пройденим шляхом S і часом t, якщо $S(0) = S_0$.

1.7.14. Знайдіть криві, в яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис рівновіддалена від точки дотику і початку координат.

1.7.15. Точка масою m рухається прямолінійно. На точку діють сила, пропорційна часу, та сила протидії, пропорційна добутку швидкості на час. Знайдіть залежність швидкості від часу.

1.7.16. Знайдіть лінію, що проходить через точку $M_0(3;1)$, якщо ордината точки перетину дотичної з віссю ординат дорівнює подвоєній сумі координат точки дотику.

1.7.17. Знайдіть лінію, що проходить через точку $M_0(1; 0)$, якщо ордината точки перетину дотичної з віссю ординат дорівнює добутку координат точки дотику.

1.7.18. Знайдіть лінії, в яких відстані від будь-якої дотичної до початку координат дорівнюють абсцисі точки дотику.

1.7.19. Знайдіть закон руху точки, що падає під дією сили ваги, якщо в початковий момент часу $t = t_0$ її висота $h = h_0$, а початкова швидкість $v = v_0$.

1.7.20. Знайдіть рівняння кривої, яка проходить через точку $M_0(4; 3)$, якщо довжина відрізка нормалі від точки кривої до точки перетину з віссю ординат дорівнює 5.

1.7.21. Знайдіть лінії, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис, є величина стала, що дорівнює 25.

1.7.22. Відношення відрізка, який відтинає дотична до кривої на осі ординат, до відрізка, який відтинає ця сама дотична на осі абсцис, дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику. Знайдіть рівняння таких кривих.

1.7.23. Точка рухається прямолінійно зі сталим прискоренням a. Знайдіть закон руху точки, якщо в початковий момент часу швидкість дорівнювала v_0, а шлях — S_0.

1.7.24. Знайдіть лінію, що проходить через точку $M_0(1; 0)$, яка має таку властивість: кут нахилу дотичної до осі Ox на 45° більший за кут між радіус-вектором точки дотику і віссю Ox.

1.7.25. Одиниця маси рухається вздовж осі абсцис під дією сталої сили F, яка спрямована вздовж осі. Сила опору повітря чисельно дорівнює швидкості руху. Знайдіть закон руху, якщо $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

1.7.26. Знайдіть криві, якщо квадрат довжини відрізка, що відтинає довільна дотична до цієї кривої від осі ординат, дорівнює добутку координат точки дотику.

1.7.27. Знайдіть криву, що проходить через точку $M_0(0; 2)$, дотична до якої від осі абсцис відтинає відрізок, у два рази більший за ординату точки дотику.

1.7.28. Знайдіть лінію, що проходить через точку $M_0(1; 2)$, причому ордината точки перетину дотичної з віссю Oy дорівнює натуральному логарифму абсциси точки дотику.

1.7.29. Знайдіть рівняння кривої, що проходить через точку M_0 (1; 1), для якої відрізок довільної її дотичної, що міститься між координатними осями, ділиться в точці дотику у відношенні 1:2, рахуючи від осі ординат.

1.7.30. Знайдіть рівняння кривої, що проходить через точку M_0 (3; 1), для якої відрізок дотичної між точкою дотику і віссю Ox ділиться навпіл у точці перетину з віссю Oy.

Тема 2. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ**

Основні поняття та означення. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку. Лінійні залежні і незалежні функції. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Структура загального розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку.

Література: [2, розділ 3, п. 3.2, 3.3], [3, розділ 8, § 2], [4, розділ 8, § 26], [6, розділ 11, п. 11.2, 11.3.], [8, розділ 13, § 16—18], [10, § 3].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Основні поняття та означення

Загальний вигляд диференціального рівняння n-го порядку у неявній формі такий:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 .$$

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3.18}$$

називають диференціальним рівнянням n-го порядку, розв'язаним відносно старшої похідної $y^{(n)}$.

У загальному випадку розв'язок рівняння n-го порядку містить n довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$ і має вигляд:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n), \text{ або } \Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0 .$$

Задача Коші для рівняння (3.18) формулюється так: знайти розв'язок рівняння (3.18), який задовольняє початкові умови:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ — задані дійсні числа.

Загальним розв'язком рівняння (3.18) називають функцію $y = \varphi \times$ $\times (x, C_1, C_2, ..., C_n)$, яка залежить від довільних сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, і таку, що:

1) при довільних $C_1, C_2, ..., C_n$ вона є розв'язком даного рівняння;

2) для довільних початкових умов $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ існує єдиний набір значень $C_1 = C_1^0, C_2 = C_2^0, ..., C_n = C_n^0$, при якому розв'язок $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0)$ задовольняє задані початкові умови.

Розв'язок, який дістають із загального розв'язку при фіксованих сталих $C_1, C_2, ..., C_n$, називають *частинним розв'язком рівняння* (3.18).

2.2. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку

Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x),$$

де $f(x)$ — задана неперервна функція, інтегрується за формулою

$$y = \underbrace{\int \ldots \int}_{n} f(x) \underbrace{dx \ldots dx}_{n} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \qquad (3.19)$$

Справді, записавши це рівняння у вигляді

$$\frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = f(x), \text{ або } dy^{(n-1)} = f(x)dx,$$

та інтегруючи, дістанемо

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1.$$

Продовжуючи процес зниження порядку даного диференціального рівняння, після n кроків дістанемо формулу (3.19).

Нехай задано диференціальне рівняння другого порядку

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Це рівняння зводиться до рівняння першого порядку у таких випадках (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

Рівняння другого порядку	Характерна особливість рівняння	Заміна	Друга похідна	Рівняння першого порядку
$F(x, y', y'') = 0$	не містить шуканої функції	$y' = z(x)$	$y'' = z'$	$F(x, z, z') = 0$
$F(y, y', y'') = 0$	не містить явно незалежної змінної x	$y' = p(y)$	$y'' = p'p$	$F(y, p, p'p) = 0$ або $\Phi(y, p, p') = 0$

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищих порядків, які допускають зниження порядку:

1) диференціальне рівняння

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0,$$

яке не містить шуканої функції і похідних до $(k-1)$-го порядку включно, підстановкою $y^{(k)} = z(x)$ зводиться до рівняння

$$F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0 ,$$

порядок якого дорівнює $n-k$;

2) диференціальне рівняння

$$F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0,$$

яке не містить явно незалежної змінної x, допускає зниження порядку на одиницю шляхом введення нової функції $p(y)$, яка залежить від змінної y:

$$y' = p(y).$$

Тоді

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p;$$

$$y''' = \frac{d(p'p)}{dx} = \frac{d(p'p)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = (p''p + (p')^2)p \text{ і т. д.}$$

Можна показати, що порядок усіх наступних похідних також знижується на одиницю.

В результаті дістанемо рівняння

$$\Phi(y, \ p, \ p', ..., \ p^{(n-1)}) = 0 .$$

2.3. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називають рівняння вигляду

$$\boxed{a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x),} \tag{3.20}$$

де $a_0(x), \ a_1(x), \ ..., \ a_n(x), \ f(x)$ — задані функції, причому $a_0(x) \neq 0$.

Іншими словами, лінійне рівняння — це рівняння, яке містить невідому функцію $y = y(x)$ і всі похідні лише в першому степені і, крім того, у рівняння відсутні їхні добутки.

Рівняння (3.20) у випадку $f(x) \neq 0$ називають *неоднорідним*. Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння є *однорідним* і має вигляд

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = 0. \tag{3.21}$$

Сформулюємо деякі властивості лінійних рівнянь.

1. Рівняння (3.20) залишається лінійним після заміни $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ n раз диференційовна функція незалежної змінної t.

2. Рівняння (3.20) залишається лінійним після перетворення

$$y = a(x)z(x) + b(x),$$

де $z(x)$ — нова невідома функція, $a(x), b(x)$ — задані диференційовні n раз функції.

3. Якщо y_1 — частинний розв'язок однорідного рівняння (3.21), то C_1y_1, де C_1 — довільна стала, — також розв'язок цього рівняння.

4. Якщо y_1, y_2 — частинні розв'язки рівняння (3.21), то сума $y_1 + y_2$, а також лінійна комбінація $C_1y_1 + C_2y_2$ є розв'язками однорідного рівняння (3.21).

Останнє твердження можна узагальнити: якщо $y_1, y_2, ..., y_n$ — частинні розв'язки рівняння (3.21), то їхня лінійна комбінація

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$$

також є розв'язком однорідного рівняння (3.21).

Введемо поняття лінійно незалежної системи функцій.

Систему функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ називають *лінійно незалежною* на проміжку (a,b), якщо тотожність

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + ... + \alpha_ny_n \equiv 0, \tag{3.22}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ — дійсні числа, справджується тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0.$$

Якщо хоча б одне з чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ відмінне від нуля і виконується тотожність (3.22), то функції $y_1, y_2, ..., y_n$ називають *лінійно залежними*.

Наприклад, функції $y_1 = \sin^2 x,\ y_2 = \cos^2 x,\ y_3 = 1$ лінійно залежні, оскільки при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$ виконується тотожність

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 \equiv 0, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Для визначення лінійної незалежності або залежності системи функцій $y_1, y_2, ..., y_n$ використовують *визначник Вронського*

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Для того, щоб функції $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, неперервні разом зі своїми похідними до (n – 1)-го порядку включно на (a, b), були лінійно незалежними на заданому проміжку, необхідно і достатньо, щоб визначник Вронського не дорівнював нулю хоча б в одній точці даного проміжку.

Довільну систему з n лінійно незалежних розв'язків однорідного рівняння (3.21) називають фундаментальною системою.

Якщо $y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n$ — фундаментальна система рівняння (3.21), то його загальний розв'язок має вигляд

$$\boldsymbol{\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n},$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні сталі.

Формула Абеля. Нехай y_1 — ненульовий частинний розв'язок лінійного однорідного рівняння

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

де $p(x),\ q(x)$ — неперервні на (a, b) функції. Тоді загальний розв'язок рівняння задається формулою

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx,} \tag{3.23}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$y''' = e^{2x} + \sin x.$$

Розв'язання. Послідовно дістанемо

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = e^{2x} + \sin x, \quad y'' = \int (e^{2x} + \sin x)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1,$$

$$y' = \int y''dx = \int \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \cos x + C_1 \right) dx = \frac{1}{4}e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int y'dx = \int \left(\frac{1}{4}e^{2x} - \sin x + C_1 x + C_2 \right) dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \cos x + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3,$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

2. Розв'яжіть рівняння

$$y''(1 + x^2) = 2xy'.$$

Розв'язання. Дане рівняння не містить явно функцію $y(x)$, тому виконаємо підстановку $y' = z(x)$ (див. табл. 3.1). Тоді $y'' = z'$ і рівняння набуде вигляду

$$z'(1 + x^2) = 2xz.$$

Дістали рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Далі маємо

$$\frac{dz}{dx}(1 + x^2) = 2xz, \quad \frac{dz}{z} = \frac{2x}{1 + x^2}dx,$$

$$\ln|z| = \ln(1 + x^2) + \ln|C_1|, \quad z = C_1(1 + x^2), \quad \frac{dy}{dx} = C_1(1 + x^2),$$

$$y = \int C_1(1 + x^2)dx = C_1\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C_2 \text{ —}$$

загальний розв'язок даного рівняння.

3. Розв'яжіть рівняння

$$(y')^2 + 2yy'' = 0.$$

Розв'язання. Маємо рівняння другого порядку, яке не містить явно незалежної змінної x. Поклавши

$$y' = p(y)\,,\ y'' = p\frac{dp}{dy}\,,$$

зведемо дане рівняння до рівняння першого порядку:

$$p^2 + 2yp\frac{dp}{dy} = 0;\ \ p\left(p + 2y\frac{dp}{dy}\right) = 0\,,$$

звідки дістанемо такі випадки:

1) $p = 0\,,\ \dfrac{dy}{dx} = 0\,,\ y = C\,;$

2) $p + 2y\dfrac{dp}{dy} = 0\,,\quad \dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{y} + \dfrac{dp}{p} = 0\,,\quad \dfrac{1}{2}\ln|y| + \ln|p| = \ln C_1\,,\quad \sqrt{y}\cdot p = C_1\,,$

$\sqrt{y}\,\dfrac{dy}{dx} = C_1\,,\ \displaystyle\int \sqrt{y}dy = \int C_1 dx\,,\ \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2$ — загальний інтеграл вихідного рівняння.

Зазначимо, що розв'язок $y = C$ можна дістати із загального інтеграла, поклавши $C_1 = 0$.

4. Розв'яжіть рівняння

$$y''' - (y'')^2 = 0\,.$$

Розв'язання. Маємо рівняння третього порядку, яке не містить явно незалежної змінної x, шуканої функції $y(x)$ та похідної y'. Отже, порядок даного рівняння можна знизити за допомогою замін $y''(x) = z(x)$ або $y' = p(y)$. Зручніше зробити заміну $y''(x) = z(x)$, тоді $y'''(x) = z'(x)$ і вихідне рівняння зводиться до рівняння першого порядку

$$z' - z^2 = 0\,.$$

Далі маємо

$$\frac{dz}{dx} = z^2\,,\ \ \frac{dz}{z^2} = dx\,,\ \ -\frac{1}{z} = x + C_1\,,\ \ z = \frac{1}{-x - C_1}\,,\ \ y'' = \frac{1}{-x - C_1}\,,$$

$$y' = \int\frac{1}{-x - C_1}dx = -\ln|x + C_1| + C_2\,,$$

$$y = \int(-\ln|x + C_1| + C_2)dx = -(x + C_1)\ln|x + C_1| + C_2x + C_3\ —$$

загальний розв'язок даного рівняння ($C_1,\ C_2,\ C_3$ — довільні сталі).

5. Покажіть, що функції $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2$ лінійно незалежні на проміжку $(-\infty, \infty)$.

Розв'язання. Складемо визначник Вронського і обчислимо його. Маємо:

$$W[1, x, x^2] = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

звідки випливає лінійна незалежність функцій $1,\ x,\ x^2$.

6. Дослідіть на лінійну залежність систему функцій

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x\ \ (\beta \neq 0).$$

Розв'язання. Для перевірки лінійної залежності цих функцій знайдемо вронскіан (визначник Вронського):

$$W[y_1,\ y_2] = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}(\alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\cos^2\beta x - \alpha\cos\beta x\sin\beta x + \beta\sin^2\beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$

для всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

Отже, дані функції лінійно незалежні на проміжку $(-\infty, \infty)$.

7. Складіть лінійне однорідне рівняння за фундаментальною системою розв'язків

$$y_1 = x,\ y_2 = e^x.$$

Розв'язання. Складаємо визначник Вронського для системи функцій $y_1 = x$, $y_2 = e^x$, y. Цей визначник дорівнює нулю, оскільки система функцій y_1, y_2, y лінійно залежна ($y = C_1 x + C_2 e^x$ — загальний розв'язок шуканого рівняння):

$$W[x, e^x, y] = \begin{vmatrix} x & e^x & y \\ 1 & e^x & y' \\ 0 & e^x & y'' \end{vmatrix} = e^x\begin{vmatrix} x & 1 & y \\ 1 & 1 & y' \\ 0 & 1 & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Розклавши визначник за елементами третього стовпця, дістанемо рівняння

$$(x-1)y''-xy'+y=0 .$$

8. Знайдіть загальний розв’язок рівняння

$$y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2 x\cdot y=0 ,$$

якщо $y_1=\sin x$ — його частинний розв’язок.

Розв’язання. Лінійно незалежний з y_1 розв’язок y_2 даного рівняння знаходимо за формулою Абеля (3.23) при $C_1=0$ і $C_2=1$:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}dx .$$

Маємо:

$$-\int p(x)dx=-\int(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)dx=\ln|\cos x|+2\ln|\sin x| ;$$

$$y_2=\sin x\int\frac{e^{\ln|\cos x|+2\ln|\sin x|}}{\sin^2 x}dx=\sin x\int\cos x dx=\sin^2 x .$$

Отже,

$$y=C_1\sin x+C_2\sin^2 x \text{ —}$$

загальний розв’язок вихідного рівняння.

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв’яжіть рівняння

1. $y'''=\dfrac{1}{x}$.

2. $y'''=27e^{3x}+120x^3$.

3. $y'''=e^{5x}-\cos x$.

4. $y'''=\sin 2x+\cos x$.

5. $y'''=e^x+x$.

6. $y'''=x^2+\cos 3x$.

7. $y''=\ln x+x$.

8. $y''=5^x+6x$.

9. $y'''=3^x+\cos x$.

10. $y'''=4^x+\cos 3x+\sin 5x$.

11. $x^2y''+xy'=1$.

12. $y''\left(e^x+1\right)+y'=0$.

13. $(1-x^2)y''-xy'=2$.

14. $y''=5y'$.

15. $y''(1+y)=(y')^2+y'$.

16. $y''+(y')^2=2e^{-y}$.

17. $y^3y''=-1$.

18. $yy''=(y')^2$.

19. $y''=\dfrac{1}{\sqrt{y}}$.

20. $y''=10e^y$.

Дослідіть на лінійну залежність систему функцій.

21. $y_1=1,\quad y_2=\sin^2 x,\quad y_3=\cos 2x$.

22. $y_1=x^2-x+3,\quad y_2=2x^2+x,\quad y_3=2x-4$.

23. $y_1=x+2,\quad y_2=x-2$.

Складіть лінійні однорідні диференціальні рівняння за фундаментальними системами розв'язків.

24. $y_1=x$, $y_2=x^2$, $y_3=e^x$.

25. $y_1=1$, $y_2=\cos x$.

Знайдіть загальний розв'язок рівняння, якщо відомий один його частинний розв'язок.

26. $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$, $y_1=\dfrac{\sin x}{x}$.

27. $(1-\ln x)y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=0$, $y_1=\ln x$.

28. $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{9}{x^2}y=0$, $y_1=x^3$.

29. $(x-1)y''-xy'+y=0$, $y_1=x$.

30. $(x+1)x^2y''-2y=0$, $y_1=1+\dfrac{1}{x}$.

Відповіді

1. $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **2.** $y=e^{3x}+x^6+C_1+C_2x+C_3x^2$. **3.** $y=\dfrac{1}{125}e^{5x}+\sin x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **4.** $y=\dfrac{1}{8}\cos 2x-\sin x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **5.** $y=e^x+\dfrac{x^4}{24}+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **6.** $y=\dfrac{x^5}{60}-\dfrac{1}{27}\sin 3x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **7.** $y=\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{x^3}{6}+$

$+C_1x+C_2$. **8.** $y=\dfrac{5^x}{(\ln 5)^2}+x^3+C_1x+C_2$. **9.** $y=\dfrac{3^x}{(\ln 3)^3}-\sin x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$.

10. $y=\dfrac{4^x}{(\ln 4)^3}-\dfrac{1}{27}\sin 3x+\dfrac{1}{125}\cos 5x+C_1\dfrac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. **11.** $y=\dfrac{\ln^2 x}{2}+C_1\ln x+C_2$.

12. $y=C_1\left(x-e^{-x}\right)+C_2$. **13.** $y=\arcsin^2 x+C_1\arcsin x+C_2$. **14.** $y=C_1e^{5x}+C_2$.

15. $\ln\left|C_1(y+1)-1\right|=C_1(x+C_2),\ C_1\neq 0;\quad y=C_3;\quad y=-x+C$. **16.** $e^y+C_1= =(x+C_2)^2$.

17. $\sqrt{1+C_1y^2}=C_1x+C_2$. **18.** $y=C_2e^{C_1x}$. **19.** $x+C_2=\dfrac{2}{3}(\sqrt{y}-2C_1)\sqrt{\sqrt{y}+C_1}$).

20. $x+C_2=\dfrac{1}{\sqrt{C_1}}\ln\dfrac{\sqrt{20e^y+C_1}-\sqrt{C_1}}{\sqrt{20e^y+C_1}+\sqrt{C_1}}$. **21.** Лінійно залежні. **22.** Лінійно залежні.

23. Лінійно незалежні. **24.** $(x^2-2x+2)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$. **25.** $y''-y'\operatorname{ctg}x=0$.

26. $y=C_1\dfrac{\sin x}{x}-C_2\dfrac{\cos x}{x}$. **27.** $y=C_1\ln x+C_2x$. **28.** $y=C_1x^3+C_2\dfrac{1}{x^3}$. **29.** $y=C_1x+C_2e^x$.

30. $y=C_1\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+C_2\left(x+1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2(x+1)\ln|x+1|}{x}\right)$.

Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Проінтегруйте рівняння другого порядку

2.1.1. $y''=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$. **2.1.2.** $y''(4+x^2)=2$.

2.1.3. $y''=4\cos^2 x$. **2.1.4.** $y''=2x\operatorname{arctg}x$.

2.1.5. $y''\sqrt{1-x^2}+x=0$. **2.1.6.** $y''=\operatorname{arctg}x$

2.1.7. $y''=xe^x$. **2.1.8.** $y''\sqrt{1-x^2}=1$.

2.1.9. $y''=x\ln x$. **2.1.10.** $y''=x\sin^2 x$.

2.1.11. $y''(1-x^2)=x^3$. **2.1.12.** $y''=3x^2+\ln x$.

2.1.13. $y''\sqrt{x^2-1}=x$. **2.1.14.** $y''=x\sin 2x$.

2.1.15. $y''=6x\operatorname{arctg}x$. **2.1.16.** $y''=\sin^3 x$.

2.1.17. $y''=\cos^3 x$. **2.1.18.** $y''=xe^{2x}$.

2.1.19. $y''=4\sin^2 x$. **2.1.20.** $xy''=1+x^2$.

2.1.21. $y''\sqrt{1+x} = x$.

2.1.22. $y'' = x\sqrt{x-1}$.

2.1.23. $y''\cos^3 x = \sin x$.

2.1.24. $y'' = e^x(x+1)$.

2.1.25. $y'' = \sqrt{x} + \ln x$.

2.1.26. $y'' = \cos^4 x$.

2.1.27. $x^2 y'' = \ln x$.

2.1.28. $y'' = (x+3)e^x$.

2.1.29. $(x-1)^2 y'' = x^2 - 2x$.

2.1.30. $2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 y'' = 1$.

2.2. Проінтегруйте рівняння другого порядку, використовуючи заміну $y' = z(x)$.

2.2.1. $(9+x^2)y'' + 2xy' = 0$.

2.2.2. $xy'' = y' + x$.

2.2.3. $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = \cos x$.

2.2.4. $y''(x^2+x) = (4x+2)y'$.

2.2.5. $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

2.2.6. $(2+x^2)y'' + 2xy' = x^2$

2.2.7. $xy'' + x(y')^2 - 2y' = 0$.

2.2.8. $y''\sin x - y'\cos x = \sin x$.

2.2.9. $xy'' - y' = e^x x^2$.

2.2.10. $y'' + 4(\operatorname{tg} x)y' = \cos^2 x$.

2.2.11. $xy'' + y' = (y')^2$.

2.2.12. $xy'' = y' + x^3$.

2.2.13. $y'' x\ln x = y'$.

2.2.14. $y'' + 2(\operatorname{tg} x)y' = \cos^3 x$.

2.2.15. $y'' - 2xy' = 4x$.

2.2.16. $xy'' - y' = x^2\cos x$.

2.2.17. $y'' - 2y'\operatorname{ctg} x = 0$.

2.2.18. $xy'' = y' + xe^x$.

2.2.19. $(x^2+1)y'' = 2x(y'+1)$.

2.2.20. $xy'' = y' + x^2\sin x$.

2.2.21. $(x^2+1)y'' = 4x(y'-1)$.

2.2.22. $x(\ln x+2)y'' = y'$.

2.2.23. $xy'' = y'\ln(y'/x)$.

2.2.24. $(1-x^2)y'' = 2xy'$.

2.2.25. $xy'' = y' + x^2$.

2.2.26. $(1+x^2)y'' = 2xy'$.

2.2.27. $xy'' + y' = x$.

2.2.28. $y'' - 2(\operatorname{tg} x)y' = \cos x$.

2.2.29. $x^2 y'' + xy' = 1$.

2.2.30. $y'' - y'/(x-1) = x^2 - x$.

2.3. Проінтегруйте рівняння другого порядку, використовуючи заміну $y' = p(y)$.

2.3.1. $yy'' = (y')^2$.

2.3.2. $2yy'' + (y')^2 = 0$.

2.3.3. $yy'' = 2y' + (y')^2$.

2.3.4. $yy'' + 2(y')^2 = 0$.

2.3.5. $yy'' - 2(y')^2 = 2y^3 y'$.

2.3.6. $y^3 y'' + 2y' = 0$.

2.3.7. $yy'' = 3(y')^2$.

2.3.8. $y'' = (y')^2 + 2y'$.

2.3.9. $y''y^3 = 2y'$.

2.3.10. $3\sqrt[3]{y^2}\,y'' = y'$.

2.3.11. $y'' = 2yy'$.

2.3.12. $2y^2y'' = y'$.

2.3.13. $y^3y'' = 6$.

2.3.14. $y^2y'' = y'$.

2.3.15. $y'' - 2yy' = 0$.

2.3.16. $y'' = y' + (y')^3$.

2.3.17. $4\sqrt{y}\,y'' = 1$.

2.3.18. $2yy'' - (y')^2 = y'$.

2.3.19. $yy'' + (y')^2 + 1 = 0$.

2.3.20. $2yy'' + (y')^2 + y' = 0$.

2.3.21. $yy'' = 2(y')^2 - (y')^3$.

2.3.22. $y'' = 2y'(y+1)$.

2.3.23. $yy'' - (y')^2 = y^2y'$.

2.3.24. $yy'' - 2yy'\ln y = (y')^2$.

2.3.25. $3y'' = y^{-5/3}$.

2.3.26. $yy'' = 2(y')^2 + y'$.

2.3.27. $y'' = (y')^2 + y'$.

2.3.28. $y''y^3 + 9 = 0$.

2.3.29. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$.

2.3.30. $y''(y+1) = (y')^2 + y'$.

Тема 3. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку. Метод Ейлера. Лінійні неоднорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів та метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Література: [2, розділ 3, п. 3.3], [3, розділ 8, § 4], [4, розділ 8, § 26], [6, розділ 11, п. 11.3, 11.4.], [8, розділ 13, §21–28], [10, § 4—5].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Лінійні однорідні рівняння

Лінійне однорідне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,} \qquad (3.24)$$

де a_0, a_1, …, a_n — деякі дійсні числа, $a_0 \neq 0$.

Нагадаємо, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння задається формулою

$$\overline{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n ,$$

де y_1, y_2, ..., y_n — лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння (3.24), $C_1, C_2, ..., C_n$ — довільні сталі.

Метод Ейлера. Частинний розв'язок рівняння (3.24) шукають у вигляді $y = e^{kx}$, де k – невідома стала. Виконавши підстановку у рівняння, дістанемо рівняння

$$e^{kx}(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n) = 0 ,$$

звідки

$$\boxed{a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0.} \qquad (3.25)$$

Рівняння (3.25) називають *характеристичним* рівнянням. Його дістають з однорідного рівняння (3.24) заміною похідних шуканої функції відповідними степенями k, причому саму функцію y замінюють одиницею, тобто

$$\boxed{y^{(n)} \to k^n,\ y^{(n-1)} \to k^{n-1},\ ...,\ y' \to k,\ y \to 1.}$$

Характеристичне рівняння (3.25) є *алгебраїчним рівнянням n*-го степеня і має *n* коренів (дійсних або комплексних, серед яких можуть бути й однакові). Частинні розв'язки рівняння (3.24) залежать від вигляду коренів характеристичного рівняння (3.25). Відповідність між коренями характеристичного рівняння та частинними розв'язками подано у табл. 3.2.

Таблиця 3.2

№	Властивість кореня характеристичного рівняння	Кількість лінійно незалежних розв'язків, які відповідають даному кореню	Частинні розв'язки, які відповідають даному кореню
1	k — дійсний простий корінь (кратності один)	один	e^{kx}
2	k — дійсний корінь кратності m	m	$e^{kx}, xe^{kx}, ..., x^{m-1}e^{kx}$
3	$k = \alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-спряжених простих коренів	два	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
4	$k = \alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-спряжених простих коренів кратності m	$2m$	$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $\ldots,$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

Розглянемо рівняння другого порядку

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 . \qquad (3.26)$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0 . \qquad (3.27)$$

Залежно від значення дискримінанта $D = a_1^2 - 4a_0 a_2$ маємо такі три випадки, зведені у табл. 3.3.

Таблиця 3.3

№	Корені характеристичного рівняння (27)	Загальний розв'язок рівняння (26)
1	k_1 і k_2 — дійсні і різні $(D > 0)$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	k_1 і k_2 — дійсні і рівні $(D = 0)$	$y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$
3	$k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ — комплексно-спряжені $(D < 0)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

3.2. Лінійні неоднорідні рівняння

Рівняння вигляду

$$\boxed{a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x),} \qquad (3.28)$$

де a_0, a_1, ..., a_n — сталі, $f(x)$ — неперервна на (a, b) функція, є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Нагадаємо, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.28) записується у вигляді

$$y = \overline{y} + y^* ,$$

де $\overline{y}$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (3.24), y^* — частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.28).

Побудову загального розв'язку $\overline{y}$ рівняння (3.24) з'ясовано вище.

Для знаходження частинного розв'язку рівняння (3.28) застосовують такі методи:

1) невизначених коефіцієнтів;

2) варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

3.2.1. Метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод застосовують до розв'язання лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду

$$\boxed{f(x)=e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right),} \tag{3.29}$$

або яка є сумою функцій такого самого типу. Тут α і β — сталі, $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ — задані многочлени змінної x степеня n і m відповідно. Число $\boxed{z=\alpha+\beta i}$ будемо називати *характеристичним* (*контрольним*) числом правої частини рівняння.

Частинний розв'язок рівняння (3.28) з правою частиною (3.29) шукають у вигляді

$$y^*=x^r e^{\alpha x}\left(P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $P_l(x)\equiv A_0x^l+A_1x^{l-1}+\ldots+A_l$, $Q_l(x)\equiv B_0x^l+B_1x^{l-1}+\ldots+B_l$ — многочлени степеня $l=\max(n,m)$ з невизначеними коефіцієнтами $A_0,A_1,\ldots,A_l$, $B_0,B_1,\ldots,B_l$; r — кратність кореня $z=\alpha+\beta i$ в характеристичному рівнянні (3.25). Якщо z не є коренем характеристичного рівняння, то $r=0$.

Для деяких зображень функції $f(x)$ частинні розв'язки шукають у такому вигляді (табл. 3.4):

Таблиця 3.4

№	Вигляд правої частини $(f(x))$	Контрольне число правої частини (z)	Структура частинного розв'язку $\left(y^*\right)$
1.1	$e^{\alpha x}$	$z=\alpha$ — не корінь характеристичного рівняння	$Ae^{\alpha x}$
1.2	$e^{\alpha x}$	$z=\alpha$ — корінь характеристичного рівняння кратності r	$Ax^re^{\alpha x}$
2.1	$P_n(x)$	$z=0$ — не корінь характеристичного рівняння	$\tilde{P}_n(x)\equiv A_0x^n+$ $+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$
2.2	$P_n(x)$	$z=0$ — корінь характеристичного рівняння кратності r	$x^r\tilde{P}_n(x)$
3.1	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$z=\alpha$ — не корінь характеристичного рівняння	$\tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$

№	Вигляд правої частини $(f(x))$	Контрольне число правої частини (z)	Структура частинного розв'язку $\left(y^*\right)$
3.2	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$z=\alpha$ — корінь характеристичного рівняння кратності r	$x^r \tilde{P}_n(x)e^{\alpha x}$
4.1	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$z=\beta i$ — не корінь характеристичного рівняння	$A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x$
4.2	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$z=\beta i$ — корінь характеристичного рівняння кратності r	$x^r(A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x)$
5.1	$e^{\alpha x}\cos\beta x P_n(x)$	$z=\alpha+\beta i$ — не корінь характеристичного рівняння	$e^{\alpha x}(\tilde{P}_n(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_n(x)\sin\beta x)$
5.2	$e^{\alpha x}\cos\beta x P_n(x)$	$z=\alpha+\beta i$ — корінь характеристичного рівняння кратності r	$x^r e^{\alpha x}(\tilde{P}_n(x)\cos\beta x +$ $+\tilde{Q}_n(x)\sin\beta x)$

3.2.2. Метод Лагранжа (варіації довільних сталих). Цей метод застосовують для відшукання розв'язку лінійного диференціального рівняння як зі змінними, так і сталими коефіцієнтами, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Розглянемо метод Лагранжа на прикладі рівняння другого порядку

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x). \tag{3.30}$$

Нехай $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$ — загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.30) шукають у вигляді

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2, \tag{3.31}$$

де функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}} \tag{3.32}$$

Використовуючи формули Крамера, знаходимо

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix};$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad C_2(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta};$$

$$C_1(x) = \int C_1'(x)dx + C_3; \quad C_2(x) = \int C_2'(x)dx + C_4.$$

Підставивши значення $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у формулу (3.31), дістанемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.30).

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Знайдіть загальні розв'язки однорідних рівнянь.

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k - 3 = 0,$$

його корені $k_1 = -1$, $k_2 = 3$. Цим кореням відповідають лінійно незалежні частинні розв'язки $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{3x}$. Тоді

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \text{ —}$$

загальний розв'язок даного рівняння.

2. $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$k^2 - 6k + 13 = 0$$

має два комплексно-спряжені корені — $k_1 = 3 + 2i$, $k_2 = 3 - 2i$. Тоді

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) \text{ —}$$

загальний розв'язок даного рівняння.

3. $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^2 + 8k + 16 = 0$$

і знаходимо його корені $k_1 = -4$, $k_2 = -4$, тобто характеристичне рівняння має корінь $k = -4$ кратності два. Загальний розв'язок даного рівняння записуємо у вигляді

$$y = e^{-4x}(C_1 + C_2 x).$$

4. $y^{(4)}-4y^{(3)}+4y''=0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^4-4k^3+4k^2=0$$

і розв'язуємо його:

$$k^2(k^2-4k+4)=0;\ \ k_1=k_2=0,\ \ k_3=k_4=2.$$

Частинні розв'язки даного рівняння такі:

$$y_1=1,\quad y_2=x,\quad y_3=e^{2x},\quad y_4=xe^{2x}.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння такий:

$$y=C_1+C_2x+e^{2x}(C_3+C_4x).$$

5. $y'''-2y''-y'+2y=0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^3-2k^2-k+2=0.$$

Розклавши ліву частину рівняння на множники, дістанемо

$$k^3-k-2(k^2-1)=0;\quad (k^2-1)(k-2)=0;$$
$$(k-1)(k+1)(k-2)=0;\quad k_1=1,\ k_2=-1,\ k_3=2.$$

Загальний розв'язок записуємо у вигляді

$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}.$$

6. $y^{(4)}-y=0$.

Розв'язання. Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^4-1=0;\quad (k^2+1)(k-1)(k+1)=0;\quad k_{1,2}=\pm i,\ k_3=1,\quad k_4=-1.$$

Загальний розв'язок:

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x+C_3e^x+C_4e^{-x}.$$

7. Знайдіть контрольне число z правої частини рівняння

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_{n-1}y'+a_ny=f(x),$$

якщо:

а) $f(x)=5$; б) $f(x)=x^2+2x+1$; в) $f(x)=e^{4x}$;

г) $f(x)=e^{2x}\sin 7x$; д) $f(x)=-\cos 2x+3\sin 2x$; е) $f(x)=x\sin x$.

Розв'язання. У кожному випадку права частина має спеціальний вигляд (порівняйте з формулою (3.29)). Маємо:

а) $z = 0$; б) $z = 0$; в) $z = 4$; г) $z = 2 + 7i$; д) $z = 2i$; е) $z = i$.

8. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' - 3y' - 4y = x .$$

Розв'язання. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$y'' - 3y' - 4y = 0 .$$

Маємо:

$$k^2 - 3k - 4 = 0;\ k_1 = -1,\ k_2 = 4;\ \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}.$$

Контрольне число правої частини неоднорідного рівняння $z = 0$ (відсутній множник e^{zx}) не є коренем характеристичного рівняння. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y^* = Ax + B ,$$

де $Ax + B$ — лінійний вираз, який є узагальненням правої частини даного рівняння, A і B — невідомі сталі, які підлягають визначенню.

Знайдемо похідні y'^* і y''^*:

$$y'^* = A,\ \ y''^* = 0 .$$

Тепер підставимо значення виразів y^*, y'^* і y''^* у вихідне рівняння:

$$-3A - 4(Ax + B) = x ,\ -4Ax - 3A - 4B = x .$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему двох рівнянь:

$$x^1 :\ -4A = 1 ,\ x^0 :\ -3A - 4B = 0 ,$$

розв'язок якої $A = -\dfrac{1}{4}$, $B = \dfrac{3}{16}$. Отже, $y^* = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{16}$ — частинний розв'язок даного рівняння.

Загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{4}x + \frac{3}{16}.$$

9. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' - 4y' = 48x^2 - 2 .$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k = 0$ має два дійсні корені $k_1 = 0,\ k_2 = 4$. Тоді 1, e^{4x} — фундаментальна система;

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} \ —$$

загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 4y' = 0$.

Переходимо до відшукання частинного розв'язку даного рівняння. Як і в попередньому прикладі, контрольне число правої частини неоднорідного рівняння $z = 0$ (відсутній множник e^{zx}), але це число є коренем характеристичного рівняння, причому кратності 1. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx,$$

де A, B і C — невідомі сталі. Іншими словами, квадратичний вираз $Ax^2 + Bx + C$, який є узагальненням правої частини $x^2 - 2$, потрібно доможити на x^1 (див. випадок 2.2 у табл. 3.4).

Знайдемо похідні y'^* і y''^*:

$$y'^* = 3Ax^2 + 2Bx + C,\ \ y''^* = 6Ax + 2B.$$

Підставивши значення y'^* і y''^* у вихідне рівняння, дістанемо:

$$6Ax + 2B - 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 48x^2 - 2,$$

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + 2B - 4C = 48x^2 - 2.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему трьох рівнянь:

$$x^2:\ -12A = 48,\ x^1:\ 6A - 8B = 0,\ x^0:\ 2B - 4C = -2,$$

розв'язок якої $A = -4$, $B = -3$, $C = -1$. Отже, $y^* = -4x^3 - 3x^2 - x$ — частинний розв'язок даного рівняння.

Загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 + C_2 e^{4x} - 4x^3 - 3x^2 - x.$$

10. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = e^{2x}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$ має пару комплексно-спряжених коренів $k_1 = 2 + i$, $k_2 = 2 - i$. Тоді $e^{2x} \cos x$, $e^{2x} \sin x$ — фундаментальна система;

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x} \text{ —}$$

загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Контрольне число правої частини неоднорідного рівняння $z = 2$ не є коренем характеристичного рівняння. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння згідно з пунктом 1.1 табл. 3.4 шукаємо у вигляді

$$y^* = Ae^{2x}.$$

Підставивши у вихідне рівняння значення $y^* = Ae^{2x}$, $y'^* = 2Ae^{2x}$ та $y''^* = 4Ae^{2x}$, дістанемо:

$$4Ae^{2x} - 4(2Ae^{2x}) + 5(Ae^{2x}) = e^{2x},\ Ae^{2x} = e^{2x},\ A = 1.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння такий:

$$y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x)e^{2x} + e^{2x}.$$

11. Знайдіть загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Розв'язання. Розв'язуємо спочатку однорідне рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = 0.$$

Маємо:

$$k^2 - 7k + 6 = 0;\ k_1 = 1;\ k_2 = 6;\ \ \overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Контрольне число правої частини неоднорідного рівняння $z = 1$ є простим коренем характеристичного рівняння (кратності $r = 1$).

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння згідно з пунктом 3.2 табл. 3.4 шукаємо у вигляді

$$y^* = x(B_0 + B_1 x)e^x = (B_0 x + B_1 x^2)e^x.$$

Знайдемо похідні y'^* і y''^*:

$$y'^* = (B_0 + 2B_1 x)e^x + (B_0 x + B_1 x^2)e^x,$$

$$y''^* = 2B_1 e^x + 2(B_0 + 2B_1 x)e^x + (B_0 x + B_1 x^2)e^x.$$

Підставимо y^*, y'^* і y''^* у вихідне рівняння:

$$e^x(2B_1 + 2(B_0 + 2B_1x) + (B_0x + B_1x^2)) -$$
$$- 7e^x(B_0 + 2B_1x + (B_0x + B_1x^2)) + 6(B_0x + B_1x^2)e^x = (x-2)e^x .$$

Після скорочень дістанемо рівняння:

$$-10B_1x + 2B_1 - 5B_0 = x - 2.$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} -10B_1 = 1, \\ 2B_1 - 5B_0 = -2, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad B_1 = -\frac{1}{10}, \ B_0 = \frac{9}{25}.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \left(\frac{9}{25}x - \frac{x^2}{10}\right)e^x.$$

12. Розв'яжіть задачу Коші

$$y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 .$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ має корені $k_1 = 2,\ k_2 = 3$. Тоді e^{2x}, e^{3x} — фундаментальна система.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$ такий:

$$\bar{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}.$$

Праву частину даного рівняння можна записати у вигляді

$$13\sin 3x = e^{0\cdot x}(0\cos 3x + 13\sin 3x),$$

тобто контрольне число правої частини $z = 0 + 3i = 3i$, крім того, для даного випадку у формулі (3.29) $P_n(x) = 0,\ Q_m(x) = 13.$ Оскільки $z = 3i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y^* = A_0\cos 3x + B_0\sin 3x .$$

Знаходимо похідні:

$$y'^* = -3A_0\sin 3x + 3B_0\cos 3x, \quad y''^* = -9A_0\cos 3x - 9B_0\sin 3x.$$

Підставивши значення y^*, y'^* і y''^* у вихідне рівняння, дістанемо після належних перетворень співвідношення

$$-3(A_0 + 5B_0)\cos 3x + 3(5A_0 - B_0)\sin 3x = 13\sin 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 3x$ і $\cos 3x$:

$$\begin{cases} -3(A_0 + 5B_0) = 0 \\ 3(5A_0 - B_0) = 13 \end{cases} \Leftrightarrow A_0 = \frac{5}{6},\ B_0 = -\frac{1}{6}.$$

Отже,

$$y^* = \frac{5}{6}\cos 3x - \frac{1}{6}\sin 3x \ —$$

частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Загальний розв'язок даного рівняння запишеться так:

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

Переходимо до конкретизації сталих C_1 і C_2. Умова $y(0) = 1$ набуває вигляду

$$1 = C_1 + C_2 + \frac{5}{6}.$$

Оскільки

$$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(5\sin 3x + \cos 3x),$$

то умова $y'(0) = 0$ рівносильна рівнянню $0 = 2C_1 + 3C_2 - 0,5.$

Розв'язавши лінійну систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{5}{6} = 1, \\ 2C_1 + 3C_2 - 0,5 = 0, \end{cases}$$

дістанемо $C_1 = 0,\ C_2 = \dfrac{1}{6}$.

Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = \frac{1}{6}e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$$

13. Запишіть загальний вигляд частинного розв'язку рівняння

$$y'' - 4y' + 20y = xe^{2x}\sin 4x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2-4k+20=0$ має пару комплексно-спряжених коренів $k_{1,2}=2\pm 4i$. Контрольне число правої частини — значення $z=2+4i$ $(\alpha=2,\ \beta=4)$, яке збігається з коренем характеристичного рівняння. Тому $r=1$ і частинний розв'язок слід шукати у вигляді

$$y^*=xe^{2x}((A_1x+B_1)\cos 4x+(A_2x+B_2)\sin 4x).$$

14. Запишіть загальний вигляд частинного розв'язку рівняння

$$y''-2y'+5y=e^x\cos 2x+\sin 2x+x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2-2k+5=0$ має пару комплексно-спряжених коренів $k_{1,2}=1\pm 2i$. Частинний розв'язок даного рівняння шукають у вигляді $y^*=y_1^*+y_2^*+y_3^*$, де $y_1^*=xe^x(A\cos 2x+B\sin 2x)$ — частинний розв'язок рівняння $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$ (контрольне число $z=1+2i$ є коренем характеристичного рівняння), $y_2^*=C\cos 2x+D\sin 2x$ — частинний розв'язок рівняння $y''-2y'+5y=\sin 2x$ (контрольне число $z=2i$ не є коренем характеристичного рівняння), $y_3^*=Mx+N$ — частинний розв'язок рівняння $y''-2y'+5y=x$ (контрольне число $z=0$ не є коренем характеристичного рівняння), де A, B, C, D, M, N — невідомі сталі.

12. Знайдіть загальний розв'язок рівняння

$$y''+5y'+6y=\frac{1}{1+e^{2x}}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2+5k+6=0$ має корені $k_1=-2$ і $k_2=-3$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння $y''+5y'+6y=0$ має вигляд

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}.$$

Функція $f(x)=1/(1+e^{2x})$ не належить до вигляду (3.29). Тому застосуємо метод Лагранжа, згідно з яким розв'язок рівняння шукаємо у вигляді (3.31):

$$y=C_1(x)e^{-2x}+C_2(x)e^{-3x}.$$

Оскільки $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = e^{-3x}$, $y_1' = -2e^{-2x}$, $y_2' = -3e^{-3x}$, то для відшукання функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ складаємо і розв'язуємо систему рівнянь вигляду (3.32):

$$\begin{cases} C_1'e^{-2x} + C_2'e^{-3x} = 0, \\ C_1'(-2e^{-2x}) + C_2'(-3e^{-3x}) = \dfrac{1}{1+e^{2x}}; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-3x} \\ -2e^{-2x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -e^{-5x}, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{-3x} \\ \dfrac{1}{1+e^{2x}} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -\frac{e^{-3x}}{1+e^{2x}},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-2x} & 0 \\ -2e^{-2x} & \dfrac{1}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{-2x}}{1+e^{2x}}; \quad C_1' = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}, \quad C_2' = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}};$$

$$C_1 = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x}+1)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_3;$$

$$C_2 = -\int \frac{e^{3x}dx}{1+e^{2x}} = \begin{vmatrix} e^x = t \\ e^x dx = dt \end{vmatrix} = -\int \frac{t^2 dt}{1+t^2} = -(t - \operatorname{arctg} t) + C_4 = -(e^x - \operatorname{arctg} e^x) + C_4 .$$

Отже,

$$y = e^{-2x}\left[\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C_3\right] - e^{-3x}\left[e^x - \operatorname{arctg} e^x + C_4\right] \text{ —}$$

загальний розв'язок даного рівняння, де C_3, C_4 — довільні сталі.

Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть загальні розв'язки однорідних рівнянь.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

2. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

3. $y'' - 2y' + y = 0$.

4. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

5. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

6. $y''' - y'' - y' + y = 0$.

7. $y'' + y' + y = 0$.

8. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

9. $y''' + y = 0$.

10. $y^{(4)} + y = 0$.

11. $y^{(4)}+5y''+4y=0$. **12.** $y^{(5)}+8y'''+16y'=0$.

13. $y^{(5)}-5y^{(4)}+12y'''-16y''+12y'-4y=0$.

Знайдіть загальні розв'язки неоднорідних рівнянь.

14. $y''-7y'+12y=5$. **15.** $y''-7y'+6y=\sin x$.

16. $y''+y'+y=3e^{2x}$. **17.** $y''+2y'-3y=4e^{-x}$.

18. $y''-8y'+7y=3x^2+7x+8$. **19.** $y''-2y'+4y=(x+2)\,e^{3x}$.

20. $y''-2y'=x^3+2x-1$.

21. $y''-6y'+25y=2\sin x+3\cos x$.

22. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x$.

23. $y''+y=(3x+2)\sin 2x+(x^2+x+2)\cos 2x$.

24. $y''+4y=\sin 2x$. **25.** $y'''-y''=-3x+1$.

26. $y''-2y'+y=4e^x$. **27.** $y''+y=xe^x+2e^{-x}$.

Знайдіть загальні розв'язки неоднорідних рівнянь методом варіації довільних сталих.

28. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$. **29.** $y''-y'=\dfrac{2-x}{x^3}e^x$.

Розв'яжіть задачі Коші.

30. $y''+4y'+4y=3e^{-x}$, $y(0)=y'(0)=0$.

31. $y''+4y=\sin 2x$, $y(0)=y'(0)=0$.

Відповіді

1. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$. **2.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$. **3.** $y=C_1e^x+C_2xe^x$. **4.** $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$. **5.** $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x$. **6.** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3e^{-x}$. **7.** $y=\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt3}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt3}{2}x\right)e^{-\frac12 x}$. **8.** $y=C_1e^x+C_2xe^x+C_3x^2e^x$. **9.** $y=C_1e^{-x}+\left(C_2\cos\dfrac{\sqrt3}{2}x+C_3\sin\dfrac{\sqrt3}{2}x\right)e^{\frac{x}{2}}$. **10.** $y=e^{\frac{\sqrt2}{2}x}\times$ $\times\left(C_1\cos\dfrac{\sqrt2}{2}x+C_2\sin\dfrac{\sqrt2}{2}x\right)+e^{-\frac{\sqrt2}{2}x}\left(C_3\cos\dfrac{\sqrt2}{2}x+C_4\sin\dfrac{\sqrt2}{2}x\right)$. **11.** $y=C_1\sin x+$

$+C_2\cos x + C_3\sin 2x + C_4\cos 2x$. **12.** $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x$.

13. $y = C_1e^x + C_2e^x\cos x + C_3e^x\sin x + C_4xe^x\cos x + C_5xe^x\sin x$. **14.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} + \dfrac{5}{12}$.

15. $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \dfrac{7}{74}\cos x + \dfrac{5}{74}\sin x$. **16.** $y = e^{-\frac{1}{2}x}(C_1\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \dfrac{3}{7}e^{2x}$.

17. $y = C_1e^x + C_2e^{-3x} - e^{-x}$. **18.** $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + \dfrac{3}{7}x^2 + \dfrac{97}{49}x + \dfrac{1126}{343}$.

19. $y = \left(C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x\right)e^x + e^{3x}\left(\dfrac{1}{7}x + \dfrac{10}{49}\right)$. **20.** $y = C_1 + C_2e^{2x} - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{4}x^3 -$ $-\dfrac{7}{8}x^2 - \dfrac{3}{8}x$. **21.** $y = e^{3x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x) + \dfrac{14\cos x + 5\sin x}{102}$. **22.** $y = 3\sin x + 4\cos x +$ $+(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x}$. **23.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - \dfrac{9x^2 + 9x + 28}{27}\cos 2x - \dfrac{x+2}{9}\sin 2x$.

24. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$. **25.** $y = C_1e^x + C_2 + C_3x + \dfrac{1}{2}x^3 + x^2$. **26.** $y =$ $= (C_1 + C_2x)e^x + 2x^2e^x$. **27.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^{-x} + \dfrac{1}{2}(x-1)e^x$. **28.** $y = (C_1 + \ln|\sin x|)\times$ $\times\sin x + (C_2 - x)\cos x$. **29.** $y = \dfrac{e^x}{x} + C_1 + C_2e^x$. **30.** $y = 1{,}5x^2e^{-2x}$. **31.** $y = -\dfrac{x}{4}\cos 2x +$ $+\dfrac{1}{8}\sin 2x$.

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Знайдіть загальні розв'язки лінійних однорідних рівнянь.

3.1.1. а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $y'' - 2y' + 5y = 0$.

3.1.2. а) $y'' - 4y' = 0$; б) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3.1.3. а) $2y'' - y' - y = 0$; б) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

3.1.4. а) $y'' + 6y' + 13y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

3.1.5. а) $2y'' - 3y' - 5y = 0$; б) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

3.1.6. а) $y'' - 9y = 0$; б) $3y'' + 12y' + 15y = 0$.

3.1.7. а) $y'' - 2y' - 3y = 0$; б) $3y'' - 4y' + 4y = 0$.

3.1.8. а) $4y'' + 4y' + 5y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$.

3.1.9. а) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; б) $y'' - 8y' + 20y = 0$.

3.1.10. а) $y'' - 4y' + 5y = 0$; б) $y'' - 6y' + 8y = 0$.

3.1.11. а) $y'' - 4y' + 29y = 0$; б) $y'' - 7y' + 10y = 0$.

3.1.12. а) $4y'' - 4y' + y = 0$; б) $y'' + 2y' + 5y = 0$.
3.1.13. а) $y'' + 7y' + 12y = 0$; б) $4y'' + 4y' + y = 0$.
3.1.14. а) $y'' + 2y' - 8y = 0$; б) $9y'' - 12y' + 4y = 0$.
3.1.15. а) $4y'' - 12y' + 9y = 0$; б) $5y'' - 6y' + 5y = 0$.
3.1.16. а) $y'' + y' + y = 0$; б) $y'' - 4y' = 0$.
3.1.17. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$.
3.1.18. а) $y'' + 5y' + 4y = 0$; б) $9y - 12y' + 4y = 0$.
3.1.19. а) $y'' - 7y' + 6y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
3.1.20. а) $y'' + 9y' + 8y = 0$; б) $y'' - 10y' + 25y = 0$.
3.1.21. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$; б) $y'' + 4y = 0$.
3.1.22. а) $y'' + 4y' + 13y = 0$; б) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
3.1.23. а) $y'' - 2y' + 10y = 0$; б) $y'' - 12y' + 36y = 0$.
3.1.24. а) $y'' - 10y' + 9y = 0$; б) $y'' + 4y' + 13y = 0$.
3.1.25. а) $y'' - 12y' + 11y = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0$.
3.1.26. а) $2y'' - 3y' + y = 0$; б) $25y'' - 10y' + y = 0$.
3.1.27. а) $y'' - 6y' + 5y = 0$; б) $4y'' - 12y' + 9y = 0$.
3.1.28. а) $y'' + 7y' - 8y = 0$; б) $36y'' - 12y' + y = 0$.
3.1.29. а) $5y'' + 2y' - 7y = 0$; б) $16y'' - 8y' + y = 0$.
3.1.30. а) $3y'' - 5y' - 8y = 0$; б) $8y'' - 4y' + y = 0$.

3.2. Знайдіть загальні розв’язки лінійних однорідних рівнянь.

3.2.1. $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$.
3.2.2. $y^{(4)} + 16y = 0$.
3.2.3. $y''' - 2y'' + y' - 2y = 0$.
3.2.4. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$.
3.2.5. $y''' + 2y'' + 4y' + 8y = 0$.
3.2.6. $y^{(4)} + 8y'' - 9y = 0$.
3.2.7. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.
3.2.8. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$.
3.2.9. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$.
3.2.10. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = 0$.
3.2.11. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - 3y' + 2y = 0$.
3.2.12. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$.
3.2.13. $y''' + 9y'' + 27y' + 27y = 0$.
3.2.14. $y^{(4)} - 13y'' + 36y = 0$.
3.2.15. $y''' - 4y'' + y' + 6y = 0$.
3.2.16. $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$.
3.2.17. $y''' + 3y'' - 9y' - 27y = 0$.
3.2.18. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
3.2.19. $y''' + 2y'' - 4y' - 8y = 0$.
3.2.20. $y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0$.
3.2.21. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
3.2.22. $y^{(4)} - 3y''' - y'' + 3y' = 0$.

3.2.23. $y^{(4)}-2y'''+2y''-2y'+y=0$.

3.2.24. $y^{(4)}-7y'''+6y''=0$.

3.2.25. $y'''+3y''-4y'-12y=0$.

3.2.26. $y^{(4)}-2y'''+2y''=0$.

3.2. 27. $y^{(4)}+2y'''+2y''+2y'+y=0$.

3.2.28. $y^{(4)}-3y''-4y=0$.

3.2.29. $y^{(4)}-y'''-3y''+y'+2y=0$.

3.2.30. $y'''-2y''+9y'-18y=0$.

3.3. Знайдіть загальні розв’язки лінійних неоднорідних рівнянь із правою частиною спеціального вигляду.

3.3.1. $y''-2y'+y=xe^x$.

3.3.2. $y''+y=x\sin x$.

3.3.3. $y''-6y'+9y=e^x\sin x$.

3.3.4. $y''+2y'+5y=e^x\sin 2x$.

3.3.5. $y''-6y'+9y=2x^2-2x+3$.

3.3.6. $y''-2y'+2y=e^x\cos x$.

3.3.7. $y''+4y'+5y=x^2+3$.

3.3.8. $y''-3y'+2y=2xe^x$.

3.3.9. $y''+2y'=2+x-x^2$.

3.3.10. $4y''-16y'+15y=e^{1,5x}$.

3.3.11. $y''+4y'+4y=e^{-2x}+e^x$.

3.3.12. $y''-y'=2x^2$.

3.3.13. $y''+y'=e^{-x}+x+1$.

3.3.14. $y''+2y'+10y=xe^{-x}$.

3.3.15. $y''+y'-2y=e^x\cos x$.

3.3.16. $y''+2y'+y=e^{-x}+\sin x$.

3.3.17. $y''+4y=\cos 2x$.

3.3.18. $y''+9y=xe^{3x}$.

3.3.19. $y''-2y'+2y=e^x\sin 2x$.

3.3.20. $y''+9y=e^{3x}$.

3.3.21. $y''-2y'+y=e^x$.

3.3.22. $y''-3y'=1-2x-x^2$.

3.3.23. $y''+4y'-5y=xe^x$.

3.3.24. $y''-4y'+4y=e^{2x}$.

3.3.25. $y''+2y'+2y=(x+1)e^x$.

3.3.26. $y''+2y'+5y=\cos x$.

3.3.27. $y''+4y'+3y=e^{-x}+x^2$.

3.3.28. $y''+4y'+8y=\cos 2x$.

3.3.29. $y''-3y'+2y=e^{2x}$.

3.3.30. $y''-8y'=\sin 4x+x$.

3.4. Розв’яжіть задачі Коші для рівнянь другого порядку.

3.4.1. $y''+4y'+8y=\sin 4x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

3.4.2. $y''-3y'+2y=e^x$, $y(0)=2$, $y'(0)=1$.

3.4.3. $y''+y'+y=\cos 2x$, $y(0)=-1$, $y'(0)=3$.

3.4.4. $y''-4y'+3y=x^2-3x$, $y(0)=2$, $y'(0)=4$.

3.4.5. $y''+2y'+5y=e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

3.4.6. $y''-10y'+9y=xe^x$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

3.4.7. $y''-4y'+4y=e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

3.4.8. $y'' - 2y' + 2y = 3x - 2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$.

3.4.9. $y'' + 5y' - 6y = e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

3.4.10. $y'' + 2y' + 10y = x^2 - 4$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.

3.4.11. $y'' - 4y' = x^2 - 5x + 2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$.

3.4.12. $y'' - 2y' + y = e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 5$.

3.4.13. $y'' + 9y = \sin 3x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

3.4.14. $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

3.4.15. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

3.4.16. $y'' + y' - 2y = e^{2x} \sin x$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 1$.

3.4.17. $y'' + 6y' + 9y = e^{-3x}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$.

3.4.18. $y'' + 4y' + 5y = e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$.

3.4.19. $4y'' - 16y' + 15y = x^2 - 1$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

3.4.20. $4y'' + 4y' + 5y = xe^x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = -1$.

3.4.21. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

3.4.22. $y'' + 4y' + 5y = x^2 + 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$.

3.4.23. $y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

3.4.24. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 + 5$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.

3.4.25. $2y'' - y' - y = e^x + x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3.4.26. $y'' - 2y' + 10y = \cos x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -3$.

3.4.27. $4y'' - 8y' + 5y = xe^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$.

3.4.28. $3y'' - 12y' + 4y = e^x \sin 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 5$.

3.4.29. $y'' - 4y' = 2x^2 + 3x - 1$, $y(0) = 6$, $y'(0) = -2$.

3.4.30. $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$.

3.5. Розв’яжіть рівняння, використовуючи метод Лагранжа.

3.5.1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{2x+1}$.

3.5.2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 4}$.

3.5.3. $y'' - 4y' + 3y = \ln(1 + e^{-x})$.

3.5.4. $y'' + 4y = \mathrm{tg}^2\, 2x$.

3.5.5. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{(1 + e^x)^2}$.

3.5.6. $y'' + y = \dfrac{x}{\cos^3 x}$.

3.5.7. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\ln(x^2 + 1)$.

3.5.8. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln(x^2 + 4)$.

3.5.9. $y'' + 4y = \dfrac{1}{3 + \cos^2 2x}$.

3.5.10. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

3.5.11. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2}$.

3.5.12. $y'' - y = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

3.5.13. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{tg} x$.

3.5.14. $y'' - 2y' = \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

3.5.15. $y'' - 2y' + 2y = \dfrac{e^x}{\sin x}$.

3.5.16. $y'' - 3y' + 2y = \sin(e^{-x})$.

3.5.17. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}\sin x}{\sin^2 x + 1}$.

3.5.18. $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}e^{2x}$.

3.5.19. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

3.5.20. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\operatorname{arctg} x$.

3.5.21. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x^2 - 1}$.

3.5.22. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

3.5.23. $y'' + 3y' + 2y = \cos(e^x)$.

3.5. 24. $y'' + 4y' + 3y = \operatorname{arctg}(e^x)$.

3.5.25. $y'' + 5y' + 6y = e^{-x}\ln(1 + e^x)$.

3.5.26. $y'' + y = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x - 2}$.

3.5.27. $y'' + 2y' + y = e^{-x}\ln x$.

3.5.28. $y'' + 2y' + y = \sqrt[3]{x}e^{-x}$.

3.5.29. $y'' + 9y = \dfrac{\cos 3x}{\sin^2 3x + 1}$.

3.5.30. $y'' - 2y' + y = e^x\sqrt{1 - x}$.

Тема 4. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нормальна система диференціальних рівнянь. Методи виключення та інтегровних комбінацій розв'язання систем диференціальних рівнянь у нормальній формі. Системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Узагальнений метод Ейлера.

Література: [2, розділ 3, п. 3.3], [3, розділ 8, § 6], [4, розділ 8, § 26], [6, розділ 11, п. 11.5], [7, розділ 13, § 29—30], [8, 2 част., § 6].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Нормальна система диференціальних рівнянь

Систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \tag{3.33}$$

де $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)$ — невідомі функції, t — незалежна змінна, називають системою у нормальній формі або системою, розв'язаною відносно похідних шуканих функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Розв'язком системи (3.33) на проміжку (a, b) називають сукупність n неперервно-диференційовних функцій

$$y_1 = \varphi_1(t), \;\; y_2 = \varphi_2(t), \;\; ..., \;\; y_n = \varphi_n(t),$$

які обертають кожне рівняння цієї системи у тотожність.

Задача Коші для системи (3.33) полягає у відшуканні такого її розв'язку, який задовольняє початкові умови:

$$y_1(t_0) = a_1, \;\; y_2(t_0) = a_2, \;\; ..., \;\; y_n(t_0) = a_n,$$

де $a_1, \; a_2, ..., \; a_n$ — задані дійсні числа.

Для розв'язання систем диференціальних рівнянь у нормальній формі застосовують такі методи:

1) метод виключення;
2) метод інтегровних комбінацій.

Загальна схема *методу виключення* така. Шляхом диференціювань рівнянь системи і виключення всіх невідомих функцій $y_i(t)$, крім однієї, дістають диференціальне рівняння n-го порядку відносно однієї функції (наприклад, y_1). Проінтегрувавши це рівняння, послідовно знаходять інші невідомі функції.

Суть *методу інтегровних комбінацій* полягає у тому, що за допомогою арифметичних операцій з рівнянь даної системи утворюють так звані інтегровні комбінації, тобто рівняння відносно деякої нової функції $u = u(t, y_1, y_2, .., y_n)$, які легко інтегруються.

4.2. Метод Ейлера розв'язання систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Нормальною системою лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами називають систему вигляду

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + f_1(t), \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + f_2(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + f_n(t), \end{cases} \tag{3.34}$$

де y_1, y_2, ..., y_n — невідомі функції незалежної змінної t; f_1, f_2, ..., f_n — задані і неперервні на інтервалі (a, b) функції; a_{ij} — сталі величини $(i, j = \overline{1, n})$. Якщо $f_i(x) \equiv 0$ $(i = \overline{1, n})$, то систему (3.34) називають *однорідною*, в протилежному випадку — *неоднорідною*.

Розглянемо *алгебраїчний метод* розв'язання лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь (узагальнений *метод Ейлера*).

Нехай дано систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{3.35}$$

Цю систему можна записати у вигляді одного матричного рівняння

$$\frac{dY}{dt} = AY.$$

Тут

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dt} \\ \frac{dy_2}{dt} \end{pmatrix}.$$

Загальний розв'язок системи (3.35) має вигляд

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix},$$

де $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$ та $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}$ — лінійно незалежні частинні розв'язки даної системи.

Частинний розв'язок системи шукаємо у вигляді

$$y_1 = p_1 e^{kt}, \quad y_2 = p_2 e^{kt}, \tag{3.36}$$

де p_1, p_2, k — невідомі сталі. Після підстановки формул (3.36) у систему (3.35) дістанемо однорідну систему лінійних алгебраїчних відносно невідомих p_1 і p_2 рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - k)p_1 + a_{12}p_2 = 0, \\ a_{21}p_1 + (a_{22} - k)p_2 = 0. \end{cases} \tag{3.37}$$

Одержана система повинна мати ненульовий розв'язок. Отже,

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \tag{3.38}$$

або

$$\boxed{k^2 - (a_{11} + a_{22})k + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0.}$$

Це рівняння називають *характеристичним* рівнянням системи (3.35).

Нехай k_1, k_2 — різні дійсні корені характеристичного рівняння.

Тоді кореню k_1 відповідає власний вектор $(p_1^{(1)}, p_2^{(1)})$ і частинний розв'язок $y_1^{(1)} = p_1^{(1)} e^{k_1 t}$, $y_2^{(1)} = p_2^{(1)} e^{k_1 t}$. Аналогічно кореню k_2 відповідає власний вектор $(p_1^{(2)}, p_2^{(2)})$ і частинний розв'язок $y_1^{(2)} = p_1^{(2)} e^{k_2 t}$, $y_2^{(2)} = p_2^{(2)} e^{k_2 t}$. Загальний розв'язок системи такий:

$$y_1 = C_1 y_1^{(1)} + C_2 y_1^{(2)}, \; y_2 = C_1 y_2^{(1)} + C_2 y_2^{(2)},$$

який у матричній формі записують так:

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} p_1^{(1)} \\ p_2^{(1)} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} p_1^{(2)} \\ p_2^{(2)} \end{pmatrix} e^{k_2 t}.}$$

Відмітимо, що у випадку, коли характеристичне рівняння (3.38) має кратні корені, систему (3.35) зручніше розв'язувати методом виключень.

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = 5y + 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z + t. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо дану систему методом виключення. Продиференціюємо її перше рівняння:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 5\frac{dy}{dt} + 4\frac{dz}{dt}.$$

Підставимо в одержане рівняння замість $\dfrac{dz}{dt}$ його значення із другого рівняння системи. Дістанемо рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 5\frac{dy}{dt} + 8y + 12z + 4t. \tag{3.39}$$

Із першого рівняння системи знаходимо

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dt} - 5y\right) \tag{3.40}$$

і підставимо у рівняння (3.39) замість z значення $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{dy}{dt} - 5y\right)$. У результаті дістанемо лінійне рівняння другого порядку

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + 7y = 4t. \tag{3.41}$$

Складаємо і розв'язуємо характеристичне рівняння:

$$k^2 - 8k + 7 = 0; \quad k_1 = 1, \ k_2 = 7.$$

Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\overline{y} = C_1 e^t + C_2 e^{7t}.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.41) шукаємо у вигляді

$$y^* = At + B.$$

Підставивши y^* у рівняння (4.41), дістанемо співвідношення

$$-8A + 7(At + B) = 4t,$$

яке виконується при довільному t за умови

$$\begin{cases} 7A = 4, \\ -8A + 7B = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad A = \frac{4}{7},\ B = \frac{32}{49}.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (4.41) має вигляд

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{7t} + \frac{4}{7} t + \frac{32}{49}.$$

За формулою (3.40) знаходимо

$$z = -C_1 e^t + \frac{1}{2} C_2 e^{7t} - \frac{5}{7} t - \frac{43}{49}.$$

У матричній формі розв'язок вихідної системи можна записати так:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} 4t/7 + 32/49 \\ -5t/7 - 43/49 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть загальний розв'язок системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + xy, \\ \dfrac{dy}{dt} = xy + y^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'яжемо дану систему методом інтегровних комбінацій.

Склавши рівняння, дістанемо першу інтегровну комбінацію

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = x^2 + 2xy + y^2, \quad \text{або} \quad \frac{d(x+y)}{dt} = (x+y)^2,$$

звідки

$$\frac{d(x+y)}{(x+y)^2} = dt, \quad -\frac{1}{x+y} = t + C_1.$$

Ще одну інтегровну комбінацію одержуємо, поділивши перше рівняння на друге:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + xy}{xy + y^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad y = C_2 x.$$

З рівнянь $-\dfrac{1}{x+y}=t+C_1$, $y=C_2x$ визначаємо загальний розв'язок даної системи:

$$x=\frac{1}{(C_1-t)(1+C_2)},\ y=\frac{C_2}{(C_1-t)(1+C_2)}.$$

3. Знайдіть загальний розв'язок системи

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=5y_1+2y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=4y_1+3y_2.\end{cases}$$

Розв'язання. Застосуємо узагальнений метод Ейлера. Складаємо характеристичне рівняння системи

$$\begin{vmatrix}5-k & 2\\ 4 & 3-k\end{vmatrix}=0,\text{ або } k^2-8k+7=0.$$

Його корені — $k_1=1$, $k_2=7$.

При $k=1$ система (3.37) рівносильна одному рівнянню

$$4p_1+2p_2=0.$$

Візьмемо $p_1=1$, тоді $p_2=-2$. Отже, кореню $k=1$ відповідає власний вектор $(1;-2)$. Тоді $y_1^{(1)}=e^t$, $y_2^{(1)}=-2e^t$ — частинний розв'язок даної системи.

При $k=7$ із системи (3.37) дістаємо рівняння

$$-2p_1+2p_2=0,\text{ або } p_1=p_2,$$

яке визначає власний вектор $(1;\ 1)$. Тоді $y_1^{(2)}=e^{7t}$, $y_2^{(2)}=e^{7t}$ — також частинний розв'язок даної системи.

Загальний розв'язок даної системи записуємо у вигляді

$$y_1=C_1e^t+C_2e^{7t},\ y_2=-2C_1e^t+C_2e^{7t},\quad\text{або}\quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}e^t+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{7t}.$$

4. Знайдіть загальний розв'язок системи

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt}=y_1+y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt}=-2y_1+3y_2.\end{cases}$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, застосуємо узагальнений метод Ейлера.

Характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 1-k & 1 \\ -2 & 3-k \end{vmatrix} = 0$, тобто $k^2 - 4k + 5 = 0$ має пару комплексно-спряжених коренів $k_{1,2} = 2 \pm i$. У цьому випадку для побудови розв'язку даної системи достатньо знати лише розв'язок, що відповідає значенню $k = 2 + i$.

При $k = 2 + i$ система (3.37) перейде в рівняння $(-1-i)p_1 + p_2 = 0$. Якщо $p_1 = 1$, то $p_2 = 1 + i$. Отже, кореню $2 + i$ відповідає власний вектор $(1;\ 1+i)$ і відповідний частинний розв'язок

$$Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(2+i)t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{2t} (\cos t + i \sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} .$$

Тоді

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{2t} \text{ —}$$

загальний розв'язок системи.

5. Розв'яжіть задачу Коші

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \mathrm{y}(0) = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння даної системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} 3-k & 1 \\ -1 & 1-k \end{vmatrix} = 0 ,$$

звідки

$$(3-k)(1-k) + 1 = 0 ,\ k^2 - 4k + 4 = 0 ,\ k_1 = k_2 = 2 .$$

Оскільки власні числа рівні, то розв'язки даної системи шукаємо у вигляді

$$x = (\alpha + \gamma t)e^{2t} ,\ y = (\beta + \delta t)e^{2t} .$$

Підставивши ці вирази в дану систему, дістанемо

$$\gamma + 2(\alpha + \gamma t) = 3(\alpha + \gamma t) + \beta + \delta t , \quad \delta + 2(\beta + \delta t) = -\alpha - \gamma t + \beta + \delta t .$$

Ці рівності виконуються при довільному t тоді і тільки тоді, коли виконуються рівності $\alpha - \gamma + \beta = 0$, $\gamma + \delta = 0$. Звідси дістаємо два лінійно незалежні розв'язки, наприклад, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = \delta = 0$ і $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = -1$.

Отже, записуємо лінійно незалежні розв'язки системи:

$$x_1(t) = e^{2t}, \quad x_2(t) = (1+t)e^{2t};$$
$$y_1(t) = -e^{2t}, \quad y_2(t) = -te^{2t}.$$

Загальний розв'язок даної системи такий:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2(1+t)e^{2t}, \quad y = -C_1 e^{2t} - C_2 te^{2t}.$$

Визначимо тепер сталі C_1 і C_2. Враховуючи початкові умови $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, дістанемо систему рівнянь

$$C_1 + C_2 = 1, \; 0 = -C_1,$$

розв'язок якої — $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Отже,

$$x = (1+t)e^{2t}, \; y = -te^{2t} \text{ —}$$

розв'язок задачі Коші.

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь методом інтегровних комбінацій.

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t}{y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{x}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y}{(x-y)^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x}{(x-y)^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x}{x+y}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{x+y}; \end{cases}$ $x(0) = 2, \; y(0) = 4$.

Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь, використовуючи метод виключення або узагальнений метод Ейлера.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -20x + 6y. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{y}{2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 3x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 6y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 3y + t. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^t, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^2. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y + t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y + t^2. \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 2y + 3e^{2t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y + e^{2t}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y. \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 5y - z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 3z. \end{cases}$

Відповіді

1. $x = C_2 e^{C_1 t^2}$, $y = \dfrac{1}{2C_1C_2} e^{-C_1 t^2}$. **2.** $x^2 - y^2 = C_1$, $2x + (x-y)^2 = C_2$. **3.** $x = \dfrac{t}{3} + 2$, $y = \dfrac{2t}{3} + 4$. **4.** $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^t$, $y = 5C_1 e^{2t} + 4C_2 e^t$. **5.** $x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $y = 2C_1 \sin t - 2C_2 \cos t$. **6.** $x = e^t (C_1 \cos 2\sqrt{3}t + C_2 \sin 2\sqrt{3}t)$, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} e^t \left(C_2 \cos 2\sqrt{3}t - C_1 \sin 2\sqrt{3}t\right)$.
7. $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$, $y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$. **8.** $x = C_1 + C_2 e^{7t} - \dfrac{3}{49}(7t + 2)t$, $y = -\dfrac{2}{3} C_1 +$

$+\frac{1}{2}C_2e^{7t}+\frac{1}{49}(14t^2-3t-1)$. **9.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+$ $+(t-1)e^t-2t$. **10.** $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+e^t(2\cos t-\sin t)$, $y=C_1e^t-C_2e^{3t}+e^t(3\cos t+\sin t)$. **11.** $x=\frac{1}{2}\cos t-(C_1+(1+t)C_2)e^t$, $y=C_1e^t+C_2te^t-2\cos t-\frac{\sin t}{2}$. **12.** $x=(C_1+C_2t)e^{2t}+$ $+\frac{1}{8}(2t^2-2t+3)$, $y=(C_2(1-t)-C_1)e^{2t}-\frac{1}{8}(6t^2-2t+11)$. **13.** $x=C_1e^t+2C_2e^{4t}-e^{2t}$, $y=-C_1e^t+$ $+C_2e^{4t}-e^{2t}$. **14.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^t-3C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-$ $-5C_3e^{-t}$. **15.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{6t}$, $y=C_2e^{3t}-2C_3e^{6t}$, $z=-C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+C_3e^{6t}$.

Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Розв'яжіть системи диференціальних рівнянь методом виключення. У кожній системі $x=x(t), y=y(t)$, $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$, $\dot{y}=\frac{dy}{dt}$.

4.1.1. $\begin{cases}\dot{x}=4x+3y+t,\\ \dot{y}=-2x-y.\end{cases}$

4.1.2. $\begin{cases}\dot{x}=x-2y+e^t,\\ \dot{y}=x+4y+1.\end{cases}$

4.1.3. $\begin{cases}\dot{x}=x-y+\cos 3t,\\ \dot{y}=x-3y.\end{cases}$

4.1.4. $\begin{cases}\dot{x}=x-y+t^2-1,\\ \dot{y}=5x+5y-2.\end{cases}$

4.1.5. $\begin{cases}\dot{x}=x-3y+\sin t,\\ \dot{y}=x+5y-\cos t.\end{cases}$

4.1.6. $\begin{cases}\dot{x}=-3x+6y+2t,\\ \dot{y}=-x+4y-t.\end{cases}$

4.1.7. $\begin{cases}\dot{x}=-6x-4y+t,\\ \dot{y}=3x+2y-5.\end{cases}$

4.1.8. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y+t-2,\\ \dot{y}=3x+4y+3.\end{cases}$

4.1.9. $\begin{cases}\dot{x}=2x+2y-\sin 2t,\\ \dot{y}=x+3y.\end{cases}$

4.1.10. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-5y+e^t,\\ \dot{y}=x+4y+2.\end{cases}$

4.1.11. $\begin{cases}\dot{x}=4x-5y+e^{2t},\\ \dot{y}=2x-2y.\end{cases}$

4.1.12. $\begin{cases}\dot{x}=x-y-e^{-t},\\ \dot{y}=2x+3y+2e^{-t}.\end{cases}$

4.1.13. $\begin{cases}\dot{x}=2x+5y,\\ \dot{y}=2y+\sin t.\end{cases}$

4.1.14. $\begin{cases}\dot{x}=-x+4y,\\ \dot{y}=x+2y+e^t.\end{cases}$

4.1.15. $\begin{cases}\dot{x}=4x-y+e^t,\\ \dot{y}=x+2y+2e^t.\end{cases}$

4.1.16. $\begin{cases}\dot{x}=-2x+5y+3,\\ \dot{y}=-x+2y-4.\end{cases}$

4.1.17. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 2y - \cos t, \\ \dot{y} = 4x + 2y + 2. \end{cases}$

4.1.18. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - 2t, \\ \dot{y} = -5x - y + 3t. \end{cases}$

4.1.19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y + e^{-2t}, \\ \dot{y} = 5x - 2y + 4. \end{cases}$

4.1.20. $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 8y + e^{2t}, \\ \dot{y} = -2x - 2y - 3e^{2t}. \end{cases}$

4.1.21. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - t - 2, \\ \dot{y} = 2x + 3y + 2t. \end{cases}$

4.1.22. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + e^{t}, \\ \dot{y} = -5x + 5y + 3e^{t}. \end{cases}$

4.1.23. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y + \sin t, \\ \dot{y} = -3x + 2y + \cos t. \end{cases}$

4.1.24. $\begin{cases} \dot{x} = -6x - y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 17x + 2y - e^{-t}. \end{cases}$

4.1.25. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 5y + t^2, \\ \dot{y} = -5x + y + t - 4. \end{cases}$

4.1.26. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + t^2, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$

4.1.27. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^{t}, \\ \dot{y} = x - 3y + t. \end{cases}$

4.1.28. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - 2y + e^{-t}, \\ \dot{y} = 2x + y. \end{cases}$

4.1.29. $\begin{cases} \dot{x} = -3x - y - e^{-2t}, \\ \dot{y} = x - y + 1. \end{cases}$

4.1.30. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 17y + t^2, \\ \dot{y} = -2x - 3y - t. \end{cases}$

4.2. Розв’яжіть методом Ейлера систему однорідних диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases}$ якщо:

4.2.1. $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$.

4.2.2. $a_{11} = 4$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 2$.

4.2.3. $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$.

4.2.4. $a_{11} = 3$, $a_{12} = 8$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 1$.

4.2.5. $a_{11} = 7$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 3$.

4.2.6. $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -5$, $a_{22} = 4$.

4.2.7. $a_{11} = -2$, $a_{12} = 3$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = -2$.

4.2.8. $a_{11} = -5$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 1$.

4.2.9. $a_{11} = 2$, $a_{12} = -4$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$.

4.2.10. $a_{11} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 4$.

4.2.11. $a_{11} = -2$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = -4$.

4.2.12. $a_{11} = 5$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 17$, $a_{22} = -3$.

4.2.13. $a_{11} = 2$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 5$.

4.2.14. $a_{11} = 7$, $a_{12} = 9$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 1$.

4.2.15. $a_{11} = 3$, $a_{12} = 13$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = -1$.

4.2.16. $a_{11} = 6$, $a_{12} = 5$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 2$.

4.2.17. $a_{11} = 7$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 5$.

4.2.18. $a_{11} = -3$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 1$.

4.2.19. $a_{11} = -2$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = -5$.

4.2.20. $a_{11} = 8$, $a_{12} = 4$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 4$.

4.2.21. $a_{11} = -5$, $a_{12} = -5$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = 1$.

4.2.22. $a_{11} = 7$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 2$.

4.2.23. $a_{11} = -9$, $a_{12} = 9$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = -3$.

4.2.24. $a_{11} = -4$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = -5$, $a_{22} = -2$.

4.2.25. $a_{11} = -6$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 5$, $a_{22} = -3$.

4.2.26. $a_{11} = 4$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = -2$.

4.2.27. $a_{11} = 5$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 3$.

4.2.28. $a_{11} = -7$, $a_{12} = -6$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 3$.

4.2.29. $a_{11} = -3$, $a_{12} = -2$, $a_{21} = 2$, $a_{22} = 1$.

4.2.30. $a_{11} = -7$, $a_{12} = -3$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = -1$.

ДОДАТКИ

I. Основні правила диференціювання. Нехай $u(x)$, $v(x)$ — диференційовні в точці x функції, C — стала. Тоді справджуються формули:

1. $(u+v)' = u' + v'$.	**3.** $(Cu)' = Cu'$.
2. $(uv)' = u'v + uv'$.	**4.** $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

II. Похідна складеної функції. Якщо функція $y = f(u)$ має похідну в точці u, а функція $u = g(x)$ — в точці x, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційовна в точці x, причому

$$y' = f'(u) \cdot g'(x).$$

III. Формули диференціювання основних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$	**11.** $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$	**12.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
3. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	**13.** $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	**14.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a$	**15.** $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $(e^x)' = e^x$	**16.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	**17.** $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
8. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	**18.** $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
9. $(\sin x)' = \cos x$	**19.** $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
10. $(\cos x)' = -\sin x$	**20.** $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

IV. Диференціал dy **функції** $y = f(x)$ в точці x: $dy = f'(x)dx$.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ І ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Буйвол В. М.* Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. — К.: НАУ, 2000. — 312 с.

2. *Валєєв К. Г., Джалладова І. Л.* Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 1. — 546 с.

3. *Валєєв К .Г., Джалладова І. Л.* Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. — К.: КНЕУ, 2001. — Ч. 2. — 451 с.

4. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика. — К.: А.С.К., 2001. — 648 с.

5. *Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О.* Вища математика: Приклади і задачі / Посібник. — К.: Видавничий центр «Академія», 2002. — 624 с. (Альма–матер).

6. *Овчинников П. П., Яремчук Ф. П., Михайленко В. М.* Вища математика: Підручник: У 2 ч. Ч. 1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне і інтегральне числення. — К.: Техніка, 2000. — 592 с.

7. *Пак В. В., Носенко Ю. Л.* Вища математика: Підручник. — Д.: Сталкер, 2003. — 496 с.

8. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. — М.: Наука, 1985. — Т. 1. — 456 с.

9. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 288 с.

10. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. — 2-е изд., испр. — М.: Айрис-пресс, 2003. — 256 с.

ЗМІСТ

Вступ 3

Модуль 1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ КІЛЬКОХ ЗМІННИХ. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА 4

Тема 1. Функція кількох змінних. Основні поняття, границя та неперервність 6
Тема 2. Похідні та диференціали функції кількох змінних 19
Тема 3. Деякі застосування частинних похідних 41
Тема 4. Комплексні числа 63

Модуль 2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ 75

Тема 1. Невизначений інтеграл 76
Тема 2. Многочлени. Раціональні функції 99
Тема 3. Інтегрування раціональних виразів 109
Тема 4. Інтегрування тригонометричних функцій 126
Тема 5. Інтегрування ірраціональних функцій 137
Тема 6. Визначений інтеграл 156
Тема 7. Невласні інтеграли 166
Тема 8. Застосування визначеного інтеграла 176

Модуль 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ 199

Тема 1. Диференціальні рівняння першого порядку 201
Тема 2. Диференціальні рівняння вищих порядків 229
Тема 3. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами 241
Тема 4. Системи диференціальних рівнянь 260

Додатки 273

Список рекомендованої і використаної літератури 274

Навчальне видання

ДЕНИСЮК Володимир Петрович
РЕПЕТА Віктор Кузьмич

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Модульна технологія навчання

Навчальний посібник

У чотирьох частинах

Частина 2

Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Коректор *Л. Тютюнник*
Верстка *О. Іваненко*

Підп. до друку 23.02.09. Формат 60×84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 16,04. Обл.-вид. арк. 17,25.
Тираж 1000 пр. Замовлення № 45-1. Вид. № 05-068.

Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
03680, Київ-58, просп. Космонавта Комарова, 1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК, № 977 від 05.07.2002
Тел./факс (044) 406-71-33
E-mail: publish@nau.edu.ua