1.3.25. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & 7 \\ -1 & 12 & 3 & -34 \\ 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. **1.3.26.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 3 & 9 \\ -1 & 14 & 4 & -41 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

1.3.27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & -3 & 3 & 11 \\ -1 & 16 & 5 & -48 \\ 2 & 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. **1.3.28.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & 3 & 13 \\ -1 & 18 & 6 & -55 \\ 2 & 0 & 8 & 6 \end{vmatrix}$.

1.3.29. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 9 \\ 2 & -3 & 3 & 15 \\ -1 & 20 & 7 & -62 \\ 2 & 0 & 9 & 8 \end{vmatrix}$. **1.3.30.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & -3 & 3 & 17 \\ -1 & 22 & 8 & -69 \\ 2 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix}$.

Тема 2. МАТРИЦІ

Поняття матриці, дії з матрицями. Обернена матриця. Матричні рівняння. Ранг матриці і його властивості.

Література: [1, розділ 2—3], [4, розділ 2, п.п. 2.2—2.4], [6, розділ 1, §2], [7, розділ 2, §7], [10, розділ 1, §2], [11, розділ 1, §1].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Основні означення

Прямокутну таблицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яка складається з $m \times n$ чисел a_{ij} $(i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m)$, називають *матрицею*, а числа a_{ij} — *елементами* цієї матриці. Добуток кількості рядків на кількість стовпчиків $m \times n$ називають *розміром* матриці.

Коротко матрицю позначають так:

$$A = (a_{ij}),\ \text{де}\ i = \overline{1,\ n},\ \ j = \overline{1,\ m}.$$

Матрицю A розміру $m \times n$ позначають $A_{m \times n}$.

Матрицю, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називають *квадратною*. В іншому випадку матрицю називають *прямокутною*.

Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають *нульовою*.

Елементи $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ утворюють *головну діагональ* квадратної матриці, а елементи $a_{1n}, a_{2n-1}, ..., a_{n1}$ — *бічну діагональ*.

Квадратну матрицю називають *трикутною*, якщо всі елементи, що розташовані під (над) головною діагоналлю, дорівнюють нулю, а серед тих, що залишилися, є ненульові.

Квадратну матрицю, всі елементи якої, крім діагональних, дорівнюють нулю, називають *діагональною*.

Квадратну матрицю, всі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці, а всі інші — нулю, називають *одиничною* і позначають

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю A^T називають *транспонованою* до матриці A, якщо рядки матриці A^T є стовпцями матриці A, а стовпці — рядками матриці A.

Матрицю, яка містить один стовпець чи один рядок, називають *вектор-стовпцем* чи *вектор-рядком* відповідно. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ ... \\ a_m \end{pmatrix},\ \ A = (a_1, a_2,\ ...,\ a_n).$$

Будь-якій квадратній матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

можна поставити у відповідність визначник $\det(A)$ (або $\Delta(A)$):

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Квадратну матрицю A, визначник якої не дорівнює нулю, називають *невиродженою.*

Якщо $\det(A)=0$, то матрицю A називають *виродженою.*

Прямокутна матриця, яка не є квадратною, визначника не має.

2.2. Дії з матрицями

Нехай A і B — матриці однакового розміру.

1. *Сумою* матриць A і B є матриця $A+B$ того самого розміру, кожен елемент якої є сумою відповідних елементів матриць A і B, тобто якщо

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

то

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & b_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. *Добутком* довільного дійсного числа λ на матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

є матриця

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Різницю матриць $A - B$ визначають як суму матриці A і матриці B, помноженої на -1:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Операція множення матриць існує лише для узгоджених матриць.

Матриці A і B (тут A — *перша* матриця, B — *друга* матриця) називають *узгодженими*, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B.

Нехай A і B — узгоджені матриці, розмірів $m \times n$ і $n \times k$ відповідно. *Добутком* матриці A на матрицю B називають матрицю $C = AB$ розміру $m \times k$, у якої елемент c_{ij} є сумою добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k$

Зауваження. У загальному випадку $AB \neq BA$.

Властивості дій над матрицями.

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
4. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
5. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
6. $(\alpha A)B = A(\alpha B)$.
7. $(A + B)C = CA + BC$.
8. $(AB)C = A(BC)$.
9. $(A^T)^T = A$.
10. $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Тут A, B, C — матриці, α, β — довільні сталі.

2.3. Обернена матриця

Для кожної невиродженої матриці A ($\det(A) \neq 0$) існує обернена матриця A^{-1}.

> Матрицю A^{-1} називають *оберненою* до матриці A, якщо виконуються рівності $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, де E — одинична матриця.

Обернену матрицю знаходять за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

де A_{ij} — алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Проведемо доведення для випадку матриці третього порядку. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ \det(A) \neq 0 .$$

Знайдемо добуток $A \cdot A^{-1}$, використовуючи при цьому твердження теорем 1 та 2. Маємо

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$c_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \det(A),$$

$$c_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \det(A),$$

$$c_{33} = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = \det(A),$$

$$c_{12} = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0,\ \ c_{13} = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0,$$

$$c_{21} = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0,\ \ c_{23} = a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0,$$

$$c_{31} = a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0,\ \ c_{32} = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0.$$

Отже,

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогічно можна показати, що $A^{-1}A = E$.
Отже, формула (1.3) правильна.

Зауваження. Зверніть особливу увагу на порядок індексів у формулі (1.3).

Відмітимо властивості оберненої матриці:

1. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$. **2.** $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. **3.** $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.4. Матричні рівняння

Нехай потрібно знайти матрицю X, що задовольняє матричне рівняння $XA = B$, де A — невироджена матриця.

Помноживши справа обидві частини рівняння на обернену матрицю A^{-1}, дістанемо:

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1},\ \ X(AA^{-1}) = BA^{-1},\ \ XE = BA^{-1},\ \text{або}$$

$$\boxed{X = BA^{-1}.}$$

Розв'язок матричного рівняння $AX = B$ знаходять за формулою

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

2.5. Ранг матриці

Нехай задано матрицю A розміру $m \times n$. Виділимо в матриці A будь-які k рядків і стільки ж стовпців, де число k не більше чисел m і n.

Визначник порядку k, складений з елементів, що стоять на перетині виділених рядків і стовпців, називають *мінором k-го порядку матриці A*.

Рангом матриці A називають найвищий порядок відмінного від нуля мінора цієї матриці і позначають $r(A)$.

Ранг матриці міститься у межах $0 \le r(A) \le \min(m, n)$.

Наприклад, матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

має такі мінори другого порядку: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$.

Мінором третього порядку даної матриці є її визначник.

Мінор, порядок якого визначає ранг матриці, називають *базисним*. У матриці може бути кілька базисних мінорів.

Ранг матриці можна знаходити так. Якщо в матриці вказано відмінний від нуля мінор k-го порядку, то ранг матриці не менший k. При цьому, якщо всі мінори $(k + 1)$-го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k. Якщо зустрівся ненульовий мінор $(k+1)$-го порядку, то переходять до дослідження мінорів порядку $k+2$, тобто процедура продовжується.

На практиці для відшукання рангу високих порядків зручніше використовувати інший метод, який ґрунтується на такому твердженні:

Ранг матриці не зміниться, якщо над нею виконати *елементарні перетворення*, а саме:

1) переставити місцями два рядки (стовпці);

2) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на ненульовий множник;

3) додати до елементів рядка (стовпця) елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число.

Скориставшись елементарними перетвореннями, матрицю можна звести до вигляду, коли всі її елементи, крім елементів $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{rr}$, де $r \le \min(m, n)$, дорівнюють нулю. Тоді ранг матриці дорівнює r.

Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть добуток матриць AB, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тобто матриці узгоджені, то операція множення AB має сенс і добуток матриць обчислюємо так:

$$AB = \begin{pmatrix} 1\cdot(-2)+3\cdot5+2\cdot4 & 1\cdot0+3\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot1+3\cdot(-1)+2\cdot2 \\ 4\cdot(-2)+1\cdot5+3\cdot4 & 4\cdot0+1\cdot1+3\cdot3 & 4\cdot1+1\cdot(-1)+3\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 9 & 2 \\ 9 & 10 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Знайдіть $f(A)$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $f(x) = (x^2 - 3x)(3x+2)$.

Розв'язання. Необхідно знайти значення виразу

$$f(A) = (A^2 - 3A)\cdot(3A + 2E).$$

Маємо

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-12 & -6-15 \\ 8+20 & -12+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix};$$

$$A^2 - 3A = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -21 \\ 28 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -12 \\ 16 & -2 \end{pmatrix};$$

$$3A + 2E = 3\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 12 & 17 \end{pmatrix};$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} -14 & -12 \\ 16 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 12 & 17 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14\cdot8-12\cdot12 & -14\cdot(-9)-12\cdot17 \\ 16\cdot8-2\cdot12 & 16\cdot(-9)-2\cdot17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -256 & 78 \\ 104 & -178 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $f(A) = \begin{pmatrix} -256 & 78 \\ 104 & -178 \end{pmatrix}$.

Зауваження. Якщо $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_{n-1}x + a_n$ і A — деяка квадратна матриця, то

$$f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + a_{n-1}A + a_nE.$$

3. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Насамперед обчислюємо визначник матриці A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Оскільки A — невироджена матриця, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1;\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5;\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5;\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Отже, обернена матриця має вигляд

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,2 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

4. Розв'яжіть матричне рівняння $X \cdot A \cdot B = C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Послідовно дістаємо

$$X \cdot A \cdot B = C,\ X \cdot A \cdot BB^{-1} = CB^{-1},\ X \cdot A \cdot E = CB^{-1},\ X \cdot A = CB^{-1},$$
$$X \cdot AA^{-1} = CB^{-1}A^{-1},\ X \cdot E = CB^{-1}A^{-1},\ X = CB^{-1}A^{-1}.$$

Знаходимо обернені матриці A^{-1} та B^{-1}:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,\ A_{11} = 1,\ A_{21} = -2,\ A_{12} = -3,\ A_{22} = 2.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\Delta(B) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -1,\ B_{11} = -7,\ B_{21} = -4,\ B_{12} = -2,\ B_{22} = -1.$$

$$B^{-1}=-\begin{pmatrix}-7 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X=CB^{-1}A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}\left(-\frac{1}{4}\right)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}(1\cdot 7-2\cdot 2 \quad 1\cdot 4-2\cdot 1)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=-\frac{1}{4}(3 \quad 2)\begin{pmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{4}(3\cdot 1+2\cdot(-3) \quad 3\cdot(-2)+2\cdot 2)=-\frac{1}{4}(-3 \quad -2)=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що матрицю X можна відшукувати також за формулою $X=C(AB)^{-1}$.

Відповідь: $X=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

5. Знайдіть ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 4\\ -1 & 2\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}-1 & 6\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виділений у матриці мінор другого порядку

$$M^{(2)}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

Обвідними для нього мінорами третього порядку є:

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 3 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \text{ і } \begin{vmatrix}1 & -2 & 4\\ -1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 6\end{vmatrix}.$$

Обидва мінори третього порядку рівні нулю, а мінор другого порядку відмінний від нуля, отже, $r(A)=2$.

6. Знайдіть ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & -1 & 3\\ -4 & -4 & 2 & -4 & -2\\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3\\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Виконавши елементарні перетворення, дістанемо

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & -6 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначник третього порядку, складений з елементів, що стоять на перетині перших трьох рядків і стовпців останньої матриці, не дорівнює нулю, а всі мінори четвертого порядку рівні нулю. Отже, $r(A) = 3$.

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть добуток матриць:

1. AB і BA, якщо $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. AB, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$.

3. ABC, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Знайдіть $f(A)$, якщо:

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $f(x) = (3x^2 - x)(2x + 1)$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 + x - 4$.

Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо:

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. **7.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Знайдіть ранг матриці:

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. **9.** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -4 & 0 \\ -5 & -4 & 5 & -2 & 3 \\ -6 & -10 & 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$.

Відповіді

1. $AB = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 2 & 12 & 16 \\ 11 & 6 & 20 \\ 7 & -3 & 5 \end{pmatrix}$. **2.** $\begin{pmatrix} 9 \\ 27 \\ 21 \end{pmatrix}$. **3.** $\begin{pmatrix} -100 & -47 & 13 \\ -48 & -25 & 7 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} -255 & -84 \\ 168 & -171 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 17 & 8 & 28 \\ 17 & 13 & -14 \\ 10 & 11 & -14 \end{pmatrix}$. **6.** $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ -6 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. **7.** $\begin{pmatrix} -4 & -2 & -7 \\ 1,5 & 0,5 & 2 \\ -0,5 & -0,5 & -1 \end{pmatrix}$. **8.** 2. **9.** 4.

T.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Знайдіть $f(A)$, якщо:

2.1.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$.

2.1.2 . $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^2 + 5x + 2$.

2.1.3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 3$.

2.1.4. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=3x^2-2x+8$.

2.1.5. $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-3x-1$.

2.1.6. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-x-1$.

2.1.7. $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-2x+1$.

2.1.8. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -3 & 0 & -1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=-2x^2+8x-6$.

2.1.9. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-4x$.

2.1.10. $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2+6x-3$.

2.1.11. $A=\begin{pmatrix}-4 & 8 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & -3 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-5x+3$.

2.1.12. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2+2x-8$.

2.1.13. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=x^3-4x^2+x-1$.

2.1.14. $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^3-8x+6$.

2.1.15. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 5 & -4\end{pmatrix}$, $f(x)=x^2-6x+9$.

2.1.16. $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=9x^2-4$.

2.1.17. $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 6\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$, $f(x)=9-x^2$.

2.1.18. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2+8x+8$.

2.1.19. $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 2 & 4 & -7\end{pmatrix}$, $f(x)=5-4x-x^2$.

2.1.20. $A=\begin{pmatrix}5 & 4 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & -4\end{pmatrix}$, $f(x)=3x^2-7x+5$.

2.1.21. $A=\begin{pmatrix}6 & 2 & 5\\ -1 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=(x+3)^2$.

2.1.22. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 2\\ 1 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=(x-2)(2x+3)$.

2.1.23. $A=\begin{pmatrix}8 & 0 & 2\\ -3 & 2 & -3\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $f(x)=4-2x-x^2$.

2.1.24. $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 5\\ 5 & -1 & 8\end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2-8x+6$.

2.1.25. $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 6 & 2\end{pmatrix}$, $f(x)=3x^3+4x^2-2$.

2.1.26. $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=(x^2-2x)(2x-1)$.

2.1.27. $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 5\\ -1 & 4 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $f(x)=(4-2x)(x+6)$.

2.1.28. $A=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ -1 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $f(x)=2x^2-6x+7$.

2.1.29. $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=(x^2-2x)(2x+1)$.

2.1.30. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & -2\\ -1 & 0 & 5\end{pmatrix}$, $f(x)=5x^2+3x-4$.

2.2. Розв'яжіть матричні рівняння.

2.2.1. $A\cdot X=B$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 0 & 4 & 8\end{pmatrix}$.

2.2.2. $X\cdot A=B$, $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2.2.3. $A\cdot X\cdot B=C$, $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 7\\ 6 & 5 & 9\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2.2.4. $A\cdot X=B$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 7\\ 8 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2.2.5. $X\cdot A=B$, $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

2.2.6. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.7. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

2.2.8. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2.9. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.10. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

2.2.11. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

2.2.12. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2.2.13. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2.14. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2.15. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.16. $X \cdot A \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

2.2.17. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -6 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2.18. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

2.2.19. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2.20. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$.

2.2.21. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2.2.22. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

2.2.23. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

2.2.24. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.2.25. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

2.2.26. $A \cdot X \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$.

2.2.27. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

2.2.28. $X \cdot A = B$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2.2.29. $X \cdot A \cdot B = C$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$.

2.2.30. $A \cdot X = B$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.3. Знайдіть обернену матрицю A^{-1}, якщо:

2.3.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. **2.3.2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **2.3.3.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. **2.3.5.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -4 \\ 2 & -7 & -9 \end{pmatrix}$. **2.3.6.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$.

2.3.7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -7 & -3 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. **2.3.8.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. **2.3.9.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.3.10. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.11.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.12.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & -1 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.14.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \\ -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.15.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.16. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.17.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.18.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5 & 6 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

2.3.19. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. **2.3.20.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. **2.3.21.** $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 1 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3.22. $A=\begin{pmatrix}4&11&0\\1&13&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$. **2.3.23.** $A=\begin{pmatrix}-1&0&3\\3&-1&9\\4&-5&11\end{pmatrix}$. **2.3.24.** $A=\begin{pmatrix}5&1&2\\1&4&0\\2&1&2\end{pmatrix}$.

2.3.25. $A=\begin{pmatrix}9&-2&1\\2&-5&0\\4&-2&1\end{pmatrix}$. **2.3.26.** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\4&-13&4\\5&-3&3\end{pmatrix}$. **2.3.27.** $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-3&9&3\\0&2&3\end{pmatrix}$.

2.3.28. $A=\begin{pmatrix}2&-2&13\\0&-1&4\\2&-2&1\end{pmatrix}$. **2.3.29.** $A=\begin{pmatrix}2&-10&7\\0&29&7\\1&-5&4\end{pmatrix}$. **2.3.30.** $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&1\\1&2&3\end{pmatrix}$.

2.4. Знайдіть ранг матриці.

2.4.1. $\begin{pmatrix}0&1&-1&2&2\\-2&1&3&-1&1\\3&-2&1&1&-2\\1&0&3&2&1\end{pmatrix}$. **2.4.2.** $\begin{pmatrix}1&1&-2&1&3\\-1&2&1&-1&-2\\3&0&2&1&-1\\3&3&1&1&-1\end{pmatrix}$.

2.4.3. $\begin{pmatrix}-2&2&1&-1&-3\\3&1&0&1&0\\-1&1&2&2&1\\0&4&3&2&-2\end{pmatrix}$. **2.4.4.** $\begin{pmatrix}-1&-1&1&-1&0\\2&1&-1&3&1\\3&-1&-1&2&-1\\4&-1&-1&4&0\end{pmatrix}$.

2.4.5. $\begin{pmatrix}3&1&3&2&5\\-1&2&3&1&0\\0&1&-1&2&2\\2&4&5&5&7\end{pmatrix}$. **2.4.6.** $\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\-1&1&-1&-1&0\\1&-1&2&3&0\\1&1&2&1&2\end{pmatrix}$.

2.4.7. $\begin{pmatrix}2&1&-2&1&3\\1&-1&0&2&0\\-1&2&1&-1&1\\2&2&-1&2&4\end{pmatrix}$. **2.4.8.** $\begin{pmatrix}3&-1&2&3&5\\-2&1&-1&-2&-3\\1&2&1&-1&2\\2&2&2&0&4\end{pmatrix}$.

2.4.9. $\begin{pmatrix}-1&0&1&-1&0\\-2&1&-2&1&-4\\2&3&-1&1&1\\-1&4&-2&1&-3\end{pmatrix}$. **2.4.10.** $\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&4\\3&1&-1&1&-2\\2&0&3&1&3\\6&-1&4&1&5\end{pmatrix}$.

2.4.11. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. **2.4.12.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4.13. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. **2.4.14.** $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

2.4.15. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. **2.4.16.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4.17. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & -6 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.4.18.** $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2.4.19. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. **2.4.20.** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.4.21. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.4.22.** $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4.23. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. **2.4.24.** $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

2.4.25. $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$. **2.4.26.** $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.4.27. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. **2.4.28.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2.4.29. $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. **2.4.30.** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Тема 3. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Система лінійних алгебраїчних рівнянь, її сумісність, дослідження сумісності системи за допомогою рангу матриць. Розв'язання систем за формулами Крамера, матричним способом, методом Гаусса. Невизначені системи та їх розв'язання. Однорідні системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Власні числа та власні вектори матриці.

Література: [1, розділ 1], [4, розділ 2, п. 2.3], [6, розділ 1, §3], [7, розділ 2, §7], [10, розділ 1, §3], [11, розділ 1, §1].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Основні означення

Систему m рівнянь з n невідомими вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.4}$$

називають системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — невідомі; a_{ij} — задані коефіцієнти ($i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$), $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — вільні члени системи.

Розв'язати систему (1.4) — значить знайти такі значення невідомих $x_1 = x_1^0, x_2 = x_2^0, \ldots, \quad x_n = x_n^0$, при підстановці яких у систему (1.4) усі її рівняння обертаються у тотожності.

СЛАР (1.4) називають *однорідною*, якщо всі вільні члени рівні нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них не дорівнює нулю. Однорідна система завжди має нульовий (*тривіальний*) розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Систему рівнянь називають *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісну систему називають *визначеною*, якщо вона має один-єдиний розв'язок $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0)$, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

називають *основною* та *розширеною* матрицями системи (1.4) відповідно.

3.2. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

3.2.1. Метод Крамера

Нехай дано систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (1.5)$$

Основна матриця системи (1.5) квадратна. Визначник цієї матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

називають визначником системи. Якщо $\Delta \neq 0$, то систему (1.5) називають *невиродженою*.

Нехай $\Delta \neq 0$. Тоді систему (1.5) можна звести до вигляду

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1, \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n, \end{cases} \tag{1.6}$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Наприклад, щоб дістати перше рівняння системи (1.6), виконаємо такі дії: помножимо перше рівняння системи (1.5) на алгебраїчне доповнення A_{11}, друге — на A_{21}, ..., останнє — на A_{n1}, після цього утворені рівняння складемо і згрупуємо доданки відповідним чином, тобто

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) + \dots +$$
$$+ A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n) = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n,$$

або

$$(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots A_{n1}a_{n1})x_1 + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + \dots A_{n1}a_{n2})x_2 + \dots +$$
$$+ (A_{11}a_{1n} + A_{21}a_{2n} + \dots A_{n1}a_{nn})x_n = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n.$$

За теоремою 1 вираз $A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots A_{n1}a_{n1}$ є розкладом визначника основної матриці за елементами першого стовпця, тому виконується рівність $A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + \dots A_{n1}a_{n1} = \Delta$. Усі інші суми за теоремою 2 дорівнюють нулю: $A_{11}a_{1j} + A_{21}a_{2j} + \dots A_{n1}a_{nj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$. Праву частину $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ можна розглядати як визначник матриці A, у якої перший стовпець замінений на стовпець вільних членів. Отже, $\Delta \cdot x_1 = \Delta_1$. Інші рівності доводять аналогічно.

Проаналізуємо систему (1.6).

Якщо $\Delta = 0$, а принаймні один із визначників $\Delta_i \neq 0$, то система (1.5) несумісна.

Якщо $\Delta = 0$ і всі визначники Δ_1, Δ_2, ..., Δ_n дорівнюють нулю, то система (1.5) має безліч розв'язків.

Якщо $\Delta \neq 0$, то СЛАР (1.5) має *єдиний* розв'язок, який можна знайти за *формулами Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

3.2.2. Матричний метод

Використовуючи поняття матричного добутку, систему (1.4) можна записати у вигляді

$$AX = B,$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в СЛАР $n = m$ і визначник системи $\Delta(A) \neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за формулою

$$\boxed{X = A^{-1}B.} \tag{1.7}$$

3.2.3. Метод Гаусса

Цей метод застосовують для розв'язання СЛАР довільного вигляду. Процес розв'язання за методом Гаусса складається з двох етапів. Перший етап (*прямий хід*) ґрунтується на елементарних перетвореннях *рядків* системи, а саме, система залишається рівносильною початковій системі, якщо:

1) переставити місцями два рівняння;

2) помножити обидві частини рівняння на ненульовий множник;

3) додати почленно до рівняння елементи іншого рівняння, помножені на одне й те саме число.

За допомогою таких перетворень систему (1.4) зводять до трапецієподібного (або трикутного) вигляду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \bar{a}_{22}x_2 + \dots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \bar{a}_{33}x_3 + \dots + \bar{a}_{3n}x_n = \bar{b}_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_{rs}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r, \\ 0 = \bar{b}_{r+1}, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \bar{b}_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

На другому етапі (*зворотний хід*) послідовно визначають невідомі системи, рухаючись від останнього рівняння до першого.

Проаналізуємо систему (1.8), в якій r — ранг основної матриці A.

Якщо $r = n$, $m \geq n$, тоді система (1.8) набирає трикутного вигляду

$$\begin{cases} \bar{a}_{11}x_1 + \bar{c}_{12}x_2 + \ldots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1, \\ \qquad \bar{a}_{22}x_2 + \ldots + \bar{a}_{2n}x_n = \bar{b}_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \bar{a}_{nn}x_n = \bar{b}_n. \end{cases}$$

Одержана система, отже, і початкова система (1.4), має єдиний розв'язок, який визначаємо так. Спочатку з останнього рівняння знайдемо x_n, після цього з передостаннього рівняння знайдемо x_{n-1}; піднімаючись по системі від останнього рівняння до першого, знайдемо всі інші невідомі.

> Якщо $r < n$, то може бути два випадки:
>
> 1) хоча б одне з чисел $\bar{b}_{r+1}, \ldots, \bar{b}_n$ не дорівнює нулю. Тоді система (1.4) не має розв'язків, тобто несумісна;
>
> 2) усі числа $\bar{b}_{r+1}, \ldots, \bar{b}_n$ рівні нулю. Тоді система (1.4) має безліч розв'язків, тобто невизначена.

Зауваження. Оскільки СЛАР взаємно однозначно відповідає розширена матриця, то елементарні перетворення рівнянь системи рівносильні перетворенню рядків розширеної матриці. Тому надалі при розв'язуванні СЛАР за методом Гаусса будемо працювати тільки з розширеною матрицею.

3.3. Критерій сумісності СЛАР

Нехай задано систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Складемо основну і розширену матриці цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема 3 (*Кронекера—Капеллі*). Для того, щоб СЛАР була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг $r(A)$ основної матриці A дорівнював рангу $r(B)$ розширеної матриці B.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює кількості невідомих, то система має єдиний розв'язок.

Якщо ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної матриці, але менший від кількості невідомих, то система має безліч розв'язків.

Якщо $r(B) > r(A)$, то система несумісна.

3.4. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо однорідну систему вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Оскільки розширена матриця B однорідної системи не має додаткових відмінних від нуля мінорів (порівняно з матрицею A), то $r(A) = r(B)$, отже, за теоремою Кронекера–Капеллі однорідна система завжди сумісна, вона має нульовий розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Виникає питання: за яких умов система однорідних рівнянь має ненульовий розв'язок?

Теорема 4 Для того, щоб система однорідних рівнянь (1.9) мала ненульові розв'язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менший від кількості невідомих, тобто $r(A) < n$.

Нехай однорідна система (1.9) має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

тобто кількість рівнянь системи дорівнює кількості невідомих.

Якщо $r(A) = n$ або, що те ж саме, $\Delta(A) \neq 0$, то система (1.10) має єдиний тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, у чому неважко переконатись, застосувавши до системи, наприклад, правило Крамера. Якщо $r(A) = k < n$, тобто $\Delta(A) = 0$, то однорідна система (1.10) має безліч розв'язків, які знаходять, наприклад, за методом Гаусса.

Зауваження. Універсальним методом розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, як визначених, так і невизначених, однорідних та неоднорідних, є метод Гаусса.

3.5. Власні числа та власні вектори матриці

Всякий ненульовий вектор-стовпець X, що задовольняє умову

$$AX = \lambda X,$$

де λ — дійсне число називають ***власним вектором*** матриці A, а число λ — *власним числом* матриці A, що відповідає вектору X. Вектор X визначається неоднозначно (з точністю до ненульового скалярного множника).

Власні числа матриці A є коренями її характеристичного рівняння $\Delta(A - \lambda E) = 0$, яке в розгорнутому вигляді (на прикладі матриці третього порядку) має вигляд

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Власний вектор $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, що відповідає власному числу λ, визначають із системи рівнянь

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33} - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Коли λ — кратний корінь характеристичного рівняння, система може визначати кілька власних векторів.

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

матричним методом і за формулами Крамера.

Розв'язання. Основна матриця системи має вигляд

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи властивості визначників, обчислюємо визначник основної матриці:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=0-9+0-(2+0+0)=-11\neq 0.$$

Матричний метод. Оскільки $\Delta(A)\neq 0$, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-4, \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1, \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2, \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-3, \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Обернена матриця має вигляд

$$A^{-1}=\frac{-1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді за формулою (*1*.6) дістаємо

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 5 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -1\cdot 3-4\cdot 2+5\cdot 0 \\ -3\cdot 3-1\cdot 2-7\cdot 0 \\ 2\cdot 3-3\cdot 2+1\cdot 0 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=x_2=1,\ x_3=0$ – розв'язок даної системи.

Метод Крамера. Використаємо тепер формули Крамера:

$$\Delta=-11,\ \ \Delta_1=\begin{vmatrix}3&1&-3\\2&1&2\\0&1&1\end{vmatrix}=-11,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2&3&-3\\1&2&2\\-1&0&1\end{vmatrix}=-11,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}2&1&3\\1&1&2\\-1&1&0\end{vmatrix}=0;\ x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=1,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=0.$$

Зауваження. Визначник Δ_3 можна не обчислювати, оскільки, знаючи x_1 та x_2, невідоме x_3 можна визначити з будь-якого рівняння системи після підстановки в нього значень x_1 та x_2.

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=12,\\2x_1+x_2+\ 2x_3=9,\\-3x_1+x_2+\ 4x_3=-4,\end{cases}$$

використовуючи метод Гаусса.

Розв'язання. Записуємо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\2&1&2&9\\-3&1&4&-4\end{array}\right)$$

і, виконуючи елементарні перетворення над рядками, зведемо її до ступінчастого вигляду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\2&1&2&9\\-3&1&4&10\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\0&-3&-4&-15\\0&7&13&46\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\0&-3&-4&-15\\0&1&5&16\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\0&1&5&16\\0&-3&-4&-15\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&12\\0&1&5&16\\0&0&11&33\end{array}\right).$$

Останній рядок відповідає рівнянню $11x_3=33$, звідки $x_3=3$.

Далі записуємо рівняння:

$$x_2 + 5x_3 = 16, \text{ звідси } x_2 = 16 - 5x_3 = 16 - 15 = 1, \; x_2 = 1;$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12, \text{ звідси } x_1 = 12 - 2x_2 - 3x_3 = 12 - 2 - 9 = 1.$$

Отже, розв'язок системи такий: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

3. Дослідіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

на сумісність і в разі сумісності знайдіть її розв'язок.

Розв'язання. Виписуємо розширену матрицю системи

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Знаходимо ранг цієї матриці (і одночасно — основної матриці), виконуючи елементарні перетворення рядків:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

З вигляду останньої матриці доходимо висновку, що ранг основної матриці дорівнює 3. Ранг розширеної матриці також дорівнює 3, оскільки ранг розширеної матриці не менший за ранг основної матриці, а останній рядок, що містить лише нульові елементи, не збільшує рангу (всі мінори четвертого порядку дорівнюють нулю).

Висновок. Задана система має безліч розв'язків. Ці розв'язки знаходимо так. За виглядом останньої матриці записуємо систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - \ \ x_4 = 1, \\ \quad - \ x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -1, \\ \qquad\qquad 6x_3 - 5x_4 = 1, \end{cases}$$

яка еквівалентна вихідній системі.

Рухаючись від останнього рівняння до першого, послідовно знаходимо:

$$x_3 = \frac{1+5x_4}{6}\,;\ x_2 = -5x_3 + 3x_4 + 1 = -5\cdot\frac{1+5x_4}{6} + 3x_4 + 1 = \frac{1-7x_4}{6}\,;$$

$$x_1 = 1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 - 2\cdot\frac{1-7x_4}{6} - 3\frac{1+5x_4}{6} + x_4 = \frac{1+5x_4}{6}\,.$$

Відповідь можна записати так: $x_1 = \dfrac{1+5t}{6}$, $x_2 = \dfrac{1-7t}{6}$, $x_3 = \dfrac{1+5t}{6}$, $x_4 = t$, де $t \in R$.

4. Знайдіть усі розв'язки однорідної системи

$$\begin{cases} 3x_1 + \ 2x_2 - \ \ x_3 = 0, \\ 2x_1 \ \ - \ x_2 + 3x_3 = 0, \\ \ \ x_1 + \ 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Виписуємо розширену матрицю даної системи

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Знаходимо ранг цієї матриці (і одночасно — основної матриці), виконуючи елементарні перетворення рядків:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -7 & 11 & 0 \end{array}\right).$$

Оскільки кутовий мінор $M^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$, то ранг дорівнює 2 $(2 < 3)$. Отже, система має безліч розв'язків.

За останньою матрицею записуємо рівносильну систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ \quad -7x_2 + 11x_3 = 0. \end{cases}$$

Значення $x_3 = 7t$, $x_2 = 11t$, де $t \in R$, задовольняють друге рівняння.
Тепер із першого рівняння дістаємо $x_1 = 4x_3 - 3x_2 = 28t - 33t = -5t$.
Відповідь: $x_1 = -5t$, $x_2 = 11t$, $x_3 = 7t$, де $t \in R$.

5. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Розв'яжемо характеристичне рівняння матриці A:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(3-\lambda)(5-\lambda)(3-\lambda) + 1 + 1 - 5 + \lambda - 3 + \lambda - 3 + \lambda = 0,$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0, \ \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 6.$$

Отже, матриця A має три власні числа. Знайдемо тепер власні вектори, підставляючи по черзі значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в систему

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-\lambda)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Власному числу $\lambda_1 = 2$ відповідає власний вектор X_1, координати якого задовольняють систему

$$\begin{cases} (3-2)x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + (5-2)x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + (3-2)x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_1 = -x_3, \end{cases}$ тоді власний вектор X_1 записують так: $X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно знаходять власні вектори $X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ та $X_3 = C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, де C_1, C_2, C_3 — відмінні від нуля дійсні числа.

Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Розв'яжіть систему рівнянь:
а) матричним методом; б) за формулами Крамера.

1. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 11. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи метод Гаусса.

3. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 \qquad + 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$

Розв'яжіть однорідні системи

6. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 2x_1 \qquad + x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$

8. Знайдіть власні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Відповіді

1. $x_1=-27,\ \ x_2=9,\ \ x_3=-4$. **2.** $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=-2$. **3.** $x_1=1,\ \ x_2=1,\ \ x_3=2$. **4.** $x_1=\dfrac{1+2t}{9},\ \ x_2=\dfrac{-14+8t}{9},\ x_3=\dfrac{-25+13t}{9},\ \ x_4=t$, де $t\in R$. **5.** $\varnothing$. **6.** $(2t,3t,t)$, де $t\in R$. **7.** $x_1=x_2=x_3=x_4=0$. **8.** $\lambda_1=1,\ X_1=C_1\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$; $\lambda_1=-1,\ X_1=C_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, C_1,C_2 — довільні сталі.

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Розв'яжіть систему: а) матричним методом; б) за формулами Крамера.

3.1.1. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3=10,\\ x_1-3x_2+x_3=-2.\end{cases}$

3.1.2. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2,\\ x_1+2x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+2x_3=-1.\end{cases}$

3.1.3 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=-1,\\ 2x_1+x_2-4x_3=-3,\\ 3x_1+2x_2+x_3=1.\end{cases}$

3.1.4. $\begin{cases} 3x_1+4x_2-x_3=-2,\\ 5x_1+3x_2-4x_3=-2,\\ 4x_1+2x_2+3x_3=5.\end{cases}$

3.1.5. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=-4,\\ x_1+2x_2-4x_3=19,\\ -3x_1+4x_2+2x_3=3.\end{cases}$

3.1.6. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+4x_3=-17,\\ 4x_1+3x_2-2x_3=18,\\ 3x_1+x_2+3x_3=-7.\end{cases}$

3.1.7. $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=4,\\ 2x_1+x_2+2x_3=2,\\ 3x_1-x_2+x_3=0.\end{cases}$

3.1.8. $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-3,\\ 2x_1+x_2+3x_3=8,\\ 3x_1-4x_2+x_3=5.\end{cases}$

3.1.9. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=0,\\ 2x_1-4x_2+4x_3=6,\\ 3x_1+2x_2+x_3=4.\end{cases}$

3.1.10. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-3x_3=2,\\ x_1-4x_2+5x_3=2,\\ 3x_1+4x_2-3x_3=4.\end{cases}$

3.1.11. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+3x_3=3,\\ 4x_1+5x_2-3x_3=4,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=2.\end{cases}$

3.1.12. $\begin{cases} x_1+2x_3=7,\\ x_1+3x_2=7,\\ 2x_1-2x_2+x_3=1.\end{cases}$

3.1.13. $\begin{cases} 3x_1+x_2+2x_3=-2,\\ x_1+3x_2+2x_3=2,\\ 2x_1+x_2-x_3=-1.\end{cases}$

3.1.14. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+x_3=0,\\ 7x_1+x_2+4x_3=0,\\ x_2+5x_3=4.\end{cases}$

3.1.15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_3 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$ **3.1.16.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

3.1.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_3 = -13, \\ 3x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ **3.1.18.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

3.1.19. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$ **3.1.20.** $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4, \\ 5x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 20, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases}$

3.1.21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$ **3.1.22.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 8. \end{cases}$

3.1.23. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$ **3.1.24.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$

3.1.25. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ **3.1.26.** $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 = -11. \end{cases}$

3.1.27. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 6. \end{cases}$ **3.1.28.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

3.1.29. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ **3.1.30.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$

3.2. Дослідіть СЛАР, задану розширеною матрицею, на сумісність і в разі сумісності знайдіть її загальний розв'язок.

3.2.1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -9 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -5 & -1 & 3 \end{array}\right)$. **3.2.2.** $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right)$.

3.2.3. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 9 & 2 & 7 & 3 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 & 5 \end{array}\right)$.

3.2.4. $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{array}\right)$.

3.2.5. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 14 & 20 & 27 & 0 \\ 5 & 10 & 16 & 19 & -2 \\ 3 & 5 & 6 & 13 & 5 \end{array}\right)$.

3.2.6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$.

3.2.7. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{array}\right)$.

3.2.8. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 5 & 23 \end{array}\right)$.

3.2.9. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & -1 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -6 & -10 \end{array}\right)$.

3.2.10. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & -9 & 8 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right)$.

3.2.11. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 2 & 4 & 4 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 5 & -5 & -3 \end{array}\right)$.

3.2.12. $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & -5 & 7 & 9 \\ 4 & 2 & -4 & -7 \\ 5 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

3.2.13. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 8 & -5 & 6 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -4 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 9 & 7 & 5 & 7 & 3 \end{array}\right)$.

3.2.14. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 9 & 1 \end{array}\right)$.

3.2.15. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & -3 \\ 6 & 9 & 9 & 4 & 8 \end{array}\right)$.

3.2.16. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right)$.

3.2.17. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 3 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & -4 & 4 & 2 \\ 7 & 4 & 7 & -3 & 7 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -3 & -2 & 4 \end{array}\right)$.

3.2.18. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$.

3.2.19. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 6 & -3 & 9 \end{array}\right).$

3.2.20. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -5 \\ 2 & -13 & 11 & -8 & 49 \\ 4 & 9 & -13 & 14 & -37 \end{array}\right).$

3.2.21. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 & 12 \\ 7 & 5 & -3 & 12 & 0 & 16 \\ 2 & -5 & 12 & 8 & 5 & 6 \end{array}\right).$

3.2.22. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & -5 & 2 \\ 2 & -7 & -3 & -4 & -11 \end{array}\right).$

3.2.23. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & 13 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right).$

3.2.24. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & 10 \\ 3 & -4 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 9 \end{array}\right).$

3.2.25. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right).$

3.2.26. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right).$

3.2.27. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right).$

3.2.28. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right).$

3.2.29. $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & -1 \\ 4 & 11 & -13 & 16 & 2 \\ 7 & -2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right).$

3.2.30. $\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -3 & 7 & 1 \end{array}\right).$

3.3. Розв'яжіть однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

3.3.1. $\begin{cases} x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.3. $\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2+x_4=0, \\ -x_1+x_2+2x_3+2x_4=0, \\ 4x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3.3.4. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+x_4=0, \\ 5x_2-2x_2+5x_3+4x_4=0, \\ -2x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ -2x_1+x_2-x_3-2x_4=0. \end{cases}$

3.3.5. $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3+2x_4=0, \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ x_2-x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0. \end{cases}$

3.3.6. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4=0, \\ -x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4=0, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.7. $\begin{cases} 2x_1+x_2-2x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+x_4=0, \\ -x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3.3.8. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+3x_4=0, \\ -2x_1+x_2-x_3-2x_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+2x_3=0. \end{cases}$

3.3.9. $\begin{cases} -x_1+x_3-x_4=0, \\ -2x_1+x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ -x_1+4x_2-2x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.10. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+3x_3+x_4=0, \\ 6x_1-x_2+4x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.11. $\begin{cases} 4x_1+x_2+2x_3-3x_4=0, \\ x_1-2x_2+x_3=0, \\ -3x_1-x_2-2x_3+x_4=0, \\ 2x_1-2x_2+x_3-2x_4=0. \end{cases}$

3.3.12. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 3x_1+2x_2-x_3+x_4=0, \\ -2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_1+x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.13. $\begin{cases} -2x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 3x_1-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2+3x_3+2x_4=0, \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3.3.14. $\begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-2x_2+3x_3+2x_4=0, \\ x_2+2x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.15. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4=0, \\ -2x_1+x_2+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3-2x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4=0. \end{cases}$

3.3.16. $\begin{cases} x_1+2x_3-x_4=0, \\ -2x_1+x_2+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_1+2x_2+2x_3+2x_4=0. \end{cases}$

3.3.17. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.18. $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

3.3.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.20. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.21. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.22. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.23. $\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.25. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.26. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.27. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.28. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.29. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.30. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Тема 4. **ВЕКТОРИ**

Вектори, лінійні дії з векторами. Проекція вектора на вісь. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис і система координат. Вектори в ПДСК (координати, довжина, напрямні косинуси). Поділ відрізка у даному відношенні.

Література: [1, розділ 4], [4, розділ 3, п. 3.2], [6, розділ 2, §§1—3], [7, розділ 1, §3], [10, розділ 1, §2], [11, розділ 1, §2].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Основні поняття

Векторна величина на відміну від скалярної задається не лише своїм чисельним значенням, а й напрямом (швидкість, прискорення, сила та ін.).

Геометрично вектор являє собою *напрямлений відрізок* (рис. 1.2, а) і позначається $\vec{a}$, або $\overrightarrow{AB}$, де точка A — початок вектора, а B — його кінець.

Відстань між початком вектора і його кінцем називають довжиною (або модулем) вектора і позначають $|\vec{a}|$, або $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектори, які лежать на одній прямій або паралельних прямих, називають *колінеарними* (рис. 1.2, б, в)

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і однакові напрями (рис. 1.2, г).

Два вектори називають *протилежними*, якщо вони колінеарні, мають однакові модулі і протилежні напрями (рис. 1.3).

а *б* *в* *г*

Рис. 1.2

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називають *нуль-вектором*. Напрям його не визначений.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називають *одиничним* вектором.

Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називають *ортом* вектора $\vec{a}$ і позначають $\vec{a}_0$.

Вектори можна вільно переміщувати по площині (у просторі). Тому в аналітичній геометрії їх називають *вільними*.

Кутом між двома векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зведеними до спільного початку, називають найменший кут, на який треба повернути вектор $\vec{a}$ навколо спільного початку, щоб він збігся з вектором $\vec{b}$ (рис. 1.4, а, б).

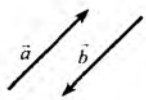
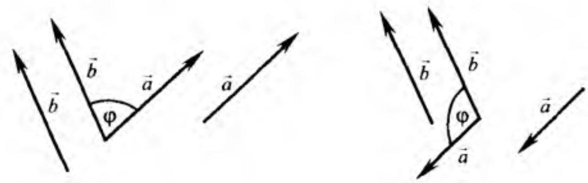


Рис. 1.3



а

б

Рис. 1.4

Три вектори називають *компланарними*, якщо вони лежать в одній або паралельних площинах.

Зокрема, три вектори компланарні, якщо два з них або всі три колінеарні, або хоча б один з них — нуль-вектор.

4.2. Лінійні операції над векторами

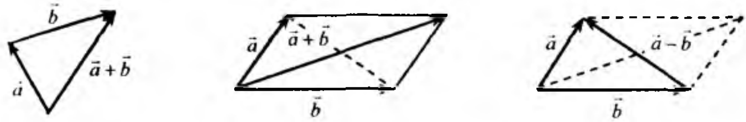
До лінійних операцій над векторами належать:
1) додавання (віднімання) векторів;
2) множення вектора на число (скаляр).

Сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a}+\vec{b}$, який сполучає початок вектора $\vec{a}$ з кінцем вектора $\vec{b}$ за умови, що вектор $\vec{b}$ прикладений до кінця вектора $\vec{a}$ (рис. 1.5, *а*) (*правило трикутника*).

Суму двох векторів можна будувати також за *правилом паралелограма* (рис. 1.5, *б*).

Віднімання векторів визначається як дія, обернена додаванню.

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають вектор $\vec{a}-\vec{b}$, який у сумі з вектором $\vec{b}$ складає вектор $\vec{a}$, або, іншими словами, це вектор, що сполучає ківектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$ за умови, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ прикладені до спільного початку (рис. 1.5, *в*).



а *б* *в*

Рис. 1.5

Добутком вектора $\vec{a}$ на скаляр λ називають вектор $\lambda\vec{a}$ такий, що $|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$ і напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda>0$, або протилежний до напряму вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda<0$. Так, на рис. 1.6 зображено вектори $\vec{a}$, $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$.

Рис. 1.6

З означення множення вектора на число випливає, що коли вектори колінеарні, то існує єдине число λ таке, що $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, і навпаки, якщо $\vec{b}=\lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Сформулюємо властивості лінійних операцій над векторами:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$.

4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

5. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

6. $\vec{a}(\lambda+\mu)=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$.

7. $\lambda(\mu\vec{a})=\lambda\mu\vec{a}$.

4.3. Проекція вектора на вісь

Віссю називають напрямлену пряму, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю довжини.

Проекцією точки A на вісь l називають основу перпендикуляра AA_1 (точка A_1), опущеного з точки A на вісь l (рис.1.7, *а*).

Нехай задано вісь l і вектор $\overrightarrow{AB}$. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B вектора $\overrightarrow{AB}$ і розглянемо вектор $\vec{a} = \overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вісь l називають додатне число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вісь l і вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ однаково напрямлені (рис. 1.7, *а*), і від'ємне число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, якщо вісь l і вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ протилежно напрямлені (рис. 1.7, *б*).

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l позначають так: $\text{пр}_l\,\vec{a}$ (або $\vec{a}_l$).

Кутом між вектором $\vec{a}$ і віссю l називають менший з кутів, на який треба повернути вектор $\vec{a}$ або вісь l, щоб він збігався за напрямом з другим вектором або віссю. Цей кут міститься у межах від 0 до π.

Проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь l обчислюють за формулою

$$\boxed{\text{пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,}$$

де φ — кут між напрямом осі l і напрямом вектора $\vec{a}$.

Справді, якщо φ — гострий кут, то $\text{пр}_l\,\vec{a} = |A_1B_1| = |\vec{a}|\cos\varphi$ (рис. 1.7, а); якщо φ — тупий кут, то $\text{пр}_l\,\vec{a} = -|A_1B_1| = -|\vec{a}|\cos(\pi-\varphi) = |\vec{a}|\cos\varphi$ (рис. 1.7, б).

При цьому $\text{пр}_l\,\vec{a} > 0$, якщо кут φ — гострий, $\text{пр}_l\,\vec{a} < 0$, якщо φ — тупий, $\text{пр}_l\,\vec{a} = 0$, якщо $\varphi = 90°$.

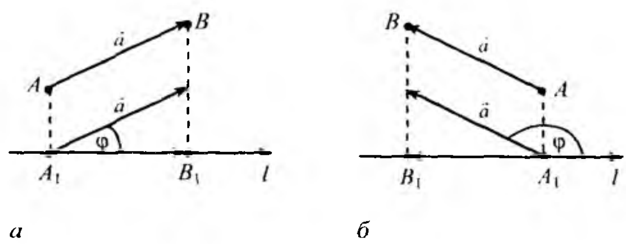


Рис. 1.7

Сформулюємо деякі властивості проекцій.

1. Проекція суми кількох векторів на ту саму вісь дорівнює сумі їх проекцій на цю вісь, тобто

$$\text{пр}_l(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n) = \text{пр}_l\,\vec{a}_1 + \text{пр}_l\,\vec{a}_2 + \ldots + \text{пр}_l\,\vec{a}_n.$$

2. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:

$$\text{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\text{пр}_l\,\vec{a}.$$

4.4. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис

Застосовуючи лінійні операції над векторами, можна знаходити вирази вигляду

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n,$$

які називають *лінійними комбінаціями векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$; числа x_1, x_2, ..., x_n — коефіцієнти.

Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають *лінійно залежними*, якщо існують такі числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ не всі рівні нулю, що лінійна комбінація

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \ldots + c_n\vec{a}_n = 0,$$

і *лінійно незалежними*, якщо ця рівність виконується лише за умови, коли всі числа c_1, c_2, ..., c_n рівні нулю.

Сукупність лінійно незалежних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ називають базисом простору R^n, якщо для кожного вектора з R^n існують такі дійсні числа x_1, x_2, ..., x_n, що виконується рівність

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \ldots + x_n\vec{a}_n.$$

Цю рівність називають розкладом вектора $\vec{b}$ у базисі $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Базисом на прямій називають довільний ненульовий вектор на цій прямій.

Якщо вектор $\vec{a}$ — базис, то існує єдиний розклад вектора $\vec{b}$: $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де λ – *координата* вектора $\vec{b}$ за базисом $\vec{a}$.

Базисом на площині називають довільну упорядковану пару неколінеарних векторів.

Базисом у просторі називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ — базис на площині і $\vec{c}$ — довільний ненульовий вектор площини, то існують сталі α та β такі, що $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ (рис. 1.8). Коефіцієнти α, β називають *координатами* вектора $\vec{c}$ в даному базисі.

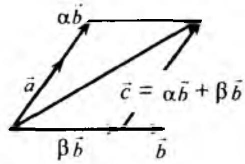


Рис. 1.8

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — базис у просторі і вектор $\vec{d}$ розкладений за базисом, тобто $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то числа α, β, γ називають *координатами* вектора $\vec{d}$ в даному базисі.

Таким чином, базис у просторі дає змогу кожний вектор односначно зіставити з упорядкованою трійкою чисел (координатами цього вектора) і, навпаки, кожну упорядковану трійку чисел α, β, γ за допомогою базису можна зіставити з єдиним вектором

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

4.5. Вектори у прямокутній декартовій системі координат

4.5.1. Прямокутна декартова система координат

Точку O й упорядковану трійку некомпланарних векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (базису) називають декартовою системою координат у просторі.

Точка O — початок координат, а осі, які проходять через початок координат у напрямі базисних векторів, називають осями координат.

Упорядковану трійку одиничних попарно ортогональних векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ($|\vec{i}| = 1, |\vec{j}| = 1, |\vec{k}| = 1$) називають *ортонормованим базисом*.

Прямокутною декартовою системою координат (ПДСК) у просторі називають декартову систему, базис якої ортонормований, і позначають її через $Oxyz$ (Ox — вісь абсцис, Oy — вісь ординат, Oz — вісь аплікат (рис.1.9).

4.5.2. Розклад вектора за ортами координатних осей

Нехай $\vec{a}$ — довільний ненульовий вектор простору, сумістимо його початок з початком координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 1.9).

Проведемо через точку M площини, паралельні координатним площинам. Точки перетину цих площин з осями координат позначимо через M_1, M_2 та M_3. Дістанемо прямокутний паралелепіпед, однією з діагоналей якого є вектор $\overrightarrow{OM}$. Тоді

$$\text{пр}_{Ox}\,\vec{a} = \text{пр}_{Ox}\,\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM_1}|,\ \ \text{пр}_{Oy}\,\vec{a} = |\overrightarrow{OM_2}|,\ \ \text{пр}_{Oz}\,\vec{a} = |\overrightarrow{OM_3}|.$$

Позначимо

$$|\overrightarrow{OM_1}| = a_x,\quad |\overrightarrow{OM_2}| = a_y,\quad |\overrightarrow{OM_3}| = a_z.$$

Враховуючи векторні рівності

$$\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}|\cdot\vec{i} = a_x\cdot\vec{i},\quad \overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}|\cdot\vec{j} = a_y\cdot\vec{j},$$

$$\overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}|\cdot\vec{k} = a_z\cdot\vec{k},$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3},$$

дістанемо

$$\boxed{\vec{a} = a_x\cdot\vec{i} + a_y\cdot\vec{j} + a_z\cdot\vec{k}.} \tag{1.11}$$

Ця формула є основною у векторній алгебрі і називається розкладом вектора $\vec{a}$ за ортонормованим базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Векторну рівність (1.11) у символічній формі ще записують так:

$$\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z),\ \text{або}\ \vec{a} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}.$$

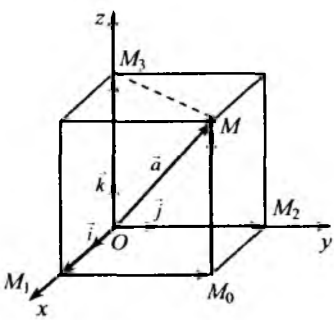


Рис. 1.9

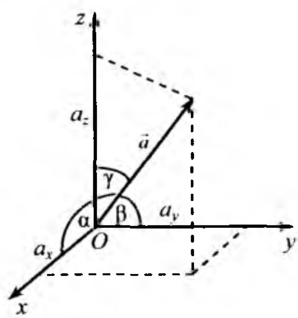


Рис. 1.10

4.5.3. Довжина вектора. Напрямні косинуси

Довжину (модуль) вектора $\vec{a}$ обчислюють за формулою

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.}$$

Ця формула безпосередньо випливає з того факту, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його ребер.

Оскільки координати вектора $\vec{a}$ — це проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі, то

$$\boxed{\begin{aligned} a_x &= np_x\vec{a} = |\vec{a}|\cos\alpha, \\ a_y &= np_y\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta, \\ a_z &= np_z\vec{a} = |\vec{a}|\cos\gamma, \end{aligned}}$$

де α, β, γ — кути, які вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат Ox, Oy, Oz відповідно (рис. 1.10).

Тоді

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}.} \tag{1.12}$$

Косинуси $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ кутів α, β, γ називаються ***напрямними косинусами*** вектора $\vec{a}$; вони визначають напрям вектора $\vec{a}$ в системі $Oxyz$ і задовольняють рівність

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Звідси випливає, що орт вектора $\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z)$ має вигляд

$$\vec{e}_a = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\},$$

де напрямні косинуси визначають за формулою (1.12).

4.5.4. Дії над векторами

Нехай вектори задані своїми координатами, тобто

$$\vec{a} = (a_x,\ a_y,\ a_z),\ \vec{b} = (b_x,\ b_y,\ b_z),$$

тоді

$$\boxed{\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z),}$$

$$\boxed{\lambda\vec{a} = (\lambda a_x,\ \lambda a_y,\ \lambda a_z).}$$

Іншими словами, при додаванні векторів їхні відповідні координати додають; при множенні вектора на скаляр координати вектора множать на цей скаляр.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати

$$\boxed{a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z.}$$

4.5.5. Колінеарність векторів

Шукаємо умови колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, заданих своїми координатами. Нехай $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тоді $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, де $\lambda \neq 0$ — деяке число. Тоді

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} = \lambda(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}).$$

Звідси

$$a_x = \lambda b_x,\ a_y = \lambda b_y,\ a_z = \lambda b_z,$$

тобто

$$\boxed{\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.} \tag{1.13}$$

Отже, координати колінеарних векторів пропорційні. І навпаки, якщо координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.

4.5.6. Координати точки

Довільній точці M простору можна зіставити у ПДСК вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, який називають *радіус-вектором* точки M. Тоді існує єдина трійка чисел (x, y, z) така, що

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Координати x, y, z радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ називають координатами точки M і пишуть $M(x, y, z)$ (рис. 2.3).

Якщо відомі координати початку $A(x_1, y_1, z_1)$ та кінця $B(x_2, y_2, z_2)$ вектора $\overrightarrow{AB}$, то його координати знаходять за формулою

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1).}$$

Довжину вектора $\overrightarrow{AB}$ (або відстань між точками A та B) записують так:

$$\boxed{|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.}$$

4.5.7. Поділ відрізка у заданому відношенні

Нехай задано відрізок A_1A_2 точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді координати точки M (x, y, z), яка ділить цей відрізок у відношенні λ, тобто $|\overline{A_1M}| : |\overline{MA_2}| = \lambda$, знаходять за формулами

$$\boxed{x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.} \tag{1.14}$$

Зокрема, координати точки, яка ділить відрізок навпіл ($\lambda = 1$), такі:

$$\boxed{x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.}$$

Доведення. За умовою $\overline{A_1M} = \lambda \cdot \overline{MA_2}$. З рис. 1.11 видно, що

$$\overline{A_1M} = \overline{OM} - \overline{OA_1},\ \overline{MA_2} = \overline{OA_2} - \overline{OM},$$

отже, виконуються векторні рівності

$$\overline{OM} - \overline{OA_1} = \lambda \cdot (\overline{OA_2} - \overline{OM}),\ (1+\lambda)\cdot\overline{OM} = \overline{OA_1} + \lambda \cdot \overline{OA_2},$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA_1} + \lambda \cdot \overline{OA_2}}{1+\lambda}.$$

Звідси

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \frac{x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + \lambda \cdot (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})}{1+\lambda}.$$

Скориставшись умовою рівності векторів, дістанемо формули (1.13).

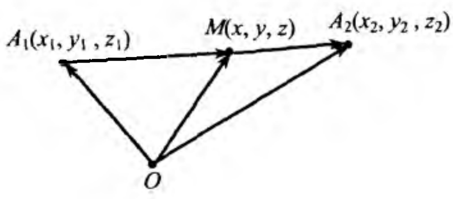


Рис. 1.11

4.6. Полярна система координат

Найпоширенішою після прямокутної системи координат є *полярна система координат*. Вона задається точкою O, яку називають *полюсом*, і променем Op, який називають *полярною віссю*. Позначимо відстань від точки M до полюса O через ρ, а кут між полярною віссю і вектором $\overrightarrow{OM}$ — через φ (φ — це кут, на який треба повернути полярну вісь проти годинникової стрілки, щоб сумістити її з вектором $\overrightarrow{OM}$). Числа ρ і φ називають полярними координатами точки M, вони однозначно визначають положення точки на площині (рис. 1.12).

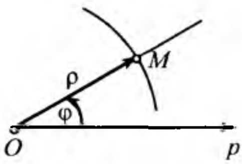


Рис. 1.12

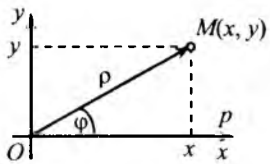


Рис. 1.13

Виразимо декартові координати точки $M(x, y)$ через полярні координати ρ і φ. Вважатимемо, що початок декартової системи координат збігається з полюсом O, а вісь абсцис — з полярною віссю (рис. 1.13).

Тоді

$$\boxed{x = \rho\cos\varphi\,,\ \ y = \rho\sin\varphi\,,}$$

де

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,\ \ 0 \le \rho < \infty\,,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi\,.$$

4.7. Перетворення прямокутних координат на площині

Розглянемо перетворення координат на площині.

4.7.1. Паралельне перенесення осей

Візьмемо дві прямокутні декартові системи координат Oxy та O_1xy з різними початками координат і однаково напрямленими осями (рис. 1.14).

Нехай точки M і O мають у системі Oxy координати (x, y) та (a, b), а в системі O_1xy точка M має координати (x, y). Виразимо координати точки M у системі O_1xy через координати точок у системі Oxy. Запишемо векторну рівність $\overline{O'M} = \overline{OM} - \overline{OO'}$, де $\overline{O'M}$ — радіус-вектор точки M у системі

O_1xy, $\overline{OM}$, $\overline{OO'}$ — радіуси-вектори точок M і O' у системі Oxy. Оскільки $\overline{O'M} = x\vec{i} + y\vec{j} - a\vec{i} - b\vec{j} = (x-a)\vec{i} + (y-b)\vec{j}$ і $\overline{O'M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ (при паралельному перенесенні орти не змінюються), то звідси випливають рівності

$$\boxed{x' = x - a,\ y' = y - b,}$$

які називають *формулами перетворення координат при паралельному перенесенні осей.*

4.7.2. Поворот осей координат

Нехай на площині задані дві прямокутні декартові системи координат Oxy та O_1xy з однаковими початками координат, причому система O_1xy утворена з системи Oxy поворотом осей координат на додатний кут α (рис. 1.15).

Знайдемо формули, що виражають координати (x, y) точки M у системі Oxy через координати (x, y) цієї точки в системі O_1xy. Для зручності введемо дві полярні системи координат із спільним полюсом O і полярними осями Ox та Ox. Тоді правильні формули

$$x = \rho\cos(\varphi + \alpha) = \rho\cos\varphi\cos\alpha - \rho\sin\varphi\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = \rho\sin(\varphi + \alpha) = \rho\sin\varphi\cos\alpha + \rho\cos\varphi\sin\alpha = y'\cos\alpha + x'\sin\alpha$$

Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = x, \\ y'\cos\alpha + x'\sin\alpha = y \end{cases}$$

відносно x' та y', дістанемо формули

$$\boxed{x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha,}$$

які називають *формулами перетворення координат при повороті осей.*

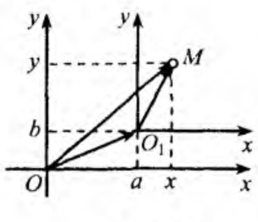


Рис. 1.14

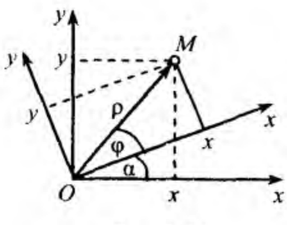


Рис. 1.15

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Дано точки $M_1(3;\ 3;-2)$, $M_2(0;\ 1;\ 4)$. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $|\overline{M_1M}|:|\overline{MM_2}|=2:3$.

Розв'язання:

а) $\overline{M_1M_2}=(0-3;1-3;\ 4-(-2))=(-3;-2;6)$;

$$|M_1M_2|=\sqrt{9+4+36}=7;\ \cos\alpha=\frac{-3}{7},\ \cos\beta=\frac{-2}{7},\ \cos\gamma=\frac{6}{7}.$$

Орт вектора $\overline{M_1M_2}$ такий:

$$\vec{e}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}=\{-3/7;\ -2/7;\ 6/7\};$$

б) $\lambda=\frac{2}{3}$, тоді

$$x_M=\frac{3+\frac{2}{3}\cdot 0}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9}{5},\ y_M=\frac{3+\frac{2}{3}\cdot 1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{11}{5},\ z_M=\frac{-2+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=\frac{2}{5}.$$

2. Знайдіть вектор $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, якщо він утворює з осями координат однакові кути і $|\vec{a}|=2\sqrt{3}$.

Розв'язання. Враховуючи рівності

$$a_x=|\vec{a}|\cos\alpha,\ \ a_y=|\vec{a}|\cos\beta,\ \ a_z=|\vec{a}|\cos\gamma$$

і умову $\alpha=\beta=\gamma$, записуємо співвідношення

$$\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

звідки дістаємо $\cos^2\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $a_x=a_y=a_z=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=2$ або $a_x=a_y=a_z=-2$.

Відповідь: $\vec{a}=\{2;\ 2;\ 2\}$ або $\vec{a}=\{-2;\ -2;\ -2\}$.

3. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=2\vec{a}-5\vec{b}$ і $\vec{c}_2=\vec{a}-2\vec{b}$ побудовані на векторах $\vec{a}=\{1;\ -2;\ 3\}$ і $\vec{b}=\{4;\ 2;\ -1\}$?

Розв'язання. Послідовно дістаємо

$$\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b} = \{2;\ \ -4;\ \ 6\} - \{20;\ \ 10;\ \ -5\} = \{-18;\ \ -14;\ \ 11\},$$

$$\vec{c}_2 = \vec{a} - 2\vec{b} = \{1;\ \ -2;\ \ 3\} - \{8;\ \ 4;\ \ -2\} = \{-7;\ \ -6;\ \ 5\}.$$

Оскільки координати векторів $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$ не пропорційні, то ці вектори неколінеарні.

4. Початком вектора $\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$ є точка $M(3;\ 4; -2)$. Знайдіть координати точки P, яка є кінцем вектора $\vec{a}$.

Розв'язання. Враховуючи умову рівності двох векторів, дістанемо

$$\vec{a} = \overrightarrow{MP} = (x_P - x_M,\ y_P - y_M,\ z_P - z_M),$$

або

$$(1;\ -2;\ 3) = (x_P - 3,\ y_P - 4,\ z_P + 2),$$

звідси $x_P = 4,\ \ y_P = 2,\ \ z_P = 1$, тобто $P(4; 2;\ 1)$ — кінець вектора $\vec{a}$.

5. Відомо, що вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{k}$ та $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β.

Розв'язання. Записуємо умову колінеарності заданих векторів:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{3} = \frac{-8}{\beta},$$

звідси $\alpha = 4,\ \beta = -4$.

6. Знайдіть подання вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ у базисі $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j},\ \ \vec{q} = -\vec{i} + 2\vec{j}$.

Розв'язання. Передусім переконуємось, що вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$ утворюють базис: $\frac{2}{-1} \neq \frac{3}{2}$. Записуємо розклад $\vec{a} = \alpha\vec{p} + \beta\vec{q}$, де коефіцієнти α та β підлягають визначенню. Далі маємо

$$5\vec{i} + 4\vec{j} = \alpha(2\vec{i} + 3\vec{j}) + \beta(-\vec{i} + 2\vec{j}),$$

або

$$5\vec{i} + 4\vec{j} = (2\alpha - \beta)\vec{i} + (3\alpha + 2\beta)\vec{j}.$$

Звідси дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5, \\ 3\alpha + 2\beta = 4, \end{cases}$$

розв'язок якої $\alpha = 2,\ \beta = -1$.

Отже,

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}.$$

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Дано точки $M_1(-4;\ 5;\ -6)$, $M_2(5;\ -7;\ 2)$. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, яка ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $|\overline{M_1M}|:|\overline{MM_2}|=3:5$.

2. Знайдіть вектор $\vec{a}=\{a_x;a_y;a_z\}$, якщо він утворює з осями Ox і Oy кути $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ та $\beta=\dfrac{\pi}{3}$ відповідно, і $|\vec{a}|=6$.

3. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1=-\vec{a}+4\vec{b}$ і $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$, побудовані на векторах $\vec{a}=\{2;-2;3\}$ і $\vec{b}=\{3;1;-1\}$?

4. Відомо, що вектори $\vec{a}=7\vec{i}+\beta\vec{j}+5\vec{k}$ та $\vec{b}=\alpha\vec{i}+3\vec{j}-10\vec{k}$ колінеарні. Знайдіть α і β.

5. Знайдіть подання вектора $\vec{a}=5\vec{i}-8\vec{j}$ у базисі $\vec{p}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{q}=3\vec{i}-2\vec{j}$.

Відповіді

1. а) $\overline{M_1M_2}=\{9;-12;8\}$; $\cos\alpha=\dfrac{9}{17}$, $\cos\beta=-\dfrac{12}{17}$, $\cos\gamma=\dfrac{8}{17}$; б) $M(-5/8;\ 0{,}5;\ -3)$. **2.** $\vec{a}=\{3\sqrt{2};3;\pm3\}$. **3.** ні. **4.** $\alpha=-14$, $\beta=-1{,}5$. **5.** $\vec{a}=-2\vec{p}+3\vec{q}$.

Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Дано точки M_1 та M_2. Знайдіть:

а) координати, довжину, напрямні косинуси та орт вектора $\overline{M_1M_2}$;

б) координати точки M, якщо $M_1M:MM_2=m:n$;

в) координати точки M_3, якщо $\overline{M_1M_3}=\lambda\overline{M_1M_2}$.

4.1.1. $M_1(1;\ 2;\ -1)$, $M_2(3;\ 4;\ -2)$, $m:n=2:5$, $\lambda=3$.

4.1.2. $M_1(-2;\ 0;\ -4)$, $M_2(-4;\ 1;\ -2)$, $m:n=3:1$, $\lambda=2$.

4.1.3. $M_1(-5;\ 1;\ 4)$, $M_2(1;\ 3;\ 1)$, $m:n=3:2$, $\lambda=4$.

4.1.4. $M_1(5;\ -1;\ -4)$, $M_2(11;\ 1;\ -1)$, $m:n=2:1$, $\lambda=-2$.

4.1.5. $M_1(-3;-1;8)$,	$M_2(-7;-5;6)$,	$m:n=1:4$, $\lambda=-3$.
4.1.6. $M_1(15;-2;-14)$,	$M_2(11;0;10)$,	$m:n=2:3$, $\lambda=4$.
4.1.7. $M_1(-8;-12;3)$,	$M_2(0;-3;15)$,	$m:n=1:5$, $\lambda=-2$.
4.1.8. $M_1(10;-5;-4)$,	$M_2(1;7;5)$,	$m:n=3:5$, $\lambda=-3$.
4.1.9. $M_1(5;2;-6)$,	$M_2(25;-10;3)$,	$m:n=4:5$, $\lambda=3$.
4.1.10. $M_1(-3;-2;16)$,	$M_2(9;18;7)$,	$m:n=2:3$, $\lambda=-2$.
4.1.11. $M_1(-1;8;26)$,	$M_2(23;0;20)$,	$m:n=3:2$, $\lambda=-4$.
4.1.12. $M_1(-7;7;15)$,	$M_2(-1;-1;-9)$,	$m:n=2:7$, $\lambda=2$.
4.1.13. $M_1(-4;5;22)$,	$M_2(4;-1;-2)$,	$m:n=6:5$, $\lambda=4$.
4.1.14. $M_1(1;-8;12)$,	$M_2(25;-2;4)$,	$m:n=1:2$, $\lambda=-2$.
4.1.15. $M_1(4;9;14)$,	$M_2(-2;-15;22)$,	$m:n=1:3$, $\lambda=-3$.
4.1.16. $M_1(-5;17;21)$,	$M_2(4;5;1)$,	$m:n=4:3$, $\lambda=-5$.
4.1.17. $M_1(2;11;33)$,	$M_2(22;-1;24)$,	$m:n=4:1$, $\lambda=4$.
4.1.18. $M_1(-7;4;13)$,	$M_2(1;-5;1)$,	$m:n=5:3$, $\lambda=-6$.
4.1.19. $M_1(3;-8;14)$,	$M_2(-9;1;6)$,	$m:n=5:2$, $\lambda=5$.
4.1.20. $M_1(-9;3;5)$,	$M_2(0;15;13)$,	$m:n=4:7$, $\lambda=-1$.
4.1.21. $M_1(-1;4;12)$,	$M_2(3;0;10)$,	$m:n=6:7$, $\lambda=-2$.
4.1.22. $M_1(2;6;4)$,	$M_2(6;4;8)$,	$m:n=2:1$, $\lambda=-3$.
4.1.23. $M_1(-11;16;1)$,	$M_2(-5;10;4)$,	$m:n=3:4$, $\lambda=2$.
4.1.24. $M_1(-14;-3;2)$,	$M_2(-8;3;-1)$,	$m:n=4:5$, $\lambda=-3$.
4.1.25. $M_1(2;4;7)$,	$M_2(4;7;1)$,	$m:n=2:3$, $\lambda=4$.
4.1.26. $M_1(-11;18;36)$,	$M_2(1;14;30)$,	$m:n=4:5$, $\lambda=-2$.
4.1.27. $M_1(-4;-3;0)$,	$M_2(2;1;12)$,	$m:n=1:6$, $\lambda=-4$.
4.1.28. $M_1(9;4;16)$,	$M_2(49;28;-2)$,	$m:n=4:3$, $\lambda=2$.
4.1.29. $M_1(0;5;21)$,	$M_2(18;11;12)$,	$m:n=6:5$, $\lambda=3$.
4.1.30. $M_1(-3;5;20)$,	$M_2(3;14;2)$,	$m:n=1:4$, $\lambda=-5$.

4.2. Чи колінеарні вектори $\vec{c}_1$ і $\vec{c}_2$, побудовані на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

4.2.1. $\vec{a}=\{1;2;3\}$,	$\vec{b}=\{3;0;-1\}$,	$\vec{c}_1=2\vec{a}+4\vec{b}$,	$\vec{c}_2=3\vec{b}-\vec{a}$.
4.2.2. $\vec{a}=\{1;0;1\}$,	$\vec{b}=\{-2;3;5\}$,	$\vec{c}_1=\vec{a}+2\vec{b}$,	$\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$.
4.2.3. $\vec{a}=\{-2;4;1\}$,	$\vec{b}=\{1;-2;7\}$,	$\vec{c}_1=5\vec{a}+3\vec{b}$,	$\vec{c}_2=2\vec{a}-\vec{b}$.
4.2.4. $\vec{a}=\{1;2;-3\}$,	$\vec{b}=\{2;-1;-1\}$,	$\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$,	$\vec{c}_2=8\vec{a}-\vec{b}$.
4.2.5. $\vec{a}=\{3;5;4\}$,	$\vec{b}=\{5;9;7\}$,	$\vec{c}_1=-2\vec{a}+\vec{b}$,	$\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.
4.2.6. $\vec{a}=\{1;4;-2\}$,	$\vec{b}=\{1;1;-1\}$,	$\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$,	$\vec{c}_2=4\vec{a}+2\vec{b}$.
4.2.7. $\vec{a}=\{1;-2;5\}$,	$\vec{b}=\{3;-1;0\}$,	$\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$,	$\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
4.2.8. $\vec{a}=\{3;4;-1\}$,	$\vec{b}=\{2;-1;1\}$,	$\vec{c}_1=6\vec{a}-3\vec{b}$,	$\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.
4.2.9. $\vec{a}=\{-2;-3;-2\}$,	$\vec{b}=\{1;0;5\}$,	$\vec{c}_1=3\vec{a}-9\vec{b}$,	$\vec{c}_2=-3\vec{b}-\vec{a}$.

4.2.10. $\vec{a}=\{-1;4;2\}$, $\vec{b}=\{3;-2;6\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-6\vec{a}$.

4.2.11. $\vec{a}=\{5;0;-1\}$, $\vec{b}=\{7;2;3\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}+6\vec{a}$.

4.2.12. $\vec{a}=\{0;3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;-2;1\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{b}+3\vec{a}$.

4.2.13. $\vec{a}=\{-2;7;-1\}$, $\vec{b}=\{-3;5;2\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}+3\vec{a}$.

4.2.14. $\vec{a}=\{3;7;0\}$, $\vec{b}=\{1;-3;4\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

4.2.15. $\vec{a}=\{3;7;0\}$, $\vec{b}=\{1;-3;4\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}+2\vec{a}$.

4.2.16. $\vec{a}=\{3;-2;0\}$, $\vec{b}=\{3;0;-4\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-\vec{a}$.

4.2.17. $\vec{a}=\{2;0;1\}$, $\vec{b}=\{-2;3;-5\}$, $\vec{c}_1=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}-3\vec{a}$.

4.2.18. $\vec{a}=\{-3;4;-1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;6\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-\vec{b}$.

4.2.19. $\vec{a}=\{1;4;-3\}$, $\vec{b}=\{2;1;-1\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=6\vec{a}-\vec{b}$.

4.2.20. $\vec{a}=\{3;5;2\}$, $\vec{b}=\{5;0;7\}$, $\vec{c}_1=-2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{a}-2\vec{b}$.

4.2.21. $\vec{a}=\{0;4;-3\}$, $\vec{b}=\{4;1;-1\}$, $\vec{c}_1=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{c}_2=5\vec{a}+2\vec{b}$.

4.2.22. $\vec{a}=\{1;-2;3\}$, $\vec{b}=\{3;-1;1\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-3\vec{a}$.

4.2.23. $\vec{a}=\{4;4;-1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;3\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-3\vec{a}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-4\vec{a}$.

4.2.24. $\vec{a}=\{2;3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;0;3\}$, $\vec{c}_1=3\vec{a}-7\vec{b}$, $\vec{c}_2=-2\vec{b}-\vec{a}$.

4.2.25. $\vec{a}=\{-1;4;3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}-4\vec{a}$.

4.2.26. $\vec{a}=\{3;0;-1\}$, $\vec{b}=\{7;2;3\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}_2=3\vec{b}+2\vec{a}$.

4.2.27. $\vec{a}=\{1;3;-2\}$, $\vec{b}=\{1;-2;2\}$, $\vec{c}_1=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=4\vec{b}+3\vec{a}$.

4.2.28. $\vec{a}=\{-2;4;-1\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$, $\vec{c}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{c}_2=2\vec{b}+\vec{a}$.

4.2.29. $\vec{a}=\{3;3;0\}$, $\vec{b}=\{1;-3;1\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}-2\vec{a}$.

4.2.30. $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{1;-3;2\}$, $\vec{c}_1=4\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{c}_2=\vec{b}+6\vec{a}$.

Тема 5. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Означення скалярного добутку двох векторів, його властивості і координатна форма. Умова перпендикулярності двох векторів.

Література: [1, розділ 4], [4, розділ 3, п. 3.2], [6, розділ §4], [7, розділ 1, §3], [10, розділ 1, §2], [11, розділ 1, §2].

Т.5 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

5.1. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число $\vec{a}\cdot\vec{b}$ (або $(\vec{a},\vec{b})$), що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.}$$

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ чи $\vec{b}$ нульовий, то за означенням

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\,.$$

Оскільки виконуються рівності

$$|\vec{a}|\cos\varphi=np_{\vec{b}}\vec{a}\,,\ |\vec{b}|\cos\varphi=np_{\vec{a}}\vec{b},$$

то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\text{пр}_{\vec{b}}\,\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\,\vec{b}.}$$

Геометричний зміст скалярного добутку: скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку довжини одного вектора на проекцію на нього другого вектора (рис. 1.16).

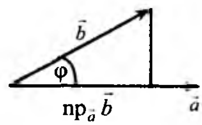


Рис. 1.16.

Тоді

$$\boxed{np_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}.}\qquad(1.14)$$

Формула (1.14) — робоча формула для обчислення проекції вектора на вектор (або вісь).

5.2. Властивості скалярного добутку

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$; 2) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

3) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

Геометричні властивості скалярного добутку:

1) якщо $\vec{a}\neq0$ та $\vec{b}\neq0$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$, якщо кут φ гострий, і $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$, якщо кут φ тупий;

2) скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні;

3) скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його довжини, тобто

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=|\vec{a}|^2,$$

звідки

$$\boxed{|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}.} \qquad (1.15)$$

Умова перпендикулярності двох векторів

Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.} \qquad (1.16)$$

Зокрема:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\ \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\ \vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

5.3. Вираз скалярного добутку через координати. Кут між векторами

Нехай вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задані своїми координатами

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\ \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z).$$

Тоді

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z} \qquad (1.17)$$

Справді,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k})(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k})=$$

$$=a_xb_x\cdot\vec{i}^2+a_xb_y\vec{i}\cdot\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\cdot\vec{k}+a_yb_x\vec{j}\cdot\vec{i}+a_yb_y\vec{j}^2+a_yb_z\vec{j}\cdot\vec{k}+$$

$$+a_zb_x\vec{k}\cdot\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\cdot\vec{j}+a_zb_z\cdot\vec{k}^2=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

оскільки $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{k}\cdot\vec{i}=0$ та $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$.

Висновки з формули (1.17) такі:

1) умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0;$$

2) довжина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Т.5 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 120°$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, обчисліть:

а) $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Розв'язання.

а) $A = (3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\vec{a}^2 - 2\vec{b}\vec{a} + 6\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2$.

Оскільки правильні рівності

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 9,\ \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 16,\ \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120° = 3\cdot 4\cdot(-0,5) = -6,$$

то

$$A = 3\cdot 9 + 4\cdot(-6) - 4\cdot 16 = -61;$$

б) скориставшись формулою (1.15), дістанемо

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{9 - 2\cdot(-6) + 16} = \sqrt{37}.$$

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1;\ 2;\ -2\}$ і $\vec{b} = \{3;\ 3;\ -4\}$. Знайдіть:

а) скалярний добуток $(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$.

Розв'язання.

а) $4\vec{a} + 3\vec{b} = \{4;\ 8;\ -8\} + \{9;\ 9;\ -12\} = \{13;\ 17;\ -20\}$,

$\vec{a} - 2\vec{b} = \{1;\ 2;\ -2\} - \{6;\ 6;\ -8\} = \{-5;\ -4;\ 6\}$,

$(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b}) = 13\cdot(-5) + 17\cdot(-4) - 20\cdot 6 = -253$;

б) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{4;\ 5;\ -6\}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{-2;\ -1;\ 2\}$,

$$\cos\varphi = \frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{c}||\vec{d}|} = \frac{4\cdot(-2) + 5\cdot(-1) - 6\cdot 2}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 6^2}\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{-25}{3\sqrt{77}},$$

звідси $\varphi = \pi - \arccos\dfrac{25}{3\sqrt{77}}$.

3. Дано вектори $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Знайдіть вектор $\vec{x}$, який задовольняє рівності $\vec{x}\cdot\vec{a} = 8$, $\vec{x}\cdot\vec{b} = -3$ та $\vec{x}\cdot\vec{c} = 13$.

Розв'язання. Нехай $\vec{x}=\{x_1, x_2, x_3\}$, тоді умова $\vec{x}\cdot\vec{a}=8$ рівносильна рівнянню $x_1-x_2+4x_3=8$. Аналогічно дістаємо ще два рівняння $6x_1+5x_2+4x_3=-3$ і $-2x_1-3x_2+4x_3=13$. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3=8, \\ 6x_1+5x_2+4x_3=-3, \\ -2x_1-3x_2+4x_3=13, \end{cases}$$

дістанемо значення: $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=2$.

Відповідь: $\vec{x}=\{-1;\ -1;\ 2\}$.

4. Точки $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;\ 0)$, $C(3;-2;1)$ — вершини трикутника ABC. Знайдіть кут у трикутнику при вершині B і проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$, що збігаються з відповідними сторонами трикутника:

$$\overrightarrow{BA}=\{3;0;4\},\ \overrightarrow{BC}=\{7;0;1\}.$$

Косинус кута φ між векторами $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ знаходимо за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{3\cdot7+0\cdot0+4\cdot1}{\sqrt{9+0+4}\sqrt{49+0+1}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

звідки $\varphi=45^\circ$. Отже, $\angle B=45^\circ$.

Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$ знайдемо за формулою :

$$np_{\overrightarrow{BC}}\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{-3\cdot7+0+(-4)\cdot1}{\sqrt{50}}=\frac{-25}{5\sqrt{2}}=-\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

5. Нехай точки $A(1;\ 4)$, $B(-2;\ 5)$, $C(-3;\ a)$, $D(3;\ -3)$ — послідовні вершини чотирикутника $ABCD$. При якому значенні a діагоналі чотирикутника взаємно перпендикулярні?

Розв'язання. Утворимо вектори:

$$\overrightarrow{AC}=(-4,\ a-4),\ \overrightarrow{BD}=(5,\ -8).$$

Діагоналі чотирикутника будуть взаємно перпендикулярні тоді, коли скалярний добуток $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ (див. (1.16)), тобто

$$-4\cdot5+(\ a-4)(-8)=0,$$

звідки дістанемо $a=1{,}5$.

Т.5 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60°$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, обчисліть:

а) $(4\vec{a} - \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|\vec{a} - 2\vec{b}|$.

2. Дано вектори $\vec{a} = \{1;\ 4;\ -1\}$ і $\vec{b} = \{0;\ 3;\ -2\}$. Знайдіть:

а) скалярний добуток $(\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$;

б) кут між векторами $2\vec{a} + \vec{b}$ та $\vec{a} - \vec{b}$;

в) проекцію вектора $-3\vec{a} + 2\vec{b}$ на вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

3. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Знайдіть вектор $\vec{x}$, якщо $\vec{x} \cdot \vec{a} = 8$, $\vec{x} \cdot \vec{b} = 10$, $\vec{x} \cdot \vec{c} = 8$.

Відповіді

1. а) 57; б) $2\sqrt{21}$. **2.** а) 79; б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{47}}$; в) $-\frac{10}{\sqrt{3}}$. **3.** $\vec{x} = \{2; 2; 2\}$.

Т.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

5.1. Обчисліть:

5.1.1. а) $(4\vec{a} + 7\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5.1.2. а) $(2\vec{a} + 5\vec{b})(3\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

5.1.3. а) $(3\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

5.1.4. а) $(4\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} - 4\vec{b})$; б) $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5.1.5. а) $(4\vec{a} + 5\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$; б) $|2\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

5.1.6. а) $(5\vec{a} + 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

5.1.7. а) $(2\vec{a} + 4\vec{b})(-3\vec{a} - \vec{b})$; б) $|\vec{a} + 2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

5.1.8. а) $(3\vec{a}+2\vec{b})(-\vec{a}+3\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=4\sqrt{2}, |\vec{b}|=3, \varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.1.9. а) $(4\vec{a}+\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.10. а) $(6\vec{a}+5\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$; б) $|4\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2\sqrt{3}, |\vec{b}|=1, \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.1.11. а) $(5\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.12. а) $(3\vec{a}+4\vec{b})(-3\vec{a}-\vec{b})$; б) $|\vec{a}+2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=2, \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

5.1.13. а) $(5\vec{a}+2\vec{b})(-\vec{a}+3\vec{b})$; б) $|\vec{a}+4\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{2}, |\vec{b}|=3, \varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.1.14. а) $(4\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+5\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=4, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.15. а) $(2\vec{a}+5\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$; б) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=\sqrt{3}, |\vec{b}|=1, \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.1.16. а) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.17. а) $(3\vec{a}+5\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$; б) $|\vec{a}+2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2, \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

5.1.18. а) $(3\vec{a}+2\vec{b})(-\vec{a}+3\vec{b})$; б) $|\vec{a}+3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=6\sqrt{2}, |\vec{b}|=3, \varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.1.19. а) $(-4\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}+2\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=6, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.20. а) $(2\vec{a}-5\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; б) $|2\vec{a}-3\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=4\sqrt{3}, |\vec{b}|=1, \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.1.21. а) $(\vec{a}+\vec{b})(3\vec{a}-2\vec{b})$; б) $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=4, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.22. а) $(3\vec{a}+\vec{b})(4\vec{a}-\vec{b})$; б) $|\vec{a}+2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

5.1.23. а) $(3\vec{a}+5\vec{b})(-\vec{a}-\vec{b})$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3\sqrt{2}, |\vec{b}|=2, \varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.1.24. а) $(-\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}+\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.25. а) $(2\vec{a}-3\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; б) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3\sqrt{3}, |\vec{b}|=1,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.1.26. а) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-2\vec{b})$; б) $|3\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.27. а) $(2\vec{a}+\vec{b})(4\vec{a}-\vec{b})$; б) $|5\vec{a}+2\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{2\pi}{3}$.

5.1.28. а) $(3\vec{a}+5\vec{b})(-\vec{a}+\vec{b})$; б) $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=5\sqrt{2}, |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$.

5.1.29. а) $(\vec{a}+3\vec{b})(\vec{a}+\vec{b})$; б) $|2\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=4, |\vec{b}|=3,\ \varphi=\frac{\pi}{3}$.

5.1.30. а) $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$; б) $|2\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=5\sqrt{3}, |\vec{b}|=2,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$.

5.2. Знайдіть скалярний добуток $\vec{p}\vec{q}$, кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$ та проекцію вектора $\vec{p}$ на вектор $\vec{q}$, якщо:

5.2.1. $\vec{p}=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;3;4\}$, $\vec{b}=\{-5;1;2\}$.

5.2.2. $\vec{p}=5\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}=\{-2;1;2\}$, $\vec{b}=\{-2;4;3\}$.

5.2.3. $\vec{p}=-2\vec{a}+7\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}=\{2;-3;4\}$, $\vec{b}=\{-1;-1;3\}$.

5.2.4. $\vec{p}=3\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{-4;3;1\}$, $\vec{b}=\{2;2;1\}$.

5.2.5. $\vec{p}=\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}=\{-4;3;2\}$, $\vec{b}=\{-2;4;5\}$.

5.2.6. $\vec{p}=-\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{3;3;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;-2\}$.

5.2.7. $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-6\vec{b}$, $\vec{a}=\{4;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;1;4\}$.

5.2.8. $\vec{p}=-3\vec{a}+7\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;0;4\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$.

5.2.9. $\vec{p}=-3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;-2\}$.

5.2.10. $\vec{p}=5\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{0;-4;4\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;3\}$.

5.2.11. $\vec{p}=-\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;4;4\}$, $\vec{b}=\{3;1;-2\}$.

5.2.12. $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}=\{-5;1;2\}$, $\vec{b}=\{-3;4;3\}$.

5.2.13. $\vec{p}=-3\vec{a}-4\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{0;-2;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;0\}$.

5.2.14. $\vec{p}=-3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}+9\vec{b}$, $\vec{a}=\{2;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-4\}$.

5.2.15. $\vec{p}=5\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}=\{-2;4;2\}$, $\vec{b}=\{-3;0;3\}$.

5.2.16. $\vec{p}=-\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;2\}$.

5.2.17. $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}=\{2;1;2\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-2\}$.

5.2.18. $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;2;3\}$, $\vec{b}=\{4;1;-3\}$.

5.2.19. $\vec{p}=-3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{3;-2;0\}$, $\vec{b}=\{1;-2;2\}$.

5.2.20. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}=\{0;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-4;0\}$.

5.2.21. $\vec{p}=-\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;2;1\}$, $\vec{b}=\{4;1;-2\}$.

5.2.22. $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{a}=\{-2;4;3\}$, $\vec{b}=\{-3;0;2\}$.

5.2.23. $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{0;-2;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;0\}$.

5.2.24. $\vec{p}=-3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{2;1;4\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-3\}$.

5.2.25. $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=5\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{a}=\{-2;4;0\}$, $\vec{b}=\{-4;0;2\}$.

5.2.26. $\vec{p}=-\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{a}=\{4;-1;0\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$.

5.2.27. $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{2;0;4\}$, $\vec{b}=\{3;-1;-2\}$.

5.2.28. $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=3\vec{a}+4\vec{b}$, $\vec{a}=\{-1;4;1\}$, $\vec{b}=\{3;1;-2\}$.

5.2.29. $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}=\{3;-2;0\}$, $\vec{b}=\{1;-4;3\}$.

5.2.30. $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{a}=\{0;-1;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;0\}$.

5.3. Знайдіть вектор $\vec{x}$, якщо:

5.3.1. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=1$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+3\vec{k})=5$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})=2$.

5.3.2. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=2$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})=8$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-4\vec{j}+8\vec{k})=2$.

5.3.3. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})=5$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k})=11$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-5\vec{j}+10\vec{k})=2$.

5.3.4. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})=10$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-3\vec{j}+9\vec{k})=14$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-6\vec{j}+12\vec{k})=2$.

5.3.5. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})=17$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-4\vec{j}+11\vec{k})=17$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-7\vec{j}+14\vec{k})=2$.

5.3.6. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})=26$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-5\vec{j}+13\vec{k})=20$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-8\vec{j}+16\vec{k})=2$.

5.3.7. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k})=37$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-6\vec{j}+15\vec{k})=23$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-9\vec{j}+18\vec{k})=2$.

5.3.8. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}-\vec{k})=5$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k})=-1$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=2$.

5.3.9. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})=17$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k})=-7$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=2$.

5.3.10. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k})=26$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+5\vec{j}-7\vec{k})=-10$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k})=2$.

5.3.11. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k})=37$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+6\vec{j}-9\vec{k})=-13$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+3\vec{j}-6\vec{k})=2$.

5.3.12. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})=3$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=1$, $\vec{x}\cdot(3\vec{i}+\vec{j}+10\vec{k})=-1$.

5.3.13. $\vec{x}\cdot(3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})=10$, $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k})=4$, $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+\vec{j}+12\vec{k})=0$.

5.3.14. $\vec{x}\cdot(2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=7$, $\vec{x}\cdot(3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})=7$, $\vec{x}\cdot(7\vec{i}+\vec{j}+14\vec{k})=1$.

5.3.15. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k})=18$, $\vec{x}\cdot(4\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})=10$, $\vec{x}\cdot(9\vec{i}+\vec{j}+16\vec{k})=2$.

5.3.16. $\vec{x}\cdot(3\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k})=11$, $\vec{x}\cdot(5\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})=13$, $\vec{x}\cdot(11\vec{i}+\vec{j}+18\vec{k})=3$.

5.3.17. $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j})=10$, $\vec{x}\cdot(6\vec{i}-\vec{j}+7\vec{k})=16$, $\vec{x}\cdot(13\vec{i}+\vec{j}+20\vec{k})=4$.

5.3.18. $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})=6$, $\vec{x}\cdot(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=9$, $\vec{x}\cdot(-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})=-4$.

5.3.19. $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=5$, $\vec{x}\cdot(3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=11$, $\vec{x}\cdot(-5\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=-5$.

5.3.20. $\vec{x}\cdot(3\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k})=14$, $\vec{x}\cdot(4\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=14$, $\vec{x}\cdot(-7\vec{i}+\vec{j})=-6$.

5.3.21. $\vec{x}\cdot(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=9$, $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})=17$, $\vec{x}\cdot(9\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k})=7$.

5.3.22. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k})=22$, $\vec{x}\cdot(6\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k})=20$, $\vec{x}\cdot(11\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})=8$.

5.3.23. $\vec{x}\cdot(3\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=13$, $\vec{x}\cdot(7\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k})=23$, $\vec{x}\cdot(13\vec{i}-\vec{j}+6\vec{k})=9$.

5.3.24. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})=-2$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})=3$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})=0$.

5.3.25. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=1$, $\vec{x}\cdot(2\vec{i}+\vec{j})=3$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-2\vec{j}+5\vec{k})=-1$.

5.3.26. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}-\vec{k})=4$, $\vec{x}\cdot(3\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=5$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k})=-2$.

5.3.27. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}-\vec{j})=7$, $\vec{x}\cdot(4\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})=9$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-4\vec{j}+7\vec{k})=-3$.

5.3.28. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})=10$, $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})=15$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k})=-4$.

5.3.29. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k})=-8$, $\vec{x}\cdot(-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})=9$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})=2$.

5.3.30. $\vec{x}\cdot(5\vec{i}+5\vec{j}-6\vec{k})=-11$, $\vec{x}\cdot(-2\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k})=15$, $\vec{x}\cdot(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})=3$.

Тема 6. ВЕКТОРНИЙ ТА МІШАНИЙ ДОБУТКИ

Векторний добуток двох векторів, його алгебраїчні та геометричні властивості. Координатна форма. Мішаний добуток трьох векторів, його алгебраїчні та геометричні властивості. Координатна форма. Умова компланарності трьох векторів.

Література: [1, розділ 4], [4, розділ 3, п.3.2], [6, розділ 2, §§5, 6], [7, розділ 1, §4], [10, розділ 1, §2], [11, розділ 1, §2].

Т.6 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

6.1. Векторний добуток векторів

Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c}$, який задовольняє такі три умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ обчислюють за формулою:

$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi,$$

де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку*, тобто якщо дивитися з кінця результуючого вектора $\vec{c}$, то найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ видно проти годинникової стрілки (рис. 1.17).

Позначення векторного добутку: $\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$.

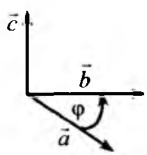


Рис. 1.17

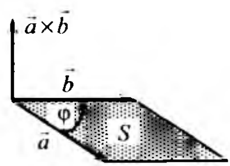


Рис. 1.18

З означення векторного добутку безпосередньо випливають векторні рівності між ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.}$$

6.2. Властивості векторного добутку

Розглянемо алгебраїчні та геометричні властивості векторного добутку:

1) *геометричний зміст векторного добутку:* модуль векторного добутку дорівнює площі паралелограма, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.18);

2) антикомутативність множення:

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.}$$

Справді, з означення векторного добутку випливає, що вектори $\vec{a}\times\vec{b}$ та $\vec{b}\times\vec{a}$ колінеарні, мають однакову довжину:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\vec{b}||\vec{a}|\sin\varphi=|\vec{b}\times\vec{a}|$$

та протилежно напрямлені, оскільки вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ утворюють праву трійку, а вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{a}$ — ліву трійку;

3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$; $\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;

5) два ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли векторний добуток цих векторів дорівнює нуль-вектору, тобто

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.}$$

Зокрема,

$$\boxed{\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0},\ \ \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0},\ \ \vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}.}$$

Зауваження. Якщо відомі координати вершин трикутника *ABC*, то його площу доцільно шукати за формулою

$$\boxed{S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|.} \qquad (1.18)$$

6.3. Векторний добуток двох векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ задані своїми координатами в ПДСК. Тоді векторний добуток знаходять за формулою

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix},} \qquad (1.19)$$

або

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}.$$

Справді,

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})=$$

$$=a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+$$

$$+a_y b_y(\vec{j}\times\vec{j})+a_y b_z(\vec{j}\times\vec{k})+a_z b_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_z b_y(\vec{k}\times\vec{j})+a_z b_z(\vec{k}\times\vec{k})=$$

$$=\vec{0}+a_x b_y\vec{k}+a_x b_z(-\vec{j})+a_y b_x(-\vec{k})+\vec{0}+a_y b_z\vec{i}+a_z b_x\vec{j}+a_z b_y(-\vec{i})+\vec{0}=$$

$$=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}-(a_x b_z-a_z b_x)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

6.4. Деякі фізичні застосування векторного добутку

6.4.1. Визначення моменту сили відносно точки

Нехай у точці A прикладена сила $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ і нехай O — деяка точка простору (рис. 1.19).

З фізики відомо, що моментом сили відносно точки O називають вектор $\vec{M}$, який проходить через точку O і задовольняє такі три умови:

1) перпендикулярний площині, що проходить через точки O, A і B;

2) чисельно дорівнює добутку сили на плече:

$$|\vec{M}|=|\vec{F}|\cdot ON=|\vec{F}|\cdot|\vec{r}|\cdot\sin\varphi=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{OA}|\cdot\sin(\widehat{\vec{F},\overrightarrow{OA}});$$

3) утворює праву трійку з векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{AB}$.

Отже,

$$\vec{M}=\overrightarrow{OA}\times\vec{F}.$$

6.4.2. Визначення лінійної швидкості обертання

Швидкість $\vec{v}$ точки M твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо нерухомої осі, визначається за формулою Ейлера $\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$, де $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$, де O — деяка нерухома точка осі (рис. 1.20).

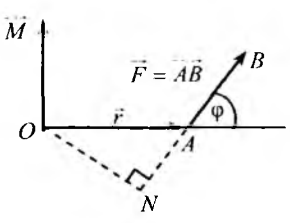


Рис. 1.19

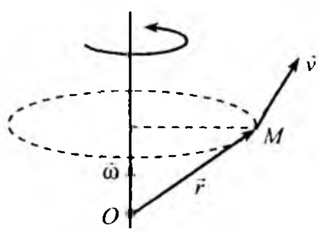


Рис. 1.20

6.5. Мішаний добуток векторів

Мішаним (*векторно-скалярним*) добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, рівне скалярному добутку вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.}$$

Розглянемо властивості мішаного добутку.

1. Якщо в мішаному добутку поміняти місцями які-небудь два множники, то мішаний добуток змінить знак, наприклад:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}\,.$$

2. При циклічному переставленні множників мішаний добуток не змінюється.

3. У мішаному добутку знаки векторного і скалярного добутків можна міняти місцями:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}\,.$$

4. *Геометричний зміст мішаного добутку:* модуль мішаного добут-ку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на прикладених до спільного початку векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 1.21), тобто

$$\boxed{V=|\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|.}$$

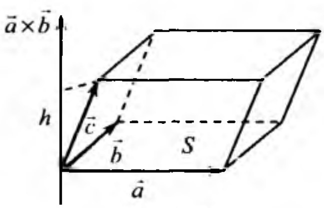


Рис. 1.21

Справді,

$$|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,|=|\,\vec{a}\times\vec{b}\,|\cdot|\,\text{пр}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}\,|=S_{\text{осн}}\cdot h=V.$$

Зауваження. Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, дорівнює 1/6 частині об'єму паралелепіпеда, тобто

$$\boxed{V_{\text{піраміди}}=\frac{1}{6}|\,\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,|.}$$

5. Якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють *праву трійку*, а якщо $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то ліву трійку.

6. *Умова компланарності трьох векторів.*

Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

6.6. Мішаний добуток трьох векторів, заданих координатами

Нехай вектори $\vec{a}=\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x,\ b_y,\ b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x,\ c_y,\ c_z\}$ задані своїми координатами в ПДСК. Знайдемо мішаний добуток цих векторів, використовуючи формули скалярного і векторного добутку векторів, заданих координатами. Маємо

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}c_z .$$

Дістали розклад визначника третього порядку за елементами першого рядка. Отже,

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.}$$

Зауваження. Компланарність ненульових векторів $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$ і $\vec{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$ встановлюють так: якщо визначник

$$\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0,$$

то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — компланарні, якщо визначник відмінний від нуля, то вектори некомпланарні.

Т.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Обчисліть $|(3\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|$, якщо $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\varphi=30°$.

Розв'язання. Оскільки

$$(3\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})=3\vec{a}\times\vec{a}-2\vec{b}\times\vec{a}+6\vec{a}\times\vec{b}-4\vec{b}\times\vec{b}=$$
$$=\vec{0}+2\vec{a}\times\vec{b}+6\vec{a}\times\vec{b}-\vec{0}=8\vec{a}\times\vec{b},$$

то

$$|(3\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})|=8\cdot|\vec{a}\times\vec{b}|=8|\vec{a}||\vec{b}|\sin 30°=8\cdot 3\cdot 4\cdot 0,5=48 .$$

2. Знайдіть вектор $(2\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;3;1\}$, $\vec{b}=\{-2;4;0\}$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$$2\vec{a}-\vec{b}=\{4;\ 6;\ 2\}-\{-2;\ 4;\ 0\}=\{6;\ 2;\ 2\},$$

$$3\vec{a}+2\vec{b}=\{6;\ 9;\ 3\}+\{-4;\ 8;\ 0\}=\{2;\ 17;\ 3\}.$$

Тоді

$$(2\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 6 & 2 & 2\\ 2 & 17 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 17 & 3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 17\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-28\vec{i}-14\vec{j}+98\vec{k}.$$

3. Обчисліть площу грані ABC і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, на яких побудована піраміда:

$$\overrightarrow{AB}=\{3;\ 6;\ 3\},\ \overrightarrow{AC}=\{1;\ 3;\ -2\},\ \overrightarrow{AD}=\{2;\ 2;\ 2\}.$$

Площу грані ABC визначаємо за формулою $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

Маємо

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=(-12-9)\vec{i}-(-6-3)\vec{j}+(9-6)\vec{k}=$$

$$=-21\vec{i}+9\vec{j}+3\vec{k}=3(-7\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k});$$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\sqrt{(-7)^2+3^2+1^2}=\frac{3}{2}\sqrt{59}.$$

Об'єм піраміди V_{ABCD} дорівнює 1/6 частині об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, тобто

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -2\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\mathrm{mod}(-18)=3.$$

Отже, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{3}{2}\sqrt{59}$ кв. од., $V_{ABCD}=3$ куб. од.

4. Доведіть, що вектори $\vec{a}=\{2;\ 1;\ 3\}$, $\vec{b}=\{2;\ -3;\ 1\}$ і $\vec{c}=\{1;\ 2;\ 1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\vec{p}=\{0;\ 11;\ 3\}$ за цим базисом.

Розв'язання. Нагадаємо, що *базисом у просторі* називають довільну упорядковану трійку некомпланарних векторів. Тому дані вектори утворюють базис, якщо мішаний добуток цих векторів не дорівнює нулю. Перевіримо цю умову:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=10\neq 0\,.$$

Отже, вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ — базис.

Вектор $\vec{p}$ розкладений за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{p}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$, α, β, γ — невідомі числа (координати вектора $\vec{p}$ у даному базисі).

Запишемо векторне рівняння у розгорнутому вигляді

$$0\cdot\vec{i}+11\vec{j}+3\vec{k}=\alpha(2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k})+\beta(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k})+\gamma(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}),$$

або

$$0\cdot\vec{i}+11\vec{j}+3\vec{k}=(2\alpha+2\beta+\gamma)\vec{i}+(\alpha-3\beta+2\gamma)\vec{j}+(3\alpha+\beta+\gamma)\vec{k}.$$

Враховуючи умову рівності двох векторів, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}0=2\alpha+2\beta+\gamma,\\ 11=\alpha-3\beta+2\gamma,\\ 3=3\alpha+\beta+\gamma.\end{cases}$$

Звідси $\alpha=1$, $\beta=-2$, $\gamma=2$. Отже,

$$\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}.$$

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Обчисліть $|(2\vec{a}+5\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\varphi=150^\circ$.

2. Дано вектори $\vec{a}=\{-2;0;1\}$ та $\vec{b}=\{-1;4;5\}$. Знайдіть:

а) $(2\vec{a}-5\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$; б) $|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})|$.

3. Обчисліть площу грані ABC і об'єм піраміди, вершини якої містяться в точках $A(2;4;5)$, $B(-4;4;-4)$, $C(5;0;3)$, $D(1;2;0)$.

4. Доведіть, що вектори $\vec{a}=\{-2;\ 2;-1\}$, $\vec{b}=\{-2;\ 1;-1\}$, $\vec{c}=\{-1;\ 0;\ 1\}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\vec{p}=\{-1;\ 1;\ 1\}$ за цим базисом.

5. Відомо, що точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 3;\ 1)$, $C(3;\ 2;\ -4)$ та $D(\ a;\ 4,\ 0)$ належать одній площині. Знайдіть a.

Відповіді

1. 21. **2.** а) $\{-36;\ 81;-72\}$; б) $2\sqrt{161}$. **3.** $S_{ABC}=\frac{3}{2}\sqrt{377}$, $V_{ABCD}=6$. **4.** $\vec{p}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$. **5.** $a=-3$.

Т.6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

6.1. Знайдіть векторний добуток:

6.1.1. $(2\vec{a}+4\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-2;1;2\}$, $\vec{b}=\{-2;4;3\}$.

6.1.2. $(5\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;3;4\}$, $\vec{b}=\{-5;1;2\}$.

6.1.3. $(-2\vec{a}+7\vec{b})\times(3\vec{a}-2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-4;3;1\}$, $\vec{b}=\{2;2;1\}$.

6.1.4. $(3\vec{a}+4\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;-3;4\}$, $\vec{b}=\{-1;-1;3\}$.

6.1.5. $(\vec{a}-4\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{3;3;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;-2\}$.

6.1.6. $(-\vec{a}+3\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-4;3;2\}$, $\vec{b}=\{-2;4;5\}$.

6.1.7. $(3\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}-6\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;0;4\}$, $\vec{b}=\{-3;1;2\}$.

6.1.8. $(-3\vec{a}+7\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{4;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;1;4\}$.

6.1.9. $(-3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{0;-4;4\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;3\}$.

6.1.10. $(5\vec{a}-4\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{3;2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;-2\}$.

6.1.11. $(-\vec{a}+4\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-5;1;2\}$, $\vec{b}=\{-3;4;3\}$.

6.1.12. $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}-3\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;4;4\}$, $\vec{b}=\{3;1;-2\}$.

6.1.13. $(-3\vec{a}-4\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-4\}$.

6.1.14. $(-3\vec{a}+2\vec{b})\times(2\vec{a}+9\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{0;-2;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;0\}$.

6.1.15. $(5\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}-3\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{3;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-1;-2;2\}$.

6.1.16. $(-\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-2;4;2\}$, $\vec{b}=\{-3;0;3\}$.

6.1.17. $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(3\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;2;3\}$, $\vec{b}=\{4;1;-3\}$.

6.1.18. $(3\vec{a}-\vec{b})\times(4\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;1;2\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-2\}$.

6.1.19. $(-3\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{0;-2;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-4;0\}$.

6.1.20. $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{3;-2;0\}$, $\vec{b}=\{1;-2;2\}$.

6.1.21. $(-\vec{a}-2\vec{b})\times(-\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-2;4;3\}$, $\vec{b}=\{-3;0;2\}$.

6.1.22. $(3\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;2;1\}$, $\vec{b}=\{4;1;-2\}$.

6.1.23. $(2\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;1;4\}$, $\vec{b}=\{2;-1;-3\}$.

6.1.24. $(-3\vec{a}+2\vec{b})\times(4\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{0;-2;2\}$, $\vec{b}=\{-2;-3;0\}$.

6.1.25. $(2\vec{a}-\vec{b})\times(5\vec{a}-2\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{4;-1;0\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$.

6.1.26. $(-\vec{a}-2\vec{b})\times(-\vec{a}-3\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-2;4;0\}$, $\vec{b}=\{-4;0;2\}$.

6.1.27. $(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{-1;4;1\}$, $\vec{b}=\{3;1;-2\}$.

6.1.28. $(\vec{a}-\vec{b})\times(3\vec{a}+4\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{2;0;4\}$, $\vec{b}=\{3;-1;-2\}$.

6.1.29. $(3\vec{a}+2\vec{b})\times(4\vec{a}+\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{0;-1;1\}$, $\vec{b}=\{-2;-1;0\}$.

6.1.30. $(2\vec{a}-3\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})$, якщо $\vec{a}=\{3;-2;0\}$, $\vec{b}=\{1;-4;3\}$.

6.2. Обчисліть площу грані *ABC* і об'єм піраміди *ABCD*, вершини якої містяться в точках:

6.2.1. $A(1; -2; 3)$, $B(2; 4; 7)$, $C(-3; -4; 0)$, $D(1; 0; 5)$.
6.2.2. $A(-3; 5; 4)$, $B(0; 0; 8)$, $C(-1; 3; -2)$, $D(2; 6; 1)$.
6.2.3. $A(0; -5; 4)$, $B(3; 5; 1)$, $C(-4; -4; 1)$, $D(3; 1; 6)$.
6.2.4. $A(-2; 0; 2)$, $B(1; 0; 6)$, $C(-5; 4; -1)$, $D(0; 4; 2)$.
6.2.5. $A(2; 1; 7)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(5; -4; 1)$, $D(2; 5; 1)$.
6.2.6. $A(3; -3; 0)$, $B(4; 4; 2)$, $C(-5; -3; 0)$, $D(1; 1; 4)$.
6.2.7. $A(-4; 6; 4)$, $B(3; 10; 8)$, $C(1; 4; -2)$, $D(-2; 3; 1)$.
6.2.8. $A(0; -3; 5)$, $B(-3; -1; 1)$, $C(2; -5; 2)$, $D(4; 3; 6)$.
6.2.9. $A(-5; 0; 3)$, $B(2; 1; 5)$, $C(-4; 2; -1)$, $D(0; 0; 3)$.
6.2.10. $A(2; 3; 5)$, $B(-1; -3; 4)$, $C(4; -3; 2)$, $D(1; 6; 1)$.
6.2.11. $A(2; -2; 0)$, $B(5; 3; 2)$, $C(-3; -2; 0)$, $D(1; 2; 3)$.
6.2.12. $A(-3; 5; 4)$, $B(2; 8; 7)$, $C(1; 3; -2)$, $D(-1; 4; 1)$.
6.2.13. $A(0; -2; 4)$, $B(-2; -2; 1)$, $C(3; -3; 2)$, $D(3; 3; 4)$.
6.2.14. $A(-3; 2; 3)$, $B(3; 1; -5)$, $C(4; -2; -1)$, $D(4; 0; 3)$.
6.2.15. $A(-2; 3; -5)$, $B(1; 3; 4)$, $C(4; 3; 2)$, $D(1; -6; 1)$.
6.2.16. $A(1; -3; 0)$, $B(4; 3; 1)$, $C(-4; -3; 0)$, $D(-1; -2; 3)$.
6.2.17. $A(3; -5; 4)$, $B(2; 6; -7)$, $C(-1; 3; 2)$, $D(-1; -4; 1)$.
6.2.18. $A(1; 0; 4)$, $B(2; -2; -1)$, $C(3; -1; 0)$, $D(3; 2; 5)$.
6.2.19. $A(-4; 1; 3)$, $B(3; 2; -7)$, $C(2; -1; -1)$, $D(5; 1; 3)$.
6.2.20. $A(-1; 5; -3)$, $B(0; 3; 2)$, $C(1; 3; 4)$, $D(2; -3; 1)$.
6.2.21. $A(-1; -2; 0)$, $B(-4; 3; -1)$, $C(4; -4; 0)$, $D(1; -2; 4)$.
6.2.22. $A(2; -1; 4)$, $B(2; 3; -5)$, $C(-2; 2; 3)$, $D(-2; -3; 1)$.
6.2.23. $A(1; 2; 5)$, $B(2; -3; 1)$, $C(4; -2; 0)$, $D(3; 3; 6)$.
6.2.24. $A(-1; 2; 4)$, $B(0; 2; -6)$, $C(2; -3; -2)$, $D(6; -1; 0)$.
6.2.25. $A(1; -5; -3)$, $B(1; 3; 0)$, $C(-1; 3; -4)$, $D(3; -3; 2)$.
6.2.26. $A(-2; -4; 0)$, $B(4; -3; -1)$, $C(3; -2; 0)$, $D(2; -1; 5)$.
6.2.27. $A(2; -3; 5)$, $B(1; 3; -4)$, $C(-1; 2; 4)$, $D(-1; -5; 2)$.
6.2.28. $A(2; 2; 2)$, $B(3; -3; 4)$, $C(4; -5; 1)$, $D(3; 2; 1)$.
6.2.29. $A(-2; 3; 5)$, $B(1; 2; -4)$, $C(3; -4; -2)$, $D(3; -2; 5)$.
6.2.30. $A(2; -4; -4)$, $B(2; 3; 1)$, $C(-3; 4; -4)$, $D(4; -2; 1)$.

6.3. Доведіть, що вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ і $\vec{r}$ утворюють базис, і розкладіть вектор $\vec{x}$ за цим базисом:

6.3.1. $\vec{x}=\{-2;11;14\}$, $\vec{p}=\{1;1;3\}$, $\vec{q}=\{1;2;1\}$, $\vec{r}=\{-4;1;1\}$.

6.3.2. $\vec{x}=\{2;-6;-3\}$, $\vec{p}=\{2,1,8\}$, $\vec{q}=\{2;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1;-1;2\}$.

6.3.3. $\vec{x}=\{-12;13;-4\}$, $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{1;4;1\}$, $\vec{r}=\{5;1;-3\}$.

6.3.4. $\vec{x}=\{11;14;12\}$, $\vec{p}=\{2;4;3\}$, $\vec{q}=\{1;2;-1\}$, $\vec{r}=\{4;4;5\}$.

6.3.5. $\vec{x}=\{-3;-2;2\}$, $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;2;-3\}$, $\vec{r}=\{-1;1;4\}$.

6.3.6. $\vec{x}=\{-12;-2;-15\}$, $\vec{p}=\{1;2;-1\}$, $\vec{q}=\{-4;3;1\}$, $\vec{r}=\{2;4;5\}$.

6.3.7. $\vec{x}=\{-4;13;16\}$, $\vec{p}=\{1;3;1\}$, $\vec{q}=\{7;-1;4\}$, $\vec{r}=\{-1;2;3\}$.

6.3.8. $\vec{x}=\{4;5;-7\}$, $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;-1;1\}$, $\vec{r}=\{-1,1,-3\}$.

6.3.9. $\vec{x}=\{0;0;2\}$, $\vec{p}=\{2;2;3\}$, $\vec{q}=\{4;-3;-1\}$, $\vec{r}=\{-6;1;-1\}$.

6.3.10. $\vec{x}=\{-1;13;10\}$, $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{3;-3;1\}$, $\vec{r}=\{-2;4;1\}$.

6.3.11. $\vec{x}=\{-1;9;12\}$, $\vec{p}=\{1;3;2\}$, $\vec{q}=\{-2;-1;3\}$, $\vec{r}=\{3;2;-1\}$.

6.3.12. $\vec{x}=\{5,-6,2\}$, $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{-4;1;-2\}$, $\vec{r}=\{2;-3;-1\}$.

6.3.13. $\vec{x}=\{16;2;10\}$, $\vec{p}=\{2;1;1\}$, $\vec{q}=\{-6;1;-1\}$, $\vec{r}=\{8;-1;4\}$.

6.3.14. $\vec{x}=\{13;-3;6\}$, $\vec{p}=\{3;1;4\}$, $\vec{q}=\{2;-2;-1\}$, $\vec{r}=\{1;1;1\}$.

6.3.15. $\vec{x}=\{13;16;-1\}$, $\vec{p}=\{1;2;1\}$, $\vec{q}=\{2;3;1\}$, $\vec{r}=\{-1;1;4\}$.

6.3.16. $\vec{x}=\{11;11;27\}$, $\vec{p}=\{1;1;5\}$, $\vec{q}=\{5;1;1\}$, $\vec{r}=\{-1;-5;-1\}$.

6.3.17. $\vec{x}=\{-1;-1;2\}$, $\vec{p}=\{2;1;3\}$, $\vec{q}=\{2;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1;2;1\}$.

6.3.18. $\vec{x}=\{1;2;6\}$, $\vec{p}=\{1;2;3\}$, $\vec{q}=\{1;-3;-1\}$, $\vec{r}=\{-4;2;-1\}$.

6.3.19. $\vec{x}=\{4;11;11\}$, $\vec{p}=\{2;3;3\}$, $\vec{q}=\{-1;4;-2\}$, $\vec{r}=\{-1;-2;4\}$.

6.3.20. $\vec{x}=\{8;6;-4\}$, $\vec{p}=\{2;1;3\}$, $\vec{q}=\{-1;-3;1\}$, $\vec{r}=\{1,-5,-7\}$.

6.3.21. $\vec{x}=\{1;2;3\}$, $\vec{p}=\{3;1;2\}$, $\vec{q}=\{2;1;2\}$, $\vec{r}=\{-1;2;5\}$.

6.3.22. $\vec{x}=\{10;8;-2\}$, $\vec{p}=\{1;6;3\}$, $\vec{q}=\{6;3;1\}$, $\vec{r}=\{3;-1;-6\}$.

6.3.23. $\vec{x}=\{-1;7;1\}$, $\vec{p}=\{2;7;1\}$, $\vec{q}=\{6;-1;1\}$, $\vec{r}=\{3;-1;1\}$.

6.3.24. $\vec{x}=\{-4;6;4\}$, $\vec{p}=\{2;1;3\}$, $\vec{q}=\{-3;2;-1\}$, $\vec{r}=\{-3;4;2\}$.

6.3.25. $\vec{x}=\{1;1;1\}$, $\vec{p}=\{7;2;-5\}$, $\vec{q}=\{-3;5;-2\}$, $\vec{r}=\{-3;-6;8\}$.

6.3.26. $\vec{x}=\{8;9;3\}$, $\vec{p}=\{-1;4;6\}$, $\vec{q}=\{4;2;-1\}$, $\vec{r}=\{5;3;-2\}$.

6.3.27. $\vec{x}=\{0;-9;-3\}$, $\vec{p}=\{3;-2;6\}$, $\vec{q}=\{4;-3;1\}$, $\vec{r}=\{5;5;-1\}$.

6.3.28. $\vec{x}=\{-2;-4;3\}$, $\vec{p}=\{1;2;4\}$, $\vec{q}=\{-4;-3;1\}$, $\vec{r}=\{2;-1;2\}$.

6.3.29. $\vec{x}=\{7;8;5\}$, $\vec{p}=\{2;2;3\}$, $\vec{q}=\{3;4;-1\}$, $\vec{r}=\{-1;1;1\}$.

6.3.30. $\vec{x}=\{-6;4;-3\}$, $\vec{p}=\{1;3;3\}$, $\vec{q}=\{-3;1;-2\}$, $\vec{r}=\{-3;3;-1\}$.

Модуль 2

ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Загальна характеристика модуля. Основи аналітичної геометрії розглянуті у школі. У даному розділі поглиблюються знання з аналітичної геометрії. Векторний і координатний методи розв'язання геометричних задач, розвинуті тут, застосовують у математичному аналізі та інших розділах.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

Тема 1. Лінії на площині.
Тема 2. Площина і пряма у просторі.
Тема 3. Криві другого порядку.
Тема 4. Поверхні другого порядку.

Базисні поняття. **1.** Декартова прямокутна система координат. **2.** Координати точки. **3.** Рівняння лінії на площині й у просторі. **4.** Рівняння поверхні у просторі. **5.** Лінії і поверхні другого порядку.

Основні задачі. **1.** Побудова рівнянь прямих та площин за різними елементами. **2.** Побудова кривих та поверхонь другого порядку. **3.** Вивчення взаємного розміщення прямих і площин.

ЩО ПОВИНЕН ЗНАТИ ТА ВМІТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Різні рівняння прямої (типові задачі на складання рівнянь прямої).

1.2. Криві другого порядку — коло, еліпс, гіпербола, парабола (канонічні рівняння).

1.3. Площина. Різні рівняння площини (типові задачі на складання рівнянь площини).

1.4. Циліндричні, конічні поверхні.

1.5. Поверхні обертання.

1.6. Метод перерізів.

2. Знання на рівні доведень та виводів

2.1. Різні форми рівняння прямої на площині (загальне, канонічне, параметричне, через дві точки, з кутовим коефіцієнтом, у «відрізках», нормальне).

2.2. Взаємне розміщення двох прямих. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності.

2.3. Відстань від точки до прямої.

2.4. Рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до заданого вектора.

2.5. Рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

2.6. Рівняння кола, еліпса, параболи.

2.7. Канонічне рівняння прямої у просторі.

3. Уміння в розв'язанні задач

3.1. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки, через одну точку в заданому напрямі.

3.2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку перпендикулярно до вектора, через три точки.

3.3. Знаходити кути між прямими та площинами.

3.4. Знаходити точку перетину прямої і площини.

3.5. Зводити рівняння другого порядку до канонічного вигляду і будувати їх графіки.

Тема 1. ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

Загальне рівняння прямої, неповні рівняння. Канонічне та параметричні рівняння прямої. Пряма, яка проходить через дві задані точки. Рівняння прямої у відрізках на осях, пряма з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Відстань від точки до прямої.

Література: [1, розділ 6], [4, розділ 3, п. 3.3], [6, розділ 3, §3], [7, розділ 2, §5], [9, розділ 2, §2].

Т.1 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1.1. Різні види рівнянь прямої на площині

Рівняння

$$F(x,\ y)=0$$

називають рівнянням лінії L на площині Oxy, якщо це рівняння задовольняють координати x і y кожної точки лінії L і не задовольняють координати будь-якої точки, яка не лежить на цій лінії.

Якщо лінія задана рівнянням, то про кожну точку площини можна сказати, лежить вона на цій лінії, чи не лежить. Наприклад, точка $M(3;\ 4)$ є точкою кола $x^2+y^2=25$, оскільки $3^2+4^2=25$, а точка $M_1(3;0)$ не належить колу, бо $3^2+0^2\neq 25$.

У полярній системі координат лінії задають рівнянням $F(\rho,\varphi)=0$ або $\rho=\rho(\varphi)$. Наприклад, рівняння $\rho=1$ задає коло радіусом 1 з центром у початку координат. Інші приклади ліній, заданих рівняннями у полярних координатах, зображені на рис. 2.1–2.2.

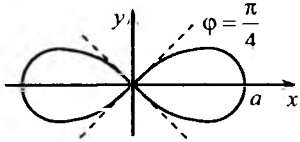


Рис. 2.1. Лемніската Бернуллі. Рівняння в декартових координатах $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, у полярних координатах $\rho=a\cdot\sqrt{\cos 2\varphi}$

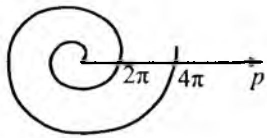


Рис. 2.2. Спіраль Архімеда. Рівняння у полярних координатах $\rho=a\varphi,\ \ a>0$.

Нехай змінні x і y залежать від змінної t, тобто

$$x=x(t),\ \ y=y(t).$$

Змінна t називається *параметром* і визначає положення точки $(x;\ y)$ на площині. При зміні параметра t рухома точка $(x(t),\ y(t))$ опише деяку лінію. Такий спосіб задання лінії називають параметричним.

Наприклад, якщо $x=R\cos t,\ \ y=R\sin t$, то значенню $t=\frac{\pi}{2}$ відповідає точка $(0;\ R)$. Якщо змінна t змінюватиметься від 0 до 2π, тоді точка $(x(t),\ y(t))$ опише коло $x^2+y^2=R^2$.

На рис. 2.3 та 2.4 зображені відомі лінії, які часто використовуються у вищій математиці:

1) *циклоїда*: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $a>0$.

2) *астроїда*: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, або $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

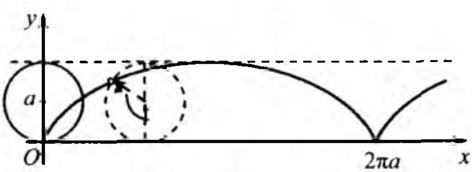


Рис. 2.3

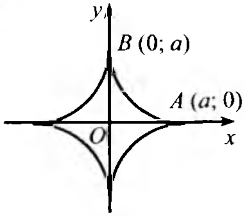


Рис. 2.4

1.2. Різні види рівнянь прямої на площині

Пряму на площині задають різними способами, наприклад:

1) точкою, через яку проходить пряма, і вектором, перпендикулярним (або паралельним) до прямої;

2) двома точками, через які проходить пряма.

1.2.1. Загальне рівняння прямої

Виведемо рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=\{A, B\}$ (рис. 2.5, а). Вектор $\vec{n}$ називають *нормальним* вектором прямої.

Візьмемо на прямій L довільну точку $M(x, y)$ й утворимо вектор $\overline{M_0M}=\{x-x_0, y-y_0\}$. Оскільки за умовою шукана пряма L і нормаль $\vec{n}$ взаємно перпендикулярні, то довільний вектор прямої $\overline{M_0M}$ і вектор $\vec{n}$ також перпендикулярні. За умовою перпендикулярності двох векторів скалярний добуток $\vec{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, або в координатній формі

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \tag{2.1}$$

Рівняння (2.1) називають рівнянням прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=\{A, B\}$.

Розкривши у рівнянні (2.1) дужки і позначивши $-Ax_1-By_1=C$, дістанемо рівняння прямої L

$$\boxed{Ax+By+C=0,} \tag{2.2}$$

яке називають *загальним рівнянням прямої* на площині.

Тут A і B — координати вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до прямої.

Розглянемо окремі випадки розміщення прямої залежно від значень коефіцієнтів A, B, C (табл. 1):

Таблиця 1

Умова	Рівняння прямої	Положення прямої
$A=0,\ B\neq 0$	$By+C=0$	паралельна осі Ox
$B=0,\ A\neq 0$	$Ax+C=0$	паралельна осі Oy
$C=0$	$Ax+By=0$	проходить через початок координат
$A=0, C=0,\ B\neq 0$	$y=0$	проходить через вісь Ox
$B=0, C=0,\ A\neq 0$	$x=0$	проходить через вісь Oy

1.2.2. Канонічне рівняння прямої

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до вектора $\vec{a} = \{l, m\}$ (рис. 2.5, б), який називають *напрямним вектором* прямої L. Візьмемо на прямій довільну точку $M(x, y)$. Тоді вектори $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ і $\vec{a} = \{l, m\}$ колінеарні, отже, їхні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.} \tag{2.3}$$

Рівняння (2.3) називають *канонічним* рівнянням прямої.

1.2.3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 2.5, в). Вибравши вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$ за напрямний вектор прямої L і скориставшись рівнянням (2.3), дістанемо рівняння

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \tag{2.4}$$

яке є рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки.

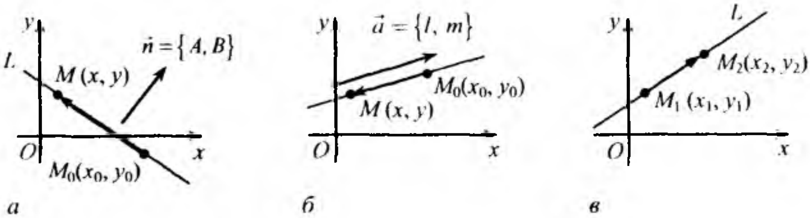


Рис. 2.5

1.1.4. Векторне параметричне рівняння прямої

Нехай пряма L проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно до напрямного вектора $\vec{a} = \{l, m\}$ (рис. 2.6). Візьмемо на прямій довільну точку

$M(x, y)$ і розглянемо радіуси-вектори $\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$ та $\vec{r} = \overline{OM}$. Вектори $\overline{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\vec{a}$ колінеарні, тому $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}$, або

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t.} \tag{2.5}$$

Рівняння (2.5) називають *векторним параметричним рівнянням прямої*. Змінну t, яка може набувати будь-яких значень, називають *параметром*.

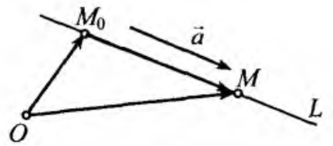


Рис. 2.6

1.2.4. Параметричні рівняння прямої

Позначимо у формулі (2.3) відношення через t, тобто

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = t.$$

Звідси дістаємо

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in R.}$$

Ці рівняння прямої називають *параметричними*. Їх можна дістати також з рівняння (2.5), прирівнявши відповідні координати векторів $\vec{r}$ та $\vec{r}_0 + \vec{a} \cdot t$.

1.2.5. Рівняння прямої у відрізках на осях

Нехай пряма L проходить через дві точки $A(a,\ 0)$ і $B(0,\ b)$, тобто відсікає на осях координат відрізки довжиною $|a|$ і $|b|$ (рис. 2.7, *а*). Підставивши координати точок $A(a,\ 0)$ і $B(0,\ b)$ в рівняння (2.4), дістанемо рівняння

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,} \tag{2.6}$$

яке називають рівнянням прямої у *відрізках на осях*.

Загальне рівняння прямої (2.2) можна звести до вигляду (2.6) тільки у разі, коли всі його коефіцієнти відмінні від нуля. Тоді

$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1.$$

Тут $-C/A=a,\ -C/B=b$.

Зауваження. Пряма $Ax+By+C=0$ за умови $A\neq 0$, $B\neq 0$ і $C\neq 0$, перетинає осі координат у точках $(-C/A;\ 0)$ та $(0;\ -C/B)$. Для знаходження цих точок достатньо по черзі покласти $x=0$ та $y=0$.

1.2.6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Якщо пряма L проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ і утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 2.7, *б*), то число $k=\operatorname{tg}\alpha$ *називають кутовим коефіцієнтом* прямої.

Обравши довільну точку $M(x,y)$ на прямій, дістанемо з трикутника M_0MK

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{MK}{M_0K}=\frac{y-y_0}{x-x_0},$$

звідки

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0)}\ —$$

рівняння прямої L, яка проходить через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.

Якщо за точку M_0 візьмемо точку $B(0,\ b)$, то дістанемо рівняння

$$\boxed{y=kx+b} \qquad (2.7)$$

яке називають *рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом*. Тут b — початкова ордината (ордината точки перетину прямої з віссю Oy).

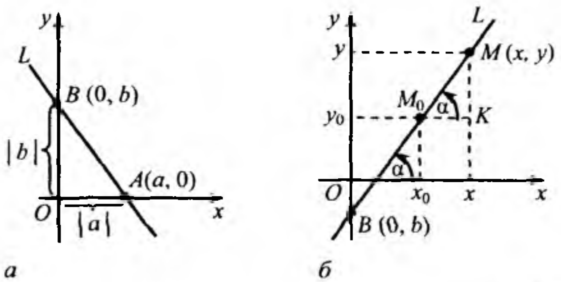


Рис. 2.7

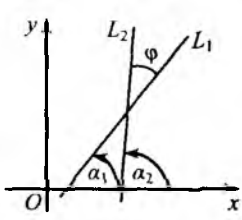


Рис. 2.8

1.2.7. Кут між двома прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих

Нехай прямі L_1 і L_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_1 x + b_1$ (рис. 2.8). Позначимо кути нахилу цих прямих до осі Ox через α_1 та α_2 відповідно, причому $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Тоді гострий кут φ між прямими визначається формулою $\varphi = |\alpha_2 - \alpha_1|$.

Звідси

$$\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)| = \left|\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\right| = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|. \tag{2.8}$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то $\varphi = 0$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, отже, $k_2 - k_1 = 0$. Тому *умова паралельності прямих*:

$$\boxed{k_1 = k_2.} \tag{2.9}$$

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. У цьому разі $\operatorname{tg}\varphi$ не існує, отже, у формулі (2.8) $1 + k_1 k_2 = 0$. Тому *умова перпендикулярності прямих*:

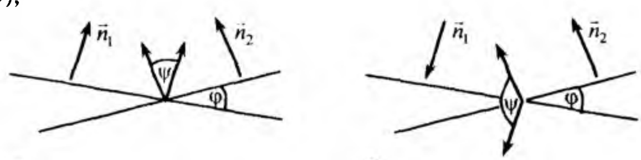
$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}.} \tag{2.10}$$

Нехай прямі L_1 і L_2 задані загальними рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ і $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Тоді:

1) кут φ ($0 \le \varphi \le 90°$) між цими прямими визначають через кут ψ між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ та $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$:

$$\cos\psi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2}},$$

причому $\varphi = \psi$, якщо $\cos\psi \ge 0$ (рис. 2.9, *а*), і $\varphi = 180° - \psi$, якщо $\cos\psi < 0$ (рис. 2.9, *б*);



а *б*

Рис. 2.9

2) умова паралельності прямих (рис. 2.10) —

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2};}$$

3) умова перпендикулярності (рис. 2.11) —

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0.}$$

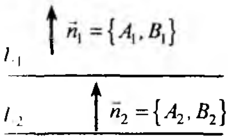


Рис. 2.10

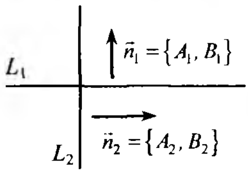


Рис. 2.11

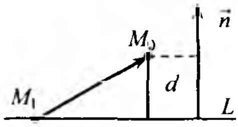


Рис. 2.12

1.2.8. Відстань від точки до прямої

Нехай задано пряму L рівнянням $Ax+By+C=0$ і точку $M_0(x_0;y_0)$ (рис. 2.12).

Відстань d точки M_0 до прямої L дорівнює модулю проекції вектора $\overline{M_1M_0}$, де $M_1(x_1;y_1)$ — довільна точка прямої L, на напрям нормального вектора $\vec{n}=\{A;B\}$. Отже,

$$d=|\text{пр}_{\vec{n}}\,\overline{M_1M_0}|=\frac{|\overline{M_1M_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(x_0-x_1)\cdot A+(y_0-y_1)\cdot B|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Отже, відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюють за формулою

$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.}\qquad(2.11)$$

Т.1 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Нехай точки $A(3;\ 1)$, $B(2;\ -3)$, $C(-1;\ 2)$ — вершини трикутника ABC. Складіть:

а) загальне рівняння сторони AB;

б) канонічне рівняння висоти AD;

в) параметричне рівняння медіани BM;

г) рівняння прямої, що проходить через точку $C(-1;\ 2)$ паралельно до сторони AB.

Розв'язання. Побудуємо рис. 2.13 і розглянемо випадки:

а) оскільки відомі координати точок A і B, то, використовуючи формулу (3.4), складемо рівняння прямої, яка проходить через точки A і B:

$$\frac{x-3}{2-3}=\frac{y-1}{-3-1},\ \frac{x-3}{-1}=\frac{y-1}{-4},\ y-1=4(x-3),$$

звідки $4x-y-11=0$ — загальне рівняння прямої, що містить сторону AB;

б) щоб записати канонічне рівняння прямої, потрібно знати точку, через яку проходить пряма, і напрямний вектор. Вектор $\overrightarrow{BC}=\{-3;\ 5\}$ для висоти AD є нормальним вектором, тоді вектор $\vec{a}=\{5;\ 3\}$ буде перпендикулярним до вектора $\overrightarrow{BC}$ (оскільки скалярний добуток $\overrightarrow{BC}\cdot\vec{a}=0$), отже, для прямої AD — напрямним вектором. Записуємо канонічне рівняння прямої AD:

$$\frac{x-3}{5}=\frac{y-1}{3};$$

в) оскільки точка M – середина відрізка AC, то $x_M=\dfrac{3-1}{2}=1$, $y_M=\dfrac{1+2}{2}=1{,}5$. Вектор $\overrightarrow{BM}=\{1-2;\ 1{,}5+3\}=\{-1;\ 4{,}5\}$ – напрямний вектор прямої BM. За напрямний вектор можна взяти також вектор $\vec{a}=2\overrightarrow{BM}=\{-2;\ 9\}$. Отже, $l=-2$, $m=9$ і параметричні рівняння медіани записуємо так:

$$\begin{cases} x=2-2t, \\ y=-3+9t, \end{cases}\quad t\in R;$$

г) оскільки пряма, що проходить через точку $C(-1;\ 2)$, паралельна стороні AB, то за нормальний вектор шуканої прямої беремо вектор $\vec{n}=\{4;\ -1\}$ — нормальний вектор прямої AB. Тоді шукане рівняння має вигляд

$$4(x+1)-(y-2)=0,\ \text{або}\ 4x-y+6=0.$$

2. Обчисліть площу трикутника, обмеженого прямою, що проходить через точки $M_1(-3;-4)$ і $M_2(6;\ 2)$, і осями координат (рис. 2.14).

Розв'язання. Використовуючи формулу (3.4), складемо рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2:

$$\frac{x+3}{6+3}=\frac{y+4}{2+4},\quad \frac{x+3}{9}=\frac{y+4}{6},\quad \frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{2},\quad 2(x+3)=3(y+4),$$

$2x-3y-6=0$ — загальне рівняння прямої M_1M_2.

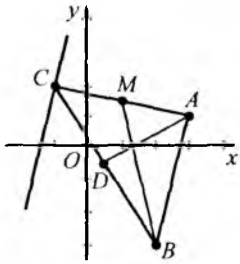


Рис. 2.13

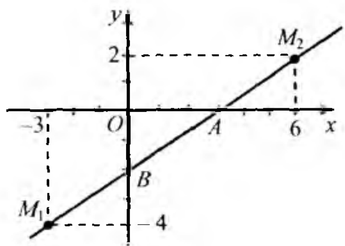


Рис. 2.14

Знайдемо координати точок перетину прямої M_1M_2 з осями координат.

Нехай $x=0$, тоді $-3y+6=0$, або $y=2$. Якщо $y=0$, то $2x+6=0$, або $x=-3$.

Отже, пряма перетинає вісь Ox у точці $A(3;\ 0)$, а вісь Oy — у точці $B(0;\ -2)$. Довжина катетів у трикутнику AOB відповідно рівна: $OA=3$, $OB=2$, тоді площа трикутника: $S_{AOB}=3$ кв. од.

3. Знайдіть відстань між прямими $4x-3y+2=0$ та $8x-6y-13=0$.

Розв'язання. Оскільки задані прямі паралельні, то відстань між ними дорівнює, наприклад, відстані від довільної точки другої прямої до першої. Знаходимо довільну точку на прямій $8x-6y-13=0$: нехай $x=0$, тоді $y=-\dfrac{13}{6}$. Відстань від точки $M(0;-13/6)$ до прямої $4x-3y+2=0$ обчислюємо за формулою (3.9):

$$d=\frac{|4\cdot 0-3\cdot(-13/6)+2|}{\sqrt{16+9}}=1{,}7.$$

4. Визначте, при яких значеннях m і n прямі $mx+8y+n=0$ та $2x+my-1=0$:

а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні.

Розв'язання:

а) умова паралельності: $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}$, звідси $m^2=16$, $m=\pm 4$;

б) прямі збігаються у разі виконання умови

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}=\frac{n}{-1},$$

звідси дістаємо дві пари значень $m=4, n=-2$ або $m=-4, n=2$;

в) умова перпендикулярності прямих: $m\cdot 2+8\cdot m=0$, тобто $m=0$.

Відповідь: а) $m=\pm 4$, $n\in R$; б) $m=4, n=-2$; $m=-4, n=2$; в) $m=0$, $n\in R$.

5. Знайдіть точку, симетричну точці $P(-8;12)$ відносно прямої L, заданої рівнянням $4x+7y+13=0$.

Розв'язання. Нехай $Q(x_Q, y_Q)$ — шукана точка (рис. 2.15). Задачу розв'язуємо у такій послідовності:

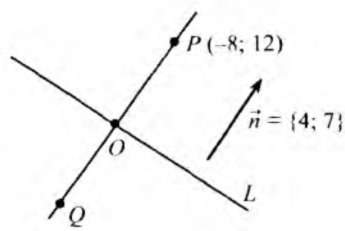


Рис. 2.15

1) складаємо рівняння прямої PO, що проходить через точку P, перпендикулярно до заданої прямої L;

2) знаходимо точку O — точку перетину прямих L і PO — проекцію точки P на пряму L;

3) визначаємо координати точки Q, враховуючи при цьому, що точка O — середина відрізка PQ.

Вектор $\vec{n}=\{4;7\}$ — нормальний вектор прямої L одночасно є напрямним вектором перпендикуляра PO, тому канонічне рівняння прямої PO має такий вигляд:

$$\frac{x+8}{4}=\frac{y-12}{7},$$

звідки дістаємо

$$7(x+8)=4(y-12), \quad 7x-4y+104=0.$$

Розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 7x - 4y + 104 = 0, \\ 4x + 7y + 13 = 0, \end{cases}$$

знайдемо координати точки перетину прямих: $x_O = -12$, $y_O = 5$.

Записуємо зв'язок між координатами точок P, O і Q:

$$x_O = \frac{x_P + x_Q}{2}, \quad y_O = \frac{y_P + y_Q}{2}.$$

Тоді

$$-12 = \frac{-8 + x_Q}{2}, \quad 5 = \frac{12 + y_Q}{2},$$

звідки дістаємо координати симетричної точки:

$$x_Q = -16, \quad y_Q = -2.$$

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Побудуйте графіки прямих $y = 3x - 2$ та $x + 2y - 3 = 0$ і знайдіть точку їх перетину.

2. Площа трикутника ABC $S = 8$, дві його вершини — точки A (0; 3) і B (1; 2). Визначте координати вершини C, якщо вона лежить на прямій $y = 3$.

3. Нехай точки $A(0;-4)$, $B(3;2)$, $C(-5;1)$ – вершини трикутника.

Знайдіть:

а) загальне рівняння сторони AB;

б) канонічне рівняння висоти AD;

в) параметричні рівняння медіани BM;

г) відстань від вершини B до медіани AM.

4. Знайдіть проекцію точки P (–7; 11) на пряму, що проходить через точки A (3; –4) і B (–4; 0).

5. Покажіть, що прямі $5x - 12y + 13{,}5 = 0$ і $10x - 24y = 25$ паралельні, і знайдіть відстань між ними.

6. Запишіть рівняння бісектрис кутів, утворених прямими $x - 3y + 5 = 0$ та $3x - y - 2 = 0$.

7. Задано рівняння прямої $3x + 2y + 7 = 0$. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку M (–2; 0), і:

а) паралельна заданій прямій;

б) перпендикулярна до заданої прямої.

Відповіді

1. (1; 1). **2.** C (–2; 3) або (4,4; 3). **3.** а) $2x-y-4=0$; б) $\frac{x}{1}=\frac{y+4}{-8}$. **4.** (–11; 4). **5.** 2. **6.** $2x+2y-7=0$, $4x-4y+3=0$. **7.** а) $3x+2y+6=0$; б) $2x-3y+4=0$.

Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Нехай точки M_1, M_2, M_3 — вершини трикутника $M_1M_2M_3$. Складіть:

а) загальне рівняння сторони M_1M_2;

б) канонічне рівняння висоти M_1D;

в) параметричне рівняння медіани M_2M;

г) рівняння прямої, що проходить через точку M_3 паралельно до сторони M_1M_2;

д) проекцію точки M_1 на пряму M_2M_3.

1.1.1. $M_1(0;1)$,	$M_2(6;3)$,	$M_3(-1;0)$.
1.1.2. $M_1(0;6)$,	$M_2(1;-3)$,	$M_3(-2;3)$.
1.1.3. $M_1(6;-2)$,	$M_2(-4;-1)$,	$M_3(0;-2)$.
1.1.4. $M_1(2;2)$,	$M_2(-1;7)$,	$M_3(1;4)$.
1.1.5. $M_1(1;8)$,	$M_2(0;-3)$,	$M_3(-1;2)$.
1.1.6. $M_1(-5;-1)$,	$M_2(-3;0)$,	$M_3(1;-2)$.
1.1.7. $M_1(0;-2)$,	$M_2(-3;6)$,	$M_3(5;3)$.
1.1.8. $M_1(3;-2)$,	$M_2(2;7)$,	$M_3(-2;1)$.
1.1.9. $M_1(0;5)$,	$M_2(11;-5)$,	$M_3(-1;-1)$.
1.1.10. $M_1(1;0)$,	$M_2(6;1)$,	$M_3(3;-2)$.
1.1.11. $M_1(-1;4)$,	$M_2(11;5)$,	$M_3(0;1)$.
1.1.12. $M_1(4;6)$,	$M_2(-6;3)$,	$M_3(-2;0)$.
1.1.13. $M_1(2;-1)$,	$M_2(5;0)$,	$M_3(-2;-2)$.
1.1.14. $M_1(-4;5)$,	$M_2(2;0)$,	$M_3(-2;-2)$.
1.1.15. $M_1(7;5)$,	$M_2(-1;2)$,	$M_3(1;-1)$.
1.1.16. $M_1(3;2)$,	$M_2(3;5)$,	$M_3(1;-1)$.
1.1.17. $M_1(-3;9)$,	$M_2(7;-2)$,	$M_3(3;3)$.
1.1.18. $M_1(0;1)$,	$M_2(6;4)$,	$M_3(-1;0)$.

1.1.19. $M_1(2;-4)$, $M_2(4;-2)$, $M_3(0;2)$.

1.1.20. $M_1(5;-7)$, $M_2(-5;1)$, $M_3(-1;-1)$.

1.1.21. $M_1(1;3)$, $M_2(3;2)$, $M_3(5;0)$.

1.1.22. $M_1(-1;-2)$, $M_2(2;-1)$, $M_3(0;-1)$.

1.1.23. $M_1(7;1)$, $M_2(-1;0)$, $M_3(-2;3)$.

1.1.24. $M_1(0;1)$, $M_2(-1;4)$, $M_3(6;0)$.

1.1.25. $M_1(-4;-9)$, $M_2(6;-1)$, $M_3(2;1)$.

1.1.26. $M_1(-1;1)$, $M_2(2;-6)$, $M_3(1;2)$.

1.1.27. $M_1(1;2)$, $M_2(-2;1)$, $M_3(-4;3)$.

1.1.28. $M_1(-1;4)$, $M_2(-5;1)$, $M_3(1;-1)$.

1.1.29. $M_1(3;-4)$, $M_2(-2;5)$, $M_3(0;4)$.

1.1.30. $M_1(13;-3)$, $M_2(2;5)$, $M_3(-2;1)$.

1.2. Доведіть, що прямі паралельні, і знайдіть відстань між ними:

1.2.1. $2x+5y-12=0$ та $4x+10y-11=0$.

1.2.2. $3x-4y-7=0$ та $-6x+8y-15=0$.

1.2.3. $2x-5y-11=0$ та $-6x+15y-17=0$.

1.2.4. $3x-7y-7=0$ та $12x-28y-25=0$.

1.2.5. $5x+6y+22=0$ та $10x+12y-31=0$.

1.2.6. $x-7y-32=0$ та $2x-14y-13=0$.

1.2.7. $3x+5y+5=0$ та $9x+15y-17=0$.

1.2.8. $3x-8y-27=0$ та $-6x+16y+11=0$.

1.2.9. $2x-9y-37=0$ та $-6x+27y-10=0$.

1.2.10. $3x-4y-18=0$ та $15x-20y-41=0$.

1.2.11. $x+6y-14=0$ та $4x+24y-23=0$.

1.2.12. $3x-7y-8=0$ та $9x-21y-16=0$.

1.2.13. $3x-5y-19=0$ та $6x-10y-21=0$.

1.2.14. $3x+4y+28=0$ та $-9x-12y-7=0$.

1.2.15. $4x-3y+7=0$ та $8x-6y-11=0$.

1.2.16. $5x-4y-48=0$ та $15x-12y-5=0$.

1.2.17. $5x+3y-43=0$ та $20x+15y+22=0$.

1.2.18. $7x-2y-15=0$ та $14x-4y-5=0$.

1.2.19. $3x-y-6=0$ та $15x-5y-32=0$.

1.2.20. $3x+7y+42=0$ та $12x+28y-61=0$.

1.2.21. $6x+7y+16=0$ та $12x+14y-21=0$.

1.2.22. $8x-5y+32=0$ та $16x-10y-17=0$.

1.2.23. $6x+11y+22=0$ та $18x+33y-43=0$.

1.2.24. $3x+10y+27=0$ та $9x+30y-11=0$.

1.2.25. $4x-7y+35=0$ та $12x-21y-62=0$.

1.2.26. $-3x+5y+4=0$ та $18x-30y-1=0$.

1.2.27. $2x+5y+12=0$ та $10x+25y-13=0$.

1.2.28. $-4x+3y+17=0$ та $12x-9y-22=0$.

1.2.29. $5x+7y+16=0$ та $15x+21y-44=0$.

1.2.30. $11x+5y+15=0$ та $22x+10y-7=0$.

1.3. Знайдіть площу трикутника, який відсікається від осей координат прямою:

1.3.1. $4x+5y-40=0$.

1.3.2. $4x-5y+25=0$.

1.3.3. $5x+8y-35=0$.

1.3.4. $6x-11y-128=0$.

1.3.5. $3x+13y-195=0$.

1.3.6. $2x+7y-140=0$.

1.3.7. $7x-12y-168=0$.

1.3.8. $7x+5y-140=0$.

1.3.9. $13x+5y-260=0$.

1.3.10. $4x+7y-560=0$.

1.3.11. $3x+7y-210=0$.

1.3.12. $8x+13y-208=0$.

1.3.13. $6x-7y-210=0$.

1.3.14. $9x+4y-180=0$.

1.3.15. $2x+7y-35=0$.

1.3.16. $9x+7y-126=0$.

1.3.17. $4x-7y-420=0$.

1.3.18. $3x+11y+132=0$.

1.3.19. $4x+5y+45=0$.

1.3.20. $6x+7y+21=0$.

1.3.21. $5x-7y-175=0$.

1.3.22. $8x-5y+50=0$.

1.3.23. $6x+13y+130=0$.

1.3.24. $5x+8y+75=0$.

1.3.25. $3x+5y+80=0$.

1.3.26. $4x+9y+81=0$.

1.3.27. $3x-13y-169=0$.

1.3.28. $9x+5y+75=0$.

1.3.29. $4x+11y+121=0$.

1.3.30. $5x-8y-64=0$.

1.4. Визначте, при яких значеннях m і n прямі:

а) паралельні; б) збігаються; в) перпендикулярні.

1.4.1. $mx+6y+n=0$ та $3x+my-2=0$.

1.4.2. $mx+7y+n=0$ та $2x+my-5=0$.

1.4.3. $(m+1)x+5y+2n=0$ та $3x+my-4=0$.

1.4.4. $(m-2)x+3y+n+2=0$ та $x-my-2=0$.

1.4.5. $(m+4)x+2y+n-1=0$ та $2x+my-6=0$.

1.4.6. $(m-4)x - y + n - 2 = 0$ та $3x + my - 5 = 0$.

1.4.7. $(m+2)x + 4y + n - 3 = 0$ та $3x - my + 4 = 0$.

1.4.8. $(m+5)x + 4y + n + 1 = 0$ та $x + 2my - 3 = 0$.

1.4.9. $mx + 3y + n - 3 = 0$ та $3x + (m+1)y - n = 0$.

1.4.10. $(m-2)x + 5y + n - 4 = 0$ та $x - (m+1)y - 6n = 0$.

1.4.11. $(m-3)x + y + n - 4 = 0$ та $x - (m+1)y - 6n = 0$.

1.4.12. $(m+3)x + 2y + n - 5 = 0$ та $2x - (m+2)y - 4n = 0$.

1.4.13. $(m-1)x + y + n + 2 = 0$ та $3x - (m-1)y - 2n = 0$.

1.4.14. $(m-2)x + 3y + n - 3 = 0$ та $x + (m+1)y + 2n = 0$.

1.4.15. $(m+3)x + 2y + 2n - 1 = 0$ та $x - my - 6 + n = 0$.

1.4.16. $(m-1)x + 4y + 3n - 4 = 0$ та $x - (m+2)y - n = 0$.

1.4.17. $(m-3)x + y + n - 4 = 0$ та $x - (m+1)y - 6n = 0$.

1.4.18. $(m-5)x + 2y + 2n - 3 = 0$ та $x - (m+2)y - n - 1 = 0$.

1.4.19. $(m+2)x + y - n - 4 = 0$ та $x + (m+1)y + 2n = 0$.

1.4.20. $(m+1)x - y + n - 3 = 0$ та $x - (m-1)y - 3n = 0$.

1.4.21. $(m-6)x - y + n - 2 = 0$ та $x + (m+2)y - n - 1 = 0$.

1.4.22. $mx + 2y + 3n - 2 = 0$ та $x - (m+4)y - 2n = 0$.

1.4.23. $mx - y + 2n - 5 = 0$ та $x + (m+2)y + n = 0$.

1.4.24. $(m-1)x - y + 2n - 1 = 0$ та $2x - my - n + 1 = 0$.

1.4.25. $(2m-1)x + y - n - 3 = 0$ та $x - (m+1)y - n = 0$.

1.4.26. $mx - y + 3n - 1 = 0$ та $x - (m-1)y - n - 1 = 0$.

1.4.27. $(m-3)x - y + 2n - 4 = 0$ та $x + my - n + 1 = 0$.

1.4.28. $mx + 2y + n - 2 = 0$ та $x + (m+2)y + 2n - 1 = 0$.

1.4.29. $(m-1)x + 2y + n = 0$ та $x - (m-1)y - n - 2 = 0$.

1.4.30. $mx + 3y + 2n - 1 = 0$ та $x + (m+3)y + n = 0$.

ТЕМА 2. ПЛОЩИНА І ПРЯМА У ПРОСТОРІ

Загальне рівняння площини, неповні рівняння. Рівняння площини, яка проходить через три точки. Рівняння площини у відрізках на осях. Нормальне рівняння площини, відстань від точки до площини. Кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності двох площин. Загальне рівняння прямої у просторі, канонічні і параметричні рівняння. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки. Кут між двома прямими, умови паралельності і перпендикулярності двох прямих. Точка перетину прямої і площини, кут між прямою і площиною, умови паралельності і перпендикулярності прямої та площини, умови належності прямої площині.

Література: [1, розділ 8, п. 8.2, 8.3], [4, розділ 3, п. 3.5], [6, розділ 3, §4—5], [7, розділ 2, §6], [10, розділ 2, §2—4], [11, розділ 2, §2].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Площина у просторі

2.1.1. Загальне рівняння площини

Через точку простору $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$ проходить одна-єдина площина (рис. 2.16). Тут вектор $\vec{n}$ називають *нормальним вектором* площини.

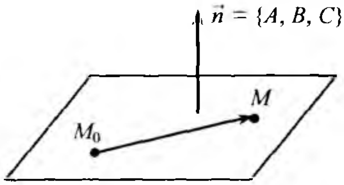


Рис. 2.16

Знайдемо рівняння цієї площини. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини, тоді вектори $\vec{n} = \{A; B; C\}$ і $\overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\}$ перпендикулярні, отже, скалярний добуток векторів $\vec{n}$ і $\overline{M_0M}$ дорівнює нулю: $\vec{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. У координатній формі ця рівність набирає вигляду

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.} \tag{2.12}$$

Рівняння (2.12) — рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = \{A; B; C\}$. Розкривши дужки і позначивши $-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$, дістанемо рівняння

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0,} \tag{2.13}$$

яке називають *загальним рівнянням площини.*

Зауваження. При довільних значеннях A, B і C, одночасно не рівних нулю, рівняння (2.12) визначає *в'язку площин* — сукупність площин, які проходять через дану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — центр в'язки.

2.1.2. Неповні рівняння площини

Рівняння (2.13) називають неповним, якщо принаймні один із коефіцієнтів дорівнює нулю. При цьому $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Окремі випадки загального рівняння площини подано у табл. 2.

Таблиця 2

Умова	Рівняння площини	Положення площини
$D = 0$	$Ax + By + Cz = 0$	проходить через початок координат
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	паралельна осі Ox
$A = 0, B = 0$	$Cz + D = 0$	паралельна площині Oxy
$A = 0, B = 0, D = 0$	$z = 0$	площина Oxy
$A = 0, D = 0$	$By + Cz = 0$	проходить через вісь Ox

Інші можливі випадки неповного рівняння площини розгляньте самостійно.

2.1.3. Рівняння площини, яка проходить через три точки

Нехай точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежать на одній прямій (рис. 2.17). Знайдемо рівняння площини, яку однозначно визначають ці точки. Для цього візьмемо у цій площині довільну точку $M(x, y, z)$ й утворимо вектори

$$\overline{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\},$$
$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\},$$
$$\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}.$$

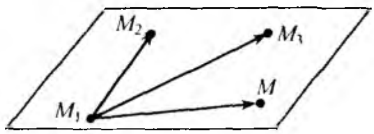


Рис. 2.17

Оскільки усі чотири точки лежать в одній площині, а отже, і утворені вектори, то ці вектори компланарні. За умовою компланарності мішаний добуток $\overline{M_1M}\ \overline{M_1M_2}\ \overline{M_1M_3} = 0$, або в координатній формі

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.14)$$

Отже, (2.14) — рівняння площини через три задані точки, що не лежать на одній прямій.

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, після спрощень дістанемо загальне рівняння площини.

2.1.4. Рівняння площини у відрізках на осях

Нехай площина перетинає осі координат у точках $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ і $C(0;0;c)$ (рис. 2.18), тоді рівняння (2.14) набуває вигляду

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

яке рівносильне рівнянню

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.} \qquad (2.15)$$

Рівняння (2.15) називають рівнянням площини у відрізках на осях.

Загальне рівняння площини (2.13) можна звести до вигляду (2.15) тільки тоді, коли усі коефіцієнти A, B, C і D не рівні нулю. Тоді $a=-A/D$, $b=-B/D$, $c=-C/D$.

2.1.5. Нормальне рівняння площини. Відстань точки від площини

Нормальне рівняння площини одержуємо у разі задання площини довжиною p перпендикуляра OP, опущеного з початку координат на площину і кутами α, β, γ, які перпендикуляр OP утворює з осями координат (рис. 2.19).

Візьмемо на площині довільну точку $M(x, y, z)$. За умовою проекція радіус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на вектор-нормаль $\vec{n}_0=\{\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma\}$ дорівнює p: $\text{пр}_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM}=p$, звідси

$$p=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{n}_0}{|\vec{n}_0|}=\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}}.$$

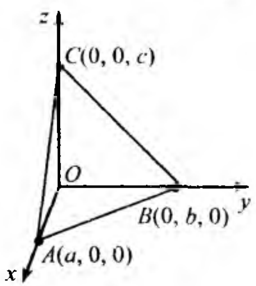


Рис. 2.18

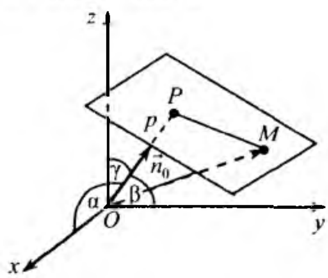


Рис. 2.19

Оскільки $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, то в результаті приходимо до рівняння

$$\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.} \qquad (2.16)$$

Рівняння (2.16) називають *нормальним рівнянням площини.*

Властивості цього рівняння:

а) сума квадратів коефіцієнтів при x, y, z дорівнює одиниці;

б) вільний член входить у рівняння зі знаком « – ».

Для зведення загального рівняння (2.13) до нормального вигляду потрібно помножити його на *нормувальний множник*

$$\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

знак якого вибирають протилежним до знака D.

Нормальне рівняння (2.16) застосовують для знаходження відстані d від точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до площини. Цю відстань обчислюють за формулою

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|,$$

або

$$\boxed{d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.} \qquad (2.17)$$

Величину

$$\delta=x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p$$

називають *відхиленням точки* $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *від площини.*

Якщо точка M_0 і початок координат лежать по один бік від площини, то $\delta<0$, якщо ж по різні сторони — то $\delta>0$.

2.1.6. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності

Нехай задано площини

$$\alpha_1\colon A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \alpha_2\colon A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Кут φ ($0\le\varphi\le90^\circ$) між цими площинами знаходять з умови

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_1|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Умова паралельності площин:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.}$$

Умова перпендикулярності площин:

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.}$$

2.2. Пряма у просторі

2.2.1. Канонічні рівняння прямої у просторі

Нехай у просторі задано точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ і напрямний вектор $\vec{a}=\{l;\ m;\ n\}$. Через точку M_0 паралельно до вектора $\vec{a}$ проходить єдина пряма (рис. 2.20), її рівняння:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.} \qquad (2.18)$$

Рівняння (2.18) — *канонічні* рівняння прямої у просторі. Ці рівняння виводять так само, як і канонічне рівняння прямої на площині (формула (2.3)).

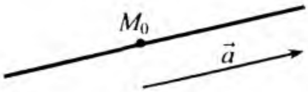


Рис. 2.20

2.2.2. Параметричні рівняння прямої

Позначивши у рівняннях (2.18) відношення через t:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

дістанемо рівняння:

$$\boxed{\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases}} \qquad (2.19)$$

де $t\in(-\infty;\ \infty)$ — довільний *параметр*.

Рівняння (3.17) — параметричні рівняння прямої у просторі.

2.2.3. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, який лежить на прямій L, — напрямний вектор прямої M_1M_2. Тоді

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \text{ —}$$

рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

2.2.4. Загальне рівняння прямої

Дві непаралельні площини перетинаються по прямій лінії. Нехай ці площини задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ та } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

причому нормальні вектори $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ не колінеарні, тобто $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$. Тоді система рівнянь

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}} \qquad (2.20)$$

визначає у просторі пряму лінію, і цю систему називають *загальним рівнянням прямої* (рис. 2.21).

Звичайно, більш зручними для практичного застосування є *канонічні рівняння прямої*. Щоб звести загальне рівняння (2.20) до канонічного вигляду (2.18), потрібно знайти точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій L і напрямний вектор $\vec{a} = \{l; m; n\}$ прямої.

Для знаходження точки M_0 одну з її координат, наприклад $z = z_0$, обирають довільною або рівною нулю. Далі з системи (2.20) знаходять відповідні значення двох інших змінних. Якщо система несумісна, то довільне значення надають іншій змінній. За напрямний вектор $\vec{a}$ прямої можна взяти векторний добуток нормальних векторів $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ і $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

Зауваження. Застосовують і інший спосіб зведення рівняння (2.20) до канонічного вигляду: знаходять дві точки на прямій L, тобто $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, тоді $\overline{M_1M_2}$ — напрямний вектор прямої L.

2.2.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих

Нехай прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями:

$$L_1: \ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}, \quad L_2: \ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Кут φ між цими прямими за означенням є кутом між їхніми напрямними векторами $\vec{a}_1=\{l_1;\ m_1;\ n_1\}$ і $\vec{a}_2=\{l_2;\ m_2;\ n_2\}$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\vec{a}_2}{|\vec{a}_1||\vec{a}_2|}=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

Якщо прямі L_1 і L_2 паралельні, то їхні напрямні вектори колінеарні, отже, відповідні координати пропорційні. Тому умова паралельності прямих:

$$\boxed{\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}.}$$

Якщо прямі L_1 і L_2 перпендикулярні, то й напрямні вектори перпендикулярні, отже, скалярний добуток $\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=0$. Тому умова перпендикулярності прямих:

$$\boxed{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.}$$

2.2.6. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини

Кут між прямою і площиною за означенням є кут між прямою і її проекцією на площину (рис. 2.21).

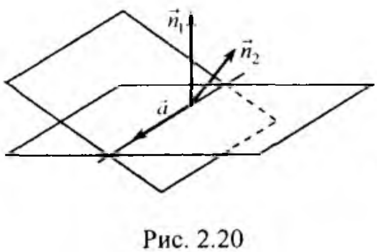


Рис. 2.20

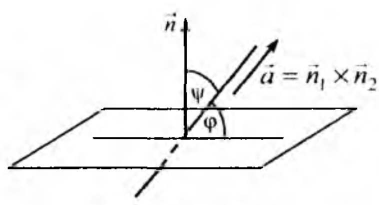


Рис. 2.21

Нехай пряма L задана канонічними рівняннями (2.18), а площина P — нормальним рівнянням (3.10). Позначимо кут між прямою L і площиною через φ, а між нормальним вектором площини і напрямним вектором прямої — через ψ. Тоді якщо ψ — гострий кут, то кут $\varphi = 90^\circ - \psi$ і $\cos\psi = \sin\varphi$; якщо ψ — тупий кут, то кут $\varphi = \psi - 90^\circ$ і $\sin\varphi = -\cos\psi$. В обох випадках $\sin\varphi = |\cos\psi|$.

Отже, кут між прямою і площиною знаходять за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

2.2.7. Умова паралельності прямої і площини

Якщо пряма паралельна площині (рис. 2.22), то вектори $\vec{n}$ і $\vec{a}$ перпендикулярні, отже, їхній скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\boxed{Al + Bm + Cn = 0.}$$

2.2.8. Умова перпендикулярності прямої і площини

Якщо пряма перпендикулярна до площини (рис. 2.23), то вектори $\vec{n}$ і $\vec{a}$ колінеарні, отже, їхні координати пропорційні:

$$\boxed{\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.}$$

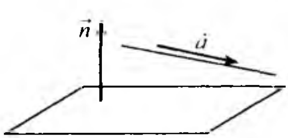


Рис. 2.22

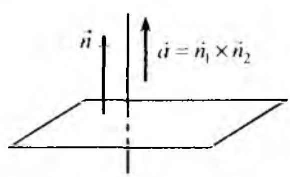


Рис. 2.23

2.2.9. Точка перетину прямої і площини

Для знаходження точки перетину прямої і площини, заданих рівняннями (2.18) і (2.13) відповідно, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}, \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \\ (Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Кількість розв'язків останньої системи визначається рівнянням $Rt + S = 0$, де $R = Al + Bm + Cn$, $S = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Можливі випадки:

1) $R \neq 0$, тоді рівняння $Rt + S = 0$ має єдиний корінь $t^* = -\dfrac{S}{R}$. Отже, пряма і площина мають одну спільну точку $(x_0 + lt^*, y_0 + mt^*, z_0 + nt^*)$;

2) $R = 0, S \neq 0$, тоді рівняння $Rt + S = 0$ не має розв'язків. Це означає, що пряма і площина не мають спільних точок;

3) $R = 0, S = 0$, рівняння $Rt + S = 0$ має безліч розв'язків. У цьому випадку пряма належить площині.

Отже, належність прямої площині описується двома умовами:

$$\boxed{\begin{cases} Al + Bm + Cn = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \end{cases}}$$

перша з яких означає паралельність прямої і площини, а друга — належність площині точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ прямої L.

2.2.10. Відстань між паралельними прямими

Відстань між паралельними прямими

$$L_1 : \frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \text{ і } L_2 : \frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n}$$

дорівнює висоті паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\overline{M_1M_2}$, де M_1 — довільна точка прямої L_1, а M_2 — довільна точка прямої L_2 (рис. 2.24).

Отже,

$$d = \frac{|\vec{a} \times \overline{M_1M_2}|}{|\vec{a}|}.$$

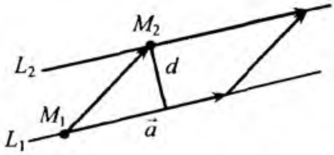


Рис. 2.24

Відстань між паралельними прямими L_1 і L_2 можна визначити ще так:

1) через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ провести площину, перпендикулярну до прямої L_1;

2) знайти точку O перетину площини з прямою L_2;

3) обчислити довжину відрізка M_1O. Це і буде шукана відстань між паралельними прямими.

Т.2 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. У просторі задані точки $M_0\ (2; 3; 1)$, $M_1\ (1; 2; -1)$, $M_2\ (3; 1; -2)$, $M_3\ (-2; 3; -2)$. Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$.

Розв'язання:

а) на площині $M_1M_2M_3$ візьмемо довільну точку $M(x, y, z)$ і утворимо три вектори

$$\overline{M_1M} = \{x-1,\ y-2,\ z+1\},\ \overline{M_1M_2} = \{2; -1; -1\},\ \overline{M_1M_3} = \{-3;\ 1;\ -1\}.$$

За формулою (2.14) складаємо рівняння

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

звідки після розкриття визначника за першим рядком одержуємо загальне рівняння площини $M_1M_2M_3$:

$$2x+5y-z-13=0;$$

б) оскільки шукана площина α паралельна площині $M_1M_2M_3$, то нормальний вектор цієї площини $\vec{n}=\{2;5;-1\}$ є також нормальним вектором для площини α.

За формулою (2.12) рівняння площини α має вигляд:

$$2(x-2)+5(y-3)-(z-1)=0,$$

або

$$2x+5y-z-18=0;$$

в) щоб записати рівняння площини, яка проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_3}$, скористаємось рівнянням (2.12), в якому координати вектора $\overline{M_1M_3}$ є координатами вектора нормалі:

$$-3(x-2)+(y-3)-(z-1)=0\text{, або } 3x-y+z-4=0;$$

г) відстань від точки $M_0\,(2;3;1)$ до площини $M_1M_2M_3$, заданої рівнянням $2x+5y-z-13=0$, обчислюємо за формулою (2.17):

$$d=\frac{|2\cdot2+5\cdot3-1-13|}{\sqrt{2^2+5^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{30}}.$$

2. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0\,(1;-2;4)$ паралельно векторам $\vec{a}=\{2;-1;0\}$ та $\vec{b}=\{3;-1;3\}$.

Розв'язання. Оскільки площина паралельна векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то нормаль $\vec{n}$ шуканої площини перпендикулярна до цих векторів. Тому за нормаль можемо взяти векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}$ (пригадайте означення векторного добутку двох векторів), тобто

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & -1 & 3\end{vmatrix}=-3\vec{i}-6\vec{j}+\vec{k}.$$

За формулою (2.12) записуємо рівняння шуканої площини

$$-3(x-1)-6(y+2)+(z-4)=0\text{, або } 3x+6y-z+13=0.$$

3. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною $3x-5y+2z-30=0$.

Розв'язання. Оскільки піраміда прямокутна, то її об'єм зручно обчислити за формулою $V=\frac{1}{6}|OA|\cdot|OB|\cdot|OC|$, де A, B, C — точки перетину площини з осями координат (див. рис. 3.10).

На осі Ox дорівнюють нулю координати y і z, тому, підставивши у рівняння площини значення $y=0$ та $z=0$, дістанемо $3x-30=0$, або $x=10$. Отже, $A(10;0;0)$ — точка перетину площини з віссю Ox. Аналогічно визначаємо точки $B(0;-6;0)$ і $C(0;0;15)$ — точки перетину площини з осями Oy і Oz. Звідси $|OA|=10$, $|OB|=6$, $|OC|=15$ і $V=\frac{1}{6}10\cdot6\cdot15=150$ (куб. од.).

4. Знайдіть канонічні рівняння прямої

$$\begin{cases}2x-5y+2z-10=0,\\ x-2y-z+1=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Щоб записати канонічні рівняння прямої, достатньо знати координати точки, через яку проходить пряма, і напрямний вектор цієї прямої.

Нехай $y=0$, система набирає вигляду

$$\begin{cases}2x+2z-10=0,\\ x-z+4=0,\end{cases}\text{ або }\begin{cases}x+z=5,\\ x-z=-1,\end{cases}$$

розв'язок якої $x=2$, $z=3$. Отже, точка $M(2;0;3)$ належить шуканій прямій.

Напрямний вектор знайдемо за формулою

$$\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -5 & 2\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=9\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}\text{, або }\vec{a}=\{9;\ 4;\ 1\}.$$

Отже, канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-2}{9}=\frac{y}{4}=\frac{z-3}{1}.$$

5. Перевірте, чи є перпендикулярними прямі

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}\text{ і }\begin{cases}2x+3y-8z+5=0,\\ 3x+y-5z+1=0.\end{cases}$$

Розв'язання. Прямі перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні напрямні вектори цих прямих. Вектор $\vec{a}_1 = \{1; -2; 3\}$ — напрямний вектор першої прямої. Напрямний вектор другої прямої знаходимо за формулою

$$\vec{a}_2 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k} = -7(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}).$$

Обчислюємо скалярний добуток

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 0.$$

Отже, прямі перпендикулярні.

Зауваження. Задані прямі перпендикулярні, якщо мішаний добуток

$$\vec{a}_1 \vec{n}_1 \vec{n}_2 = 0.$$

6. Доведіть, що пряма $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$ лежить у площині $4x - 3y - 4z + 15 = 0$.

Доведення. Перший спосіб. Достатньо показати, що будь-які дві точки прямої належать площині.

Справді, точки $M_1(-1; 1; 2)$ і $M_2(1; 5; 1)$ належать прямій (обґрунтуйте вибір цих точок). Підставивши координати точок у рівняння площини, одержимо правильні рівності.

Другий спосіб. Запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді:

$$x = -1 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = 2 - t$$

і підставимо значення x, y, z у рівняння площини:

$$4(-1 + 2t) - 3(1 + 4t) - 4(2 - t) + 15 = 0,$$

звідки дістаємо тотожність: $0 = 0$. Це означає, що будь-яка точка прямої задовольняє рівняння площини, отже, належить площині.

7. Знайдіть точку M', симетричну точці $M(-2; 3; -5)$ відносно прямої $\frac{x-8}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{-1}$.

Розв'язання. Нехай M' — шукана точка (рис. 2.25). Задачу розв'язуємо у такій послідовності:

1) складаємо рівняння площини α, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої l;

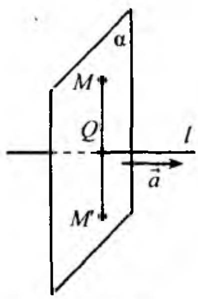


Рис. 2.25

2) знаходимо точку Q — проекцію точки M на пряму l;

3) визначаємо координати точки M', враховуючи при цьому, що точка Q — середина відрізка MM'.

Вектор $\vec{a} = \{3; 1; -1\}$ — напрямний вектор прямої l є нормальним вектором площини, яка перпендикулярна до прямої l. Записуємо рівняння площини α:

$$3(x+2)+(y-3)-(z+5)=0 \text{, або } 3x+y-z-2=0.$$

Точка Q одночасно належить і площині, і прямій. Щоб знайти її координати, розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}, \\ 3x+y-z-2=0. \end{cases}$$

Таку систему зручно розв'язувати так. Запровадивши параметр t, запишемо рівняння прямої у параметричному вигляді: $x = 3t+8$, $y = t-1$, $z = -t-1$. Виконавши підстановку у рівняння плошини, дістанемо:

$$3(3t+8)+(t-1)-(-t-1)-2=0,\ 11t+22=0,\ t=-2.$$

Отже,

$$x_Q = 3(-2)+8=2,\ \ y_Q = -2-1=-3,\ \ z_Q = 2-1=1.$$

Точка $Q(2; -3;\ 1)$ є серединою відрізка MM', тому її координати задовольняють рівності

$$x_Q = \frac{x_M + x_{M'}}{2},\ y_Q = \frac{y_M + y_{M'}}{2},\ z_Q = \frac{z_M + z_{M'}}{2},$$

тобто

$$2 = \frac{-2+x_{M'}}{2},\ -3 = \frac{3+y_{M'}}{2},\ 1 = \frac{-5+z_{M'}}{2}.$$

Звідси знаходимо координати симетричної точки $M'(6;\ -9;\ 7)$.

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. У просторі задано точки $M_0(0; -2; 4)$, $M_1(1; 5; -5)$, $M_2(3; 0; -2)$, $M_3(-1;\ 3;\ 2)$. Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$.

2. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ -1;\ 6)$ паралельно до векторів $\vec{a}=\{3;-2;1\}$ та $\vec{b}=\{-1;-4;3\}$.

3. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $M_1\ (2;\ 3;\ -1)$ і $M_2\ (0;\ 2;\ 2)$ паралельно до вектора $\vec{a}=\{4;-1;3\}$.

4. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої площиною $2x+3y-6z=24$ і координатними площинами.

5. Знайдіть напрямні косинуси нормального вектора площини $2x+6y-3z+14=0$ і обчисліть відстань від початку координат до цієї площини.

6. Покажіть, що площини $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$ та $x-3y+$ $+2z-11=0$ мають одну спільну точку; знайдіть координати точки перетину.

7. Доведіть, що площина $3x-4y-2z+5=0$ перетинає відрізок, який сполучає точки $M_1\ (3;\ -2;\ 1)$ і $M_2\ (-2;\ 5;\ 2)$.

8. У паралелограмі задано три послідовні вершини $M_1\ (6;\ 2;\ -10)$, $M_2\ (9;\ -5;\ 6)$, $M_3\ (2;\ -8;\ 4)$. Складіть рівняння його діагоналей.

9. Запишіть у канонічному вигляді рівняння прямої

$$\begin{cases} x-2y+3z+15=0, \\ 2x+3y-4z-12=0. \end{cases}$$

10. Знайдіть точку перетину прямої $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+3}{5}=\dfrac{z-1}{-1}$ і площини $x+2y-3z-9=0$.

11. Визначте гострий кут між прямими

$$x=11t-1,\ y=-8t+4,\ z=-7t+5 \text{ і } \frac{x+2}{7}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-8}.$$

12. Обчисліть кут між прямою $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-5}{-3}=\dfrac{z+2}{-2}$ і площиною $6x-9y-$ $-6z+10=0$.

13. Знайдіть проекцію точки $A(1;\ 2;\ 8)$ на пряму $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$.

14. Обчисліть відстань від точки $P(2;3;-1)$ до прямої $x=t+1$, $y = t+2,\ z=4t+13$.

15. Переконавшись, що прямі

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4} \text{ і } \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$$

паралельні, обчисліть відстань між ними.

Відповіді

1. а) $29x+20y+14z-59=0$; б) $29x+20y+14z-16=0$; в) $2x+2y-7z+32=0$; г) $\frac{16}{\sqrt{1437}}$. **2.** $x+5y+7z=39$. **3.** $3y+z=8$. **4.** 64. **5.** $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{6}{7}$, $\cos\gamma=-\frac{3}{7}$; $d = 2$. **6.** (1; -2; 2). **7.** *Вказівка.* Достатньо показати, що відхилення точок M_1 і M_2 від площини протилежні за знаком. **8.** $\frac{x-6}{2}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+10}{-7}$, $\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+7}{9}$. **9.** $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-6}{10}=\frac{z}{7}$. **10.** (5; 2; 0). **11.** 60°. **12.** 90°. **13.** (3; -1; 1). **14.** 6. **15.** 25.

Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Відомі координати точок M_0, M_1, M_2, M_3. Знайдіть:

а) рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) рівняння площини, що проходить через точку M_0 паралельно площині $M_1M_2M_3$;

в) рівняння площини, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до вектора $\overline{M_1M_3}$;

г) відстань від точки M_0 до площини $M_1M_2M_3$;

д) канонічне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2;

е) параметричне рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_3;

є) кут між прямими M_1M_2 і M_2M_3.

2.1.1. $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$.
2.1.2. $M_0(0;\ 1;\ 1)$, $M_1(-13;0;6)$, $M_2(10;1;-3)$, $M_3(-2;1;3)$.
2.1.3. $M_0(0;4;1)$, $M_1(6;-8;-2)$, $M_2(-4;10;-1)$, $M_3(0;-2;-3)$.
2.1.4. $M_0(0;1;2)$, $M_1(2;0;2)$, $M_2(8;-1;7)$, $M_3(12;1;1)$.

2.1.5. $M_0(0;1;-2)$, $M_1(1;-12;8)$, $M_2(0;11;-10)$, $M_3(0;-1;2)$.

2.1.6. $M_0(1;-1;0)$, $M_1(7;-5;-1)$, $M_2(-3;13;0)$, $M_3(1;1;-2)$.

2.1.7. $M_0(1;3;1)$, $M_1(0;-2;-1)$, $M_2(-3;-1;6)$, $M_3(-5;-3;0)$.

2.1.8. $M_0(1;2;3)$, $M_1(14;3;-2)$, $M_2(-9;2;7)$, $M_3(3;2;1)$.

2.1.9. $M_0(-3;1;-1)$, $M_1(-7;0;5)$, $M_2(11;1;-5)$, $M_3(-1;-1;-1)$.

2.1.10. $M_0(0;-1;1)$, $M_1(1;0;1)$, $M_2(4;6;1)$, $M_3(6;-1;0)$.

2.1.11. $M_0(1;0;-1)$, $M_1(-2;-1;4)$, $M_2(11;0;5)$, $M_3(-1;0;1)$.

2.1.12. $M_0(-2;2;3)$, $M_1(4;6;2)$, $M_2(-6;12;3)$, $M_3(-2;0;1)$.

2.1.13. $M_0(1;2;-1)$, $M_1(2;-1;-1)$, $M_2(5;0;4)$, $M_3(7;-2;-2)$.

2.1.14. $M_0(2;0;0)$, $M_1(-4;5;1)$, $M_2(2;0;-4)$, $M_3(-2;0;-2)$.

2.1.15. $M_0(3;-1;2)$, $M_1(7;5;0)$, $M_2(-1;-5;2)$, $M_3(1;-1;-2)$.

2.1.16. $M_0(2;1;0)$, $M_1(3;2;0)$, $M_2(6;3;5)$, $M_3(8;1;-1)$.

2.1.17. $M_0(3;5;1)$, $M_1(-3;9;2)$, $M_2(7;-9;1)$, $M_3(3;3;3)$.

2.1.18. $M_0(-1;1;0)$, $M_1(0;1;1)$, $M_2(1;6;4)$, $M_3(-1;0;6)$.

2.1.19. $M_0(4;-2;6)$, $M_1(2;-4;4)$, $M_2(4;-2;1)$, $M_3(0;-2;2)$.

2.1.20. $M_0(-1;3;1)$, $M_1(5;-7;0)$, $M_2(-5;1;1)$, $M_3(-1;-1;-1)$.

2.1.21. $M_0(-1;0;3)$, $M_1(0;1;3)$, $M_2(3;2;8)$, $M_3(5;0;2)$.

2.1.22. $M_0(2;1;-3)$, $M_1(-1;-2;2)$, $M_2(2;-1;-7)$, $M_3(0;-1;1)$.

2.1.23. $M_0(-2;3;2)$, $M_1(10;7;1)$, $M_2(-1;0;2)$, $M_3(-2;1;0)$.

2.1.24. $M_0(1;0;2)$, $M_1(0;1;2)$, $M_2(-1;4;12)$, $M_3(1;6;0)$.

2.1.25. $M_0(3;2;-2)$, $M_1(-4;-9;0)$, $M_2(6;9;-1)$, $M_3(2;-3;1)$.

2.1.26. $M_0(2;-1;5)$, $M_1(-1;1;3)$, $M_2(3;2;-6)$, $M_3(1;2;0)$.

2.1.27. $M_0(2;3;1)$, $M_1(1;2;1)$, $M_2(-2;1;-4)$, $M_3(-4;3;2)$.

2.1.28. $M_0(0;-1;1)$, $M_1(-1;4;12)$, $M_2(0;-5;1)$, $M_3(0;1;-1)$.

2.1.29. $M_0(0;8;-2)$, $M_1(3;-4;-1)$, $M_2(-2;5;-1)$, $M_3(0;4;6)$.

2.1.30. $M_0(0;-2;1)$, $M_1(13;-3;-4)$, $M_2(-10;2;5)$, $M_3(2;-2;1)$.

2.2. Обчисліть об'єм піраміди, обмеженої заданою площиною і координатними площинами. Знайдіть напрямні косинуси нормального вектора площини та відстань від початку координат до площини. Побудуйте рисунок.

2.2.1. $4x-3y+12z-60=0$. **2.2.2.** $5x-4y+3z+120=0$.

2.2.3. $2x-3y+z-18=0$. **2.2.4.** $6x-2y+3z+12=0$.

2.2.5. $4x-5y+2z-20=0$. **2.2.6.** $3x+4y+6z+24=0$.

2.2.7. $2x-5y+5z-20=0$. **2.2.8.** $x-3y+4z+12=0$.

2.2.9. $2x-3y+10z-30=0$.

2.2.10. $5x-3y+z+15=0$.

2.2.11. $4x-y+6z-12=0$.

2.2.12. $7x+2y-z+14=0$.

2.2.13. $3x-2y+8z-24=0$.

2.2.14. $3x+y-7z+21=0$.

2.2.15. $x-4y+2z-8=0$.

2.2.16. $x-5y-3z+15=0$.

2.2.17. $6x-2y-3z-18=0$.

2.2.18. $5x+y-z+10=0$.

2.2.19. $9x-15y+5z-45=0$.

2.2.20. $6x+6y-7z+42=0$.

2.2.21. $9x-4y+12z-36=0$.

2.2.22. $6x+5y-10z+30=0$.

2.2.23. $11x-4y+11z-44=0$.

2.2.24. $4x+7y-14z+28=0$.

2.2.25. $12x-9y+4z-36=0$.

2.2.26. $2x+9y-3z-18=0$.

2.2.27. $13x-2y+13z-26=0$.

2.2.28. $2x-7y-14z-14=0$.

2.2.29. $6x-4y+3z-24=0$.

2.2.30. $x-3y-5z-15=0$.

2.3. Складіть канонічне рівняння прямої.

2.3.1. $\begin{cases} x-4y+4z-10=0, \\ 2x+y-2z-6=0. \end{cases}$

2.3.2. $\begin{cases} x-2y+3z-6=0, \\ 2x+3-z-8=0. \end{cases}$

2.3.3. $\begin{cases} x+4y+z+10=0, \\ 2x-y-2z+5=0. \end{cases}$

2.3.4. $\begin{cases} x+5y+2z-20=0, \\ 4x+2y-z-8=0. \end{cases}$

2.3.5. $\begin{cases} x-6y+3z-12=0, \\ 3x+2y-3z-6=0. \end{cases}$

2.3.6. $\begin{cases} x-2y+3z+5=0, \\ 5x+y-4z-12=0. \end{cases}$

2.3.7. $\begin{cases} x+3y+2z+6=0, \\ 2x+2y-3z-6=0. \end{cases}$

2.3.8. $\begin{cases} x-6y+2z-14=0, \\ 4x-y-2z-8=0. \end{cases}$

2.3.9. $\begin{cases} x-3y+3z-7=0, \\ 2x+y-z-3=0. \end{cases}$

2.3.10. $\begin{cases} 2x-3y+4z-15=0, \\ 2x+y-3z-4=0. \end{cases}$

2.3.11. $\begin{cases} 3x-2y+z-8=0, \\ 2x+y-z-7=0. \end{cases}$

2.3.12. $\begin{cases} 4x-2y+z-10=0, \\ 2x+3y-2z-12=0. \end{cases}$

2.3.13. $\begin{cases} 3x+y+4z+6=0, \\ 4x-y-2z-3=0. \end{cases}$

2.3.14. $\begin{cases} -2x-3y+2z-5=0, \\ 2x+2y-3z-4=0. \end{cases}$

2.3.15. $\begin{cases} x-5y+3z-11=0, \\ 2x+3y-z-3=0. \end{cases}$

2.3.16. $\begin{cases} x+6y+2z-2=0, \\ 3x+y-3z=0. \end{cases}$

2.3.17. $\begin{cases} x-7y+2z-14=0, \\ 2x+4y-z-6=0. \end{cases}$

2.3.18. $\begin{cases} x-4y-4z+10=0, \\ 2x-y+2z+6=0. \end{cases}$

2.3.19. $\begin{cases} 3x-4y+2z-15=0, \\ x+2y-2z-10=0. \end{cases}$ **2.3.20.** $\begin{cases} 5x-y+2z-20=0, \\ 2x+2y-z-4=0. \end{cases}$

2.3.21. $\begin{cases} x+3y+3z-9=0, \\ 4x+2y-z-7=0. \end{cases}$ **2.3.22.** $\begin{cases} x-8y+2z+6=0, \\ 2x+y-z+4=0. \end{cases}$

2.3.23. $\begin{cases} x-2y+4z+10=0, \\ 5x+y-3z-16=0. \end{cases}$ **2.3.24.** $\begin{cases} x-2y+4z-2=0, \\ 3x+2y-z-36=0. \end{cases}$

2.3.25. $\begin{cases} x-y+z-5=0, \\ 3x-2y-2z-4=0. \end{cases}$ **2.3.26.** $\begin{cases} x-2y+4z-12=0, \\ 2x+y-2z-6=0. \end{cases}$

2.3.27. $\begin{cases} x+3y+2z-13=0, \\ 2x+y+z-16=0. \end{cases}$ **2.3.28.** $\begin{cases} 3x-y+2z-6=0, \\ 2x+y-4z-8=0. \end{cases}$

2.3.29. $\begin{cases} x-3y+6z-11=0, \\ x+2y-2z-5=0. \end{cases}$ **2.3.30.** $\begin{cases} x-4y+5z=0, \\ 2x-y-3z-2=0. \end{cases}$

2.4. Знайдіть:
а) точку перетину прямої і площини;
б) кут між прямою і площиною;
в) точку, симетричну точці P відносно даної площини.

2.4.1. $\frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{4}$, $x+2y+3z-14=0$, $P(1;\ 3;\ -6)$.

2.4.2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$, $x+2y-5z+20=0$, $P(2;\ 7;\ -4)$.

2.4.3. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-1}{2}$, $x-3y+7z-24=0$, $P(0;\ 10;\ -2)$.

2.4.4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$, $2x-y+4z=0$, $P(-4;\ 6;\ 6)$.

2.4.5. $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{0}$, $3x+y-5z-12=0$, $P(7;\ 2;\ -5)$.

2.4.6. $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}$, $x+3y-5z+9=0$, $P(5;\ 0;\ -6)$.

2.4.7. $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $x-2y+5z+17=0$, $P(-12;\ 4;\ 6)$.

2.4.8. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{1}$, $x-2y+4z-19=0$, $P(9;\ 0;\ -3)$.

2.4.9. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-1}$, $2x-y+3z+23=0$, $P(6;\ -3;\ 2)$.

2.4.10. $\frac{x+2}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+3}{0}$, $\quad 2x-3y-5z-7=0$, $\quad P(15;\ 6;\ 0)$.

2.4.11. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{3}$, $\quad 4x-2y-z-11=0$, $\quad P(7;\ 1;\ -1)$.

2.4.12. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{-1}$, $\quad 3x-2y-4z-8=0$, $\quad P(-4;\ 0;\ 8)$.

2.4.13. $\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$, $\quad x+2y-z-2=0$, $\quad P(5;\ 2;\ -2)$.

2.4.14. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-2}{-5}=\frac{z+2}{3}$, $\quad 5x-y+4z+3=0$, $\quad P(9;\ 5;\ -3)$.

2.4.15. $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$, $\quad x+3y+5z-42=0$, $\quad P(-2;-4;-6)$.

2.4.16. $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-4}{2}$, $\quad 7x+y+4z-47=0$, $\quad P(5;\ -2;\ 1)$.

2.4.17. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{5}$, $\quad 2x+3y+7z-52=0$, $\quad P(0;\ 6;\ -8)$.

2.4.18. $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+3}{2}$, $\quad 3x+4y+7z-16=0$, $\quad P(-5;\ 1;\ -3)$.

2.4.19. $\frac{x-5}{-2}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+4}{-1}$, $\quad 2x-5y+4z+24=0$, $\quad P(2;\ 2;\ -4)$.

2.4.20. $\frac{x-1}{8}=\frac{y-8}{-5}=\frac{z+5}{12}$, $\quad x-2y-3z+18=0$, $\quad P(11;\ 4;\ -3)$.

2.4.21. $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+5}{0}$, $\quad x-7y+3z+11=0$, $\quad P(14;\ 12;\ -2)$.

2.3.22. $\frac{x-5}{-1}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-1}{2}$, $\quad 3x+7y-5z-11=0$, $\quad P(0;\ 13;\ -16)$.

2.3.23. $\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-1}$, $\quad 4x+y-6z-5=0$, $\quad P(-1;\ 11;\ 5)$.

2.3.24. $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-8}{0}$, $\quad 5x+9y+4z-25=0$, $\quad P(7;\ 0;\ -4)$.

2.3.25. $\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{3}$, $\quad x+4y+13z-23=0$, $\quad P(-6;\ 4;\ -2)$.

2.3.26. $\frac{x-1}{6}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$, $\quad 3x-2y+5z-3=0$, $\quad P(11;\ 0;\ -1)$.

2.3.27. $\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+3}{-2}$, $3x-y+4z=0$, $P(-6;-3;-2)$.

2.1.28. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-3}{-2}$, $x+2y-5z+16=0$, $P(1;\ 3;\ 7)$.

2.3.29. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{0}=\frac{z+2}{-2}$, $3x-7y-2z+7=0$, $P(2;\ 4;\ 8)$.

2.3.30. $\frac{x+3}{0}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+5}{11}$, $5x+7y+9z-32=0$, $P(7;\ 5;\ -3)$.

Тема 3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Коло, еліпс, гіпербола: означення, канонічні рівняння, ексцентриситет, директриси та їх геометричний зміст, асимптоти гіперболи. Парабола: означення, канонічне рівняння, параметр та директриса параболи.

Література: [1, розділ 7], [4, розділ 3, п. 3.4], [6, розділ 3, §6], [7, розділ 3, §8], [10, розділ 2, §5], [11, розділ 2, §1].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Криві другого порядку

Лінією (*кривою*) *другого порядку* називають множину точок площини, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0,$$

де хоча б одне з чисел a, b, c відмінне від нуля.

До ліній другого порядку належать *коло, еліпс, гіпербола* і *парабола.*

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки цієї ж площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$

описує коло з радіусом R, центр якого міститься у точці $K(a,b)$ (рис. 2.26).

У разі, коли центр кола — початок координат (рис. 2.27), рівняння кола набуває канонічного вигляду

$$\boxed{x^2+y^2=R^2.}$$

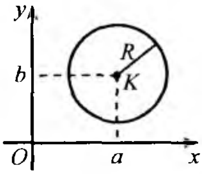


Рис. 2.26

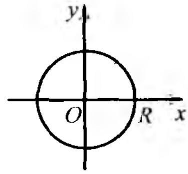


Рис. 2.27

3.2. Еліпс

Еліпсом називають множину всіх точок площини, сума відстаней яких від двох даних точок цієї площини (*фокусів*) є величина стала і більша, ніж відстань між фокусами (рис. 2.28).

Розглянемо на площині точки F_1 і F_2 — фокуси еліпса. Розмістимо координатні осі так, щоб вісь Ox проходила через ці точки, а вісь Oy — через середину відрізка F_1F_2 перпендикулярно до Ox. Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а суму відстаней від довільної точки еліпса до фокусів — $2a$, $2a > 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$.

За означенням довільна точка $M(x, y)$ належить еліпсу тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Піднесемо двічі до квадрата ліву і праву частини цього рівняння, дістанемо

$$x^2(a^2 - c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Позначимо різницю $a^2 - c^2 = b^2$. Тоді

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2,$$

звідси

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Це рівняння називають *канонічним рівнянням еліпса*.

Величини $A_1A_2 = 2a$ та $B_1B_2 = 2b$ називають відповідно *великою* та *малою осями* еліпса.

Якщо $a = b$, то рівняння набуває вигляду $x^2 + y^2 = a^2$. Отже, коло є частинним випадком еліпса, у якого фокуси збігаються в одну точку — центр.

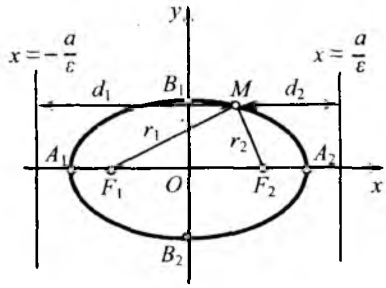


Рис. 2.28

Міру відхилення еліпса від кола характеризує величина $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $0 \le \varepsilon < 1$, яку називають *ексцентриситетом* еліпса.

Відрізки F_1M і F_2M називають *фокальними радіусами* точки M:

$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \text{ і } r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Прямі $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, або $x = \pm\frac{a^2}{c}$, називають *директрисами* еліпса. Оскільки $0 \le \varepsilon < 1$, то $\frac{a^2}{c} > a$, тобто директриси еліпса лежать поза ним.

Для директрис має місце таке твердження.

Відношення фокальних радіусів довільної точки еліпса до відстаней цієї точки до відповідних директрис є стала величина, що дорівнює ексцентриситету еліпса, тобто

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

3.3. Гіпербола

Гіперболою називають множину всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох заданих точок цієї площини (фокусів) є величина стала і менша від відстані між фокусами (рис. 2.29).

Позначимо відстань між фокусами $F_1F_2 = 2c$, а модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів — $2a$, $2a < 2c$. Тоді фокуси матимуть координати $F_1(-c, 0)$ та $F_2(c, 0)$.

За означенням довільна точка $M(x,\ y)$ належить гіперболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Після належних перетворень, дістаємо *канонічне рівняння гіперболи*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,}$$

де $b^2=c^2-a^2$.

Гіпербола складається з двох віток і має дві асимптоти

$$y=\pm\frac{b}{a}x\,.$$

Відрізок $A_1A_2=2a$ називають *дійсною віссю* гіперболи, а відрізок $B_1B_2=2b$ — *уявною віссю*.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

визначає гіперболу, яку називають *спряженою* до гіперболи

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

її графік зображено на рис. 2.29 пунктирною лінією.

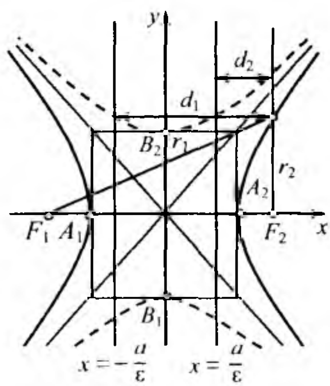


Рис. 2.29

Ексцентриситет гіперболи визначають як відношення фокальної відстані гіперболи до довжини її дійсної осі:

$$\varepsilon=\frac{c}{a},\ \varepsilon>1\,.$$

Прямі $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, де a — дійсна піввісь гіперболи, називають *директрисами* гіперболи. Вони мають ту саму властивість, що і директриси еліпса:

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon\,.$$

3.4. Парабола

Параболою називають множину всіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси) (рис. 2.30).

Запишемо рівняння параболи.

Нехай на площині задано фокус F і директрису таким чином, що відстань між ними дорівнює p. Розмістимо вісь Ox так, щоб вона проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а вісь Oy ділила навпіл відстань між фокусом і директрисою.

Тоді фокус має координати $F(\frac{p}{2},\ 0)$, а рівняння директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Довільна точка $M(x,\ y)$ належить параболі тоді і тільки тоді, коли виконується рівність $MB = MF$, де

$$MB = x + \frac{p}{2},\ MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\ .$$

Тоді

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}\ ,$$

звідки після перетворень дістаємо канонічне рівняння параболи:

$$\boxed{y^2 = 2px}$$

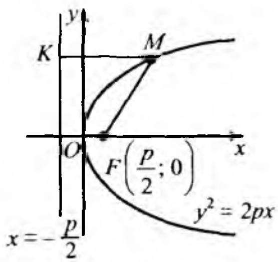


Рис. 2.30

Вісь симетрії параболи називають *віссю параболи*. Точку перетину параболи з віссю називають *вершиною* параболи, а число p, яке дорівнює відстані між фокусом і параболою, називають *параметром параболи*.

Параметр p характеризує ширину області, яку обмежує парабола (чим більше p, тим ширша парабола).

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Задано рівняння лінії другого порядку $4x^2 - 5y^2 + 20 = 0$. Визначте вид кривої, знайдіть її фокуси, півосі, ексцентриситет, рівняння директрис і асимптот (для гіперболи). Побудуйте графік.

Розв'язання. Дане рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1, \text{ або } -\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Це — спряжена гіпербола з дійсною піввіссю $b = 2$, яка лежить на осі Oy, і уявною $a = \sqrt{5}$ — на осі Ox. Половину фокусної відстані c знайдемо з умови

$$c^2 = a^2 + b^2 = 9; \quad c = 3.$$

Фокуси F_1 і F_2 лежать на осі Oy, їхні координати — (0; -3) і (0; 3) відповідно.

Ексцентриситет : $\varepsilon = \dfrac{c}{b} = 1,5$.

Рівняння директрис: $y = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$, або $y = \pm 4/3$.

Рівняння асиптот: $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, або $y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}x$.

Графік гіперболи зображено на рис. 2.31.

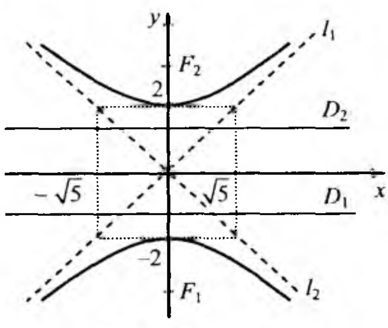


Рис. 2.31

2. Визначте тип кривої $4x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$, зведіть рівняння до найпростішого вигляду та побудуйте графік рівняння.

Розв'язання. Виділивши повні квадрати по x та y, дістанемо

$$4(x^2+2x)+(y^2-2y+1)=0,\ 4(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=4,$$

$$4(x+1)^2+(y-1)^2=4,\ (x+1)^2+\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Одержали рівняння еліпса, який можна дістати за допомогою паралельного перенесення еліпса $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ на вектор $(-1;\ 1)$ (рис. 2.32).

3. Встановіть, яку лінію визначає рівняння $y=2-\sqrt{x-2}$ та побудуйте його графік.

Розв'язання. Очевидно, що $x\ge 2$, $y\le 2$. При таких обмеженнях виконуємо перетворення: $y-2=-\sqrt{x-2}$, $(y-2)^2=x-2$. Графіком даного рівняння є нижня вітка параболи, зображена на рис. 2.33.

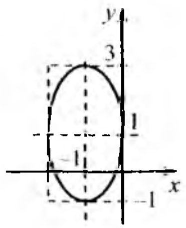


Рис. 2.32

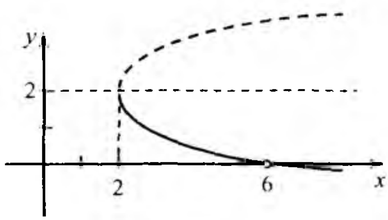


Рис. 2.33

Т.3 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Запишіть рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$.

2. Запишіть рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

3. Знайдіть вершину та параметр p параболи $x=4y^2-8y+7$.

4. Визначте тип кривої $4x^2-32x-y^2+2y+59=0$ та виконайте рисунок.

5. Запишіть рівняння гіперболи, якщо відомо її ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$, фокус $F(5;0)$, а рівняння відповідної цьому фокусу директриси має вигляд $x = 16/5$.

Відповіді

1. $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$. **3.** $p = \frac{1}{8}$, (3, 1) — вершина параболи. **4.** Гіпербола. **5.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

3.1. Задано рівняння кривої другого порядку. Виконайте такі дії:

а) визначте за рівнянням вид кривої;

б) у випадку еліпса знайдіть величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис;

в) у випадку гіперболи визначте величину півосей, координати фокусів, ексцентриситет, складіть рівняння директрис та асимптот;

г) у випадку параболи знайдіть значення параметра, координати фокуса, складіть рівняння директриси;

д) виконайте креслення кривої з поданням фокусів, директрис, асимптот (за наявності).

3.1.1. $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. **3.1.2.** $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

3.1.3. $16x^2 - 25y^2 - 400 = 0$. **3.1.4.** $-16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$.

3.1.5. $x^2 + 10y = 10$. **3.1.6.** $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$.

3.1.7. $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$. **3.1.8.** $y^2 - 4x = 4$.

3.1.9. $16x^2 - 36y^2 - 576 = 0$. **3.1.10.** $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$.

3.1.11. $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$. **3.1.12.** $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$.

3.1.13. $9x^2 - 36y^2 + 324 = 0$. **3.1.14.** $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$.

3.1.15. $5x^2 + 4y^2 - 20 = 0$. **3.1.16.** $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$.

3.1.17. $y^2 + 8x = 16$. **3.1.18.** $16x^2 - 9y^2 + 144 = 0$.

3.1.19. $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$. **3.1.20.** $25x^2 - 36y^2 - 900 = 0$.

3.1.21. $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. **3.1.22.** $4x^2 - 9y^2 + 36 = 0$.

3.1.23. $x^2 - 12y = 24$. **3.1.24.** $36x^2 + 16y^2 - 576 = 0$.

3.1.25. $9x^2+16y^2-144=0.$

3.1.26. $5x^2-4y^2+20=0.$

3.1.27. $9x^2+36y^2-324=0.$

3.1.28. $x^2-4y^2+4=0.$

3.1.29. $36x^2+25y^2-900=0.$

3.1.30. $25x^2-36y^2+900=0.$

3.2. Встановіть, яку лінію визначає рівняння, та побудуйте її графік.

3.2.1. $y=1+\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}.$

3.2.2. $y=2-\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}.$

3.2.3. $y=1-\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}.$

3.2.4. $y=-2-\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}.$

3.2.5. $x=1+\frac{2}{3}\sqrt{9-y^2}.$

3.2.6. $x=2-\frac{5}{4}\sqrt{16-y^2}.$

3.2.7. $x=3+\frac{7}{2}\sqrt{4-y^2}.$

3.2.8. $x=3-\frac{3}{7}\sqrt{49-y^2}.$

3.2.9. $y=-1+\frac{3}{4}\sqrt{16+x^2}.$

3.2.10. $y=2-\frac{3}{5}\sqrt{25+x^2}.$

3.2.11. $y=\frac{5}{6}\sqrt{37+x^2+2x}.$

3.2.12. $y=-\frac{6}{5}\sqrt{29+4x+x^2}.$

3.2.13. $y=\frac{4}{7}\sqrt{50-2x+x^2}.$

3.2.14. $y=-\frac{7}{4}\sqrt{20-4x+x^2}.$

3.2.15. $y+1=\frac{4}{9}\sqrt{81+x^2}.$

3.2.16. $y-2=-\frac{9}{5}\sqrt{25+x^2}.$

3.2.17. $x=\frac{7}{2}\sqrt{5-2y+y^2}.$

3.2.18. $x=-\frac{3}{7}\sqrt{53+4y+y^2}.$

3.2.19. $x=\frac{7}{4}\sqrt{25+6y+y^2}.$

3.2.20. $x=\frac{8}{3}\sqrt{25-16y+y^2}.$

10.2.21. $x-2=-\frac{5}{7}\sqrt{49+y^2}.$

3.2.22. $x+1=-\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}.$

10.2.23. $y=1-3\sqrt{1-x^2}.$

3.2.24. $x+3=-2\sqrt{4-y^2}.$

10.2.25. $y-1=\frac{5}{3}\sqrt{9-x^2}.$

3.2.26. $y=-\frac{3}{5}\sqrt{24-2x-x^2}.$

10.2.27. $x-2=\frac{9}{7}\sqrt{49+y^2}.$

3.2.28. $x+1=-\frac{7}{9}\sqrt{81+y^2}.$

10.2.29. $x=-\frac{7}{9}\sqrt{80-2y-y^2}.$

3.2.30. $y=\frac{2}{5}\sqrt{26+2x+x^2}.$

Тема 4. ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Циліндричні поверхні. Конічна поверхня. Сфера. Еліпсоїд. Однопорожнинний та двопорожнинний гіперболоїди. Еліптичний та гіперболічний параболоїди.

Література: [1, розділ 7], [4, розділ 3, п. 3.4], [6, розділ 3, §7], [7, розділ 3, §9], [10, розділ 2, §6].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Загальне рівняння поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називають множину точок, координати яких задовольняють рівняння

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + kz + l = 0,$$

де хоча б один із коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля. Таке рівняння називають *загальним рівнянням поверхні другого порядку*.

Як геометричний об'єкт поверхня другого порядку не зміниться при переході від однієї системи координат до іншої. Існує система координат, в якій рівняння поверхні має найпростіший (*канонічний*) вигляд.

До поверхонь другого порядку відносять циліндричні, конічні поверхні, поверхні обертання, сферу, еліпсоїд, однопорожнинний та двохпорожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди.

4.2. Циліндричні поверхні

Циліндричною поверхнею називають поверхню, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну). Найчастіше розглядають такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать у координатній площині, а твірні паралельні осі, що перпендикулярна до цієї площини. В цьому випадку рівняння циліндричної поверхні збігається з рівнянням її напрямної. Наприклад, рівняння

$$f(x,\ y) = 0$$

описує циліндричну поверхню з напрямною у площині Oxy і твірними, паралельними осі Oz.

Циліндричні поверхні, напрямними яких є криві другого порядку, називають *циліндричними поверхнями другого порядку*. Їхні канонічні рівняння такі:

1. *Круговий циліндр* $x^2 + y^2 = R^2$.

2. *Еліптичний циліндр* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.34).

3. *Гіперболічний циліндр* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 2.35).

4. *Параболічний циліндр* $y^2 = 2px$ (рис. 2.36).

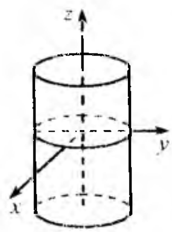


Рис. 2.34

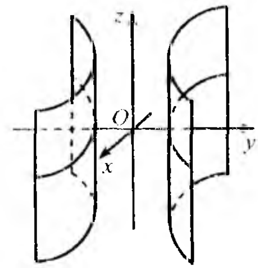


Рис. 2.35

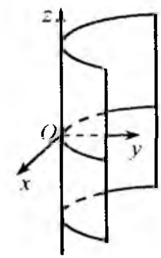


Рис. 2.36

4.3. Конічна поверхня

Конічною поверхнею називають поверхню, утворену множиною всіх прямих (твірних), які проходять через фіксовану точку (вершину) і перетинають задану плоску криву (напрямну), причому вершина не належить напрямній. Канонічне рівняння еліптичного конуса (рис. 2.37) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Переріз даного конуса площиною $z = z_0 \neq 0$ є еліпсом, а площиною $z = 0$ — точка $(0; 0; 0)$ (вершина конуса).

У випадку $a = b = c$ маємо *прямий круговий конус* $x^2 + y^2 = z^2$.

4.4. Сфера

Сферою називають поверхню, утворену обертанням кола (півкола) навколо його діаметра.

Рівняння сфери з центром у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R має вигляд

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Якщо центр сфери — початок координат, то маємо канонічне рівняння сфери

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = R^2.}$$

4.5. Еліпсоїд

Поверхню, задану рівнянням

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,}$$

називають *еліпсоїдом* (рис. 2.38).

Тут a, b, $c > 0$ — задані півосі еліпсоїда. Зокрема, у випадку $a = b$ маємо еліпсоїд обертання $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, який одержується обертанням навколо осі Oz еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

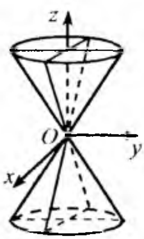


Рис. 2.37

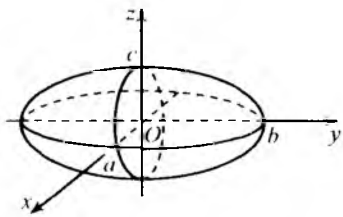


Рис. 2.38

4.6. Однопорожнинний гіперболоїд

Однопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню (рис. 2.39), яку описує рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$

Зокрема, у випадку $a = b$ маємо однопорожнинний гіперболоїд обертання, який утворюється обертанням навколо осі Oz гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, що лежить у площині Oxy.

Переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $z = z_0$ є еліпсом, а площинами $x = x_0$ або $y = y_0$ – гіперболами.

Відзначимо, що через кожну точку будь-якого однопорожнинного гіперболоїда проходить деяка пряма, яка повністю належить цьому гіперболоїду.

4.7. Двопорожнинний гіперболоїд

Двопорожнинним гіперболоїдом називають поверхню (рис. 2.40), яку описує рівняння

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.}$$

4.8. Еліптичний параболоїд

Еліптичним параболоїдом називають поверхню (рис. 2.41), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\boxed{\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z \quad (p,\, q>0).}$$

За умови $p = q$ маємо круговий параболоїд $x^2 + y^2 = 2pz$, утворений обертанням параболи $x^2 = 2pz$, що лежить у площині Oxz, навколо осі Oz.

Точка (0; 0; 0) — вершина еліптичного параболоїда.

Переріз еліптичного параболоїда площиною $z = z_0 > 0$ є еліпсом, а площинами $x = x_0$ або $y = y_0$ — параболами.

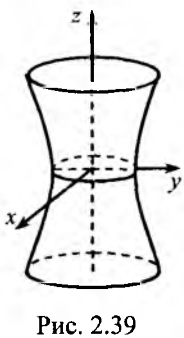


Рис. 2.39

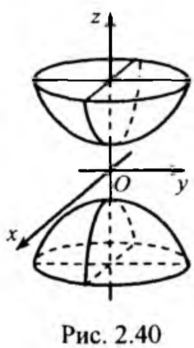


Рис. 2.40

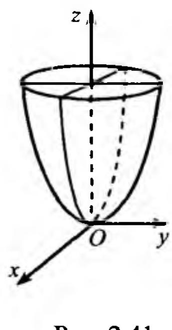


Рис. 2.41

4.9. Гіперболічний параболоїд

Гіперболічним параболоїдом називають поверхню (рис. 2.42), канонічне рівняння якої має вигляд

$$\boxed{\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z \quad (p,\, q>0).}$$

Цю поверхню ще називають *сідлоподібною поверхнею*.

Переріз гіперболічного параболоїда площиною $z=z_0\neq 0$ є гіперболою; площиною $z=0$ – парою паралельних прямих; площинами $x=x_0$ або $y=y_0$ – параболами.

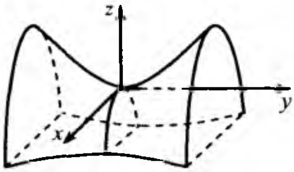


Рис. 2.42

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Вкажіть, яку поверхню визначають рівняння:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$; б) $x^2-\frac{z^2}{16}=1$; в) $z^2-4=0$;

г) $4x^2+y^2=4z$; д) $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}-\frac{x^2}{9}=0$.

Розв'язання:

а) рівняння $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ визначає еліпсоїд обертання, утворений обертанням еліпса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ навколо осі Oy;

б) задане рівняння визначає гіперболічний циліндр, твірні якого паралельні осі Oy;

в) рівняння $z^2-4=0$ рівносильне сукупності рівнянь $z=2$ або $z=-2$, геометричним образом яких є пара паралельних площин;

г) запишемо рівняння у вигляді $z = x^2 + \frac{y^2}{4}$. Отже, маємо еліптичний параболоїд з віссю симетрії Oz;

д) рівняння $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{9} = 0$ задає круговий конус з віссю симетрії Ox.

2. Рівняння поверхні $3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z - 1 = 0$ зведіть до канонічного вигляду та визначте, яку поверхню воно задає.

Розв'язання. Виконаємо перетворення лівої частини рівняння, виділивши повні квадрати:

$$3x^2 + 4y^2 - 8z^2 - 18x + 8y + 32z - 1 =$$
$$= 3(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 2y + 1) - 8(z^2 - 4z + 4) - 1 - 27 - 4 + 32 =$$
$$= 3(x-3)^2 + 4(y+1)^2 - 8(z-2)^2 .$$

Отже, дане рівняння набирає вигляду

$$3(x-3)^2 + 4(y+1)^2 - 8(z-2)^2 = 0 ,$$

звідси після ділення обох частин рівняння на 24 дістанемо

$$\frac{(x-3)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{6} - \frac{(z-2)^2}{3} = 0 .$$

Запровадивши нові змінні $\bar{x} = x - 3$, $\bar{y} = y + 1$, $\bar{z} = z - 2$, дістанемо канонічне рівняння

$$\frac{\bar{x}^2}{8} + \frac{\bar{y}^2}{6} - \frac{\bar{z}^2}{3} = 0 ,$$

геометричним образом якого у системі координат $Oxyz$ є конус з вершиною у точці (3; –1; 2).

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Вкажіть, яку поверхню визначають такі рівняння:

а) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} + \frac{z^2}{25} = 1$; б) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = -1$; в) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = -1$;

г) $9z^2 + 4y^2 = 36x$; д) $x^2 + z^2 - \frac{y^2}{4} = 0$; е) $x^2 + z^2 - 1 = 0$;

є) $z^2 - y^2 = x$; ж) $x^2 - z^2 = 0$; з) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2. Використовуючи виділення повних квадратів, визначте, яку поверхню визначають такі рівняння:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 2 = 0$;

б) $5x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 10x - 8y - 6z = 0$;

в) $y^2 + 2x - 4y + 16 = 0$.

3. Знайдіть точку перетину прямої $\frac{x}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+2}{4}$ з поверхнею $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$.

4. Складіть рівняння сфери, для якої точки $A(5;\ 0;\ -2)$ і $B(1;\ 4;\ 0)$ є кінцями одного з її діаметрів.

5. Складіть рівняння параболоїда обертання, утвореного обертанням параболи $\begin{cases} x^2 = 12z, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz.

Відповіді

1. а) еліпсоїд; б) порожня множина; в) однопорожнинний гіперболоїд; г) еліптичний параболоїд; д) конус; е) круговий циліндр; є) гіперболічний параболоїд; ж) пара площин; з) сфера. **2.** а) сфера; б) еліпсоїд; в) параболічний циліндр. **3.** (4; –3; 2). **4.** $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$. **5.** $x^2 + y^2 = 12z$.

Т.4 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

4.1. Задано канонічне рівняння поверхні другого порядку. Визначте за рівнянням вид поверхні та зведіть його до канонічного вигляду

4.1.1. $36x^2 + 4y^2 - 8y + 9z^2 - 32 = 0$.

4.1.2. $x^2 + 2y^2 - 4x + 4y - 4z + 6 = 0$.

4.1.3. $x^2 + 16y^2 - 4z^2 - 4x + 8z = 0$.

4.1.4. $3x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2z + 7 = 0$.

4.1.5. $x^2 + 4y^2 - 4x - 24y - 4z + 40 = 0$.

4.1.6. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x + 4y + 6z - 4 = 0$.

4.1.7. $x^2 + y^2 - z^2 + 4x + 2y + 4z + 1 = 0$.

4.1.8. $x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 2y - 2z + 9 = 0$.

4.1.9. $x^2 + y^2 - z^2 - 4x - 4y - 4z + 4 = 0.$

4.1.10. $4x^2 + y^2 - 2z^2 - 8x + 4z + 2 = 0.$

4.1.11. $12x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 24x + 12y + 8z + 16 = 0.$

4.1.12. $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x - 4y - 4z + 6 = 0.$

4.1.13. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 36y - 72z + 36 = 0.$

4.1.14. $3x^2 + y^2 + 9z^2 + 12x - 2y + 4 = 0.$

4.1.15. $x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 4x - 20z - 1 = 0.$

4.1.16. $3x^2 + 4y^2 - 4z^2 - 8y + 8z - 12 = 0.$

4.1.17. $3x^2 + 2y^2 - 6z^2 - 6x + 4y - 1 = 0.$

4.1.18. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 4x + 4z + 1 = 0.$

4.1.19. $4x^2 + 9y^2 - 36z^2 + 8x - 18y - 23 = 0.$

4.1.20. $2x^2 + 5y^2 - 10z^2 + 8x + 20z - 12 = 0.$

4.1.21. $4x^2 + y^2 - 4z^2 - 16x - 2y + 21 = 0.$

4.1.22. $9x^2 + y^2 - 9z^2 + 18x + 2y + 19 = 0.$

4.1.23. $2x^2 + y^2 - 2z^2 - 12x - 4y + 22 = 0.$

4.1.24. $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 16x + 8y + 2z + 23 = 0.$

4.1.25. $4x^2 + 2y^2 - z^2 - 8y - 2z + 11 = 0.$

4.1.26. $2x^2 - y^2 - 4x - 2y - 6z + 1 = 0.$

4.1.27. $5x^2 - 4y^2 + 10x + 8y - 20z + 1 = 0.$

4.1.28. $9x^2 - 4y^2 - 16y - 36z - 52 = 0.$

4.1.29. $4x^2 - y^2 + 4y - 4z + 4 = 0.$

4.1.30. $4x^2 - y^2 - 16x - 2y - 4z + 7 = 0.$

Модуль 3 ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Загальна характеристика модуля. Модуль є підготовчим для вивчення диференціального та інтегрального числень, отже, і для всього курсу вищої математики; поглиблюються шкільні знання про похідну, виводяться формули диференціювання, вивчаються властивості диференційовних функцій однієї змінної.

СТРУКТУРА МОДУЛЯ

Тема 1. Множини. Функції. Послідовності. Границя послідовності.
Тема 2. Границя функції.
Тема 3. Неперервність функції.
Тема 4. Похідна функції.
Тема 5. Диференціал функції. Основні теореми диференціального числення.
Тема 6. Застосування похідної до дослідження функцій.

Базисні поняття. **1.** Множина. **2.** Функція. **3.** Послідовність. **4.** Границя. **5.** Неперервність. **6.** Похідна. **7.** Диференціал. **8.** Дотична. **9.** Екстремум. **10.** Графік.

Основні задачі. **1.** Найпростіші дослідження функцій. **2.** Обчислення границь. **3.** Дослідження неперервності функцій. **4.** Відшукання похідних першого і вищих порядків функцій, заданих явно, неявно, параметрично. **5.** Відшукання диференціалів першого і вищих порядків явно заданих функцій. **6.** Застосування похідної та диференціалів. **7.** Дослідження функцій. **8.** Побудова графіків.

ЗНАННЯ ТА ВМІННЯ, ЯКИМИ ПОВИНЕН ВОЛОДІТИ СТУДЕНТ

1. Знання на рівні понять, означень, формулювань

1.1. Множини. Класифікація числових множин. Операції над множинами.
1.2. Функція. Класифікація функцій. Елементарні функції.
1.3. Послідовність. Границя послідовності .

1.4. Границя функції.

1.5. Неперервність функції. Властивості неперервних функцій.

1.6. Точки розриву та їх класифікація.

1.7. Означення похідної; фізичний і геометричний зміст.

1.8. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1.9. Правила диференціювання.

1.10. Зв'язок між неперервністю і диференційовністю.

1.11. Диференціал; геометричний зміст диференціала.

1.12. Визначення похідних та диференціалів вищих порядків.

1.13. Формула Лагранжа. Формула Тейлора. Формула Маклорена.

1.14. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$.

1.15. Зростання, спадання функції на інтервалі.

1.17. Локальний екстремум функції. Правило відшукання екстремумів.

1.18. Опуклість, вгнутість, точки перегину.

1.19. Асимптоти.

1.20. Схема побудови графіка функції.

2. Знання на рівні доведень та виведень

2.1. Теореми про границі.

2.2. Перша та друга важливі границі.

2.3. Похідні основних елементарних функцій і загальні правила відшукання похідних.

2.4. Похідні першого і вищих порядків функцій, заданих параметрично.

2.5. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

2.6. Правило Лопіталя для розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$.

2.7. Достатні умови монотонності.

2.8. Необхідні і достатні умови екстремуму.

2.9. Формули для знаходження похилих асимптот.

3. Уміння в розв'язанні задач

3.1. Проводити найпростіші дослідження елементарних функцій (область визначення, множина значень, зростання, спадання функції, знаходження оберненої функції тощо).

3.2. Будувати графіки основних елементарних функцій.

3.3. Обчислювати границі.

3.4. Досліджувати функції на неперервність.

3.5. Знаходити похідні функцій.

3.6. Розв'язувати задачі з використанням геометричного і фізичного змісту похідної.

3.7. Знаходити інтервали зростання і спадання функції, локальний екстремум.

3.8. Знаходити інтервали опуклості, вгнутості і точки перегину.

3.9. Знаходити асимптоти графіка функції.

3.10. Будувати графіки функцій.

Тема 1. МНОЖИНИ. ФУНКЦІЇ. ПОСЛІДОВНОСТІ. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Множини. Класифікація числових множин. Операції над множинами. Поняття функції. Основні характеристики функцій. Класифікація функцій. Графіки основних елементарних функцій. Послідовності. Границя послідовності. Теореми про границі. Число e. Визначені та невизначені вирази.

Література: [2, розділ 1–3], [3, розділ 3, п.п.3.1—3.8], [4, розділ 4, §2], [5], [6, розділ 4, §§2, 3], [7, розділ 4, §§11, 12], [10, розділ 3, §2—4], [11, розділ 3, §1—3], [12, розділ 2, §§1—5], [13].

Т.1 Основні теоретичні відомості

1.1. Множини

1.1.1. Основні поняття

Поняття множини є одним з найважливіших у математиці. Воно належить до понять, яким не можна дати строге означення. Під множиною розуміють сукупність (сімейство, набір) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою.

Приклади множин: множина всіх натуральних чисел, множина студентів першого курсу, множина розв'язків заданого рівняння, множина міст країни тощо.

Об'єкти, з яких складається множина, називають її *елементами*. Множини позначають великими буквами латинського алфавіту A, B, C, ... , а елементи — малими буквами a, b, c, ...

Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x \in X$; запис $x \notin X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина вважається заданою, якщо відома характеристика, за якою про кожен елемент можна сказати, належить він множині чи ні.

Множину, яка містить скінченне число елементів, називають скінченною. Запис $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ означає, що множина X скінченна і містить

n елементів. Множину $X = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$, яка містить нескінченне число елементів, називають *нескінченною*. Наприклад, множина всіх цілих чисел нескінченна.

Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* і позначають символом $\varnothing$. Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2 + 2x + 3 = 0$ є порожньою.

Множину A називають підмножиною множини B, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, і позначають $A \subset B$ або $B \supset A$.

Множини A і B рівні ($A = B$), якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, іншими словами, ці множини складаються з однакових елементів.

Об'єднанням (*сумою*) множин A і B називають множину, що складається з елементів, кожен з яких належить або множині A, або множині B і позначають $A \bigcup B$ або $A + B$. Отже,

$$x \in A \bigcup B \Leftrightarrow x \in A \text{ або } x \in B$$

Перерізом (*добутком*) множин A і B називають множину, що складається з елементів, кожен з яких належить і множині A, і множині B. Позначення: $A \bigcap B$ або AB. Отже,

$$x \in A \bigcap B \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \in B.$$

Різницею множин A і B називають множину $A \setminus B$, яка складається з елементів, кожен з яких належить множині A, і не належить множині B. Отже,

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ і } x \notin B.$$

Наприклад, якщо $A = \{x : 0 \le x \le 4\}$, $B = \{x : 3 \le x \le 7\}$, то

$$A \bigcup B = \{x : 0 \le x \le 7\},\ A \bigcap B = \{x : 3 \le x \le 4\},\ A \setminus B = \{x : 0 \le x < 3\}.$$

1.1.2. Числові множини

Множини, елементами яких є числа, називають *числовими*. Назвемо основні числові множини:

1) множина натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1;\ 2;\ ...,\ n, ...\}$;

2) множина цілих невід'ємних чисел $\mathbb{Z}_0 = \{0;\ 1;\ 2;\ ...,\ n, ...\}$;

3) множина цілих чисел $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1;\ \pm 2; ..., \pm n, ...\}$;

4) множина раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}\}$;

5) множина дійсних чисел $\mathbb{R}$.

Між цими множинами існує зв'язок

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ складається з раціональних і ірраціональних чисел. Всяке раціональне число можна подати у вигляді або скінченного десяткового дробу або нескінченного періодичного дробу.

Ірраціональне число — це нескінченний неперіодичний дріб.

1.2. Функція

1.2.1. Поняття функції

Якщо кожному значенню змінної x, що належить множині дійсних чисел D, за певним правилом ставиться у відповідність єдине число y, що належить множині дійсних чисел E, то кажуть, що y є функцією від x і пишуть $y = f(x)$.

Змінну $x \in D$ називають незалежною змінною (*аргументом*) функції f, а змінну $y \in E$ — залежною змінною (*функцією*); під символом f розуміють правило, за яким кожному x відповідає y, або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множину D називають *областю визначення* функції $f(x)$, а множину E — *областю зміни* (або *множиною значень*) функції $f(x)$.

Наведене означення функції є окремим випадком більш загального означення функції.

Нехай задані дві непорожні множини X і Y. Відповідність f, яка кожному елементу $x \in X$ ставить у відповідність один і тільки один елемент $y \in Y$, називають функцією і пишуть $X \xrightarrow{f} Y$ або $f: X \to Y$.

Тут X — область визначення функції f, Y — множина значень функції f. Якщо елементами множин X і Y є дійсні числа, то дістанемо перше означення. В цьому випадку функцію f називають числовою. Надалі будемо користуватися першим означенням.

Графіком функції $y = f(x)$ називають множину всіх тих і тільки тих точок $(x; y)$ площини Oxy, які задовольняють рівність $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Основні способи задання функції:

1) *аналітичний* (функцію задають за допомогою однієї або кількох формул чи рівнянь);

2) *табличний* (виписують ряд числових значень незалежної змінної x і відповідних їм значень функції y);

3) *графічний.*

1.2.2. Обернена функція

Нехай функція $y = f(x)$, що відображає множину D в множину E є взаємно однозначною, тобто для будь-яких значень x_1 і $x_2 \in D$ таких, що $x_1 \neq x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тоді функцію $x = \varphi(y)$, що відображає множину E в множину D, називають *оберненою* до заданої функції $f(x)$. Для того щоб знайти функцію, обернену до даної $y = f(x)$, потрібно з цієї рівності виразити x через y (якщо це можливо). Якщо функції $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ взаємно обернені, то графіком їх є одна і та сама крива. Але якщо аргумент оберненої функції позначимо знову через x, а функцію — через y, то графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$ будуть симетричними відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. Наприклад, функції $y = e^x$ і $y = \ln x$ взаємно обернені. Їхні графіки зображено на рис. 3.1.

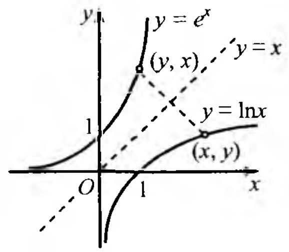


Рис. 3.1

1.2.3. Основні характеристики функції

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо:

1) її область визначення симетрична відносно точки 0, тобто для довільного x з області визначення значення $-x$ також належить області визначення;

2) $f(-x) = f(x)$.

Приклади парних функцій: $y = \cos x$, $y = x^2$, $y = |x|$, $y = e^x + e^{-x}$.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо:

1) її область визначення симетрична відносно точки 0;

2) $f(-x) = -f(x)$.

Приклади непарних функцій: $y = \sin x$, $y = x^3$, $y = \dfrac{|x|}{x}$, $y = e^x - e^{-x}$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат;
графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функцію, що не є ні парною, ні непарною, називають *функцією загального вигляду*.

Функцію $f(x)$ називають *зростаючою* (*спадною*) на інтервалі $(a;\ b)$, якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 із цього інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Функцію $f(x)$ називають *неспадною* (*незростаючою*) на інтервалі $(a;\ b)$, якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 з указаного інтервалу таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність

$$f(x_1) \le f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Зростаючі, спадні, незростаючі та неспадні функції називають *монотонними*, а зростаючі та спадні функції — *строго монотонними*.

Наприклад, функції $y = e^x$, $y = x^3$ — зростаючі функції на R.

Функцію $y = f(x)$, визначену на множині D, називають *обмеженою* на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \le M$. Графік обмеженої функції міститься у смузі між прямими $y = -M$ та $y = M$.

Приклади обмежених функцій:

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \arcsin x,\ y = \frac{|x|}{x},\ y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Число $T > 0$ називають періодом функції $y = f(x)$, якщо для кожного $x \in D(f)$ виконуються рівності

$$f(x) = f(x+T) = f(x-T).$$

Функцію, що має будь-який період, називають *періодичною*.

Число T — основний період функції, якщо $T > 0$ і є найменшим серед усіх додатних періодів.

Наприклад, функція $y = \sin nx$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{n}$.

1.2.4. Складена функція

Нехай функція $y = f(u)$ визначена на множині A, а функція $u = g(x)$ — на множині X, причому для кожного значення $x \in X$ відповідне значення $u = g(x) \in A$. Тоді на множині X визначена функція $y = f(g(x))$, яку називають *складеною* функцією від x (або функцією від функції, або суперпозицією заданих функцій).

Змінну $u = g(x)$ функції $y = f(u)$ називають проміжним аргументом, або внутрішньою функцією, а змінну $y = f(u)$ — зовнішньою функцією.

Наприклад, функція $y = \sqrt{\cos x}$ є суперпозицією двох функцій:

$$y = \sqrt{u}\ ,\ \ u = \cos x\,,$$

а функція $y = \ln \operatorname{tg} 3x$ — суперпозицією трьох функцій:

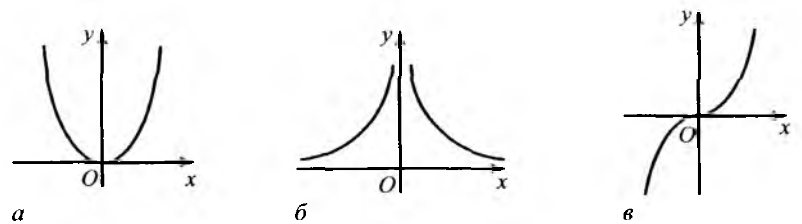
$$y = \ln u,\ \ u = \operatorname{tg} v,\ \ v = 3x\,.$$

1.2.5. Класифікація елементарних функцій та їхні графіки

Основними елементарними функціями є такі аналітично задані функції:

1) *степенева* функція $y = x^{\alpha}$, де α — дійсне число. Область визначення і графік цієї функції залежать від значення α (рис. 3.2, *а—е*);

$\alpha = 2n, n \in N$; $\alpha = -2n, n \in N$; $\alpha = 2n+1, n \in N$;



$\alpha = -(2n-1), n \in N$; $\alpha = \dfrac{1}{2n}, n \in N$; $\alpha = \dfrac{1}{2n+1}, n \in N$.

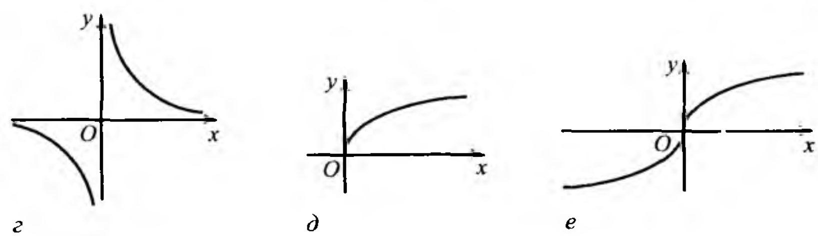


Рис. 3.2

2) показникова функція $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 3.3);

3) логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$ (рис. 3.4);

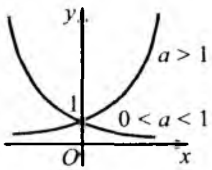


Рис. 3.3

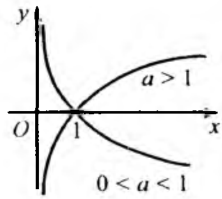


Рис. 3.4

4) тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 3.5, *а*—*г*);

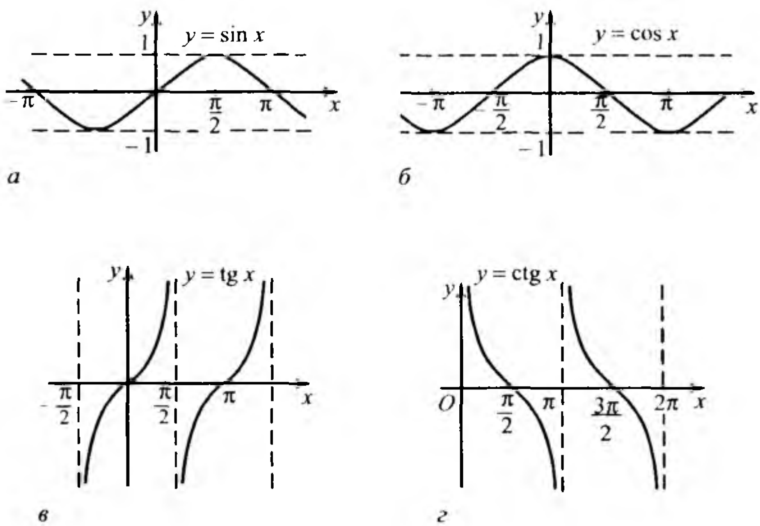


Рис. 3.5

5) обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ (рис. 3.6, *а*—*г*).

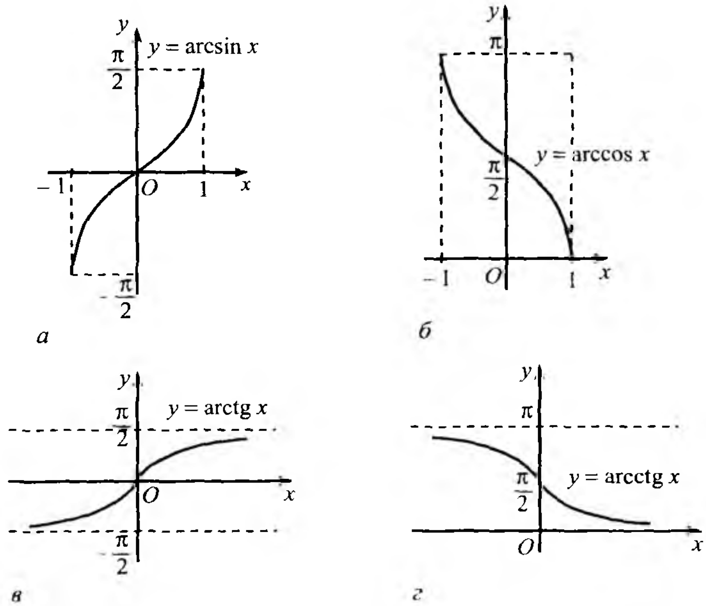


Рис. 3.6

Елементарною функцією називають функцію, одержану з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа утворення складених функцій

Елементарні функції поділяють на *алгебраїчні* і *трансцендентні*.

До алгебраїчних функцій належать:

— ціла раціональна функція або многочлен

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

де n — ціле невід'ємне число;

— дробово-раціональна функція, яка виражається відношенням двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_{m-1} x + b_m};$$

— ірраціональна функція, яку записують виразами, де крім додавання, віднімання, множення і ділення є піднесення до степеня з раціональним нецілим показником.

Функції, що не є алгебраїчними, називають трансцендентними. Наприклад, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \arcsin x$.

1.2.6. Перетворення графіків функцій

Нехай відомо графік функції $y = f(x)$. Використовуючи геометричні перетворення:

а) зсуву (паралельного перенесення) вздовж координатних осей Ox і Oy;

б) розтягу (стиснення) вздовж осей координат;

в) симетричного відображення відносно осі Ox або Oy

можна дістати графіки таких функцій (табл. 3.1):

Таблиця 3.1

Функція	Дія над графіком функції $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Зсув вздовж осі Oy на A одиниць угору, якщо $A > 0$ і на $\|A\|$ одиниць вниз, якщо $A < 0$
$y = f(x - a)$	Зсув вздовж осі Ox на a одиниць праворуч, якщо $a > 0$, і на $\|a\|$ одиниць ліворуч, якщо $a < 0$
$y = f(-x)$	Симетричне відображення відносно осі Oy
$y = -f(x)$	Симетричне відображення відносно осі Ox
$y = mf(x)$	а) $m > 1$ — розтяг вздовж осі Oy в m разів; б) $0 < m < 1$ —стиснення вздовж осі Oy у $\frac{1}{m}$ разів
$y = f(kx)$	а) $k > 1$ — стиснення вздовж осі Ox у k разів; б) $0 < k < 1$ — розтяг вздовж осі Ox у $\frac{1}{k}$ разів
$y = f(\|x\|)$	При $x \geq 0$ залишаємо графік функції $y = f(x)$, після чого відображаємо його симетрично відносно осі Oy
$y = \|f(x)\|$	На проміжках, де $f(x) \geq 0$, залишаємо графік функції $y = f(x)$; на проміжках, де $f(x) < 0$, симетрично відображаємо його відносно осі Ox

1.3. Послідовність. Границя послідовності

1.3.1. Послідовність

Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

називають *числовою послідовністю* і позначають символом $\{x_n\}$.

Іншими словами, послідовність $\{x_n\}$ — це функція

$$x_n = f(n)\,, \tag{3.1}$$

визначена на множині N натуральних чисел.

Тут $x_1 = f(1)$ — перший член послідовності, $x_2 = f(2)$ — другий, ..., x_n — n-й або загальний член послідовності.

Послідовність вважають заданою, якщо вказано спосіб відшукання її загального члена. Найчастіше загальний член послідовності задають формулою (3.1). Наприклад, формула $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ задає послідовність

$$\left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots\right\}.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називають *обмеженою*, якщо існує таке число $M > 0$, що для будь-якого $n \in N$ виконується нерівність

$$|x_n| \le M\,.$$

В іншому випадку послідовність називають *необмеженою*.

Наприклад, послідовність $\{2n+1\}$ є необмеженою, а $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\{\operatorname{arctg} n\}$ — послідовності обмежені.

Послідовність $\{x_n\}$ називають *зростаючою* (неспадною), якщо для довільного натурального n виконується нерівність

$$x_n < x_{n+1} \;\; (x_n \le x_{n+1})\,.$$

Послідовність $\{x_n\}$ називають *спадною* (незростаючою), якщо для довільного натурального n виконується нерівність

$$x_n > x_{n+1} \;\; (x_n \ge x_{n+1})\,.$$

Визначені таким чином послідовності називають *монотонними*.

Наприклад, послідовність $\{\ln n\}$ є зростаючою, $\left\{\sin\dfrac{1}{n}\right\}$ — спадною, $\{\sin n\}$, $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ — послідовності немонотонні.

1.3.2. Границя числової послідовності

Число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n > N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (3.2)$$

У цьому випадку записують: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ або $x_n \to a$ при $n \to \infty$ і кажуть, що послідовність $\{x_n\}$ є *збіжною*. Послідовність, яка не має границі, називають розбіжною.

З'ясуємо геометричний зміст означення границі послідовності.

Інтервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ називають ε-околом точки a (рис. 3.7).

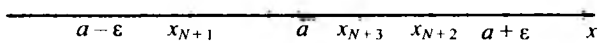


Рис. 3.7

Оскільки нерівність (3.2) рівносильна нерівності $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$, то означення границі послідовності можна сформулювати так: число a називають *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що всі члени x_n, для $n = N+1,\ \ N+2, \ldots$ потраплять в ε — окіл точки a (рис. 3.7). Тобто всередині ε-околу міститься нескінченне число членів послідовності, тоді як поза околом точки a — скінченне. Зрозуміло, що чим менше значення $\varepsilon > 0$, тим більше число N, але обов'язково таке число існує.

Наприклад, нерівність $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0{,}01$ виконується для всіх $n > 100$, тут $N = 100$, а $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0{,}001$ — для всіх $n > 1000$, тут $N = 1000$. Звідси випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ і ця границя є єдиною.

Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Відзначимо, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\{x_n - a\}$ — нескінченно мала послідовність.

Послідовність $\{x_n\}$ називають *нескінченно великою*, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує номер N такий, що при $n > N$ виконується нерівність $|x_n| > M$.

У цьому випадку записують так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

1.3.3. Теореми про границі

Теорема 1 Всяка збіжна послідовність має тільки одну границю.

Теорема 2 Збіжна послідовність обмежена.

Теорема 3 Якщо послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ збіжні, то виконуються граничні рівності:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} Cy_n = C \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, де C — стала;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).

Теорема 4 Якщо для послідовностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ та $\{z_n\}$ виконуються умови: $x_n \le y_n \le z_n$ для кожного $n \in N$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, тоді $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Теорема 5 **(Вейєрштрасса).** Монотонна обмежена послідовність має границю.

За допомогою останньої теореми доводять існування границі $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, яку позначають числом $e = 2,71828\ldots$.

Отже,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.}$$

1.3.4. Визначені та невизначені вирази

При обчисленні границь треба враховувати таке:

1) сума й добуток скінченного числа нескінченно малих, а також добуток нескінченно малої величини на величину обмежену є нескінченно малі величини;

2) сума й добуток нескінченно великих величин, а також добуток нескінченно великої на ненульову сталу є нескінченно великі величини;

3) частка від ділення сталої на нескінченно велику є нескінченно мала величина, частка від ділення ненульової сталої на нескінченно малу — нескінченно велика величина.

У прикладах на відшукання границь зазвичай зустрічаються невизначені вирази: відношення двох нескінченно малих величин; відношення двох нескінченно великих величин; різниця двох нескінченно великих величин; добуток нескінченно малої на нескінченно велику величину; нескінченно мала або нескінченно велика величина в нескінченно малому степені; величина, що прямує до одиниці, в нескінченно великому степені. Символічно невизначені вирази можна записати у вигляді (*їх усього сім*):

$$\boxed{\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty.}$$

Т.1 Приклади розв'язання типових задач

1. Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+5}=\dfrac{1}{2}$.

Розв'язання. Нехай довільне $\varepsilon>0$ задано. Згідно з означенням потрібно вказати такий номер $N(\varepsilon)$, що для всіх $n>N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\left|\frac{n+2}{2n+5}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon.$$

Звідси дістаємо

$$\left|\frac{2(n+2)-2n-5}{2(2n+5)}\right|<\varepsilon,\ \frac{1}{2(2n+5)}<\varepsilon,\ 4n+10>\frac{1}{\varepsilon},\ n>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\varepsilon}-10\right).$$

Візьмемо за $N(\varepsilon)$ цілу частину від числа $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-10\right)$: $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}-10\right)\right]$, тоді нерівність $\left|\dfrac{n+2}{2n+5}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ виконується для всіх $n>N(\varepsilon)$. Це й означає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+5}=\dfrac{1}{2}$.

Обчисліть границі

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^4-5n^2+4n}{10+2n-3n^4}$.

Розв'язання. При $n\to\infty$ чисельник і знаменник прямують до ∞ . Отже, маємо невизначеність вигляду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Розкриваємо її, поділивши чисельник і знаменник на найвищий степінь n , тобто на n^4 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^4-5n^2+4n}{10+2n-3n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{7-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{4}{n^3}}{\dfrac{10}{n^4}+\dfrac{2}{n^3}-3}=$$

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}7-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{n^4}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^3}-\lim\limits_{n\to\infty}3}=\frac{7-0+0}{0+0-3}=-\frac{7}{3}.$$

Зауваження. Обґрунтуйте самостійно правильність такої формули:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{a_0n^m+a_1n^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0n^k+b_1n^{k-1}+\ldots+b_k}=\begin{cases}a_0/b_0, & \text{якщо } m=k,\\ 0, & \text{якщо } m<k,\\ \infty, & \text{якщо } m>k.\end{cases}}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{1}{3}}+4}{(n-2)^{\frac{3}{7}}-5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Виконуємо перетворення

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}-n^{\frac{1}{3}}+4}{(n-2)^{\frac{3}{7}}-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}(1-n^{-\frac{1}{15}}+4n^{-\frac{2}{5}})}{n^{\frac{3}{7}}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{3}{7}}-5n^{-\frac{3}{7}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{3}{7}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{7}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{35}}}=\frac{1}{\infty}=0.$$

Тут ми скористалися границями

$$\boxed{\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} n^p = 0, \text{ якщо } p<0;\\ &\lim_{n\to\infty} n^p = \infty, \text{ якщо } p>0.\end{aligned}}$$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!-(n+1)!}{(n+2)!-n!}$.

Розв'язання. Нагадаємо, що за означенням $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!-(n+1)!}{(n+2)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!-n!(n+1)}{n!(n+1)(n+2)-n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!(1-n-1)}{n!((n+1)(n+2)-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{(n+1)(n+2)-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{n^2+3n+1} = 0.$$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник дробу є сумою відповідної арифметичної прогресії. Використовуючи формулу $S_n = \dfrac{a_1+a_n}{2}n$ (суми n перших членів арифметичної прогресії), дістанемо:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1) = \frac{1+2n-1}{2}n = n^2,$$

$$1+4+7+\ldots+(3n-2) = \frac{1+3n-2}{2}n = \frac{n(3n-1)}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+4+7+\ldots+(3n-2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n(3n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n-1} = \frac{2}{3}.$$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2-2n-3}-n)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $(\infty-\infty)$. Застосуємо стандартний прийом — домножимо чисельник і знаменник дробу на спряжений вираз $\sqrt{n^2-2n-3}+n$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-2n-3}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-2n-3}-n)(\sqrt{n^2-2n-3}+n)}{\sqrt{n^2-2n-3}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n-3-n^2}{\sqrt{n^2-2n-3}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n-3}{\sqrt{n^2-2n-3}+n}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-\frac{3}{n}}{\sqrt{1-\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{-2}{1+1}=-1.$$

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+5^{n+1}}{2^n-5^n}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Поділивши чисельник і знаменник дробу на 5^n, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+5^{n+1}}{2^n-5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+5}{\left(\frac{2}{5}\right)^n-1}=-5.$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\sin n}}{n}$.

Розв'язання. Враховуючи нерівності $-1\le\sin n\le 1$, $\frac{1}{2}\le 2^{\sin n}\le 2$, запишемо подвійну нерівність $\frac{1}{2n}\le\frac{2^{\sin n}}{n}\le\frac{2}{n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, то за теоремою 4 дістаємо відповідь: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{\sin n}}{n}=0$.

Т.1 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Використовуючи означення границі послідовності, доведіть, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+2}=\frac{2}{3}.$$

Обчисліть границі.

2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n+1000}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+1}{2n+11}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100n^2+n+1}{4n^3+5}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^4-5n^2+4}{(n^3-n+2)(2n+3)}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{13}{3}}+3n^{\frac{14}{4}}+2}{n^{\frac{16}{5}}-1}$. **5.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!(n^2+1)}{(n+2)!}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-(n+1)!}$. **7.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+5+\ldots+(2n+1)}{2n^2-3n+4}$. **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+2^n}{3^n+4^n}$. **10.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n}}-1}{4^{\frac{1}{n}}-1}$. **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-n-2}-2n)$.

Побудуйте графіки функцій.

12. $y=\dfrac{x-2}{x-3}$. **13.** $y=x^2-4x$.

14. $y=\dfrac{1}{x^2+4}$. **15.** $y=\sqrt{4-2x}$.

16. $y=\sqrt{4-2|x|}$. **17.** $y=\sqrt{3-x^2+2x}$.

18. $y=\log_2(1-x)$. **19.** $y=3^{-|x|}\cdot 2^x$.

20. $y=10^{\lg\sin x}$. **21.** $y=\arcsin x+2\arccos x$.

Відповіді

2. а) 3; б) ∞; в) 0. **3.** 2. **4.** ∞. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 1/2. **8.** 1/3. **9.** 0. **10.** 1/2. **11.** –1/4.

Т.1 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

1.1. Обчисліть границі

1.1.1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2+n)^3-(3+n)^3+1}{(2+n)^2+(3+n)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{10}{3}}+2n^{\frac{13}{4}}+1}{n^{\frac{15}{4}}-2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^n-2^n}{5^n+2^n}$.

1.1.2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3-2(n+1)^2+2}{(2n+1)^3+n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{4}{7}}-n^{\frac{3}{5}}+3}{(n-1)^{\frac{5}{8}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+\ldots+(4n-3)}{1+7+\ldots+(6n-5)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-4n+3}-\sqrt{n^2+1})$.

1.1.3. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^4-3n+1}{2-7n-2n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{3}}+2n^{\frac{3}{4}}+1}{(n+3)^{\frac{7}{8}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+3}-\sqrt{n^3-2}\right)$.

1.1.4. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n^4-3n+1}{2-7n-n^5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{6}{5}}+2n^{\frac{7}{6}}+1}{n^{\frac{13}{10}}-4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{25}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-n+3}-\sqrt{n^2+n})$.

1.1.5. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)^4-3n^3+n}{100+4n+n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{4}{3}}+2n^{\frac{5}{4}}+5}{n^{\frac{11}{8}}-2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{\frac{1}{n}}-1}{5^{\frac{1}{n}}+1}$.

1.1.6. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n)^4+5n^3-2n}{(4n)^3-n-6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4}+\sqrt[3]{7-2n^3}}{\sqrt[3]{8n^6}-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8^{\frac{2}{n}}-1}{8^{\frac{2}{n}}+1}$.

1.1.7. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2(n-3)+6n^3-n}{(n-1)^3+n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3-3}+\sqrt[3]{5n^5}}{\sqrt[4]{2n^5}-\sqrt[7]{n^8+5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\ldots+\dfrac{1}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$.

1.1.8. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+2)^2(n-1)+3n^2+1}{(n-2)^3+2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^4-2}+\sqrt[3]{n^7}}{\sqrt[4]{2n^5}-\sqrt[7]{n^{16}+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\ldots+\dfrac{1}{3^n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{25}\ldots+\dfrac{1}{5^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+3)!-(n+2)!}$.

1.1.9. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n-1)^2(n+2)+2n^2-1}{(2n-1)^3+n^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^5+1}+\sqrt[4]{n^9}}{\sqrt[4]{2n^{11}}-\sqrt[7]{n^9+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!-(n-2)!}{(n-1)!+(n-2)!}$.

1.1.10. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)^2(n-2)-5n^3}{8(n-1)^3+4n+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n-3}+\sqrt[3]{3n^4}}{\sqrt[4]{2n^3}-\sqrt[3]{6n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+n!}{(n+2)!-n!}$.

1.1.11. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)^2(n-1)-5n^3}{8(n+1)^5+n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4+7}-\sqrt[6]{5n^7}}{\sqrt[5]{n^7+3}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{36}\ldots+\dfrac{1}{6^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+2)!+3\cdot n!}{(n+2)!-n!}$.

1.1.12. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2(n+2)+3n^3}{5(n-3)^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2n^4+1}+\sqrt[5]{n^7}}{\sqrt[5]{n^8+2}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\ldots+\frac{1}{7^n}\right)}{\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}\ldots+\frac{(-1)^n}{7^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3(n+1)!+(n-1)!}{(n+1)!-(n-1)!}$.

1.1.13. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)(n-1)^2+2n^3}{10(n+1)^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^7+5}+\sqrt[4]{3n^9}}{\sqrt[5]{n^7+2}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3-4+\ldots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+5\cdot n!}{2(n+2)!-n!}$.

1.1.14. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(n-3)^2+7n^3}{14(n-1)^3+2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^7}+\sqrt[4]{2n^{11}}}{\sqrt[5]{n^7+1}+\sqrt{n^5}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{\sqrt{2n^2+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+5\cdot(n+2)!}{3(n+3)!-(n+2)!}$.

1.1.15. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(n-3)^2-n^3}{11(n-2)^3+22}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^{11}}+\sqrt[4]{3n^{13}}}{\sqrt[5]{n^{16}+1}+\sqrt{n}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4+7+\ldots+(3n-2)}{\sqrt{2n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-4\cdot(n+2)!}{2(n+3)!+(n+2)!}$.

1.1.16. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n-1)(n+1)^2+3n^3}{6(n+2)^3+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^{10}}+\sqrt[4]{2n^{13}}}{\sqrt[5]{n^{16}+1}+2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{\sqrt{3n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!-5\cdot(n+2)!}{3(n+3)!+(n+2)!}$.

1.1.17. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^3-(n-1)^3}{3n^2+2n-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^7}+\sqrt[4]{5n^9}}{\sqrt[7]{n^{16}-1}+3}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+6+11+\ldots+(5n-4)}{n\sqrt{4n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)!-2\cdot(n-2)!}{3(n-1)!+(n-2)!}$.

1.1.18. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3-(n-2)^3}{5n^2+2n-6}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5}+\sqrt[4]{3n^7}}{\sqrt[5]{n^8-1}+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+7+13+\ldots+(6n-5)}{n\sqrt{5n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!-2\cdot(n-2)!}{n!+(n-2)!}$.

1.1.19. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^4-(n-1)^4}{2n^3+n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^4}+\sqrt[5]{6n^6}}{\sqrt[5]{n^6-1}+2}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-2\cdot(n-1)!}{4(n+1)!+(n-1)!}$.

1.1.20. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)^4-(n-2)^4}{4n^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^4}+\sqrt[5]{3n^3}}{\sqrt[7]{n^6+1}-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{4}{n^2}+\ldots+\dfrac{3n-2}{n^2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!-4\cdot(n-1)!}{2(n+1)!+(n-1)!}$.

1.1.21. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n(n-1)^3-2n}{2-8n^2-3n^4}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{\frac{2}{7}}+4n^{\frac{3}{8}}+2}{(n+1)^{\frac{7}{16}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+6+10+\ldots+(4n-2)}{1+3+5+\ldots+(2n+1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^3+2}-\sqrt{n^3-4}\right)$.

1.1.22. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(2n-1)^2+5n^3}{3(n-2)^3+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^7}+\sqrt[5]{4n^{11}}}{\sqrt[3]{n^7+1}+\sqrt{n^7}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{(2n+3)(n+1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+4^{n+2}}{5-3\cdot 4^n}$.

1.1.23. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^2(n-3)-6n^3}{2(2n-1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}+\sqrt[7]{3n^4}}{\sqrt[4]{n^3}-\sqrt[9]{3n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\ldots+\dfrac{1}{4^n}\right)}{\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\ldots+\dfrac{(-1)^n}{4^n}\right)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+2)!}{(n+4)!-(n+3)!}$.

1.1.24. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-3)^3+7n^3}{3(3n-1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt[4]{n^3}+\sqrt[7]{3n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+5+8+\ldots+(3n-1)}{n\sqrt{(4n+2)(n+11)}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+5)!+(n+4)!}{(n+5)!-(n+3)!}$.

1.1.25. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-5)(n+1)(3n-1)}{(4n-1)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[6]{n^7}+n^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{n^3}+\sqrt[3]{4n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+5+7+\ldots+(2n+1)}{(n+1)\sqrt{2n+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+6)!+(n+4)!}{(n+6)!-(n+5)!}$.

1.1.26. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)(n-1)(2n-3)}{(n+2)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}+n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[5]{n^3}+\sqrt[3]{8n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+6+9+\ldots+3n}{n\sqrt{n+3}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!+n!}$.

1.1.27. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(2n-1)(2n+3)}{(2n+5)^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^5}+n^{\frac{7}{4}}}{\sqrt[5]{n^8}+\sqrt[3]{27n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+7+11+\ldots+(4n-1)}{2+6+10+\ldots+(4n-2)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+2)!+(n+1)!}{3(n+2)!-n!}$.

1.1.28. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)(3n-1)(2n+1)}{(n+1)(2n+3)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^9}+n^{\frac{11}{5}}}{\sqrt[5]{n^8}+\sqrt[6]{n^{13}}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+9+\ldots+(4n-3)}{2+5+8+\ldots+(3n-1)}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!+(n+2)!}{10(n+2)!-(n+1)!}$.

1.1.29. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(2n-3)(n+2)}{(n+4)(2n+7)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n}+n^{\frac{1}{5}}}{\sqrt[5]{n^2}+\sqrt[7]{n^2}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+5+7+\ldots+(2n+1)}{2+4+6+\ldots+2n}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+4)!+(n+3)!}{n(n+3)!-(n+2)!}$.

1.1.30. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-1)(2n-1)(n-1)}{(n+2)(2n+3)^2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^2}+n^{\frac{3}{8}}}{\sqrt[5]{n^2}+\sqrt[7]{n^4}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}+\ldots+\dfrac{4n-3}{n^2}\right)$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+1)!+(n+2)!}{n(n+1)!-(n+2)!}$.

1.2. Побудуйте графіки функцій.

1.2.1. а) $y=\dfrac{x}{x-2}$; б) $y=10^{\lg\cos 2x}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+6}$.

1.2.2. а) $y=\dfrac{x}{x+1}$; б) $y=\sqrt{6-4x}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2-2x+3}$.

1.2.3. а) $y=\ln(e-x)$; б) $y=\sin x+\cos x$; в) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

1.2.4. а) $y=\log_2 x^2$; б) $y=\sin^2 x$; в) $y=\dfrac{x+2}{x+1}$.

1.2.5. а) $y=\log_3(|x|-1)$; б) $y=\mathrm{tg}^2\, x$; в) $y=\dfrac{x+2}{x-4}$.

1.2.6. а) $y=\dfrac{1}{x^2+2}$; б) $y=\mathrm{ctg}^3\, x$; в) $y=\dfrac{x-2}{x+1}$.

1.2.7. а) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; б) $y=\sin(2x-1)$; в) $y=2^{|x|}$.

1.2.8. а) $y=\log_2 x^4$; б) $y=2\cos^2 x$; в) $y=3^{\sin x}$.

1.2.9. а) $y=\sqrt{\sin x}$; б) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; в) $y=5^{\cos x}$.

1.2.10. а) $y=4^x+4^{-x}$; б) $y=\sqrt{\cos x}$; в) $y=\dfrac{x+2}{2-x}$.

1.2.11. а) $y=3^x+3^{-x}$; б) $y=\sqrt{\mathrm{tg}\, x}$; в) $y=\lg\dfrac{10}{x}$.

1.2.12. а) $y=2^x-2^{-x}$; б) $y=-\sqrt{\sin^2 x}$; в) $y=\dfrac{x-1}{2-x}$.

1.2.13. а) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; б) $y=\sin 3x$; в) $y=4^{-|x|}$.

1.2.14. а) $y=x+3^x$; б) $y=-\sqrt{-\sin^2 x}$; в) $y=\log_2\dfrac{4}{x}$.

1.2.15. а) $y=\dfrac{x}{-x+4}$; б) $y=\sqrt{1-x^2}$; в) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$.

1.2.16. а) $y=\dfrac{x}{3-x}$; б) $y=\sqrt{-x^2+6x}$; в) $y=\log_x 4$.

1.2.17. а) $y=\lg(|x|+1)$; б) $y=\operatorname{arctg} 2x$; в) $y=-2^{x^2}$.

1.2.18. а) $y=\dfrac{x+2}{3-x}$; б) $y=\sqrt{-x^2-2x}$; в) $y=2^{\frac{1}{\cos x}}$.

1.2.19. а) $y=\dfrac{|x|}{1+|x|}$; б) $y=-\sqrt{9-x^2}$; в) $y=2^x+5^x$.

1.2.20. а) $y=\dfrac{|x|}{1+x}$; б) $y=-\sqrt{4-x^2}$; в) $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

1.2.21. а) $y=x+4^x$; б) $y=\sqrt{-\cos^2 x}$; в) $y=\dfrac{-2x}{1+x}$.

1.2.22. а) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; б) $y=\operatorname{ctg} 2x$; в) $y=\dfrac{x-1}{x-4}$.

1.2.23. а) $y=5^x+5^{-x}$; б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}$; в) $y=\left|\dfrac{x+1}{2-x}\right|$.

1.2.24. а) $y=\dfrac{x+2}{-x}$; б) $y=\sqrt{-x^2-6x}$; в) $y=\dfrac{1}{\cos x}$.

1.2.25. а) $y=\dfrac{x^2-1}{1-x}$; б) $y=\sqrt{25-x^2}$; в) $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

1.2.26. а) $y=6^x-6^{-x}$; б) $y=\sin\dfrac{x}{4}$; в) $y=\left|\dfrac{x-2}{x}\right|$.

1.2.27. а) $y=\dfrac{5}{x^2+5}$; б) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$; в) $y=\dfrac{|x|-1}{x+1}$.

1.2.28. а) $y=\operatorname{tg} 3x$; б) $y=\log_2 x-\log_3 x$; в) $y=\dfrac{4-x}{x+1}$.

1.2.29. а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y=\lg 3x$; в) $y=\dfrac{x+1}{x+3}$.

1.2.30. а) $y=\dfrac{x+2}{1-x}$; б) $y=\sqrt{-x^2+2x}$; в) $y=3^{\operatorname{ctg} x}$.

Границя функції. Теореми про границі. Перша важлива границя. Число e. Друга важлива границя. Наслідки. Порівняння нескінченно малих функцій. Застосування еквівалентностей до відшукання границь.

Література: [2, розділ 2, 3], [3, розділ 3, п.н. 3.1—3.8], [4, розділ 4, §2, п.п. 3.4—3.7, п.п. 4.2—4.3], [5], [6, розділ 4, §§2—4], [7, розділ 4, §12], [10, розділ 3, §3, 4], [11, розділ 3, §2, 3], [12, розділ 2, §§2—8], [13].

Т.2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

2.1. Границя функції в точці

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a.

Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to a$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, причому $x \neq a$, виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

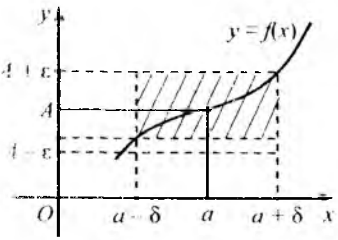


Рис. 3.8

Записують це так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ або } f(x) \to A \text{ при } x \to a.$$

Означення границі функції має просте *геометричне тлумачення*: для всіх точок x, які віддалені від точки a не далі, ніж на δ, графік функції $y = f(x)$ лежить усередині смуги шириною 2ε, обмеженої прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$ (рис. 3.8).

Зауваження.

1. Для існування границі функції при $x \to a$ не вимагають, щоб функція була визначена в точці a;

2. Границя не залежить від того, з якої сторони точка x наближається до точки a.

Число A називають границею функції $y = f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $M(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x, що задовольняють умову $|x| > M(\varepsilon)$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 3.9).

При цьому пишуть: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Тут $x \to \infty$ означає, що або $x \to +\infty$, або $x \to -\infty$.

Функцію $y = f(x)$ називають *нескінченно великою* при $x \to a$, якщо для будь-якого числа $M > 0$ існує число $\delta(M)$ таке, що для всіх $x \neq a$, і таких, які задовольняють нерівність $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$ (рис. 3.10). Записують це так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Функцію $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою* при $x \to a$, де a — стала або символ нескінченості, якщо

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0.$$

Так, наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ — нескінченно велика величина при $x \to 0$; ця сама функція є нескінченно мала величина при $x \to \pm\infty$.

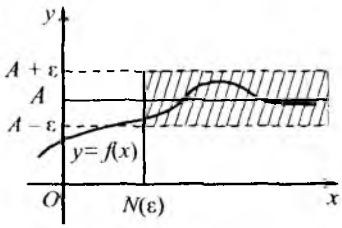


Рис. 3.9

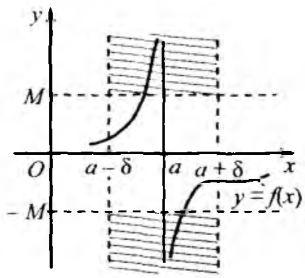


Рис. 3.10

3.2. Односторонні границі

Трапляються випадки, коли границя функції у точці залежить від того, з якої сторони (лівої чи правої) змінна *x наближається до точки a*. Тому виникає потреба у введенні поняття односторонніх границь.

Число $A_п$ називають *правосторонньою* границею функції $f(x)$ при $x \to a$, якщо $\lim\limits_{\substack{x \to a, \\ x > a}} f(x) = A_п$, тобто для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх x з інтервалу $(a, \ a + \varepsilon)$ виконується нерівність

$$|f(x) - A_п| < \varepsilon .$$

Якщо $A_п$ — правостороння границя, то пишуть:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = A_п \text{, або } f(a+0) = A_п .$$

За аналогією, якщо $A_л$ — *лівостороння* границя, тоді

$$\lim_{\substack{x \to a, \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0) = A_л .$$

Якщо функція $f(x)$ у точці a має границю, то виконуються рівності

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0).}$$

Наприклад, для функції $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ у точці $x = 0$ односторонні границі такі: $A_л = \lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ x < 0}} f(x) = 0$, $A_п = \lim\limits_{\substack{x \to 0, \\ x > 0}} f(x) = +\infty$. Звідси видно, що границя функції у точці $x = 0$ не існує.

2.3. Основні властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин

1. Сума нескінченно великої величини і величини обмеженої є нескінченно велика величина. Символічно це записують так: $c + \infty = \infty$.

2. Сума двох нескінченно великих величин одного знака є нескінченно велика величина: $\infty \cdot \infty = \infty$.

3. Добуток двох нескінченно великих величин є нескінченно велика величина: $\infty \cdot \infty$.

На відміну від цього сума двох нескінченно великих величин різних знаків не завжди буде нескінченно великою величиною, тому ця сума називається невизначеністю вигляду $\infty - \infty$.

4. Добуток нескінченно великої величини на величину, що більша за абсолютним значенням від деякого додатного числа, також є нескінченно велика величина.

Частка двох нескінченно великих величин не завжди є нескінченно великою величиною, тому дробовий вираз, чисельник і знаменник якого нескінченно великі змінні величини, називають невизначеністю вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

5. Сума скінченного числа нескінченно малих величин є нескінченно мала величина.

6. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно мала величина.

Частка від ділення двох нескінченно малих величин у загальному випадку не є нескінченно мала величина. У зв'язку з цим відношення двох нескінченно малих величин називають невизначеністю виду $\frac{0}{0}$. Те саме стосується добутку нескінченно великої на нескінченно малу величину, цей добуток називають невизначеністю виду $0 \cdot \infty$.

7. Для того, щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною.

8. Якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала величина при $x \to x_0 \left(\alpha \neq 0\right)$, то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно велика величина при $x \to x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно велика величина при $x \to x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно мала величина при $x \to x_0$.

2.4. Основні теореми про границі

Сформулюємо теореми, які значно полегшують відшукання границі функції.

Теорема 6 Нехай кожна з функцій $f(x)$ та $g(x)$ має скінченну границю в точці a, тоді в цій точці виконуються формули:

1) $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ (при $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$);

4) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$;

5) $\lim\limits_{x\to a}cf(x)=c\lim\limits_{x\to a}f(x)$ (c — стала величина).

Доведемо, наприклад, формулу (2). Нехай $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, тоді $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, де $\alpha(x)\to 0$, $\beta(x)\to 0$ при $x\to a$ (див. властивість 7, п. 2.3).

Звідси маємо

$$f(x)g(x)=(A+\alpha(x))(B+\beta(x))=AB+\alpha(x)B+A\beta(x)+\alpha(x)\beta(x).$$

Вираз $\alpha(x)B+A\beta(x)+\alpha(x)\beta(x)$ при $x\to a$ є нескінченно малою величиною, тому

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=AB=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x).$$

Теорема 7 (*про границю проміжної функції*). Якщо функції $g(x)$, $f(x)$ та $h(x)$ визначені в околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0, причому $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$ і $g(x)\le f(x)\le h(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

Теорема 8 (*про границю монотонної функції*). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x<x_0$ або при $x>x_0$, то існує її лівостороння границя або її правостороння границя, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0-0)$ або $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0+0)$.

2.5. Перша важлива границя. Наслідки

Границю

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \tag{3.3}$$

називають *першою важливою границею*.

Відмітимо, що функція $\dfrac{\sin x}{x}$ у точці $x=0$ має невизначеність $\dfrac{0}{0}$.

Доведемо формулу (3.3). Візьмемо круг з одиничним радіусом (рис. 3.11) і позначимо радіанну міру кута COB через x. Нехай $0<x<\dfrac{\pi}{2}$. Запишемо співвідношення між площами трикутників *OMB, OCB* та кругового сектора *OMB*:

$$S_{\Delta OMB} < S_{\text{сектора}\,OMB} < S_{\Delta OCB},$$

де

$$S_{\Delta OMB} = \frac{1}{2} OB \cdot AM = \frac{1}{2}\sin x,$$

$$S_{\text{сектора}OMB} = \frac{1}{2} OM^2 \cdot x = \frac{1}{2}x,$$

$$S_{\Delta OCB} = \frac{1}{2} OB \cdot BC = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

звідси

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ або } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$ і $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то за теоремою 7 (*про границю проміжної функції*) існує границя

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.4}$$

Нехай тепер $x < 0$. Функція $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ парна: $\dfrac{\sin(-x)}{-x} = \dfrac{\sin x}{x}$, тому

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = 1. \tag{3.5}$$

Із формул (3.4) та (3.5) випливає формула (3.3).

Першу важливу границю широко використовують для обчислення границь виразів, що містять тригонометричні функції. За допомогою формули (3.3) можна довести границі:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x} = k$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x} = k$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin kx}{x} = k$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} kx}{x} = k$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

2.6. Друга важлива границя. Наслідки

Другою важливою границею називають границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (3.6)$$

Відмітимо, що формула (3.6) справедлива як при $x\to+\infty$, так і при $x\to-\infty$. Графік функції $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ зображено на рис. 3.12.

Виконавши у формулі (3.6) заміну $\frac{1}{x}=t$, дістанемо формулу

$$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e,$$

яку також називають *другою важливою границею.*

Число e — трансцендентне число, його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

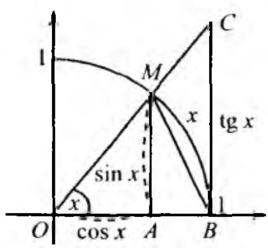


Рис. 3.11

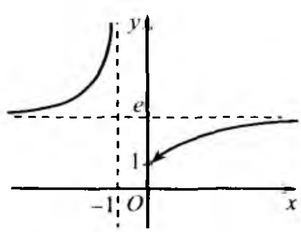


Рис. 3.12

Друга важлива границя пов'язана з невизначеністю 1^{∞} (це не одиниця в якомусь конкретному степені, а символ для скороченого позначення границі виразу $u(x)^{v(x)}$, де $u(x)\to 1$, $v(x)\to\infty$, якщо $x\to x_0$).

Наслідки з другої важливої границі:

$$1)\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e;$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a; \qquad 4)\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k.$$

При $a=e$ формули 2) і 3) набирають вигляду:

$$5)\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1; \qquad 6)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Доведемо, наприклад, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Виконаємо заміну $e^x-1=t$, звідси $x=\ln(1+t)$. При $x\to 0$ $e^x-1\to 0$, отже, $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=1.$$

2.7. Порівняння нескінченно малих величин. Еквівалентні нескінченно малі функції

Дві нескінченно малі величини порівнюють між собою за допомогою дослідження їх відношення.

Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — нескінченно малі функції при $x\to x_0$, тобто $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Припустимо, що існує скінченна або нескінченна границя $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=k$, де k — дійсне число або ∞. Тоді:

1) якщо $k\neq 0$ і $k\in R$, то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *нескінченно малими одного порядку*, при цьому пишуть: $\alpha(x)=O(\beta(x))$;

2) якщо $k=0$, то нескінченно малу $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою вищого порядку*, ніж $\beta(x)$, при цьому пишуть: $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

3) якщо $k=1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають *еквівалентними*. Це позначають так: $\alpha(x)\sim\beta(x)$;

4) якщо $k = \infty$, то нескінченно малу $\alpha(x)$ називають *нескінченно малою нижчого порядку*, ніж $\beta(x)$, при цьому пишуть: $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

5) функцію $\alpha(x)$ називають нескінченно малою *p-го порядку* відносно $\beta(x)$ при $x \to x_0$, якщо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^p} = k \quad (k \neq 0, k \neq \infty).$$

З останньої формули випливає еквівалентність

$$\alpha(x) \sim k \cdot (\beta(x))^p.$$

У цьому разі величину $k \cdot (\beta(x))^p$ називають *головною частиною* функції $\alpha(x)$.

Зауваження.

1. Якщо границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує (і не дорівнює ∞), то нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ порівняти не можна.

2. За такими ж правилами порівнюють нескінченно малі функції і при $x \to \pm\infty$ та $x \to \pm x_0$, а також нескінченно великі величини.

Серед нескінченно малих функцій особливу роль відіграють еквівалентні нескінченно малі.

Перелічимо найважливіші еквівалентні нескінченно малі величини.

Нехай $x \to 0$, тоді правильна низка еквівалентностей

$$\boxed{\begin{gathered} x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x), \\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ a^x - 1 \sim x \ln a, \ (1+x)^k - 1 \sim kx, \\ \log_a(1+x) \sim x \log_a e, \text{ якщо } x \to 0. \end{gathered}}$$

При обчисленні границь широко використовують такі властивості нескінченно малих і нескінченно великих величин:

1. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \tag{3.7}$$

Доведення. Нехай $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to x_0$. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha_1(x)} \frac{\beta_1(x)}{\beta_1(x)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = 1 \cdot 1 \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Ця властивість дає змогу при знаходженні границі відношення двох заданих нескінченно малих функцій кожну з них (або тільки одну) заміняти іншою нескінченно малою, яка еквівалентна заданій.

2. Сума нескінченно малих різних порядків еквівалентна доданку нижчого порядку.

Доведення. Нехай $\alpha(x) \to 0$, $\beta(x) \to 0$ при $x \to x_0$, причому $\alpha(x)$ — нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Отже, $\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

3. Різниця двох еквівалентних нескінченно малих функцій є нескінченно мала більш високого порядку, ніж кожна з них.

4. Сума нескінченно великих різних порядків еквівалентна доданку вищого порядку.

5. Якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\gamma(x) \sim \gamma_1(x)$ при $x \to x_0$, причому $\alpha(x) \not\sim \gamma(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x) - \gamma(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x) - \gamma_1(x)}{\beta(x)}.$$

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

Обчисліть границі функцій.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^4 + 2x - 1}{3x^4 - 2x^2 + 10x - 5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^4, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+2x-1}{3x^4-2x^2+10x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^4}}{3-\frac{2}{x^2}+\frac{10}{x^3}-\frac{5}{x^4}}=\frac{2}{3}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^2+x-5}{x^3-1}$.

Розв'язання. У точці $x=1$ чисельник і знаменник дробу обертаються в нуль, іншими словами, число $x=1$ — корінь чисельника і знаменника. Значить, маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Щоб позбутися цієї невизначеності, скористаємося таким твердженням.

> Якщо $P_n(\lambda)=0$, тобто число λ — корінь многочлена
>
> $$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$
>
> тоді многочлен $P_n(x)$ ділиться без остачі на $x-\lambda$ і його можна подати у вигляді
>
> $$P_n(x)=(x-\lambda)Q_{n-1}(x),$$
>
> де $Q_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-го степеня.

У нашому випадку

$$4x^2+x-5=(x-1)(4x+5),\quad x^3-1=(x-1)(x^2+x+1).$$

Тоді

$$\frac{4x^2+x-5}{x^3-1}=\frac{(x-1)(4x+5)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{4x+5}{x^2+x+1}.$$

Функції $f(x)=\frac{4x^2+x-5}{x^3-1}$ і $g(x)=\frac{4x+5}{x^2+x+1}$ при $x\neq 1$ тотожно рівні, причому функція $g(x)$ у точці $x=1$ визначена: $g(1)=\frac{4+5}{1+1+1}=3$.

Оскільки $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ не залежить від значення функції в самій точці $x=a$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{4x^2+x-5}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{4x+5}{x^2+x+1}=3.$$

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6}}{x^2+6x+5}$.

Розв'язання. Підставивши у чисельник і знаменник дробу значення $x=-1$, переконаємося, що маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Щоб розкрити цю невизначеність, треба позбутися ірраціональності, яка несе цю невизначеність; для цього помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Дістанемо

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6}}{x^2+6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{2x+6})(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}{(x^2+6x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(3-x)-(2x+6)}{(x^2+6x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=\lim_{x\to -1}\frac{-3(x+1)}{(x+5)(x+1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=$$

$$=-3\lim_{x\to -1}\frac{1}{(x+5)(\sqrt{3-x}+\sqrt{2x+6})}=-\frac{3}{4(2+2)}=-\frac{3}{16}.$$

Фактично у цьому прикладі, як і в попередньому, ми вилучаємо множник $(x+1)$, оскільки $x=-1$ є корінь функцій, що стоять у чисельнику і знаменнику.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

Розв'язання. Множення на спряжений вираз у цьому разі не врятовує ситуацію, тому треба помножити чисельник і знаменник на такий вираз, щоб скористатися формулою: $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{8+x^2}-2\right)\left(\sqrt[3]{\left(8+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(8+x^2)-8}{\left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4\right)x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\left(8+x^2\right)^2}+2\sqrt[3]{8+x^2}+4}=$$

$$=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}.$$

Обчисліть границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Зауваження. Із цього прикладу випливає, що

$$\boxed{\cos x\sim 1-\frac{x^2}{2}.}$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 2x-3\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}=\left|\frac{0}{0}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 2x-1)(\cos 2x-2)}{2\sin 2x\sin x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\cos x}=\frac{1}{2}.$$

7. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Розв'язання. Передусім звернемо увагу на те, що в першій важливій границі аргумент $x\to 0$. Тому для зручності виконаємо заміну $\pi-x=t$. При цьому, якщо $x\to\pi$, то $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5(\pi-t)}{\sin 2(\pi-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(5\pi-5t)}{\sin(2\pi-2t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{-\sin 2t}=-\frac{5}{2}.$$

8. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $(0\cdot\infty)$. Нехай $x-2=t$; при $x\to 2$, $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 2}(x-2)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi(2+t)}{4}=\lim_{t\to 0}t\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi t}{4}\right)=$$

$$=\lim_{t\to 0}t\left(-\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{4}\right)=-\lim_{t\to 0}\frac{t\cos\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi t}{4}}{\sin\frac{\pi t}{4}}=-\frac{4}{\pi}.$$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left(\frac{0}{0}\right)$. Виконаємо перетворення чисельника і знаменника дробу:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2};$$

$$1-2\cos x=2\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\right)=2\cdot 2\sin\frac{\frac{\pi}{3}+x}{2}\cdot\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{2\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{4\sin\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\cos\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}}{2\sin\frac{x+\frac{\pi}{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

При розкритті *невизначеності вигляду* 1^{∞} використовують другу важливу границю або наслідки з неї.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-3}{x+1}\right)^{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{3x-2}=\left(1^{\infty}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-3}\cdot\frac{-3}{x+1}(3x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x+1}(3x-2)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x+6}{x+1}} = e^{-9}.$$

Зауваження. При розв'язанні даного прикладу ми скористалися другою важливою границею, а також відомою властивістю границь

$$\lim_{x\to x_0}(f(x))^{\varphi(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

11. $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}}$.

Розв'язання. При $x=-1$ маємо невизначеність 1^{∞}. Для зручності перетворень позначимо $x+1=t$. Тоді

$$\left(\frac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}} = \left(\frac{3(x+1)+3}{(x+1)+3}\right)^{\frac{2}{x+1}} = \left(\frac{3+3t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t+1}} = \left(\frac{3+t+2t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t}} = \left(1+\frac{2t}{3+t}\right)^{\frac{2}{t}}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{3x+6}{x+4}\right)^{\frac{2}{x+1}} = \lim_{t\to 0}\left|\left(1+\frac{2t}{3+t}\right)^{\frac{3+t}{2t}}\right|^{\frac{2t}{3+t}\cdot\frac{2}{t}} = e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{4}{3+t}} = e^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{e^4}.$$

Розглянемо найбільш загальний випадок. Нехай потрібно обчислити границю $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$, де $u(x)\to 1$, $v(x)\to\infty$ за умови $x\to x_0$.

Виконаємо перетворення:

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{(u(x)-1)v(x)} = \\ &= e^{\lim\limits_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x)} = e^{A}.\end{aligned}} \qquad (3.8)$$

Таким чином, задача зведена до обчислення границі

$$\lim_{x\to x_0}(u(x)-1)v(x).$$

Висновок. Якщо $u(x) \to 1$, $v(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} (u(x))^{v(x)} = e^A,$$

де $A = \lim_{x \to x_0} (u(x) - 1)v(x)$.

12. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду 1^∞, для розкриття якої використаємо формулу (3.8). У нашому випадку $u(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$, $v(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $u(x) \to 1$, $v(x) \to \infty$, якщо $x \to 0$.

Тоді

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1 \right) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2}}{x^2 \cos 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3}.$$

Обчисліть границі, використовуючи наслідки з другої важливої границі.

13. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4^x - 4^{-x}}{2^{\sin x} - 1}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 4^{-x}}{2^{\sin x} - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\frac{2^{\sin x} - 1}{\sin x} \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{(4^x - 1) - (4^{-x} - 1)}{\ln 2 \cdot \sin x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{4^x - 1}{x} + \frac{4^{-x} - 1}{-x}}{\ln 2 \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{\ln 4 + \ln 4}{\ln 2} = 4.$$

Тут ми двічі скористалися наслідком з другої важливої границі:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a .$$

14. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)=\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=[\infty\cdot 0]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\ln e=1 .$$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos x}(1+x^2)$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\log_{\cos 2x}(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-2\sin^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot x^2}{\frac{\ln(1-2\sin^2 x)}{-2\sin^2 x}\cdot(-2\sin^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

16. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2-x)^5-1}{x^2-1}$.

Розв'язання. Для зручності виконаємо заміну $x-1=t$; якщо $x\to 1$, то $t\to 0$. Тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{(2-x)^5-1}{x^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-t)^5-1}{(1+t)^2-1}=\lim_{t\to 0}\frac{(1-t)^5-1}{t(t+2)}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{(1-t)^5-1}{-t}=-\frac{1}{2}\cdot 5=-2,5.$$

Тут ми скористалися наслідком з другої важливої границі, а саме:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^k-1}{x}=k .$$

Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\arcsin 3x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ $\sin 5x \sim 5x$, $\arcsin 3x \sim 3x$. За формулою (3.7) дістаємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\arcsin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\sin 3x+e^{x^2}-1}{\operatorname{arctg}^2 x-x+\operatorname{tg}4x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. При $x\to 0$ правильні еквівалентності:

$$\ln(1+x)\sim x,\ \sin 3x\sim 3x,\ e^{x^2}-1\sim x^2,\ \operatorname{arctg}^2 x\sim x^2,\ \operatorname{tg}4x\sim 4x.$$

Спираючись на теореми про еквівалентності, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\sin 3x+e^{x^2}-1}{\operatorname{arctg}^2 x-x+\operatorname{tg}4x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3x+x^2}{x^2-x+4x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x+x^2}{x^2+3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4+x}{x+3}=\frac{4}{3}.$$

19. Обчисліть $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin 2x-\sin x)^3}{\operatorname{tg}x-\sin x}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Розглянемо чисельник. При $x\to 0$ $\sin 2x\sim 2x$, $\sin x\sim x$, причому $\sin 2x \not\sim \sin x$, тому границя не зміниться, якщо $(\sin 2x-\sin x)^3$ замінити на x^3. Розглянемо тепер знаменник. При $x\to 0$ функції $\operatorname{tg}x$ і $\sin x$ між собою еквівалентні. Оскільки різниця еквівалентних нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно мала вищого порядку, ніж $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ і не дорівнює нулю, не можна у даному прикладі знаменник замінити на $x-x$, або $\operatorname{tg}x-x$, або $x-\sin x$. Перетворимо знаменник так:

$$\operatorname{tg}x-\sin x=\operatorname{tg}x(1-\cos x)=2\operatorname{tg}x\sin^2\frac{x}{2}\sim 2x\cdot\frac{x^2}{4}=\frac{x^3}{2}.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x-\sin x)^3}{\operatorname{tg}x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^3}{2}}=2.$$

20. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=x^2+3x+2$ та $\beta(x)=\operatorname{tg}(x+1)$ при $x\to -1$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення даних функцій:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{\operatorname{tg}(x+1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+4)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+4)=3.$$

Отже, функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x\to -1$ — нескінченно малі одного порядку.

21. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=x\operatorname{arctg}x^{-2}$ та $\beta(x)=(x-3)^{-1/3}$ при $x\to\infty$.

Розв'язання. Знайдемо границю відношення наведених функцій:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x^{-2}}{(x-3)^{-1/3}}=\left|x-3\sim x\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x^{-2}}{x^{-1/3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}x^{-2}}{x^{-4/3}}=\left|x^{-2}=t\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{arctg}t}{t^{2/3}}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{t^{2/3}}=\lim_{t\to 0}t^{1/3}=0.$$

Отже, $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to\infty$.

22. Доведіть еквівалентність $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$, якщо $x\to 0$.

Розв'язання. Достатньо показати, що границя відношення цих функцій при $x\to 0$ дорівнює 1. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\frac{x}{2}}=2\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

23. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)=\sin x$ та $\beta(x)=|x|$ при $x\to 0$.

Розв'язання. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$;

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0-0}\frac{x}{-x}=-1,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1.$$

Отже, границя відношення даних функцій при $x\to 0$ не існує. Це означає, що зазначені функції при $x\to 0$ порівняти не можна.

24. Порівняйте нескінченно великі функції $\alpha(x)=x^2+1$ та $\beta(x)=$ $=\dfrac{2x^3+3x+4}{2x+1}$ при $x\to\infty$.

Розв'язання. Оскільки

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{\dfrac{2x^3+3x+4}{2x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(2x+1)}{2x^3+3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{2+\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}}=1,$$

то задані функції при $x\to\infty$ еквівалентні.

Т.2 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Обчисліть границі.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+2x-1}{8x^5-2(x-1)^4-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+5x+3}{4x^2-2x^4+3}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x+1}{-2x^6-x^4+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{8x^3-4x^2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+2x+2}{x^2+5x-6}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{2x+2}}{x^2-4x+3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^2}-\sqrt[3]{1+7x}}{x^2-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x+6}-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+14}-4}$.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x-3}-x)$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3-1})$.

Обчисліть границі, використовуючи першу і другу важливі границі та наслідки з них.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x+\sin 6x}{\sin 9x-\sin 5x}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 7x}$. **13.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-2\cos\frac{\pi x}{6}}{x-2}$. **15.** $\lim\limits_{x\to 3}(9-x^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$. **16.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+1}\right)^{3x+2}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\operatorname{tg} 3x)^{\operatorname{ctg} 2x}$. **18.** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)^{\sec x}$. **19.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\left[\ln(4x-5)-\ln(4x-6)\right]$. **21.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-3^x}{5^{\operatorname{tg} x}-1}$.

22. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(5x-19)}{x^2-6x+8}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^7-2^x}{x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^8-(1-x)^{-8}}{\ln(1+x)}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\log_{x^2} 2$.

Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності.

26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos\sqrt{x}+e^x-\cos x-x^2}{\arcsin 2x+\operatorname{arctg}^2 3x-x^4}$. **27.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(10-x^2)}{\sin 2\pi x}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot(e^{3x}-1)}{\sqrt[4]{1+x}-1}$. **29.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2-4x+1}-1}{\operatorname{tg}\pi x}$.

Порівняйте нескінченно малі функції.

30. $\alpha(x)=x^2+6x+8$ і $\beta(x)=\operatorname{tg}(x+2)$ при $x\to -2$.

31. $\alpha(x)=\dfrac{\arcsin^2(x-3)}{x+1}$ і $\beta(x)=x^3-7x-6$ при $x\to 3$.

32. $\alpha(x)=x^4-5x^2+4$; $\beta(x)=x^2-8x+7$ при $x\to 1$.

33. $\alpha(x)=3-\sqrt[3]{x+20}$; $\beta(x)=\sqrt[3]{2x+13}-3$ при $x\to 7$.

34. $\alpha(x)=x^2-1$; $\beta(x)=2\ln x$ при $x\to 1$.

35. $\alpha(x)=3^{\operatorname{tg} x}-3^{-\operatorname{tg} x}$; $\beta(x)=\sin^2 x$ при $x\to 0$.

Відповіді

1. 3/8. **2.** ∞. **3.** 0. **4.** –1,5. **5.** –5/7. **6.** 0,125. **7.** –5/24. **8.** –4/3. **9.** ∞, якщо $x \to -\infty$; 2, якщо $x \to +\infty$. **10.** 0. **11.** 3,5. **12.** 2/7. **13.** $-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. **14.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. **15.** $\frac{12}{\pi}$. **16.** $e^{-6/5}$. **17.** $e^{-3/2}$. **18.** e^{-1}. **19.** 0,25. **20.** 0,5. **21.** $\log_5 3$. **22.** 2,5. **23.** $14-\ln 2$. **24.** 0. **25.** $\ln 2$. **26.** – 0,5. **27.** $-\frac{3}{\pi}$. **28.** 12. **29.** $-\frac{2}{\pi}$. **30.** $\alpha(x)=O(\beta(x))$. **31.** $\alpha(x)=O(\beta(x))$. **32.** $\alpha(x)\sim\beta(x)$. **33.** $\alpha(x)=O(\beta(x))$. **34.** $\alpha(x)\sim\beta(x)$. **35.** $\beta(x)=O(\alpha(x))$.

Т.2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

2.1. Знайдіть границі функцій.

2.1.1. а) $\lim\limits_{x\to-5}\frac{2x^2+9x-5}{x^2+3x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2-5x-3}$.

2.1.2. а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{3x^2+2x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{4x^2+3x-1}{\sqrt{5x+6}-\sqrt{3x+4}}$.

2.1.3. а) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-3x-2}{3x^2-7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2x+2}-1}{4x^2-1}$.

2.1.4. а) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{2x^2+5x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{6x-1}-\sqrt{12x-3}}{3x^2-4x+1}$.

2.1.5. а) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{4x-5}-\sqrt{x+1}}{2x^2-5x+2}$.

2.1.6. а) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{6x^2-5x-4}{2x^2+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{x}}{2x^2-x-6}$.

2.1.7. а) $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{2x^2-9x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}\frac{\sqrt{3(x+1)}-1}{27x^3+8}$.

2.1.8. а) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2x^2+x-3}{4x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to8}\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-9x+8}$.

2.1.9. а) $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{5}} \dfrac{5x^2+8x+3}{5x^2-7x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{2x+3}}{x^2+2x-8}$.

2.1.10. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3-\sqrt{2x+9}}{4x^2-3x}$.

2.1.11. а) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$.

2.1.12. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$.

2.1.13. а) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$.

2.1.14. а) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2-3x-2}{8x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{5x-1}}{x^2+x-2}$.

2.1.15. а) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-1}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{12x^2-1}-\sqrt{4x^2+1}}{2x-1}$.

2.1.16. а) $\lim\limits_{x\to-4} \dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+21x+68}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} \dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{6x+6}}{9x^2-4}$.

2.1.17. а) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}} \dfrac{2x^2-x-3}{8x^{12}-10x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{4x+1}}{x^2+3x-10}$.

2.1.18. а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}} \dfrac{16x^2-1}{\sqrt{12x+4}-\sqrt{4x+2}}$.

2.1.19. а) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{2x^2+5x+3}{4x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{3-2x}}{5x^2-6x}$.

2.1.20. а) $\lim\limits_{x\to\frac{2}{3}} \dfrac{6x^2-x-2}{3x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{10x-1}-\sqrt{5x+4}}{2x^2+x-3}$.

2.1.21. а) $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}} \dfrac{4x^2-4x-15}{2x^2-7x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5x-1}}{x^3-1}$.

2.1.22. а) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{3x^2+10x-8}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sqrt{4x^2+3}-\sqrt{2x+3}}{2x^2+3x-2}$.

2.1.23. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5x^2-9x-2}{x^3-8}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x+7}-\sqrt{2x+3}}{2x^2+x-1}$.

2.1.24. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2+4x-3}{2x^2+7x+6}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-2}}{x^3-27}$.

2.1.25. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x^2-9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{4}}\dfrac{16x^2-1}{\sqrt{8x+3}-1}$.

2.1.26. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{5}}\dfrac{5x^2-11x+2}{10x^2+3x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-4}-\sqrt{4-x}}{2x^2-3x-2}$.

2.1.27. а) $\lim\limits_{x\to \frac{5}{3}}\dfrac{3x^2-8x+5}{3x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{2x+3}}{11x^2+10x-1}$.

2.1.28. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-5x-2}{3x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}}\dfrac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{6x}}{3x^2-5x+2}$.

2.1.29. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+9x+9}{x^2+x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{6x-3}}{x^2-4x-5}$.

2.1.30. а) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{7x+2}-\sqrt{3x+6}}{x^2+4x-5}$.

2.2. Знайдіть границі функцій, використовуючи першу важливу границю.

2.2.1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 8x}{x\operatorname{tg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}(5-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{10}$.

2.2.2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x+\sin 7x}{\sin 3x-\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos 2x+1}{1-\sin x}$.

2.2.3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} x\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}$.

2.2.4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg} 6x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin 2x-\cos 2x}{x^2}$.

2.2.5. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x^2-\pi^2}{\operatorname{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\sin 5x}$.

2.2.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos^3 2x}{\sin^2 8x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{\sin 7x}$.

2.2.7. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\sin 3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-3\cos 2x+\cos^2 2x}{x^2}$.

2.2.8. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos 3x+1}{\operatorname{tg}^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}2x}$.

2.2.9. а) $\lim\limits_{x\to -2}(x+2)\operatorname{ctg}3\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 4x-5\cos 4x+4}{x\sin x}$.

2.2.10. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{2x+1}{\cos 3\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x-\sin 3x}{\sin 5x+\sin 2x}$.

2.2.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{2x\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)\operatorname{tg}x$.

2.2.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}5x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x-\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$.

2.2.13. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 6x-\operatorname{tg}^2 3x}{\sin x^2}$.

2.2.14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\sin\dfrac{1}{x^2+1}$.

2.2.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 2x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 x-3\sin x+2}{2x-\pi}$.

2.2.16. а) $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)\operatorname{ctg}\pi x$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin(\frac{\pi}{2}-\arccos x)}$.

2.2.17. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{1+\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\operatorname{tg}3x}{\sin x-\arcsin 2x}$.

2.2.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\operatorname{tg}\dfrac{1}{x^2-4}$.

2.2.19. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\cos 5x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\sin\dfrac{1}{x-2}$.

2.2.20. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\pi x}{\sin 2\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-6\cos x+5}{x^2}$.

2.2.21. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cos 5\pi x+1}{\cos 4\pi x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}5x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

2.2.22. а) $\lim\limits_{x\to\pi}(x-\pi)\operatorname{tg}\dfrac{5x}{2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}3x}$.

2.2.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 5x}{1-\cos 6x}$.

2.2.24. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{x-\pi}{\operatorname{tg}5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

2.2.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 3x}{\sin 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\sin\dfrac{x-3}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{6}$.

2.2.26. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-x}{\cos\dfrac{\pi x}{4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin 2x}$.

2.2.27. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 5x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos 2x}$.

2.2.28. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1+\cos 3x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-7\cos x+6}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

2.2.29. а) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)\sin\dfrac{1}{3x-1}$.

2.2.30. а) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\pi+x}{\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\operatorname{ctg}\pi x$.

2.3. Знайдіть границі функцій, використовуючи другу важливу границю або її наслідки.

2.3.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+1}\right)^{x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos 2x)}{\ln(\cos 4x)}$.

2.3.2. а) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{2}{x^2-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\ln\cos\sqrt{x}}$.

2.3.3. а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(4x-3)}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5-2x^2}{3-2x^2}\right)^{7-x^2}$.

2.3.4. а) $\lim\limits_{x\to -4}\left(\frac{x+5}{2x+9}\right)^{\frac{3}{x+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

2.3.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)\left[\ln(x-2)-\ln(x+1)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{2x-1}\right)^{\frac{2x^2-1}{x}}$.

2.3.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+3}\right)^{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$.

2.3.7. а) $\lim\limits_{x\to -3}\frac{e^{x+3}-1}{x^2+2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\frac{3x+7}{2x+6}\right)^{\frac{5}{x+1}}$.

2.3.8. а) $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5)^{\frac{3}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{\sin 3x}$.

2.3.9. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x-2}{2-x}\right)^{\frac{2}{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin x\log_{1-x^2}e)$.

2.3.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-2)\left[\ln(2x-1)-\ln(2x+3)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-8^x}{\operatorname{tg}2x}$.

2.3.11. а) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\ln(x-4)}{x^2-4x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x^2-4}}$.

2.3.12. а) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{x+7}{2x+9}\right)^{\frac{3}{x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln(1+5^x)}{\ln(1+3^x)}$.

2.3.13. а) $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{2}{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x^2-1)\log_x 2}$.

2.3.14. а) $\lim\limits_{x\to -\frac{2}{5}}\frac{e^{5x+2}-1}{5x^2+7x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x-1}\right)^{2x+3}$.

2.3.15. а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x+3}{2x+1}\right)^{\frac{2}{x^2-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos x}(1+x^2)$.

2.3.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{3x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{\cos 2x}(1-x^2)$.

2.3.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x-2)\left[\ln(2x+1)-\ln(2x+5)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-5}{4x+1}\right)^{6x+2}$.

2.3.18. а) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2}{x^2-9}}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\ln(4x-23)}{x^2-8x+12}$.

2.3.19. а) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\frac{x+5}{2x+8}\right)^{\frac{4}{x+3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-2^{-x}}{\sin 4x}$.

2.3.20. а) $\lim\limits_{x\to 7}(2x-13)^{\frac{3}{x-7}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4^{x^2-1}-1}{x^2+2x-3}$.

2.3.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-4)\left[\ln(3x-1)-\ln(3x-2)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{2x+7}{3x+9}\right)^{\frac{3}{x+2}}$.

2.3.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\log_{1-x^4}(1-x^2)$.

2.3.23. а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\ln(5x-14)}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6x+5}{6x-1}\right)^{4x+3}$.

2.3.24. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{3x+2}{x+4}\right)^{\frac{5}{x^2-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\ln\left(1+7^x\right)}{\ln\left(1+5^x\right)}$.

2.3.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-7)\left[\ln(4x+3)-\ln(4x+1)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^{6x}-3^{-2x}}{\sin x}$.

2.3.26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{5x}-2^{-x}}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x-1}\right)^{\frac{3x}{2x^2+3}}$.

2.3.27. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(3x-5)}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1}\right)^{\frac{\sqrt{x}+1}{3}}$.

2.3.28. а) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}} \frac{e^{4x-3}-1}{4x^2-7x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x+2}{5x+4}\right)^{\frac{5x^3}{x^2-1}}$.

2.3.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{\frac{x+3}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \log_{\cos 3x} \cos 2x$.

2.3.30. а) $\lim\limits_{x\to -2} (3x+7)^{\frac{3}{x^2-4}}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}$.

2.4. Обчисліть границі, використовуючи еквівалентності.

2.4.1. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos \pi x}{\ln(1-x)\,\mathrm{tg}\,\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^5-1}{e^{3x}-1}$.

2.4.2. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg}^3\, 2x - \sin x^4}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}+\ln(1+\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}}$.

2.4.3. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin\sqrt[3]{x})}{\mathrm{tg}(2\sqrt[3]{x})}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3-2^x+3^x}{e^x-1}$.

2.4.4. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{\arcsin x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}}$.

2.4.5. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{2^{\sqrt{x+1}}-1}{\arcsin\sqrt[3]{x+1}}$.

2.4.6. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin 5x - \arcsin 3x}{\mathrm{arctg} 2x + \mathrm{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2+x)^3-8}{\ln(1+x)^6}$.

2.4.7. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x+\mathrm{tg}\sqrt{x}-2\sin x}{x+x^2+\mathrm{tg}\, x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-e^{-2x}}{\mathrm{tg}\, x}$.

2.4.8. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\arcsin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\mathrm{tg}\, x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^x-e+\ln(2-x^2)}{2x^2-3x+1}$.

2.4.9. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(e^x+x\sin x)}{\ln(1+\mathrm{tg} x)}$ б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\mathrm{tg} 5x-\mathrm{tg} x)}{\arcsin \mathrm{tg} 2x}$

2.4.10. а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x}{\mathrm{tg}\sqrt{x}+x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(\mathrm{tg}\, x - x)}{\ln(1+\sin x)}$.

2.4.11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-2^{-x}}{\sin x}$.

2.4.12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}x)}{\arcsin\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sqrt{x}}-\cos x}{\sin\sqrt{x}}$.

2.4.13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x-\sin 3x}{\left(e^{3x^2}-1\right)\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^{x-1}-1}{x^2-3x+2}$.

2.4.14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2x+\sin^2 2x-\sin^2 3x}{(e^{-x}-1)\ln(1+\sin x)}$.

2.4.15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$.

2.4.16. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}x-\sin 2x}{\sin x-\sin 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln\left(1+x\sqrt{1+xe^x}\right)}$.

2.4.17. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sin 3x+2^{3x^2}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3^{5x-3}-3^{2x^2}}{\operatorname{tg}\pi x}$.

2.4.18. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x+1}-4}{\ln\left(1-x\sqrt{1+x2^x}\right)}$. б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)-2\sin^2 x}{\operatorname{arctg}2x}$.

2.4.19. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2x-\operatorname{tg}^4x}{e^{x^2}-1+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\ln(5x-19)}{x^2-5x+4}$.

2.4.20. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin\pi(x+2)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{1-\sqrt{x^2+1}}$.

2.4.21. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}x-2x^2+x^4}{\arcsin 6x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2x}-1}{\ln\sin x}$.

2.4.22. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{3(\sqrt[3]{1+x}-1)}$.

2.4.23. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-x^2}{\ln\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{e^{\sin\pi x}-1}$.

2.4.24. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\cos 5x-\cos 4x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{x+1}-3}{\ln(1+x\sqrt{1+xe^x})}$.

2.4.25. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x^2)}{\arcsin 2x}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2(e^x-e^{-x})}{e^{x^3}-1}$.

2.4.26. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+4^{\sqrt{x}}-2}{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

2.4.27. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(9-2x^2\right)}{\sin 2\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(e^{\pi x}-1)}{\sqrt[3]{8+x}-2}$.

2.4.28. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-3x+3}-1}{\sin\pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^x+x\sin x)}{\ln(1+\sin x)}$.

2.4.29. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(x+{}^{5\pi}\!/_{2}\right)\operatorname{tg}x}{\arcsin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\ln\left(1+2x\right)}$.

2.4.30. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)^6-(1+x)^7}{\sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\pi x}-1}{\ln\left(1+\arcsin x\right)}$.

2.5. Порівняйте нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$.

2.5.1. $\alpha(x)=x-x^2-\sqrt{x}$, $\beta(x)=x+x^3-3\cdot\sqrt[3]{x}$ при $x\to 0$.

2.5.2. $\alpha(x)=x^3-3x+2$, $\beta(x)=x-2$ при $x\to 2$.

2.5.3. $\alpha(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x}}$, $\beta(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3-2x}}$ при $x\to+\infty$.

2.5.4. $\alpha(x)=\sqrt{x}-2$, $\beta(x)=x^2-16$ при $x\to 4$.

2.5.5. $\alpha(x)=x^3+x-2$, $\beta(x)=x-1$ при $x\to 1$.

2.5.6. $\alpha(x)=1-\sqrt{2}\cos x$, $\beta(x)=4x-\pi$ при $x\to\pi/4$.

2.5.7. $\alpha(x)=x^3+2x-12$, $\beta(x)=x^2-4$ при $x\to 2$.

2.5.8. $\alpha(x)=\operatorname{ctg}x$, $\beta(x)=\pi-2x$ при $x\to\pi/2$.

2.5.9. $\alpha(x) = \sin(\sqrt{x} - 2)$, $\beta(x) = x - 4$ при $x \to 4$.

2.5.10. $\alpha(x) = \operatorname{tg}(x^3 + x)$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.5.11. $\alpha(x) = (x^3 + 2)^{-1}$, $\beta(x) = (x^{10} - 15)^{-1/3}$ при $x \to \infty$.

2.5.12. $\alpha(x) = \sin(x - \sqrt{x})$, $\beta(x) = 2\sqrt{x}$ при $x \to 0$.

2.5.13. $\alpha(x) = \arcsin(2 - \sqrt{x})$, $\beta(x) = 4 - x$ при $x \to 4$.

2.5.14. $\alpha(x) = e^x - 1$, $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$.

2.5.15. $\alpha(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$, $\beta(x) = 1 + \sqrt[3]{x - 1}$ при $x \to 0$.

2.5.16. $\alpha(x) = \sqrt[3]{x} - 3$, $\beta(x) = 27 - x$ при $x \to 27$.

2.5.17. $\alpha(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$, $\beta(x) = \dfrac{x - 4}{x + 4}$ при $x \to 4$.

2.5.18. $\alpha(x) = x \sin\sqrt{x}$, $\beta(x) = \sqrt{x^3}$ при $x \to 0$.

2.5.19. $\alpha(x) = x - \sin x$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.5.20. $\alpha(x) = x \sin(2 / x)$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.5.21. $\alpha(x) = x^2 \cos(1 / x)$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.5.22. $\alpha(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$, $\beta(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ при $x \to \infty$.

2.5.23. $\alpha(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}$, $\beta(x) = 1 / x$ при $x \to +\infty$.

2.5.24. $\alpha(x) = x^2 \sin(1 / x)$, $\beta(x) = x - \sqrt{x}$ при $x \to 0$.

2.5.25. $\alpha(x) = \operatorname{arcctg}(1 / x)$, $\beta(x) = x$ при $x \to 0$.

2.5.26. $\alpha(x) = \dfrac{x^3 - 8}{\sqrt{x}}$, $\beta(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ при $x \to 2$.

2.5.27. $\alpha(x) = \dfrac{\arcsin(x - 2)}{x}$, $\beta(x) = x^3 - 8$ при $x \to 2$.

2.5.28. $\alpha(x) = x + 2x^2 - \sqrt[3]{x}$, $\beta(x) = 1 - \sqrt{1 - x}$ при $x \to 0$.

2.5.29. $\alpha(x) = x^2 + 5x + 4$, $\beta(x) = x^2 + 3x + 2$ при $x \to -1$.

2.5.30. $\alpha(x) = 1 - 2\cos x$, $\beta(x) = (3x - \pi)^2$ при $x \to \pi / 3$.

Неперервність функції у точці. Властивості функцій, неперервних у точці та на відрізку. Розриви та їх класифікація.

Література: [3, розділ 2, п.п. 2.1—2.5], [4, розділ 4, п.4.3], [6, розділ 4, §5], [7, розділ 4, §13], [10, розділ 3, §5], [11, розділ 3, §4], [12, розділ 1, §§6—8, розділ 2, §§9—10], [13].

Т.3 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

3.1. Неперервність функції у точці

Розглянемо графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$, зображені на рис. 3.13.

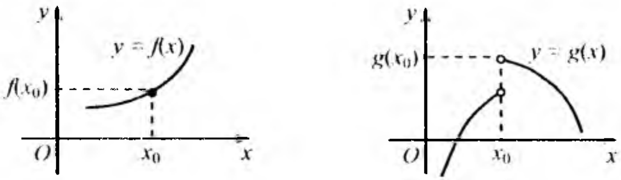


Рис. 3.13

З рисунка 3.13 видно, що графіком функції $f(x)$ є суцільна крива, яку можна провести, не відриваючи олівець від паперу. Графік функції $g(x)$ не є суцільною кривою, у точці x_0 графік робить «стрибок». Кажуть, що функція $f(x)$ у точці x_0 неперервна, а $g(x)$ у точці x_0 розривна.

Дамо строге означення неперервності функції у точці.

Функцію $f(x)$ називають *неперервною в т.* x_0, якщо вона визначена в цій точці і деякому її околі і

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,} \tag{3.9}$$

тобто нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції. На рис. 3.14 $\Delta x = x - x_0$ — приріст аргументу, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приріст функції.

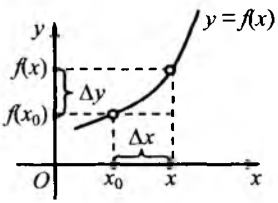


Рис. 3.14

Перетворимо рівність (3.9):

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0\,,\ \ \lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)] = 0\,,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)\,.$$

З останньої рівності випливає, що

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f(x_0)}$$

Отже, при відшуканні границі *неперервної* функції можна перейти до границі під знаком функції, тобто у функцію $f(x)$ замість аргументу x підставити значення $x_0 = \lim\limits_{x\to x_0} x$.

Сформулюємо ще одне означення неперервності, рівносильне попередньому.

Функцію $f(x)$ називають *неперервною* в точці x_0, якщо виконуються умови:

1) вона визначена в цій точці і деякому її околі;

2) існує границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) ця границя дорівнює значенню функції в точці x_0, тобто

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)}$$

3.2. Розриви функцій та їх класифікація

Якщо хоча б одна з умов неперервності функції в точці не виконується, то функція *розривна* в *точці* x_0, а саму точку x_0 називають *точкою розриву функції*.

Класифікацію точок розриву проводять так:

1) якщо існують лівостороння і правостороння границі функції в точці x_0, тобто $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = b$, де a і b — скінченні числа, причому $a \neq b$ (рис. 3.15), то точку x_0 називають *точкою розриву першого роду*; відмітимо, що в точці x_0 сама функція може бути як визначена, так і невизначена;

2) якщо хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності, то точку x_0 називають *точкою розриву другого роду* (рис. 3.16);

3) якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$, $a \neq \infty$, $f(x_0) \neq a$ або в цій точці функція невизначена, то точку x_0 називають *усувною точкою розриву* (рис. 3.17).

У першому випадку кажуть, що функція робить «скінченний стрибок», а у другому — «нескінченний стрибок»).

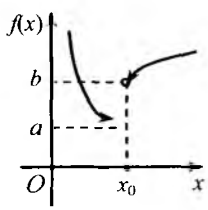


Рис. 3.15

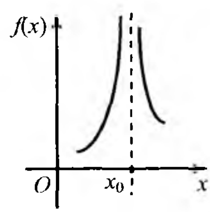


Рис. 3.16

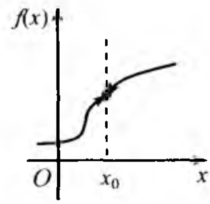


Рис. 3.17

3.3. Основні властивості неперервних у точці функцій

1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в т. x_0, то в цій точці неперервні функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови $g(x_0) \neq 0$).

2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в т. x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в т. $u_0 = f(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x_0))$ неперервна в т. x_0.

3. Всяка елементарна функція неперервна в кожній точці, в якій вона визначена.

3.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Якщо функція неперервна в кожній точці інтервалу $(a; b)$, то вона називається неперервною на цьому інтервалі.

Функція неперервна на відрізку $[a; b]$, якщо вона неперервна на $(a; b)$ і, крім того, неперервна справа в точці a і зліва в точці b.

Сформулюємо теореми про неперервні функції.

Теорема 1 (*перша теорема Больцано–Коші*). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a;\ b]$ знайдеться хоча б одна точка $x=c$, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 2 (*друга теорема Больцано–Коші*). Нехай функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a)\neq f(b)$. Тоді для довільного числа $\mu\in[f(a);\ f(b)]$ знайдеться таке число $c\in(a;b)$, що $f(c)=\mu$.

Теорема 3 (*Вейєрштрасса*). Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;\ b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше.

Із цієї теореми випливає, що неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку.

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Дослідіть на неперервність функцію $y=\sin x$.

Розв'язання. Функція $y=\sin x$ визначена для всіх дійсних значень x. Нехай x — довільна точка. Розглянемо приріст функції у цій точці:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=0\cdot\cos x=0.$$

Отже, для будь-якої точки $x\in R$ нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy, тобто задана функція неперервна на всій числовій осі.

2. Дослідіть на неперервність функцію $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Функція $y=\dfrac{\sin x}{x}$ є відношенням двох елементарних функцій $y=\sin x$ та $y=x$, які неперервні для всіх $x\in R$. Відношення цих функцій є неперервною функцією для всіх x, крім точки $x=0$, в якій дріб невизначений. Отже, $x=0$ — точка розриву заданої функції.

Дослідимо цю точку:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Отже, $x=0$ — точка усувного розриву (рис. 3.18).

Якщо довизначити функцію у точці $x=0$, поклавши $y(0)=1$, то дістанемо вже неперервну функцію

$$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 1, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

3. Дослідіть на неперервність функцію $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ у точці $x=0$.

Розв'язання. Очевидно, що в точці $x=0$ функція не має сенсу.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Згідно з класифікацією точок розриву робимо висновок, що $x=0$ — точка розриву першого роду (рис. 3.19).

4. Дослідіть на неперервність функцію $y=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ в точках $x_1=0$, $x_2=1$ і $x_3=2$.

Розв'язання. У точці $x_1=0$ функція визначена: $y(0)=-1$, значить, вона неперервна як елементарна функція.

Перевіримо точку $x_2=1$. У цьому разі знаменник функції обертається в нуль, отже, $x_2=1$ — точка розриву.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty.$$

Отже, $x=1$ — точка розриву другого роду (рис. 3.20).

Теорема 1 (*перша теорема Больцано–Коші*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і на його кінцях набирає значень різних знаків, то всередині відрізка $[a; b]$ знайдеться хоча б одна точка $x = c$, в якій функція дорівнює нулю.

Теорема 2 (*друга теорема Больцано–Коші*). Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і набуває на його кінцях різних значень: $f(a) \neq f(b)$. Тоді для довільного числа $\mu \in [f(a); f(b)]$ знайдеться таке число $c \in (a; b)$, що $f(c) = \mu$.

Теорема 3 (*Вейєрштрасса*). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то серед її значень на цьому відрізку існує найбільше і найменше.

Із цієї теореми випливає, що неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку.

Т.3 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Дослідіть на неперервність функцію $y = \sin x$.

Розв'язання. Функція $y = \sin x$ визначена для всіх дійсних значень x. Нехай x — довільна точка. Розглянемо приріст функції у цій точці:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Тоді

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0 \cdot \cos x = 0.$$

Отже, для будь-якої точки $x \in R$ нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy, тобто задана функція неперервна на всій числовій осі.

2. Дослідіть на неперервність функцію $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Функція $y = \dfrac{\sin x}{x}$ є відношенням двох елементарних функцій $y = \sin x$ та $y = x$, які неперервні для всіх $x \in R$. Відношення цих функцій є неперервною функцією для всіх x, крім точки $x = 0$, в якій дріб невизначений. Отже, $x = 0$ — точка розриву заданої функції.

Дослідимо цю точку:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Отже, $x = 0$ — точка усувного розриву (рис. 3.18).

Якщо довизначити функцію у точці $x = 0$, поклавши $y(0) = 1$, то дістанемо вже неперервну функцію

$$y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$

3. Дослідіть на неперервність функцію $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ у точці $x = 0$.

Розв'язання. Очевидно, що в точці $x = 0$ функція не має сенсу.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 0-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to 0+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Згідно з класифікацією точок розриву робимо висновок, що $x = 0$ — точка розриву першого роду (рис. 3.19).

4. Дослідіть на неперервність функцію $y = \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2}$ в точках $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $x_3 = 2$.

Розв'язання. У точці $x_1 = 0$ функція визначена: $y(0) = -1$, значить, вона неперервна як елементарна функція.

Перевіримо точку $x_2 = 1$. У цьому разі знаменник функції обертається в нуль, отже, $x_2 = 1$ — точка розриву.

Знайдемо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1-0}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1} = +\infty.$$

Отже, $x = 1$ — точка розриву другого роду (рис. 3.20).

У точці $x_3 = 2$ функція невизначена, тобто $x_3 = 2$ — точка розриву. Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to 2+0}\frac{x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2+0}\frac{1}{x+1}=1,$$

Отже, $x_3 = 2$ — точка усувного розриву.

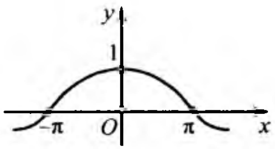


Рис. 3.18

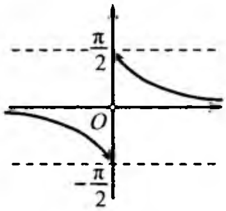


Рис. 3.19

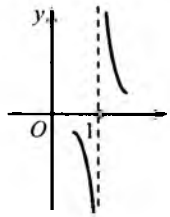


Рис. 3.20

Т.3 ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Доведіть за означенням, що функція $y = \cos x$ неперервна в будь-якій точці числової осі.

Дослідіть на неперервність функції. У точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

2. $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$. **3.** $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$. **4.** $f(x)=5^{\frac{1}{x-2}}$.

5. $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$. **6.** $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-6}$. **7.** $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-1}{x}\right|$.

Відповіді

2. $x = 2$ — точка усувного розриву; $x = 4$ — точка розриву другого роду. **3.** $x = 1$ — точка розриву першого роду. **4.** $x = 2$ — точка розриву першого роду. **5.** $x = 0$ — точка усувного розриву; $x = \pi k$ — точки розриву другого роду. **6.** $x = 6$ — точка розриву першого роду. **7.** $x = 0$; 1 — точки розриву другого роду.

Т.3 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Дослідіть функцію $f(x)$ на неперервність. У точках розриву знайдіть лівосторонню і правосторонню границі функції. Визначте характер точок розриву. Зробіть схематичний рисунок в околі точок розриву.

3.1. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{2+5^{\frac{1}{x-2}}}$.

3.2. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-3x-2}{x^2+x-2}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

3.3. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-x-4}{x^2+2x-3}$; б) $f(x)=7^{\frac{2}{x+3}}$.

3.4. а) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x-8}{x^2+4x-5}$; б) $f(x)=\dfrac{5}{\lg|x+1|}$.

3.5. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{2x^2+x-3}$; б) $f(x)=\dfrac{5^{\frac{1}{x-1}}-1}{5^{\frac{1}{x-1}}+1}$.

3.6. а) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2+5x-7}$; б) $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

3.7. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2+5x-6}$; б) $f(x)=\dfrac{6}{3+2^{\frac{1}{x+4}}}$.

3.8. а) $f(x)=\dfrac{2x^2+7x-9}{x^2+3x-4}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

3.9. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-3x-1}{2x^2+3x-5}$; б) $f(x)=(x+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3.10. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+5}{x^2-3x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{3^{\frac{1}{x+2}}+3^{\frac{1}{x-2}}}$.

3.11. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-7x+4}{x^2-4x+3}$; б) $f(x)=2^{\frac{3}{x-7}}$.

3.12. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-7x+3}{x^2-5x+4}$; б) $f(x)=\dfrac{6}{6+6^{\frac{1}{x-6}}}$.

3.13. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-7x+2}{x^2-6x+5}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{4^{\frac{1}{x+1}}+4^{\frac{1}{x-1}}}$.

3.14. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+7}{x^2-7x+6}$; б) $f(x)=2^{\frac{x}{x^2-9}}$.

3.15. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2+3x-4}$; б) $f(x)=(2x+3)\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x}$.

3.16. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-x-2}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\lg(1+x)}$.

3.17. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-9}{x^2-3x-4}$; б) $f(x)=\dfrac{2}{3+4^{\frac{1}{x-5}}}$.

3.18. а) $f(x)=\dfrac{2x^2-5x-7}{x^2-4x-5}$; б) $f(x)=3^{\frac{x}{x^2-4}}$.

3.19. а) $f(x)=\dfrac{3x^2-4x-7}{x^2-2x-3}$; б) $f(x)=(x+4)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

3.20. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-x-5}{x^2-4x-5}$; б) $f(x)=5^{\frac{x-2}{x-1}}$.

3.21. а) $f(x)=\dfrac{5x^2-x-6}{x^2-5x-6}$; б) $f(x)=\dfrac{4^{\frac{1}{x+3}}-1}{4^{\frac{1}{x+3}}+1}$.

3.22. а) $f(x)=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-5x-6}$; б) $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x+2}}-1}{3^{\frac{1}{x+2}}+1}$.

3.23. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-3x-7}{x^2-6x-7}$; б) $f(x)=\dfrac{7^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-2}}}$.

3.24. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-5x-9}{x^2-7x-8}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\lg(2-x)}$.

3.25. а) $f(x)=\dfrac{6x^2-x-7}{x^2-x-2}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{2+4^{\frac{1}{2-x}}}$.

3.26. а) $f(x)=\dfrac{7x^2-x-8}{x^2-7x-8}$; б) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{\operatorname{arctg}(x-1)}$.

3.27. а) $f(x)=\dfrac{4x^2-7x-11}{x^2-3x-4}$; б) $f(x)=\dfrac{3^{\frac{1}{x}}}{4+2^{\frac{x}{x-5}}}$.

3.28. а) $f(x)=\dfrac{4x^2+x-3}{x^2+4x+3}$; б) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x-2}}}{1+3^{\frac{x}{x+1}}}$.

3.29. а) $f(x)=\dfrac{3x^2+x-2}{x^2+3x+2}$; б) $f(x)=6^{\frac{3}{x^2-1}}$.

3.30. а) $f(x)=\dfrac{5x^2+x-4}{x^2+5x+4}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{2-x}{2+x}$.

Тема 4. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Похідна, її геометричний, механічний та фізичний зміст. Дотична та нормаль. Диференційовність та неперервність. Правила диференціювання. Похідні елементарних функцій. Похідна складеної функції. Похідна оберненої функції. Похідна функцій, заданих неявно або параметрично. Логарифмічне диференціювання. Похідні вищих порядків функцій, заданих явно, неявно або параметрично. Формула Лейбніца.

Література: [2, розділ 4], [3, розділ 3, п.п.3.1—3.8, розділ 4, п.п.4.1—4.2], [4, розділ 4, 5], [6, розділ 5, §§1—3], [7, розділ 6, §16, 17], [9, розділ 4, §2, 4, 5], [10, розділ 4], [11, гл. 3, §§1—15, розділ 4, §2—3], [8].

Т.4 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

4.1. Деякі задачі, які ведуть до поняття похідної

4.1.1. Миттєва швидкість нерівномірного руху

Припустимо, що деяке тіло починає рухатися у момент часу $t=0$ по прямій лінії (рис. 3.21). Нехай шлях, пройдений тілом за час t, визначається формулою $S=f(t)$. Функцію $S=f(t)$ називають законом руху тіла. Розглянемо шлях MM_1, пройдений тілом за відрізок часу $[t;\, t+\Delta t]$ (рис. 3.21); він дорівнює

$$\Delta S=f(t+\Delta t)-f(t).$$

Якщо тіло рухається рівномірно, то відношення пройденого шляху до часу

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

є швидкістю руху і не залежить від t і Δt. У разі нерівномірного руху це відношення залежить як від вибраного моменту часу t, так і від приросту Δt і виражає середню швидкість руху у проміжку часу $[t;\, t+\Delta t]$. Чим менший проміжок часу Δt, тим з більшою підставою можна вважати, що рух протягом часу від t до $t+\Delta t$ — рівномірний.

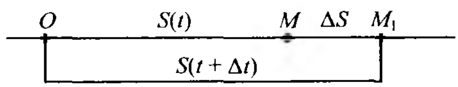


Рис. 3.21

Границю

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}=v(t),$$

якщо вона існує, і називають миттєвою швидкістю в момент часу t.

4.1.2. Швидкість хімічної реакції

Припустимо, що в момент часу t розпочинається хімічна реакція. Кількість речовини, яка вступила в реакцію до моменту часу t, позначимо $c(t)$. Кількість речовини, яка вступила в реакцію за проміжок часу $[t;\, t+\Delta t]$, дорівнюватиме $c(t+\Delta t)-c(t)$. Відношення

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}$$

характеризує середню швидкість реакції, а границя

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}$$

називається швидкістю хімічної реакції в момент часу t.

4.2. Означення похідної

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку $(a;b)$. Візьмемо будь-яке значення x із цього проміжку і надамо йому приросту Δx.

Різницю

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

називають *приростом функції в точці* x.

Приріст аргументу $\Delta x\neq 0$ може набувати як додатних, так і від'ємних значень, але так, що значення $x+\Delta x$ не виходить за межі області визначення функції $f(x)$.

Похідною функції $y=f(x)$ *у точці* x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ до приросту аргументу Δx, коли останній прямує до нуля, тобто

$$\boxed{y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

Функцію, яка має скінченну похідну в точці x, називають *диференційовною* в цій точці. Обчислення похідної називають диференціюванням.

Позначення похідної: $y'(x)$, $f'(x)$ (за Лагранжем), або $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$ (за Лейбніцем). З означення похідної випливає, що похідна $y'(x)$ у точці x є числом. Але якщо таке число існує для кожної внутрішньої точки проміжку $(a;b)$, то похідну можна розглядати як функцію точки x із даного проміжку.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\pm\infty$, тоді функція $f(x)$ має в точці x нескінченну похідну.

Відмітимо, що з диференційовності функції в деякій точці випливає неперервність у цій точці. Обернене твердження неправильне.

4.3. Геометричний, фізичний та механічний зміст похідної

Дамо геометричне тлумачення похідної. Розглянемо графік функції $y = f(x)$ в околі точки x_0 (див. рис. 3.22). Нехай P_0 — точка кривої з координатами $(x_0; f(x_0))$, а P — точка графіка з координатами $(x_0 + \Delta x;$ $f(x_0 + \Delta x))$. Пряму, проведену через точки P_0 і P, називають *січною*. Якщо при необмеженому наближенні точки P за графіком функції $y = f(x)$ до точки P_0 січна P_0P наближається до певного граничного положення (пряма P_0K), то це граничне положення січної називають *дотичною* до кривої $y = f(x)$ у точці P_0.

Нехай α — кут, який утворює дотична з додатним напрямом осі Ox, а β — кут між січною P_0P і віссю Ox. З прямокутного трикутника P_0QP випливає, що

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{QP}{P_0Q} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тоді існує границя

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (P \to P_0)}} \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

Геометричний зміст похідної: *похідна $f'(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці, абсциса якої дорівнює x_0*, тобто

$$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha,}$$

де α — кут між дотичною та віссю Ox.

Рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $P_0(x_0, y_0)$, має вигляд

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),} \qquad (3.10)$$

де $y_0 = f(x_0)$.

Нормаллю до кривої називають пряму, що проходить через точку дотику, перпендикулярно до дотичної (на рис. 3.22 — це пряма P_0N).

Рівняння нормалі:

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).} \qquad (3.11)$$

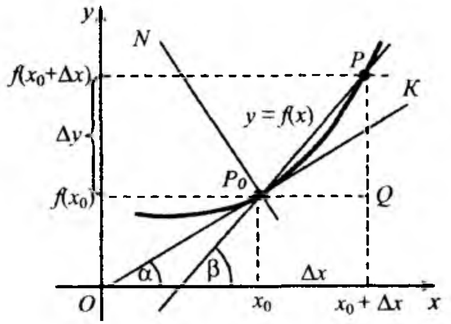


Рис. 3.22

Фізичний зміст похідної. Якщо функція $y = f(x)$ описує деякий фізичний процес, то похідна y' є швидкістю зміни цього процесу. Іншими словами, яку б фізичну залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ можна розглядати як середню швидкість зміни функції y відносно аргументу x, а похідну $f'(x)$ — як миттєву швидкість зміни цієї функції.

Механічний зміст похідної. Якщо $S = S(t)$ — закон прямолінійного руху матеріальної точки (тобто залежність пройденого точкою шляху S від часу t), то похідна $S'(t)$ — це швидкість v точки в момент часу t; друга похідна $S''(t)$ — миттєве прискорення a точки в момент t, тобто

$$v = S'(t)\,,\ a = S''(t) = v'(t)\,.$$

4.4. Основні правила диференціювання

Нехай $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ —диференційовні в точці x функції, C — стала. Тоді правильні формули:

1. $(u+v)' = u' + v'$.	**2.** $(u-v)' = u' - v'$.
3. $(uv)' = u'v + uv'$.	**4.** $(Cu)' = Cu'$.
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.	**6.** $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

Доведемо формулу для обчислення похідної добутку. За означенням похідної маємо

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u(x)+\Delta u)(v(x)+\Delta v) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)v(x) + \Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u \cdot v(x) + u(x) \cdot \Delta v + \Delta u \Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} v(x) + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v \right) =$$

$$= v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v =$$

$$= u'v + uv' + u'(x) \cdot 0 = u'v + uv'.$$

Зокрема, якщо функція $v(x) = C$, тобто $v(x)$ — стала, тоді

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'.$$

Аналогічно дістанемо формулу

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \left(\frac{1}{C} u\right)' = \frac{1}{C} u'.$$

4.5. Таблиця похідних (формули диференціювання основних елементарних функцій)

Таблиця 3.1

1. $(C)' = 0$	**2.** $(x^n)' = n x^{n-1}$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	**4.** $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
5. $(a^x)' = a^x \ln a$	**6.** $(e^x)' = e^x$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	**8.** $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

9. $(\sin x)' = \cos x$	**10.** $(\cos x)' = -\sin x$
11. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	**12.** $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
13. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	**14.** $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	**16.** $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
17. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	**18.** $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
19. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	**20.** $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Тут $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ — гіперболічні функції.

4.6. Похідна складеної функції. Таблиця похідних

Якщо функція $u = g(x)$ має похідну в точці x, а функція $y = f(u)$ — у відповідній точці $u = g(x)$, то складена функція $y = f(g(x))$ диференційовна в точці x, причому

$$\boxed{y' = f'(u) \cdot g'(x) \quad (y'_x = y'_u \cdot u'_x).}$$

Іншими словами, похідна складеної функції $y = f(u)$, $u = g(x)$ дорівнює добутку похідної від зовнішньої функції, взятої по внутрішньому аргументу u, і похідної від внутрішньої функції, взятої по незалежній змінній x.

Нехай $u(x)$ — диференційовна в точці x функція, тоді виконуються такі формули диференціювання складених функцій (табл. 3.2):

1. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$	**2.** $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}u'$
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	**4.** $(e^u)' = e^u u'$
5. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a}u'$	**6.** $(\ln u)' = \dfrac{1}{u}u'$
7. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	**8.** $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9. $(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}u'$	**10.** $(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u}u'$
11. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$	**12.** $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
13. $(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2}u'$	**14.** $(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1+u^2}u'$
15. $(\mathrm{sh}\, u)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u'$	**16.** $(\mathrm{ch}\, u)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u'$
17. $(\mathrm{th}\, u)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 u}u'$	**18.** $(\mathrm{cth}\, u)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 u}u'$

4.7. Похідна оберненої функції

Нехай $y = f(x)$ і $x = g(y)$ — пара взаємно обернених функцій (нагадаємо, що графіки цих функцій збігаються).

Сформулюємо теорему про зв'язок між похідними цих функцій.

Теорема Якщо функція $y = f(x)$ строго монотонна на інтервалі $(a;b)$ і має відмінну від нуля похідну $f'(x)$ у довільній точці цього інтервалу, тоді існує обернена функція $x = g(y)$, яка також має похідну $g'(y)$, причому

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ або } y'_x = \frac{1}{x'_y}.}$$

Ця формула має такий *геометричний* зміст. Нехай крива задається функцією $y = f(x)$ або оберненою функцією $x = g(y)$ (рис. 3.23). Тоді $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$

(α — кут між дотичною до кривої та віссю абсцис), $g'(y) = \operatorname{tg}\beta$ (β — кут між дотичною до кривої та віссю ординат). Оскільки $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \beta) = \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}$, звідки випливає, що $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

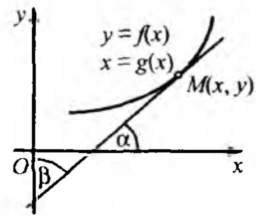


Рис. 3.23

4.8. Диференціювання неявної функції

Нехай неявна функція $y(x)$ задана рівнянням $F(x, y) = 0$, не розв'язаним відносно залежної змінної y. Щоб знайти похідну y', потрібно виконати такі дії:

1) продиференціювати обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$ за змінною x, не забуваючи при цьому , що y є функцією змінної x;

2) розв'язати одержане рівняння відносно y'.

Похідна неявно заданої функції виражається через змінні x та y.

4.9. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Нехай функціональна залежність між аргументом x і функцією $y(x)$ задана рівняннями

$$x = \varphi(t)\,,\; y = \psi(t)\,, \tag{3.12}$$

де t — параметр, що належить проміжку (α, β). У цьому разі кажуть, що функція $y(x)$ задана *параметрично*.

Вважатимемо, що функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ диференційовні в точці $t \in (\alpha, \beta)$, причому $\psi'(t) \neq 0$, і функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = g(x)$. За правилом диференціювання оберненої функції

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}\,.$$

Функцію $y = f(x)$ можна розглядати як складену функцію $y = \psi(g(x))$, похідна якої

$$y' = (\psi(g(x)))' = y'_t \cdot t'_x = \psi'(t) \cdot g'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\,.$$

Отже, похідну функції, заданої параметрично, обчислюють за формулою

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad \text{або} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}.} \tag{3.13}$$

4.10. Логарифмічне диференціювання. Похідна показниково-степеневої функції

У деяких випадках при відшуканні похідної доцільно задану функцію спочатку прологарифмувати, а потім знайти похідну як від неявної функції. Така операція називається логарифмічним диференціюванням.

Зокрема, логарифмічне диференціювання доцільно використовувати, якщо функція задана у вигляді:

$$\text{а) } y=\frac{u_1^{k_1}(x)\cdot u_2^{k_2}(x)\cdot\ldots\cdot u_m^{k_m(x)}(x)}{v_1^{l_1}(x)\cdot v_2^{l_2}(x)\cdot\ldots\cdot v_n^{l_n}(x)}; \qquad \text{б) } y=u(x)^{v(x)}.$$

Покажемо, як знайти похідну показниково-степеневої функції $y=u(x)^{v(x)}$, де $u(x), v(x)$ — диференційовні функції від x, $u(x)>0$.

Виконавши логарифмування, дістанемо

$$\ln y=\ln(u^v)=v\ln u; \quad (\ln y)'=(v\ln u)'; \quad \frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}u';$$

$$y'=u^v(v'\ln u+v\frac{1}{u}u')=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.$$

Висновок. Похідна показниково-степеневої функції дорівнює сумі похідної показникової функції за умови, що u = const, і похідної степеневої функції за умови, що v = const:

$$\boxed{y'=u^v\ln u\cdot v'+vu^{v-1}\cdot u'.}$$

Зазначимо, що при диференціюванні показниково-степеневої функції студенти досить часто помиляються, вважаючи її або лише степеневою, або лише показниковою.

4.11. Похідні вищих порядків

Нехай на інтервалі $(a; b)$ задана диференційовна функція $y = f(x)$, тоді її похідна $f'(x)$, яку ще називають *похідною першого порядку*, або *першою похідною*, також є функцією від x.

Якщо функція $f'(x)$ диференційовна, то її похідну називають *другою похідною* (або *похідною другого порядку*) і позначають одним із таких символів:

$$y'',\ f''(x),\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^2f}{dx^2},\ \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Друга похідна має такий механічний зміст. Якщо рух матеріальної точки відбувається за законом $S = f(t)$, то похідна S' — це швидкість у даний момент часу, а S'' — прискорення в той же момент часу t.

Похідну від другої похідної, якщо вона існує, називають *похідною третього порядку*, тобто за означенням

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).$$

Похідною n-го порядку функції $y = f(x)$ називають першу похідну, якщо вона існує, від похідної $(n-1)$-го порядку:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})',\quad \text{або}\quad y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).}$$

Похідні порядку вище першого називають похідними вищих порядків.

4.12. Формула Лейбніца

Нехай $y = uv$, де $u(x)$ та $v(x)$ — n раз диференційовні функції. Тоді

$$\boxed{(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},}$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, $0! = 1$.

Зокрема,

$$(uv)' = u'v + uv' \quad (n = 1),$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'' \quad (n = 2),$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''' \quad (n = 3).$$

4.13. Обчислення похідних вищих порядків функцій, заданих параметрично

Якщо функція задана параметрично рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, тоді похідні $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$ обчислюють за формулами

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}, \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)'_t}{x'_t}, \quad \ldots, \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t}{x'_t}.}$$

14.14. Похідні вищих порядків неявно заданої функції

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.

Диференціюючи цю рівність за x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знайдемо першу похідну.

Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати за x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одну за одною послідовно похідні будь-якого порядку. Всі вони будуть виражені через незалежну змінну x та саму функцію y.

Т.4 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Користуючись означенням похідної, знайдіть похідну функції $y = x^2$.

Розв'язання. За означенням похідної маємо

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x .$$

2. Знайдіть за означенням похідну функції $y = \cos x$.

Розв'язання. Запишемо приріст даної функції

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x .$$

Використовуючи першу важливу границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1 ,$$

а також формулу розкладу різниці косинусів у добуток

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2} ,$$

дістанемо

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \sin(x + \frac{\Delta x}{2}) = -1 \cdot \sin x = -\sin x .$$

3. Покажіть, що похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 0$ не існує.

Розв'язання. Для функції $y = \sqrt[3]{x}$, визначеної і неперервної на всій числовій прямій, у точці $x = 0$ маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(\Delta x)^{2/3}} = \infty .$$

Отже, границя при $\Delta x \to 0$ нескінченно зростає. Тому похідна функції $y = \sqrt[3]{x}$ у точці $x = 0$ не існує. Так само можна показати, що неперервна на всій числовій прямій функція $y = |x|$ також не має похідної в точці $x = 0$.

Висновок. Якщо функція неперервна в точці *x*, то не обов'язково вона має похідну в цій точці. Проте, якщо функція диференційовна (існує похідна) в точці *x*, то вона і неперервна в цій точці.

Знайдіть похідні функцій:

4. $y=4x^5-3x^4+1$.

Розв'язання. $y'=(4x^5-3x^4+1)'=(4x^5)'-(3x^4)'+(1)'=$

$$=4(x^5)'-3(x^4)'=4\cdot 5x^4-3\cdot 4x^3=20x^4-12x^3.$$

5. $y=\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання: $y'=\left(\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=(3x^{-2}-x^{-1/2})'=$

$$=3(x^{-2})'-(x^{-1/2})'=3\cdot(-2)x^{-2-1}-(-1/2)x^{-1/2-1}=$$

$$=-6x^{-3}+(1/2)x^{-3/2}=-\frac{6}{x^3}+\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

6. $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$.

Розв'язання. За похідної частки маємо

$$y'=\left(\frac{x^2}{\sin x}\right)'=\frac{(x^2)'\sin x-x^2(\sin x)'}{(\sin x)^2}=\frac{2x\sin x-x^2\cos x}{\sin^2 x}.$$

7. $y=\arcsin x\cdot \operatorname{tg} x$.

Розв'язання: $y'=(\arcsin x\cdot\operatorname{tg} x)'=(\arcsin x)'\cdot\operatorname{tg} x+$

$$+\arcsin x\cdot(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\operatorname{tg} x+\arcsin x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. Знайдіть $y'(0)$, якщо $y=e^x\cdot x$.

Розв'язання: $y'=(e^x)'\cdot x+e^x\cdot x'=e^x\cdot x+e^x$; $y'(0)=e^0\cdot 0+e^0=1$.

Застосовуючи правило диференціювання складеної функції, знайдіть похідні функцій:

9. $y=(x^2+1)^3$.

Розв'язання. Позначимо $u=x^2+1$, тоді $y=(u(x))^3$. За правилом диференціювання складеної функції маємо:

$$y'=(u^3)'=3u^2\cdot u'=3(x^2+1)^2\cdot(x^2+1)'=3(x^2+1)^2\cdot 2x=6x(x^2+1)^2.$$

10. $y = \sin^3 x$.

Розв'язання. Позначимо $u = \sin x$, тоді $y = (u(x))^3$. Далі маємо

$$y' = (u^3)' = 3u^2 \cdot u' = 3\sin^2 x \cdot (\sin x)' = 3\sin^2 x \cdot \cos x .$$

11. $y = \sqrt{x^4 + x^3 + 1}$.

Розв'язання. У даному разі $y = \sqrt{u}$, де $u = x^4 + x^3 + 1$. Тоді

$$y' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{(x^4 + x^3 + 1)'}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} = \frac{4x^3 + 3x^2}{2\sqrt{x^4 + x^3 + 1}} .$$

12. $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Розв'язання. Запишемо дану функцію у вигляді $y = \cos^{-2} x$. Тоді

$$u = \cos x , \ y = u^{-2} ,$$

$$y' = (u^{-2})' = -2u^{-3} \cdot u' = -2\cos^{-3} x \cdot (\cos x)' = 2\cos^{-3} x \cdot \sin x .$$

13. $y = 5^{\sin x}$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = 5^u$, де $u = \sin x$. Тоді

$$y' = (5^u)' = 5^u \ln 5 \cdot u' = 5^{\sin x} \ln 5 \cdot (\sin x)' = 5^{\sin x} \ln 5 \cdot \cos x .$$

14. $y = \operatorname{tg} e^x$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \operatorname{tg} u$, де $u = e^x$. Тоді

$$y' = (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u' = \frac{1}{\cos^2 e^x} (e^x)' = \frac{e^x}{\cos^2 e^x} .$$

15. $y = \arcsin \sqrt{x} \cdot \sqrt{\arcsin x}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу для знаходження похідної від добутку двох функцій, дістанемо

$$y' = (\arcsin \sqrt{x})' \cdot \sqrt{\arcsin x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot (\sqrt{\arcsin x})' =$$

$$= \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \sqrt{\arcsin x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} (\arcsin x)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \cdot \sqrt{\arcsin x} + \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\arcsin x}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} .$$

16. $y = \ln(x^2 + 1)$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \ln u$, де $u = x^2 + 1$. Тоді

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u}u' = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = \frac{2x}{x^2+1}.$$

17. $y = \operatorname{arctg}(\log_2(x + \cos x))$.

Розв'язання. Маємо складену функцію $y = \operatorname{arctg} u$, де проміжна функція $u = \log_2(x + \cos x)$ також є складеною, тобто $u = \log_2 w$, $w = x + \cos x$. У цьому разі похідну знаходимо так:

$$y' = (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}u' = \frac{1}{1+u^2}(\log_2 w)' = \frac{1}{1+u^2}\frac{1}{w\ln 2}w' =$$

$$= \frac{(x+\cos x)'}{(1+(\log_2(x+\cos x))^2)(x+\cos x)\ln 2} = = \frac{1-\sin x}{(1+\log_2^2(x+\cos x))(x+\cos x)\ln 2}.$$

18. $y = \operatorname{arcctg}^2(x^3 - 2)$.

Розв'язання. $y' = 2\operatorname{arcctg}(x^3-2)\cdot(\operatorname{arcctg}(x^3-2))' =$

$$= 2\operatorname{arcctg}(x^3-2)\ \frac{-1}{1+(x^3-2)^2}(x^3-2)' = -\frac{6x^2\operatorname{arcctg}(x^3-2)}{1+(x^3-2)^2}.$$

19. Знайдіть похідну y'_x, якщо $x = y^3 + 3y$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_y = 3y^2 + 3\ ;\ y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2+1)}.$$

20. Знайдіть похідну x'_y, якщо $y = x + e^x$.

Розв'язання. Похідна $y' = 1 + e^x > 0$ при довільному $x \in R$ і строго монотонна. Тому для функції $y(x)$ існує обернена функція $x = x(y)$, її похідна $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1+e^x}$.

21. Доведіть, що

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Доведення. Функція $y = \arcsin x$, де $x \in [-1; 1]$, є оберненою до функції $x = \sin y$, $y \in [-\pi/2; \pi/2]$. Оскільки на інтервалі $(-\pi/2; \pi/2)$ функція

$x=\sin y$ зростає і похідна $x'_y=\cos y>0$, тобто всі умови теореми про похідну оберненої функції виконуються, то дістанемо

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

22. Знайдіть похідну y', якщо $x^2+y^2=1$.

Розв'язання. Функція $y(x)$ задана неявно. Продиференціюємо рівняння за x: $2x+2yy'=0$, звідси дістаємо $y'=-\frac{x}{y}$. При диференціюванні враховуємо, що y^2 — складена функція змінної x.

23. Знайдіть похідну y', якщо $x^2+2xy-y^2=2x$.

Розв'язання. Продиференціюємо за x обидві частини рівняння, не забуваючи, що y є функцією від x:

$$2x+2(y+xy')-2yy'=2, \text{ або } x+y+xy'-yy'=1.$$

Звідси знаходимо

$$y'(x-y)=1-x-y, \text{ тобто } y'=\frac{1-x-y}{x-y}.$$

24. Знайдіть y', якщо $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Послідовно маємо

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})=\frac{d}{dx}(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)),\quad \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'=\frac{1}{2(x^2+y^2)}(x^2+y^2)',$$

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\,\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{2x+2yy'}{2(x^2+y^2)},\quad y'x-y=x+yy',\quad y'(x-y)=x+y,$$

звідси

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

25. Знайдіть y'_x, якщо $\begin{cases} y=a\sin t, \\ x=b\cos t. \end{cases}$

Розв'язання. Функція $y(x)$ задана параметрично. Застосовуючи формулу (3.13), дістанемо:

$$y'(t) = a\cos t\,,\ x'(t) = -b\sin t\,,\ y'_x = \frac{a\cos t}{-b\sin t} = -\frac{a}{b}\operatorname{ctg} t\,.$$

26. Знайдіть y'_x, якщо $\begin{cases} y = t^2 - 2t^3, \\ x = 2t + t^2. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$y'(t) = 2t - 6t^2\,,\ x'(t) = 2 + 2t\,,$$

тоді

$$y'_x = \frac{2t - 6t^2}{2 + 2t} = \frac{t - 3t^2}{1 + t}\,.$$

27. Знайдіть похідну функції $y = \dfrac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x \cdot \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. Цю функцію можна диференціювати за правилом диференціювання частки. Проте такий спосіб для даного прикладу громіздкий. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо:

$$\ln y = \ln\left(\frac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x \cdot \sqrt{2x+1}}\right),\ \ln y = 2\ln x + \ln(3x-2) + x - \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\,,$$

$$(\ln y)' = (2\ln x + \ln(3x-2) + x - \ln\sin x - \frac{1}{2}\ln(2x+1))'\,,$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{1}{2x+1}\,,$$

$$y' = y\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{1}{2x+1}\right),$$

або

$$y' = \frac{x^2(3x-2)e^x}{\sin x\sqrt{2x+1}}\left(\frac{2}{x} + \frac{3}{3x-2} + 1 - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2x+1}\right).$$

28. Знайдіть похідну функції $y = x^{\cos x}$.

Розв'язання. Перший спосіб. Застосуємо логарифмічне диференціювання. Маємо

$$\ln y = \ln x^{\cos x}\,,\ \ln y = \cos x \ln x\,,\ (\ln y)' = (\cos x \ln x)'\,,$$

$$\frac{y'}{y} = -\sin x \ln x + \cos x\frac{1}{x}\,,\ y' = y(-\sin x \ln x + \cos x\frac{1}{x})\,,$$

тобто

$$y' = x^{\cos x}(-\sin x \ln x + \cos x \frac{1}{x}).$$

Другий спосіб. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю $a^{\log_a b} = b$, запишемо дану функцію у вигляді

$$y = x^{\cos x} = \left(e^{\ln x}\right)^{\cos x} = e^{\cos x \ln x}.$$

Тоді

$$y' = \left(e^{\cos x \ln x}\right)' = e^{\cos x \ln x}\,(\cos x \ln x)' =$$

$$= e^{\cos x \ln x}\left(-\sin x \ln x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

29. Знайдіть похідну третього порядку функції $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 5$.

Розв'язання. Послідовно знаходимо

$$y' = 4x^3 - 4x + 3\,,\ y'' = 12x^2 - 4\,,\ y''' = 24x\,.$$

30. Знайдіть похідну другого порядку функції

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\,,\ a = \mathrm{const}\,.$$

Розв'язання. Для розв'язання даного прикладу використовуємо правила диференціювання різниці функцій, добутку, похідної складеної функції, а також табличні похідні. Маємо

$$y' = \frac{1}{2}\left(x'\sqrt{x^2 - a^2} + x(\sqrt{x^2 - a^2})'\right) - \frac{a^2}{2}\left(\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}}2x\right) - \frac{a^2}{2}\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\left(x' + \left(\sqrt{x^2 - a^2}\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2 - a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) - \frac{a^2}{2\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right) =$$

$$= \frac{x^2 - a^2 + x^2}{2\sqrt{x^2 - a^2}} - \frac{a^2\left(\sqrt{x^2 - a^2} + x\right)}{2\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$=\frac{2x^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}=\sqrt{x^2-a^2}\ ;$$

$$y''=\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}\left(x^2-a^2\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2-a^2}}2x=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

31. Знайдіть похідну n-го порядку функцій:

а) $y=e^x$; б) $y=a^x$; в) $y=\sin x$; г) $y=\frac{1}{x}$.

Розв'язання:

а) $y'=e^x$, $y''=e^x$, ..., $y^{(n)}=e^x$;

б) $y'=a^x\ln a$, $y''=a^x\ln^2 a$, ..., $y^{(n)}=a^x\ln^n a$;

в) $y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $y''=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$,

$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$, ..., $y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $y'=-x^{-2}$, $y''=2x^{-3}$, $y'''=-2\cdot 3x^{-4}$, $y^{(4)}=2\cdot 3\cdot 4x^{-5}$, ...,

$y^{(n)}=(-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot n\cdot x^{-(n+1)}=(-1)^n\, n!\cdot x^{-(n+1)}$.

32. Знайдіть похідну n-го порядку функції

$$y=\frac{3x+1}{x^2+2x-3}.$$

Розв'язання. Розкладемо дану функцію на елементарні дроби:

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-3}=\frac{3x+1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}.$$

Звідси

$$3x+1=A(x+3)+B(x-1).$$

Нехай $x=1$, тоді $4=4A$, тобто $A=1$. Якщо $x=-3$, то $-8=-4B$, $B=2$.

Отже,

$$y=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}.$$

Враховуючи результат попереднього пункту, дістанемо

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + 2(-1)^n n! \frac{1}{(x+3)^{n+1}}.$$

33. Знайдіть похідну п'ятого порядку функції

$$y = (x^2 - 3x + 4)e^{2x}.$$

Розв'язання. Покладемо $u = e^{2x}$, $v = x^2 - 3x + 4$. За формулою Лейбніца маємо

$$y^{(5)} = ((x^2 - 3x + 4)e^{2x})^{(5)} = (e^{2x})^{(5)}(x^2 - 3x + 4) +$$
$$+ C_5^1 (e^{2x})^{(4)}(2x - 3) + C_5^2 (e^{2x})^{(3)} \cdot 2.$$

Тут ми врахували, що $(x^2 - 3x + 4)^{(n)} = 0$ при $n > 2$. Далі дістанемо

$$y^{(5)} = 32e^{2x}(x^2 - 3x + 4) + 5 \cdot 16e^{2x}(2x - 3) + 10 \cdot 8e^{2x} \cdot 2 =$$
$$= e^{2x}[32(x^2 - 3x + 4) + 80(2x - 3) + 160] = e^{2x}(32x^2 + 64x + 48).$$

34. Знайдіть $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$.

Розв'язання. Маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3\sin t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{3\cos t}{-2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(-\frac{3}{2}\operatorname{ctg} t)'_t}{(2\cos t)'_t} = \frac{\frac{3}{2\sin^2 t}}{-2\sin t} = -\frac{3}{4\sin^3 t}.$$

35. Знайдіть y'', якщо $x^2 + y^2 + y = 1$.

Розв'язання. Продиференціюємо задану рівність за x і знайдемо y':

$$2x + 2yy' + y' = 0,\ y'(2y+1) = -2x,\ y' = \frac{-2x}{2y+1}.$$

Диференціюємо одержане співвідношення за x:

$$y'' = -2\frac{x'(2y+1) - x(2y+1)'}{(2y+1)^2} = -2\frac{2y + 1 - 2y'x}{(2y+1)^2}.$$

Враховуючи, що $y' = \dfrac{-2x}{2y+1}$, остаточно дістаємо

$$y'' = -2\frac{2y+1-2\frac{-2x}{2y+1}x}{(2y+1)^2} = -2\frac{(2y+1)^2+4x^2}{(2y+1)^3}.$$

36. Знайдіть рівняння дотичної та нормалі, проведених до кривої $y = x\ln x + 1$ у точці з ординатою 1.

Розв'язання. За умовою $y_0 = 1$. Визначаємо абсцису точки дотику. Маємо

$$1 = x\ln x + 1,\ x\ln x = 0;\ x \neq 0, \text{ тому } \ln x = 0, \text{ тобто } x_0 = 1.$$

Знайдемо похідну

$$y' = (x\ln x + 1)' = \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + 1.$$

Звідси $y'(1) = \ln 1 + 1 = 1$. Підставивши значення x_0, y_0 та $y'(1)$ у формули дотичної (3.10) та нормалі (3.11), дістанемо рівняння дотичної $y - 1 = 1\cdot(x-1)$, або $y = x$, та рівняння нормалі $y - 1 = \ = -\frac{1}{1}(x-1)$, або $y = 2 - x$.

37. Знайдіть кут між дотичною, проведеною до кривої $y = x^3 - 2x^2 - 5x$ у точці з абсцисою $x = 2$, і додатним напрямом осі Ox.

Розв'язання. Спираючись на геометричний зміст похідної, шуканий кут α визначимо з рівняння $\operatorname{tg}\alpha = y'(2)$. Оскільки

$$y'(2) = 3x^2 - 4x - 5\big|_{x=2} = 12 - 8 - 5 = -1,$$

то $\operatorname{tg}\alpha = -1$, звідки дістаємо $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (зауважимо, що $0 \le \alpha < \pi$).

38. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої, заданої неявно рівнянням $x^3 + 2y^3 = 5xy$ у точці $M(2;1)$.

Розв'язання. Підставивши у рівняння кривої координати точки M, дістанемо тотожність: 10=10. Отже, точка M належить заданій кривій і $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Знайдемо похідну функції y у точці x_0. Маємо

$$(x^3 + 2y^3)' = (5xy)',\ 3x^2 + 6y^2y' = 5(y + xy'),\ (6y^2 - 5x)y' = 5y - 3x^2,$$

$$y' = \frac{5y - 3x^3}{6y^2 - 5x},\ y'(2) = \frac{5\cdot 1 - 3\cdot 8}{6\cdot 1 - 5\cdot 2} = \frac{19}{4}.$$

Тоді

$$y-1=\frac{19}{4}(x-2),\ \text{або}\ 19x-4y-34=0\ \text{— рівняння дотичної,}$$

$$y-1=-\frac{4}{19}(x-2),\ \text{або}\ 4x+19y-27=0\ \text{— рівняння нормалі.}$$

39. Складіть рівняння дотичної до еліпса, заданого рівняннями $x=2\sin t$, $y=3\cos t$, у точці $M_0(1;\,y_0)$, де $y_0>0$ (рис. 3.24).

Розв'язання. Рівняння дотичної $y-y_0=$ $=f'(x_0)(x-x_0)$. За умовою $x_0=1$. Знайдемо ординату точки дотику y_0. Розв'язками рівняння $1=2\sin t$ за умови $t\in[0;2\pi)$ є значення $t=\pi/6$ та $t=5\pi/6$. Враховуючи обмеження $y_0>0$, тобто $\cos t>0$, дістаємо $t=\pi/6$. Тоді $y_0=\cos(\pi/6)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

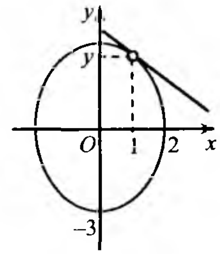


Рис. 3.24

Визначаємо похідну $f'(x_0)$ параметрично заданої функції:

$$y'(t)=-3\sin t,\ x'(t)=2\cos t.$$

Тоді

$$y'_x=\frac{-3\sin t}{2\cos t}=-\frac{3}{2}\operatorname{tg}t;\ f'(1)=-\frac{3}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рівняння дотичної має вигляд

$$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1),$$

або

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\sqrt{3}.$$

Т.4 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть похідні функцій:

1. $y=2+x-x^2$.

2. а) $y=3\cdot\sqrt[4]{x}$; б) $y=\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}$.

3. $y = 3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - x^3$.

4. $y = \frac{1}{x} + \frac{3}{\sin x} - x\ln x$.

5. а) $y = \arccos x \cdot 3^x$; б) $y = \frac{10^x}{x}$.

6. $y = 4\,\mathrm{tg}\,x \cdot \sqrt[6]{x^5}$.

7. а) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$; б) $y = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x^2}}$.

8. $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

9. $y = 2^x \sin x \cdot x^4$.

10. $y = \mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x$.

11. $y = (3x + \sqrt{x})(\sqrt{x} - x)$.

12. а) $y = \frac{1 - x^5}{x^5 + 1}$; б) $y = \frac{2 - \sqrt[7]{x^2}}{\sqrt[7]{x^2} + 2}$.

13. $y = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$.

14. $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x})$.

15. $y = \frac{x\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$.

16. $y = \frac{3}{(x^3 - 1)(1 - 2x^4)}$.

17. $y = (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 3)$.

18. а) $y = \frac{x^3 - 4}{x + \sqrt{x}}$; б) $y = \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$.

19. $y = \log_2 x + 1/\ln x$.

20. $y = \mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{arctg}\,x - 3\arccos x$.

Знайдіть похідні складених функцій:

21. $y = (3x + 2)^5$.

22. $y = \cos^4 x$.

23. $y = \mathrm{tg}\log_3 x$.

24. $y = \arcsin(\ln x)$.

25. $y = \arccos\sqrt{x}$.

26. $y = 3^{x + \sqrt{x}}$.

27. $y = 2^{\mathrm{arctg}\,x}$.

28. $y = x\ln\sin 2x$.

29. $y = e^x \cdot \mathrm{tg}(\sqrt[3]{x + 1})$.

30. $y = \sqrt[4]{\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$.

31. $y = \sin^6(\cos 3x)$.

32. $y = \cos^5(\log_2^3 x)$.

33. $y = \arccos\frac{1 - x}{1 + x}$.

34. а) $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$; б) $y = \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x} - 1}{\sqrt{\mathrm{arctg}\,x} + 1}$.

35. $y = \mathrm{sh}(\cos\frac{x}{1 + x})$.

36. $y = e^{\arccos(\ln x)}$.

37. а) $y = (x^2 - 1)\arccos\frac{1}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 1}{\arccos\sqrt{x}}$.

38. $y = \ln(\ln^2 x)$.

39. $y = \cos\ln\frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

40. $y = \dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt[3]{\cos x}}$. **41.** $y = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x - x}}{\sqrt[4]{x}}$. **42.** $y = \dfrac{\ln(x + \operatorname{arctg} x)}{\operatorname{arctg} \ln x}$

43. $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{\arccos 4x}}$. **44.** $y = \dfrac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. **45.** $y = 3\sin 5x \cos^4 x$.

46. $y = 4\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$. **47.** $y = \sin(\cos x)\cos(\sin x)$.

48. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. **49.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 4}{\sqrt[4]{x^3 - 1}}} + 4\log_3^5 \cos 2x$.

50. $y = \ln(e^{3x} + \sqrt{e^{3x} - 1}) + \arccos e^{-3x}$. **51.** $y = (1 + x^2)\sqrt{1 - x^2}$.

Знайдіть похідну $\dfrac{dy}{dx}$ за правилом диференціювання оберненої функції, якщо:

51. $x = y^2 + \sqrt{y^2 + 1}$. **52.** $x = y\ln y + \sin y$.

53. $x = \lg\cos y + \cos\ln y$. **54.** $x = e^{\arccos y}$.

Знайдіть похідну y' неявно заданих функцій:

55. $3^{x+y} = 3^x - 3^y$. **56.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \sqrt{x^2 + y^2}$. **57.** $x^y = y^x$.

58. $x^3 + y^3 = 3xy$. **59.** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Знайдіть похідну y'_x параметрично заданих функцій:

60. $x = a\cos^2 t$, $y = b\sin^2 t$. **61.** $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt[3]{t}$.

62. $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$. **63.** $x = e^t$, $y = e^{2t}$.

64. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$. **65.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

66. $x = t^2$, $y = \dfrac{t^3}{3} - t$. **67.** $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.

68. $x = t\cos t$, $y = t\sin t$. **69.** $x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$.

Знайдіть похідну y', використовуючи логарифмічне диференціювання:

70. $y = (\ln x)^x$. **71.** $y = (2x+1)^{2x-1}$. **72.** $y = \dfrac{2^x \operatorname{tg} x \cdot \sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-4}}$.

73. $y = \dfrac{(x-4)\cdot\sqrt{x^3+3}}{(x-2)^3\cdot\sqrt{x}}$. **74.** $y = (x^5 + 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$.

75. $y = x^{\ln x} + (\ln x)^x$. **76.** $y = (\sin x)^{\cos x}(\cos x)^{\sin xx}$.

77. $y = (x^5 + 5\sqrt{x})^{\operatorname{arctg} x}$. **78.** $y = x^{x^x}$.

79. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривих, що задані параметрично:

1) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, у точці $t = \pi/2$.

2) $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, у точці $t = \pi/4$.

3) $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$, у точці $t = \pi/2$.

4) $x = te^t$, $y = te^{-t}$, у точці $x_0 = e$.

80. Складіть рівняння дотичної та нормалі до кривої в точці M:

1) $4x^4 + 6xy - y^4 = 0$, $M(1; 2)$.

2) $x^2(2x - y) = 2x - y^3$, $M(1; 1)$.

3) $x^{2/3} + y^{2/3} = 8$, $M(8; 8)$.

Знайдіть похідні другого порядку функцій:

81. $y = (x^3 - 2)^4$. **82.** $y = \sqrt{x^4 + 1}$. **83.** $y = e^x \sin 2x$.

84. $y = 4^x(x+1)$. **85.** $y = x^x$. **86.** $y = \ln \operatorname{tg} x$.

87. $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. **88.** $y = \dfrac{x^4}{2x-1}$. **89.** $y = (\ln x)^x$.

90. $y = \sin^3 x$. **91.** $y = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Знайдіть похідні n-го порядку функцій:

92. $y = 3^{-x}$. **93.** $y = \ln x$. **94.** $y = \sin kx$. **95.** $y = \sin x \sin 2x$.

96. $y = \dfrac{x^n}{\cos^2 x} - x^n \operatorname{tg}^2 x$. **97.** $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$. **98.** $y = \dfrac{x-5}{x^2-4x+3}$.

За формулою Лейбніца обчисліть похідні порядку n для функцій:

99. $y=(x^3-2x+5)\sin x$, $n=10$. **100.** $y=(x^2+4x-3)2^x$, $n=8$.

101. $y=x\ln(x^2-3x+2)$, $n=6$.

Знайдіть другі похідні функцій, які задані неявно:

102. $x^3+y^3=3xy$. **103.** $e^x+x=e^y+y$. **104.** $\cos(x+y)=x$.

105. $y^2=2px$. **106.** $y=\sin(x+y)$. **107.** $\ln(x+y)=y-x$.

Знайдіть похідні другого порядку $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функцій, заданих параметрично:

108. $y=3t-t^3$, $x=2t-t^2$. **109.** $y=e^t\sin t$, $x=e^t\cos t$.

110. $y=\ln t$, $x=t^6$. **111.** $y=t^2/2$, $x=\operatorname{arctg} t$.

112. $y=\cos 2t$, $x=\sin^2 t$. **113.** $y=\ln(1+t^2)$, $x=\operatorname{arcctg} t$.

Відповіді

1. $1-2x$. **2.** а) $\dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^3}}$; б) $y=-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{12}{x^5}$. **3.** $-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}-3x^2$. **4.** $-\dfrac{1}{x^2}-3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-\ln x-1$. **6.** $\dfrac{12x+5\sin 2x}{3\cos^2 x\sqrt[6]{x}}$. **7.** а) $-\dfrac{2x\sin x+\cos x}{x\sqrt{x}}$. **8.** $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$. **9.** $2^x x^3(\ln 2\cdot x\sin x+x\cos x+4\sin x)$. **10.** а) 0. **11.** $3\sqrt{x}-6x+1$. **12.** а) $\dfrac{-10x^4}{(x^5+1)^2}$. **13.** $8x^7$. **14.** $4x^3-24x^2+40x-19$. **15.** $\dfrac{2x+3\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$. **19.** $\dfrac{1}{x\ln 2}-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$. **21.** $15(3x+2)^4$. **22.** $-4\cos^3 x\sin x$. **23.** $\dfrac{1}{x\ln 3\cdot\cos^2(\log_3 x)}$. **24.** $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **25.** $-\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **26.** $\dfrac{2^{\operatorname{arctg} x}\ln 2}{1+x^2}$. **28.** $\ln\sin 2x+2x\operatorname{ctg} 2x$. **31.** $-18\sin^5(\cos 3x)\times\cos(\cos 3x)\sin 3x$. **33.** $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$. **34.** а) $\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **35.** $-\operatorname{ch}\cos\dfrac{x}{x+1}\sin\dfrac{x}{x+1}/(1+x)^2$. **36.** $\dfrac{-e^{\arccos\ln x}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **39.** $\sin\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{1-e^{2x}}$. **44.** $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^5 x}(3+\sin^2 x)$. **48.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **51.** $\dfrac{\sqrt{y^2+1}}{y(2\sqrt{y^2+1}+1)}$. **52.** $\dfrac{1}{\ln y+1+\cos y}$. **53.** $\dfrac{3^x(1-3^y)}{3^y(1+3^x)}$. **54.** $\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **57.** $\dfrac{\ln y-y/x}{\ln x-x/y}$. **58.** $\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$. **59.** $-\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$. **60.** $-b/a$. **61.** $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **62.** $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **63** $2e^t$. **64** $\dfrac{\sin t+\cos t}{\cos t-\sin t}$. **65** $\operatorname{ctg}\dfrac{t}{2}$.

66. $\dfrac{2\sin^2 t + \sin 2t}{2\cos^2 t - \sin 2t}$. **79** 1) $y = x + 2 - \pi/2$; $y = -x + \pi/2$. 2) $y + x = \sqrt{2}/2$; $y = x$. 3) $y + x = 3$; $y = x + 1$. 4) $y = 1/e$; $x = e$. **80.** 1) $14x - 13y + 12 = 0$; $13x + 14y - 41 = 0$. 2) $y = x$; $y = -x + 2$. 3) $y + x = 16$; $y = x$. **81.** $12x(x^3 - 2)^2(11x^3 - 4)$. **82.** $2x^2(x^4 + 3)\times$ $\times(x^4 + 1)^{-3/2}$. **83.** $e^x(4\cos 2x - 3\sin 2x)$. **84.** $4^x(2\ln 4 + (x + 1)\ln^2 4)$. **85.** $x^x(\ln x + 1)^2 + x^{x-1}$. **86.** $-4\cos 2x/\sin^2 2x$. **87.** $\dfrac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$. **88.** $\dfrac{4x^2(4x^2 - 5x + 3)}{(2x - 1)^3}$. **89.** $(\ln x)^x \times \Big((\ln\ln x + \ln^{-1} x)^2 +$ $+\dfrac{1}{x\ln x} - \dfrac{1}{x\ln^2 x}\Big)$. **90.** $3(\sin 2x\cos x - \sin^3 x)$. **91.** $-9\cos 3x$. **92.** $(-1)^n 3^{-x}\ln^n 3$. **93.** $(-1)^{n-1}(n-1)!/x^n$. **94.** $k^n\sin(kx + n\pi/2)$. **95.** $\dfrac{1}{2}[\cos(x + n\pi/2) - 3^n\cos(3x + n\pi/2)]$. **96.** $n!$. **97.** $(-1)^n n![1/(x+1)^{n+1} - 1/(x+2)^{n+1}]$. **98.** $(-1)^n n!\times$ $\times[2/(x-1)^{n+1} - 1/(x-3)^{n+1}]$. **99.** $(30x^2 + 700)\cos x - (x^3 - 272x + 5)\sin x$. **100.** $2^x\ln^6 2\times[\ln^2 2(x^2 + 4x - 3) + 16\ln 2(x+2) +$ $+42]$. **101.** $\dfrac{24(6x-11)}{(x-1)^6} + \dfrac{24(6x-23)}{(x-3)^6}$. **102.** $\dfrac{2xy(3xy - x^3 - y^3 - 1)}{(y^2 - x)^3}$. **103.** $\dfrac{(e^y - e^x)(e^{x+y} - 1)}{(e^y + 1)^3}$. **104.** $\dfrac{-\cos(x + y)}{\sin^3(x + y)}$. **105.** $-\dfrac{p^2}{y^3}$. **106.** $\dfrac{-\cos\frac{x+y}{2}}{4\sin^5\frac{x+y}{2}}$. **107.** $-4(x + y)/(x + y - 1)^3$. **108.** $3/(4(1 - t))$. **109.** $2e^{-t}/(\cos t - \sin t)^3$. **110.** $-1/(6t^{12})$. **111.** $3t^4 + 4t^2 + 1$. **112.** 0. **113.** $2(1 + t^2)$.

Т.4 Індивідуальні тестові завдання

4.1. Знайдіть похідні першого порядку функції $y = f(x)$.

4.1.1. а) $y = \cos^2 x + \sin(\operatorname{tg} x)$; б) $y = \ln^2 \arcsin\sqrt{x}$;

в) $y = 2^{\sin x + \cos^2 x}$; г) $y = \sqrt[5]{(2x+1)\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.

4.1.2. а) $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x^2}$; б) $y = \log_3 \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

в) $y = 10^{\sqrt{\ln x}} \cdot 3^{\operatorname{tg} x}$; г) $y = 5\operatorname{arctg}(\ln^2 x) - 1$.

4.1.3. а) $y = \sin\sqrt{x} - 2\sin^3 x$; б) $y = \ln\arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

в) $y = e^{\operatorname{arctg} x}\cos 2^x$; г) $y = \sqrt[4]{\log_3 \sin(x^3 + 1)}$.

4.1.4. а) $y = x^2/(1+\cos^2 2x)$; б) $y = \sqrt[3]{\ln\cos\dfrac{x-2}{5}}$;

в) $y = \ln\sin(3^x x^2)$; г) $y = 3^{\sqrt{x}}\cos^3(\operatorname{tg} x)$.

4.1.5. а) $y = \cos^5(\sin 3x)$; б) $y = (1+\cos^2 x)^5 \sin 4x$;

в) $y = \ln(x + \arccos\sqrt{1-x^2})$; г) $y = \ln^5 \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

4.1.6. а) $y = e^{x^2}\sqrt{x}/\sin x^2$; б) $y = \dfrac{\operatorname{arctg}\ln x}{\ln\operatorname{arctg} x}$;

в) $y = 10^{2-\operatorname{tg}^4 x}$; г) $y = \sqrt[6]{e^{-x}+1}\cdot\sin(4x+1)$.

4.1.7. а) $y = \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{ctg} x^2$; б) $y = (2+\ln^2 \sin x)^3$;

в) $y = 2^{5^x}\cdot 4^{\cos x}$; г) $y = \log_2^3 \arcsin(x^2)$.

4.1.8. а) $y = x\cos^2 x - \operatorname{ctg} 4x$; б) $y = \arcsin^3 \ln\sin 2x$;

в) $y = \operatorname{arctg}^5(e^{2x}x)$; г) $y = \dfrac{\sqrt{1+\ln^2 x}}{x^3+2}$.

4.1.9. а) $y = x^3/(1+\sin^4 x)$; б) $y = \log_2 \operatorname{arctg}(1-x^2)$;

в) $y = 3^{\ln^2 \sin 5x} + \sqrt{2^x}$; г) $y = \sqrt{1+\operatorname{sh}\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

4.1.10. а) $y = \sin\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; б) $y = \lg\dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{3x}$;

в) $y = e^{-x^2}\sin(3x-2)$; г) $y = \cos(\sin^3(x\operatorname{tg} x))$.

4.1.11. а) $y = \sqrt{2+\sin\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y = \dfrac{1-\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\ln^2 x}$;

в) $y = 2^{\sqrt[3]{\ln x}}\cdot x^3$; г) $y = \operatorname{tg}^4(\operatorname{ch} x) - \operatorname{ch}(\operatorname{tg} x^2)$.

4.1.12. а) $y = \dfrac{5\operatorname{ctg}^2(5+1/x)}{x}$; б) $y = \ln\arccos(2x-5)$;

в) $y = \operatorname{tg}(2^{\cos x})\ln(x3^x)$; г) $y = \operatorname{ch}^2(x^2-1) - \operatorname{ch}\sqrt{x}$.

4.1.13. а) $y=\frac{\sec^2(1+x^2)}{\cos x}-1$; б) $y=\log_2^4\arcsin(3x^3)$;

в) $y=5^{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 x}}\operatorname{ctg}3^x$; г) $y=\sqrt[4]{2^{-x}+1}\cdot\cos 4\sqrt{x}$.

4.1.14. а) $y=\operatorname{tg}(\cos(5\operatorname{ctg}x))$; б) $y=\sqrt[3]{\ln\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;

в) $y=3^{\sin x}\sin^3 x+3$; г) $y=\frac{\log_2(x+1/x)}{2x^3}$.

4.1.15. а) $y=\cos(\sin\sqrt{x\operatorname{tg}x})$; б) $y=\ln^5\operatorname{arctg}\frac{x+1}{x-1}$;

в) $y=6^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}-2^{\operatorname{tg}x}$; г) $y=\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}}$.

4.1.16. а) $y=\operatorname{tg}^2\frac{1}{x^2}-5\operatorname{ctg}3x$; б) $y=\log_3^4\sin\sqrt{1+x^3}$;

в) $y=x^3e^{-x^2/2}-\cos 2^x$; г) $y=\operatorname{arc\,tg}^2(x\ln x)$.

4.1.17. а) $y=(\operatorname{tg}\sqrt{3x})/\sin\sqrt{x}$; б) $y=\arcsin^4\ln\ln x$;

в) $y=2^{\arccos x}\cos^2 x$; г) $y=\ln(x+\ln(x+\sqrt{1-x^2}))$.

4.1.18. а) $y=\sqrt[4]{\operatorname{tg}(x/4)+\operatorname{ctg}4x}$; б) $y=\arccos^2\ln\sin x$;

в) $y=\operatorname{tg}(4^{\ln x}+3^{\operatorname{tg}x})$; г) $y=\frac{2-\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}{\log_3^4 x}$.

4.1.19. а) $y=\cos^3 5x-8\sin^3 4x$; б) $y=\ln\ln\cos\ln\operatorname{tg}x$;

в) $y=2^{x^2}/x^2$; г) $y=\sqrt[7]{\log_3^3\sin\sqrt{1+x}}$.

4.1.20. а) $y=\sqrt[5]{\sin^4 x-\cos\sqrt{x}}$; б) $y=\frac{\sqrt{\ln(1+\ln^2 x)}}{\log_2 x}$;

в) $y=2^{\ln\arcsin\sqrt{x}}$; г) $y=\frac{\operatorname{sh}^2(1+x^2)}{\operatorname{ch}x}-2\operatorname{th}2x$.

4.1.21. а) $y=\operatorname{ctg}^3(\sqrt[6]{2-x\operatorname{tg}^2 x})$; б) $y=\frac{\sqrt{\arcsin\ln x}}{\ln(x^2+1)}$;

в) $y=e^{\sqrt[3]{\sin 5x-5\cos^2 x}}$; г) $y=\operatorname{tg}(4^{\ln x}+7^{\operatorname{ctg}x})$.

4.1.22. а) $y = \cos\dfrac{x}{\sqrt{\sin x}}$; б) $y = \log_x 3 + \log_3^4 x$;

в) $y = \cos e^{\sqrt[4]{x-1/x}}$; г) $y = \ln^5 \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

4.1.23. а) $y = \dfrac{x^2}{\sin^2 x - \cos(x^2)}$; б) $y = x\ln(x + \sqrt{1-x^2})$;

в) $y = 2^{(x^3-2)/\sin x}$; г) $y = \operatorname{tg}^2 \dfrac{1}{x^2+1} - 5\operatorname{ctg}^4 2x$.

4.1.24. а) $y = \cos\dfrac{\sin x}{x+1}$; б) $y = \sin\ln\operatorname{tg} x - \ln\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}$;

в) $y = \cos 2x/(e^x + 3^{x^2})$; г) $y = \dfrac{\sqrt{1+\ln^4 x}}{\log_5 x}$.

4.1.25. а) $y = \dfrac{\sin x}{3\cos x + \cos^3 x}$; б) $y = x^2(\cos\ln x - \sin\ln x)$;

в) $y = 5^{4^x} + 4^{5^x}$; г) $y = x\ln(x + \sqrt{4-x^2})$.

4.1.26. а) $y = \cos\sqrt{1+x^3} + \sqrt{\cos x}$; б) $y = \log_2^3(\ln x - \log_{\cos x} 2)$;

в) $y = 10^{3x-4}\cdot(3x-4)^{10}$; г) $y = \arccos\dfrac{x-1}{x}$.

4.1.27. а) $y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}(x/3)} + \cos\sqrt{\sin x}$; б) $y = \log_3^3 \log_2^2 \ln(5x-2)$;

в) $y = 3^{\sin^2 3x} + 3^{\cos x}/x$; г) $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin\ln x}}{x^2}$.

4.1.28. а) $y = \cos^6\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{x\cos x}$; б) $y = \ln(\sin^2 x + \sqrt{\sin^3 \ln x})$;

в) $y = x\cos(2^{\operatorname{arctg}\sqrt{1-x^2}})$; г) $y = 10^{2x-5}\cdot(7x^2-1)^8$.

4.1.29. а) $y = \dfrac{\cos^3(x^2 - 1/x^2)}{\cos x}$; б) $y = \ln\cos\log_7 \operatorname{ctg}\ln x$;

в) $y = e^{\sqrt[5]{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}}/\ln x$; г) $y = \operatorname{tg}\sqrt{\sin 2x + x^3}$.

4.1.30. а) $y = x\sin^3 5x + \operatorname{cosec}^2 x$; б) $y = \ln^3 \sin(x\cos x)$;

в) $y = \arcsin 8^{\sin x}/2^{\cos x}$; г) $y = \sqrt[3]{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x\ln x}}$.

4.2. Знайдіть похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої неявно.

4.2.1. $x^2y+y^2x=x^3y^3$.

4.2.2. $y=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}y$.

4.2.3. $\sin(xy)=x^2+y^2$.

4.2.4. $y\cos x=\sin(x-y)$.

4.2.5. $3^x+3^y=3^{x+y}$.

4.2.6. $x^3+y^2-4xy=0$.

4.2.7. $\ln(x+y)+x^2y=1$.

4.2.8. $x\sin y=x^2+y^2$.

4.2.9. $2^x-2^y=2^{x-y}$.

4.2.10. $\sin x-\cos y=x-y$.

4.2.11. $\cos(xy)+\sin(xy)=y$.

4.2.12. $y\cos x=x^2-y^2$.

4.2.13. $y^3+x^3y+xy^2=1$.

4.2.14. $x^4+y^4=x^3y^3$.

4.2.15. $y=x-\arcsin y$.

4.2.16. $x^3y+y^3x=x-y^2$.

4.2.17. $x^2y^2+2xy+x^3=y^3$.

4.2.18. $\sin(x+y)=x-y$.

4.2.19. $x^2+y^4x=x^3-2y$.

4.2.20. $x\operatorname{tg}y-y\operatorname{tg}x=yx$.

4.2.21. $x^3y-y^3x=(x-y)^3$.

4.2.22. $\operatorname{arctg}(y/x)=x-y^2$.

4.2.23. $5^x-5^y=5^{x+y}$.

4.2.24. $y\sin x+x\sin y=y$.

4.2.25. $3y\ln y=x^2(y+5)$.

4.2.26. $y^3-5y+6ax=0$.

4.2.27. $x^3y^2+2^{x-y}=y$.

4.2.28. $3^{x+y}+3^{x-y}=y^3$.

4.2.29. $y=x+e^{1+xy}$.

4.2.30. $\arcsin(x/y)+yx=y$.

4.3. Знайдіть похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, заданої параметрично.

4.3.1. $y=\sin t^2$, $\quad x=\cos t^2$.

4.3.2. $y=1/\cos^2 t$, $\quad x=\ln\operatorname{tg}t$.

4.3.3. $y=5\sin^3 t$, $\quad x=2\cos^3 t$.

4.3.4. $y=1/\sin^2 t$, $\quad x=\ln\operatorname{ctg}t$.

4.3.5. $y=\ln(1+t^4)$, $\quad x=\operatorname{arctg}t^2$.

4.3.6. $y=e^{-t^2}$, $\quad x=e^{-t}$.

4.3.7. $y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$, $\quad x=(\arcsin t)^2$.

4.3.8. $y=e^t\sin t$, $\quad x=e^t\cos t$.

4.3.9. $y=\dfrac{1}{\sin^2 t}$, $\quad x=\ln\cos t$.

4.3.10. $y = \dfrac{2t^2}{1+t^3}$, $\quad x = \dfrac{3t}{1+t^3}$.

4.3.11. $y = \sqrt{\ln \operatorname{tg} t}$, $\quad x = \sqrt{\operatorname{arctg} t}$.

4.3.12. $y = t - \operatorname{arctg} t$, $\quad x = \ln \operatorname{ctg} t$.

4.3.13. $y = \dfrac{\cos t}{\sin^2 t}$, $\quad x = (1+\cos t)^2$.

4.3.14. $y = \dfrac{\operatorname{tg} t}{1-t^2}$, $\quad x = \dfrac{\operatorname{ctg} 2t}{\sqrt{3}}$.

4.3.15. $y = \ln \dfrac{1+\sqrt{1-t^2}}{t}$, $\quad x = \dfrac{1}{\ln^2 t}$.

4.3.16. $y = \dfrac{t}{1+t^2}$, $\quad x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

4.3.17. $y = 2\sin^2 t + \sin 2t$, $\quad x = \operatorname{tg} t$.

4.3.18. $y = \ln \operatorname{ctg} e^t$, $\quad x = \operatorname{tg}(2e^{-t})$.

4.3.19. $y = \ln(1+\sqrt{t^2-1})$, $\quad x = \ln^2 t$.

4.3.20. $y = 3(\sin t - t\cos t)$, $\quad x = 3(t\sin t + \cos t)$.

4.3.21. $y = \arcsin(t-1)$, $\quad x = \sqrt{2t-t^2}$.

4.3.22. $y = t\sqrt{t^2-1}$, $\quad x = \ln(t+\sqrt{t^2-1})$.

4.3.23. $y = \arcsin\sqrt{1-t^2}$, $\quad x = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$.

4.3.24. $y = 4(1-\cos 2t)$, $\quad x = 4(2t - \sin 2t)$.

4.3.25. $y = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\quad x = \arcsin \dfrac{t}{1+t^2}$.

4.3.26. $y = t - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{t}$, $\quad x = t^3 - \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{t^2}$.

4.3.27. $y = (2+3\ln t)/t$, $\quad x = 6\cos^3 t$.

4.3.28. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{1+t^2}$, $\quad x = \arccos(1/t)$.

4.3.29. $y = \operatorname{tg}^3 t + \operatorname{ctg}^3 t$, $\quad x = \cos t - \sin t$.

4.3.30. $y = \arcsin\sqrt{1-t}$, $\quad x = \arccos\sqrt{1-t^2}$.

4.4. Знайдіть похідну $\frac{dy}{dx}$ функції, користуючись правилом логарифмічного диференціювання.

4.4.1. $y = x^{\arcsin x}$. **4.4.2.** $y = (\lg x)^{x/2}$.

4.4.3. $y = (x^3 + 1)^{\sin x}$. **4.4.4.** $y = (\cos 2x)^{\ln tgx/2}$.

4.4.5. $y = (\sin\sqrt{x})^{1/x}$. **4.4.6.** $y = x^{e^x}$.

4.4.7. $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{5x-1}$. **4.4.8.** $y = (x^5 + 1)^{\operatorname{ctg} x}$.

4.4.9. $y = x^{e^{-\operatorname{tg} x}}$. **4.4.10.** $y = (x^8 + 1)^{\operatorname{tg} x}$.

4.4.11. $y = \frac{(x-5)^2 \cdot \sqrt[3]{x^2+1}}{e^x (x+2)^5}$. **4.4.12.** $y = \frac{3^x (2x-1)(x+1)^4}{\sqrt{x}(x-3)^6}$.

4.4.13. $y = \frac{(x-1)^3 \cdot \sqrt[4]{x^2+x}}{4^x (3x-2)^3}$. **4.4.14.** $y = \frac{2^x (x-5)(x+1)^3}{\sqrt{x}(4x-3)^5}$.

4.4.15. $y = (x^3 - x)^{x^2+1}$. **4.4.16.** $y = (2x-3)^{\cos x}$.

4.4.17. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$. **4.4.18.** $y = (x \sin x)^{x^2}$.

4.4.19. $y = (x \cos x)^{\ln x}$. **4.4.20.** $y = x^{2^x}$.

4.4.21. $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$. **4.4.22.** $y = (\arcsin x)^{\sin x}$.

4.4.23. $y = (\cos x)^{\operatorname{tg} x}$. **4.4.24.** $y = x^{4^x}$.

4.4.25. $y = (4x-3)^{\arccos x}$. **4.4.26.** $y = (\ln(x+1))^{\ln^2 x}$.

4.4.27. $y = (\operatorname{ctg} 2x)^{\operatorname{ctg} x}$. **4.4.28.** $y = x^{\sin x} + (\sin x)^x$.

4.4.29. $y = (5x+2)^{\sin x}$. **4.4.30.** $y = x^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$.

4.5. Знайдіть похідну $\frac{d^2 y}{dx^2}$ функції, заданої параметрично:

4.5.1. $x = 3^t \cos t,\ y = 3^t \sin t.$ **4.5.2.** $x = \frac{1}{\cos t},\ y = \operatorname{tg} t - t.$

4.5.3. $x = \frac{1}{\sin t},\ y = \operatorname{ctg} t + t.$ **4.5.4.** $x = \lg\sin t,\ y = \lg\cos t.$

4.5.5. $x = \sin(\lg t),\ y = \operatorname{tg}(\lg t).$ **4.5.6.** $x = \sin^3 e^t,\ y = \cos^3 e^t.$

4.5.7. $x = \operatorname{arcctg} t,\ y = \log_3(t^2+1).$ **4.5.8.** $x = \ln(1+t^2),\ y = t - \operatorname{arctg} t.$

4.5.9. $x = \arcsin e^t$, $y = \sqrt{1 - e^{2t}}$. **4.5.10.** $x = \sin e^t$, $y = \cos e^t$.

4.5.11. $x = \ln \operatorname{ctg} t$, $y = \dfrac{1}{\sin 2t}$. **4.5.12.** $x = \ln t$, $y = \dfrac{t-1}{t+1}$.

4.5.13. $x = \ln(1+t)$, $y = \operatorname{arctg}\sqrt{t}$. **4.5.14.** $x = \operatorname{arctg} e^t$, $y = \dfrac{1}{e^{2t}+1}$.

4.5.15. $x = \operatorname{tg} 2^t$, $y = \ln\cos 2^t$. **4.5.16.** $x = \arccos 2t$, $y = \sqrt{1-4t^2}$.

4.5.17. $x = \ln(1+t^6)$, $y = \operatorname{arctg}(t^3)$. **4.5.18.** $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \log_2(t^2+1)$.

4.5.19. $x = \operatorname{tg} e^t$, $y = \ln\cos^2 e^t$. **4.5.20.** $x = \ln(1+t^4)$, $y = \operatorname{arctg}(t^2)$.

4.5.21. $x = \arcsin t$, $y = \sqrt{1-t^2}$. **4.5.22.** $x = \ln \operatorname{ctg} t$, $y = \dfrac{1}{\sin t}$.

4.5.23. $x = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 t$, $y = \dfrac{1}{\cos t}$. **4.5.24.** $x = \operatorname{ctg}^2 e^t$, $y = \dfrac{1}{\sin e^t}$.

4.5.25. $x = \sqrt{t^2+1}$, $y = \ln(t + \sqrt{t^2+1})$.

4.5.26. $x = \ln(1+4t^2)$, $y = 2t - \operatorname{arctg} 2t$.

4.5.27. $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$.

4.5.28. $x = \cos 2t - \ln \operatorname{ctg} t$, $y = \sin 2t$.

4.5.29. $x = \cos 2t + 2t\sin 2t$, $y = \sin 2t - 2t\cos 2t$.

4.5.30. $x = 5(2t - \sin 2t)$, $y = 10\sin^2 t$.

4.6. Розв'яжіть задачі на складання рівняння дотичної і нормалі кривої.

4.6.1. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 2x^3 - 3x^2$ в точках, в яких кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 12.

4.6.2. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ в точках еліпса, абсциси яких дорівнюють 1.

4.6.3. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, якщо дотична паралельна прямій $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

4.6.4. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = = 5x - x^2 + 2$, якщо дотична нахилена до осі абсцис під кутом $45°$.

4.6.5. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x\cdot\sqrt[3]{3x-1}$ в точці з абсцисою $x = 3$.

4.6.6. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x+1}$ в точці з абсцисою $x=1$.

4.6.7. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кола $x^2+y^2=4$ в точці, ордината якої дорівнює 1.

4.6.8. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ в точках, ордината якої дорівнює 1.

4.6.9. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^3+5x+3$ в точці перетину цієї кривої з віссю ординат.

4.6.10. Складіть рівняння дотичної і нормалі до еліпса $x=2\cos t$, $y=3\sin t$ в точці, для якої $t=\dfrac{\pi}{4}$.

4.6.11. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2+3x-4$ в точках перетину параболи з віссю абсцис.

4.6.12. Складіть рівняння дотичної і нормалі до астроїди $x=\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ у точці, що відповідає значенню $t=\dfrac{\pi}{4}$.

4.6.13. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=2x^2-4x+3$ в точці, в якій кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 8.

4.6.14. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x\sqrt{2x+3}$ у точці з абсцисою $x=3$.

4.6.15. Складіть рівняння дотичної і нормалі до лінії $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ у точці з абсцисою $x_0=3$.

4.6.16. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=(x+1)^3\sqrt{3-x}$ у точці з абсцисою $x_0=2$.

4.6.17. Складіть рівняння дотичної і нормалі до астроїди $x=2\sqrt{2}\cos^3 t,\quad y=2\sqrt{2}\sin^3 t$, проведених у точці, для якої $t=\dfrac{\pi}{4}$.

4.6.18. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x=2(t-\sin t),\quad y=2(1-\cos t)$, проведених у точці, для якої $t=\dfrac{\pi}{2}$.

4.6.19. Складіть рівняння дотичної і нормалі до параболи $y^2-y+2x-4=0$ у точках з абсцисою $x_0=-4$.

4.6.20. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^2+2xy+2y^4=5$ у точці $M_0(1;1)$.

4.6.21. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x=3(t-\sin t)$, $y=3(1-\cos t)$, проведених у точці, для якої $t=\frac{3}{2}\pi$.

4.6.22. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2-x-3$ у точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут $135°$.

4.6.23. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x\sqrt{2x-1}$ у точці з абсцисою $x=5$.

4.6.24. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^4+3xy^2+3y^4=1$ у точці $M_0(-1;1)$.

4.6.25. Складіть рівняння дотичної і нормалі до циклоїди $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, проведених у точці, для якої $t=\pi/2$.

4.6.26. Складіть рівняння дотичної і нормалі до астроїди $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ у точці, що відповідає значенню $t=\frac{\pi}{3}$.

4.6.27. Складіть рівняння дотичної і нормалі до півкубічної параболи $x=t^2$, $y=t^3$, проведених у точці, для якої $t=2$.

4.6.28. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y==x^2-x-5$ у точках, в яких дотичні утворюють з віссю Ox кут $45°$.

4.6.29. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $x^3-3xy^2+y^3=-3$ у точці $M_0(1;2)$.

4.6.30. Складіть рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=x^2+2x$, якщо дотична паралельна прямій $y=3x+1$.

Тема 5. ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ. ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Диференціал функції. Геометричний зміст диференціала. Застосування диференціалів у наближених обчисленнях. Диференціали вищих порядків. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа, Коші. Формули Тейлора і Маклорена. Правила Лопіталя.

Література: [3, розділ 4, п.п. 4.1—4.2], [4, розділ 5], [6, гл. 5, §4, 5], [7, розділ 6, §18, 19], [9], [10, розділ 4, §12, 20, 24], [11, розділ 4, §4], [12, розділ 3, §§1—7, 22—24].

$\boxed{\text{Т.5}}$ ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

5.1. Означення та геометричний зміст диференціала

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, тобто в цій точці має похідну

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

У загальному випадку $f'(x) \neq 0$. Тоді

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha, \text{ де } \alpha \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

звідки приріст функції

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \cdot \Delta x. \tag{3.14}$$

Перший із доданків лінійний відносно Δx, другий доданок —нескінченно мала вищого порядку, ніж Δx. Перший доданок складає, отже, головну частину приросту функції, яка і носить назву диференціала функції.

> *Диференціалом* dy функції $y = f(x)$ у точці x називають головну, лінійну відносно Δx, частину приросту функції $f(x)$ в цій точці:
>
> $$dy = f'(x)\Delta x$$

Диференціал dy називають також *диференціалом першого порядку*, або *першим диференціалом.*

Якщо $y = x$, то $dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$, тобто диференціал незалежної змінної x збігається з її приростом. Тому

$$\boxed{dy = f'(x)dx}$$

Геометричний зміст диференціала зрозумілий з рисунка 3.25. Маємо

$$NP = \Delta y,\ NQ = MN \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot f'(x) = f'(x)dx = dy.$$

Отже, *диференціал функції* $f(x)$ *при заданих значеннях* x *і* Δx *дорівнює приросту* NQ *ординати дотичної* MQ, *яка проведена до кривої* $y = f(x)$ *в точці M, коли аргумент отримує приріст* Δx.

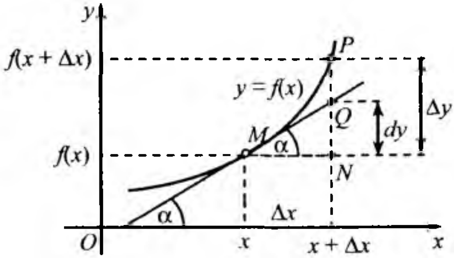


Рис. 3.25

5.2. Основні властивості диференціала

Нехай $u(x)$, $v(x)$, $f(u)$ — диференційовні функції. Тоді виконуються рівності

1. $dC = 0$ ($C = \text{const}$).	**2.** $d(u+v) = du + dv$.
3. $d(uv) = udv + vdu$.	**4.** $d(Cu) = Cdu$.
5. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $v \neq 0$.	**6.** $df(u) = f'(u)du$, $u = u(x)$.

Доведемо, наприклад, третю формулу. За означенням диференціала маємо:

$$d(uv) = (uv)'dx = (uv' + u'v)dx = uv'dx + vu'dx = udv + vdu \ .$$

Останню рівність називають властивістю *інваріантності* (*незмінності*) *форми диференціала першого порядку*, яка полягає в тому, що форма диференціала не залежить від того, є x незалежною змінною чи деякою диференційовною функцією.

5.3. Застосування диференціала в наближених обчисленнях та в теорії помилок

Із формули (3.14) випливає, що при малих Δx правильна наближена формула

$$\boxed{\Delta y \approx dy,} \tag{3.15}$$

або

$$\boxed{f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.}$$

Диференціал зазвичай відшукується значно простіше, ніж приріст функції, тому формулу (3.14) зручно використовувати для наближених обчислень значень функції.

Нехай $y = f(x)$, при цьому величина x визначається наближено, тобто з деякою абсолютною похибкою Δx, тоді і значення функції y матиме свою абсолютну похибку Δy. Відносна похибка при обчисленні значення функції y може бути наближено визначена за допомогою диференціала, тобто

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right|.$$

5.4. Диференціали вищих порядків

Диференціалом другого порядку двічі диференційовної функції $y = f(x)$ називають диференціал від диференціала першого порядку функції $f(x)$, тобто

$$d^2 y = d(dy).$$

Взагалі, n-м диференціалом $d^n y$, або диференціалом n-го порядку n раз диференційовної функції $y = f(x)$, називають диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$\boxed{d^n y = d(d^{n-1} y).}$$

Коли x — незалежна змінна, диференціали функції $y = f(x)$ обчислюють за формулами

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2, \qquad (3.16)$$

$$d^3 y = f'''(x)(dx)^3, \ \ldots, \ d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Якщо ж x — деяка функція від змінної t, тоді

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) =$$
$$= f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x.$$

Якщо x — залежна функція незалежної змінної t: $x = x(t)$, тоді

$$d^2 x = x''(t)(dt)^2$$

і

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)x''(t)(dt)^2. \qquad (3.17)$$

Порівнявши формули (3.16), (3.17), переконаємось, що для складеної функції $y = f(x)$, де $x = x(t)$, вигляд другого диференціала (3.17) відрізняється від вигляду формули (3.16) наявністю доданка $f'(x)x''(t)(dt)^2$. Це означає, що *диференціали другого і вище порядків* (на відміну від диференціалів першого порядку) *не мають інваріантної властивості.*

5.5. Деякі теореми диференціального числення

Функції, які на певному проміжку мають похідну, відзначаються цілком певними властивостями, знання яких допомагає досліджувати поведінку функцій на проміжку диференційовності.

Теорема 1 (*Ферма*). Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$ і набуває свого найбільшого або найменшого значення у деякій точці c цього інтервалу. Тоді, якщо в точці c існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Ця теорема має досить просте геометричне тлумачення. Якщо в точці $x = c$ функція $f(x)$ сягає найбільшого або найменшого значення (рис. 3.26 та 3.27 відповідно), то дотична до графіка цієї функції в точці $(c; f(c))$ паралельна осі абсцис.

Теорема 2 (*Ролля*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, має похідну в кожній точці інтервалу $(a;b)$ і на кінцях відрізка набуває однакових значень $f(a) = f(b)$, то існує принаймні одна точка $c \in (a;b)$, в якій $f'(c) = 0$.

Геометричне тлумачення цієї теореми зрозуміле з рис. 3.28 — 3.30.

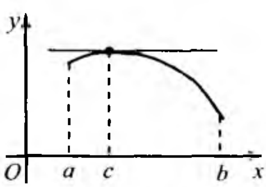


Рис. 3.26

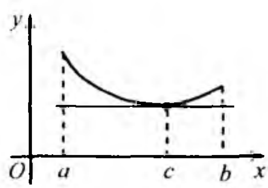


Рис. 3.27

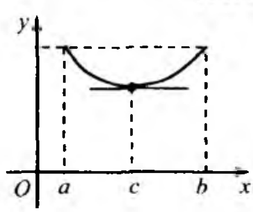


Рис. 3.28

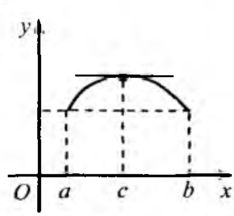


Рис. 3.29

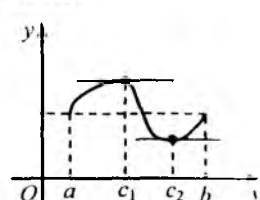


Рис. 3.30

Теорема 3 (*Лагранжа*). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, диференційовна в інтервалі $(a;b)$, то всередині цього інтервалу знайдеться хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій виконується рівність

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).}$$

Цю формулу називають формулою *скінченних приростів Лагранжа*. Її записують ще так:

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x, \ 0<\theta<1.$$

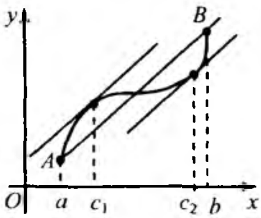


Рис. 3.31

Геометричний зміст теореми Лагранжа. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми Лагранжа, то на графіку цієї функції знайдеться хоча б одна точка, в якій дотична до графіка паралельна хорді, що сполучає кінці кривої $A(a; f(a))$ і $B(b; f(b))$ (рис. 3.31).

З теореми Лагранжа випливають кілька корисних наслідків:

1) якщо похідна $f'(x)=0$ для всіх точок проміжку, то $f(x)=\text{const}$;

2) якщо $f'(x)=c$ для всіх точок проміжку, то $f(x)=cx+d$, тобто функція є лінійною;

3) якщо похідна в деякій точці додатна (від'ємна), то в околі цієї точки функція зростає (спадає);

4) якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ диференційовні в інтервалі $(a;b)$, $f_1'(x)=f_2'(x)$, у точках a та b функції неперервні, тоді ці функції відрізняються сталою c, тобто

$$f_1(x)-f_2(x)=c.$$

Теорема 4 (*Коші*). Якщо функції $f(x)$ та $g(x)$ неперервні на відрізку $[a;b]$, диференційовні в інтервалі $(a;b)$, причому $g'(x)\neq 0$, $x \in (a;b)$, то існує хоча б одна точка $c \in (a;b)$, в якій виконується формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

5.6. Формули Тейлора і Маклорена

Для дослідження функцій (відшукання значення функції, границі функції тощо) в ряді випадків використовують формулу Тейлора.

Теорема 5 Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і деякому її околі похідні до $(n+1)$-го порядку включно і нехай x — довільне значення аргументу із вказаного околу $(x \neq x_0)$. Тоді між точками x_0 і x знайдеться така точка c, що виконується *формула Тейлора*

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \end{aligned}}$$

де $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ — залишковий член у формі Лагранжа, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$.

Вираз

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

називають *многочленом Тейлора*. Отже, формула Тейлора складається з двох частин: многочлена Тейлора та залишкового члена. Величина $R_n(x)$ показує, яку похибку ми робимо, замінюючи функцію $f(x)$ її многочленом Тейлора.

Формулою Маклорена називають формулу Тейлора при $x_0 = 0$:

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},}$$

де точка c міститься між 0 і x.

Наведемо розклади деяких елементарних функцій за формулою Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x); \tag{3.18}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x);$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \tag{3.19}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x),$$

зокрема, при $m = -1$ маємо формули

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x), \tag{3.20}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + R_n(x). \tag{3.21}$$

5.6. Правила Лопіталя

Досить часто невизначеності $\frac{0}{0}$ та $\frac{\infty}{\infty}$ розкривають за допомогою похідних.

Теорема 6 (*правило Лопіталя розкриття невизначеності* $\frac{0}{0}$). Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ задовольняють умови:

1) визначені і диференційовні в околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, причому $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, тобто $f(x)$, $g(x)$ — одночасно нескінченно малі при $x \to x_0$;

3) існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Доведення. Нехай x_0 — скінченне число. Якщо в точці x_0 функції $f(x)$ та $g(x)$ невизначені або не дорівнюють нулю, вважатимемо, що $f(x_0) = g(x_0) = 0$ (таке припущення не впливає на значення границі). Тоді ці функції будуть неперервні в точці x_0 та її околі. Візьмемо відрізок $[x_0;\ x]$ із цього околу. За теоремою Коші знайдеться така точка $c \in (x_0;\ x)$, для якої виконується рівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Оскільки $f(x_0) = g(x_0) = 0$, то формула набуває вигляду

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Рис. 3.32

З умови $x \to x_0$ випливає, що $c \to x_0$ (рис. 3.32). Тоді, враховуючи третю умову теореми, дістанемо

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження.

1. Теорема правильна і в тому разі, коли $x_0 = \infty$.

2. Інколи студенти припускаються *грубої помилки*, шукаючи замість границі $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ границю $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \right)'$.

3. Якщо відношення $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ є знову невизначеністю $\dfrac{0}{0}$ і функції $f'(x)$, $g'(x)$ задовольняють умови теореми, то правило Лопіталя можна застосувати повторно, тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Правило Лопіталя названо іменем математика, який уперше його опублікував, але його вперше відкрив І. Бернуллі, тому правило Лопіталя ще називають правилом Бернуллі–Лопіталя.

Сформулюємо теорему, за якою можна розкривати невизначеності вигляду $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 7 (*правило Лопіталя розкриття невизначеності* $\frac{\infty}{\infty}$). Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ задовольняють умови:

1) визначені і диференційовні в околі точки x_0;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, $g'(x) \neq 0$ в цьому околі;

3) існує скінченна границя $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тоді існує границя відношення функцій $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ і

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Правило Лопіталя безпосередньо застосовують до розкриття невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, які називаються основними. Інші невизначеності $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 зводять до основних.

1. Невизначеність $0\cdot\infty$ (тобто маємо границю $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, де $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$) зводять до невизначеності $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ так:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right) \text{ або } f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

2. Невизначеність $\infty-\infty$ ($\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)-g(x))$, коли $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$) зводять до невизначеності $\frac{0}{0}$ так:

$$f(x)-g(x) = f(x)g(x)\left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

3. Невизначеності 1^∞, 0^0, ∞^0 зводять до невизначеності $0\cdot\infty$ за допомогою попереднього логарифмування або подання функції $[f(x)]^{g(x)}$ у вигляді $e^{g(x)\ln f(x)}$ (тут використано основну логарифмічну тотожність $a=e^{\ln a}$).

Т.5 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть диференціал функції $y=x^2+2x$ у точці $x=2$.

Розв'язання. Перший спосіб. Оскільки диференціал — це головна, лінійна відносно Δx, частина приросту функції у точці *x*, знайдемо приріст даної функції у точці $x=2$, тобто

$$\Delta y=y(2+\Delta x)-y(2)=(2+\Delta x)^2+2(2+\Delta x)-8=6\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Лінійною частиною приросту є вираз $6\Delta x$. Отже, $dy(2)=6\Delta x$.

Другий спосіб. Оскільки $dy=f'(x)dx$, то маємо

$$y'=2x+2,\ y'(2)=6,\ dy(2)=6dx.$$

2. Знайдіть диференціал функції $y=\sqrt{1-x^2}+\ln\sin x$.

Розв'язання. Маємо

$$dy=d(\sqrt{1-x^2}+\ln\sin x)=(\sqrt{1-x^2}+\ln\sin x)'dx=(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\operatorname{ctg}x)dx.$$

3. Обчисліть наближено за допомогою диференціала значення $\sqrt{15}$.

Розв'язання. Нехай $f(x)=\sqrt{x}$. Покладемо $x=16$, $x+\Delta x=15$, $\Delta x=-1$. Тоді $\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x$, або $\sqrt{15}\approx 4+\frac{1}{2\cdot 4}(-1)=\frac{31}{8}$. Отже,

$$\sqrt{15}\approx\frac{31}{8}=3{,}875.$$

4. Обчисліть наближено значення $\operatorname{tg}54^\circ$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{tg}x$. Тоді

$$\operatorname{tg}(x+\Delta x)\approx\operatorname{tg}x+(\operatorname{tg}x)'\Delta x,\ \text{або}\ \operatorname{tg}(x+\Delta x)\approx\operatorname{tg}x+\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\Delta x.$$

Переведемо градуси у радіани (обов'язкова дія для Δx !): $54° = \frac{54\pi}{180} = \frac{3\pi}{10}$.

Нехай $x = \frac{\pi}{4}$ (за x можна також взяти значення $\frac{\pi}{3}$), $x + \Delta x = \frac{3\pi}{10}$, $\Delta x = \frac{3\pi}{10} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{20}$, тоді

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{10} \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{20} = 1 + \frac{\pi}{10} \approx 1{,}314 .$$

Отже, $\operatorname{tg} 54° \approx 1{,}314$.

5. Знайдіть $d^3 y$, якщо $y = \cos 3x$.

Розв'язання. Знайдемо похідні

$$y' = -3\sin 3x\,,\ \ y'' = -9\cos 3x\,,\ \ y''' = 27\sin 3x\,.$$

Тоді

$$d^3 y = 27\sin 3x(dx)^3\,.$$

6. Знайдіть $d^2 y(0)$, якщо $y = 4^{-x^2}$.

Розв'язання. Знайдемо похідну другого порядку в точці $x = 0$. Маємо

$$y' = 4^{-x^2} \ln 4(-2x)\,,\ \ y'' = -2\ln 4[(4^{-x^2})'x + 4^{-x^2}] = -2\ln 4 \cdot 4^{-x^2}[-2x^2 \ln 4 + 1]\,.$$

Отже,

$$d^2 y(0) = y''(0)dx^2 = -2\ln 4dx^2\,.$$

Розкладання функції за формулою Тейлора (чи Маклорена) часто призводить до громіздких перетворень. На практиці намагаються використати для цього готові розклади основних елементарних функцій.

7. Розкладіть за формулою Маклорена функції:

а) $f(x) = \frac{1}{4 + x^2}$; б) $f(x) = \ln(2x^2 + 7x + 3)$.

Розв'язання: а) запишемо функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2}\,.$$

Тоді за формулою (3.20) маємо

$$f(x)=\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^4-\ldots+(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+R_n(x)\right];$$

б) виконаємо перетворення

$$\ln(2x^2+7x+3)=\ln(1+2x)(x+3)=\ln(1+2x)+\ln(x+3)=$$

$$=\ln(1+2x)+\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)+\ln 3.$$

Скориставшись двічі формулою (3.18), дістанемо

$$\ln(1+2x)=2x-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2x)^n}{n}+R_n^1(x),$$

$$\ln(1+\frac{x}{3})=\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^3-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n+R_n^2(x),$$

$$\ln(2x^2+7x+3)=\ln 3+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(2^k+\frac{1}{3^k}\right)x^k+R_n(x).$$

Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1.$$

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. Безпосередня підстановка $x=0$ дає невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}.$$

Знову маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Правило Лопіталя застосовуємо ще раз:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{1+1}{1}=2.$$

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n}}{a^{x}}(n\in N,\ a>1)$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^{n})'}{(a^{x})'}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^{x}\ln a}.$$

Знову дістали невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Повторюючи процес n разів, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n}}{a^{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{a^{x}\ln a}=\lim_{x\to\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^{x}\ln^{2}a}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\dots=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{a^{x}\ln^{n}a}=\frac{n!}{\infty}=0.$$

12. Обчисліть $\lim\limits_{x\to+0}x^{2}\ln x$.

Розв'язання. У цьому разі маємо невизначеність $0\cdot\infty$. Перейдемо до невизначеності $\dfrac{\infty}{\infty}$ і застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to+0}x^{2}\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x^{2}}=\lim_{x\to+0}\frac{(\ln x)'}{(1/x^{2})'}=\lim_{x\to+0}\frac{1/x}{-2/x^{3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}x^{2}=0.$$

Зауваження. Переконайтесь самостійно, що перехід до невизначеності $\dfrac{0}{0}$ лише ускладнює задачу.

13. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Знайдемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}(1+\cos x)=1+\lim_{x\to\infty}\cos x .$$

Остання границя не існує. Тоді як

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1 .$$

Висновок. Границя відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ може існувати і тоді, коли відношення похідних $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ границі не має. Існування границі $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ є лише достатньою умовою існування границі $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

14. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Розв'язання. Цей приклад є ще однією ілюстрацією неможливості застосування правила Лопіталя. Справді,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{1+x^2})'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

і т. д. Тоді як

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1 .$$

15. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x-\sec x)$.

Розв'язання. Тут невизначеність $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x-\sec x)=\lim_{x\to\pi/2}(\operatorname{tg}x-\frac{1}{\cos x})=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pi/2}\frac{(\sin x-1)'}{(\cos x)'}=\lim_{x\to\pi/2}\frac{\cos x}{-\sin x}=0\,.$$

16. Обчисліть $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}$.

Розв'язання. Підставивши у вираз значення $x=\frac{\pi}{4}$, переконаємося, що маємо невизначеність 0^0. Для зручності виконаємо заміну $\pi-2x=t$, тоді $t\to 0$, $x=\frac{\pi-t}{2}$, $\cos x=\sin\frac{t}{2}$. Отже,

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}=\lim_{t\to 0}t^{\sin(t/2)}=\lim_{t\to 0}e^{\sin(t/2)\ln t}=e^{\lim\limits_{t\to 0}\sin(t/2)\ln t}=e^{A}\,,$$

$$A=\lim_{t\to 0}\sin(t/2)\ln t=[0\cdot\infty]=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}t\ln t=[0\cdot\infty]=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{1/t}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{(\ln t)'}{(1/t)'}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{1/t}{-1/t^2}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}t=0\,.$$

Тоді

$$\lim_{x\to\pi/2}(\pi-2x)^{\cos x}=e^0=1\,.$$

Т.5 ВПРАВИ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

1. Знайдіть приріст та диференціал функції $y=x^2-4x+3$, якщо:

а) $x=1,\Delta x=0{,}1$; б) $x=3,\Delta x=0{,}05$.

2. Знайдіть диференціал функцій:

1) $y=(4-x^2)2^x$. 2) $y=\sqrt{\sin x}+\operatorname{tg}^2 x$. 3) $y=\ln\arcsin x$.

4) $y=x^{2x+1}$. 5) $y=\frac{\arccos x}{x^2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$. 6) $y=\sqrt[4]{x}+x\log_2\operatorname{tg}x$.

3. Знайдіть диференціал функцій, заданих неявно, у точці $M_0(x_0; y_0)$:

1) $x^3 + y^3 + 3xy - 15 = 0$, $M_0(1; 2)$.

2) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$, $M_0(0; 1)$.

4. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразів:

1) $\sqrt[3]{131}$. 2) $(0{,}95)^6$. 3) $\sin 9°$. 4) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

5. Розкладіть многочлен $P_4(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ за степенями двочлена $x - 2$.

6. Розкладіть функції за формулою Маклорена до $o(x^n)$:

1) $\frac{1}{1-2x}$. 2) $\frac{1}{2+x}$. 3) $\frac{1}{(x-1)(x+2)}$.

4) $\frac{x^2+1}{x-2}$. 5) $x\cos^2 x$. 6) $\ln\frac{1-2x}{1+x}$.

7) $x\sin x$. 8) $\frac{1}{\sqrt{1+4x}}$. 9) $\ln(x^2 - 3x + 2)$.

Обчисліть границі, використовуючи правило Лопіталя:

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7^x - 3}{x^2 + 2}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)e^{-x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} 2x)^x$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos 2x - \sin x}{x^3}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \cdot 3^{\frac{1}{x^2}}$.

13. $\lim\limits_{x\to 3}\ln(7-2x)\cdot\ln(6-2x)$. **14.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 8x)}$. **15.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{tg} x\cdot\ln^2 x$. **17.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$. **18.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$. **20.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-(e^x + e^{-x})\cos x}{x^4}$. **21.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x + x^2}{e^{\sqrt{x}}}$.

Відповіді

1. *а*) $\Delta y=-0{,}19$, $dy=-0{,}2$; б) $dy=0{,}1$, $\Delta y=0{,}1025$. **2.** 1) $2^x[(4-x^2)\ln 2-2x]dx$; 4) $x^{2x}(2x\ln x+2x+1)dx$. **3.** 1) $-3dx/5$; 2) dx . **4.** 1) 5,08; 2) 0,7; 3) 0,157; 4) 0,81. **5.** $(x-2)^4+3(x-2)^3-7(x-2)$. **6.** 2) *Вказівка.* Запишіть вираз у вигляді $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x/2}$, після чого скористайтесь формулою (3.20); 4) *Вказівка.* Зведіть вираз до вигляду $x+2-\frac{5}{2(1-x/2)}$ і скористайтесь формулою (3.21). **7.** ∞ . **8.** 0. **9.** 1. **10.** –11/6. **11.** e^2 . **12.** ∞ . **13.** 0. **14.** 3/8. **15.** 0. **16.** 0. **17.** 0,5. **18** 1. **19** 1. **20.** 1/3. **21.** 0.

Т.5 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

5.1. Обчисліть наближено за допомогою першого диференціала значення виразу.

5.1.1. $\cos 61°$. **5.1.2.** $e^{0,2}$. **5.1.3.** $\sin 33°$.

5.1.4. $\operatorname{arctg} 1,05$. **5.1.5.** $\sqrt{120}$. **5.1.6.** $\sqrt[3]{340}$.

5.1.7. $\sqrt[3]{66}$. **5.1.8.** $\sqrt[5]{33}$. **5.1.9.** $\sqrt[6]{70}$.

5.1.10. $\cos 85°$. **5.1.11.** $\sin 8°$. **5.1.12.** $\sin 28°$.

5.1.13. $\operatorname{arctg} 0,95$. **5.1.14.** $\operatorname{arctg} 0,9$. **5.1.15.** $e^{0,3}$.

5.1.16. $\ln 1,05$. **5.1.17.** $\ln 0,97$. **5.1.18.** $\ln 1,08$.

5.1.19. $\operatorname{tg} 47°$. **5.1.20.** $\operatorname{ctg} 50°$. **5.1.21.** $(1,02)^5$.

5.1.22. $\arccos 0,45$. **5.1.23.** $\arcsin 0,52$. **5.1.24.** $(1,97)^6$.

5.1.25. $(2,04)^4$. **5.1.26.** $\ln \operatorname{tg} 48°$. **5.1.27.** $\ln \operatorname{tg} 43°$.

5.1.28. $\cos 86°$. **5.1.29.** $\sin 26°$. **5.1.30.** $\operatorname{tg} 40°$.

5.2. Знайдіть диференціал d^2y у точці x_0 .

5.2.1. $y=x\sqrt{x-3}$, $x_0=12$. **5.2.2.** $y=x^2\cdot\sqrt{x-5}$, $x_0=6$.

5.2.3. $y=x^2\cdot\sqrt{2x+3}$, $x_0=11$. **5.2.4.** $y=(2x-1)^2\cdot\sqrt{x+2}$, $x_0=7$.

5.2.5. $y=(\ln x)\cdot\sqrt{2x-1}$, $x_0=5$. **5.2.6.** $y=(\ln x)\cdot\sqrt{2x+1}$, $x_0=12$.

5.2.7. $y=\sin^3 x\cdot\cos^5 x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$. **5.2.8.** $y=\sin^2 x\cdot\cos^4 x$, $x_0=\frac{\pi}{6}$.

5.2.9. $y = \sin^3 x \cdot \cos^7 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2.10. $y = \sin^4 x \cdot \cos^6 x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5.2.11. $y = \sin^3 x \cdot \mathrm{tg}^5 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2.12. $y = \sin^2 x \cdot \mathrm{tg}^4 x,\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5.2.13. $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{5x+2},\ x_0 = 5$.

5.2.14. $y = (2x-1)\cdot\sqrt[4]{3x+4},\ x_0 = 4$.

5.2.15. $y = (x+1)^2\cdot\sqrt[3]{3x+5},\ x_0 = 1$.

5.2.16. $y = (3x-1)^3\cdot\sqrt[4]{7x+2},\ x_0 = 2$.

5.2.17. $y = (x-1)^5\cdot\sqrt[3]{2x-2},\ x_0 = 5$.

5.2.18. $y = (4x-1)^3\cdot\sqrt[5]{x-2},\ x_0 = 3$.

5.2.19. $y = \frac{\sqrt[3]{3x+2}}{x^5},\ x_0 = 2$.

5.2.20. $y = \frac{\sqrt{x+5}}{(x-2)^3},\ x_0 = 4$.

5.2.21. $y = \frac{\sqrt[5]{x^2-4}}{x},\ x_0 = 6$.

5.2.22. $y = \frac{\sqrt[4]{x^2-9}}{x^2},\ x_0 = 5$.

5.2.23. $y = \frac{\sin^3 x}{\cos x},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2.24. $y = \frac{\cos^4 x}{\sin x},\ x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5.2.25. $y = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x},\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2.26. $y = \mathrm{tg}^4 x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$.

5.2.27. $y = \mathrm{ctg}^5 x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5.2.28. $y = (x+1)^3\cdot\sqrt[3]{x+2},\ x_0 = 6$.

5.2.29. $y = x^4\cdot\sqrt{2x+7},\ x_0 = 9$.

5.2.30. $y = (2x-3)^2\cdot\sqrt{x+3},\ x_0 = 1$.

5.3. Знайдіть похідну $y^{(n)}$ функції, використовуючи формулу Лейбніца:

5.3.1. $y = e^{2x}(x^3-3x)$, $n = 10$.

5.3.2. $y = (x^3-2x)\sin 2x$, $n = 12$.

5.3.3. $y = 2^x(3x^3-5)$, $n = 15$.

5.3.4. $y = (x^3+2x^2)\ln x$, $n = 8$.

5.3.5. $y = (6x^2+4)\ln x$, $n = 10$.

5.3.6. $y = (x^2-12)\cdot 2^x$, $n = 9$.

5.3.7. $y = (x^3+5x^2)\sin x$, $n = 11$.

5.3.8. $y = (x^3-2x)\cos x$, $n = 9$.

5.3.9. $y = (x^3-4x+3)\cos 2x$, $n = 8$.

5.3.10. $y = (x^3+2x+3)\ln x$, $n = 7$.

5.3.11. $y = (x^2-5x)\ln(x+1)$, $n = 8$.

5.3.12. $y = (x^2+7)\ln(x-2)$, $n = 10$.

5.3.13. $y = (x^2-9x)\ln(x-2)$, $n = 6$.

5.3.14. $y = (2x^2-11)\cdot 3^x$, $n = 9$.

5.3.15. $y = (4x^2-x)\cdot 4^{-x}$, $n = 10$.

5.3.16. $y = (2x^3-4x^2)\cdot 5^{-x}$, $n = 7$.

5.3.17. $y = (x^2+3x)\cdot 6^{-x}$, $n = 8$.

5.3.18. $y = e^{-x}(x^3-x^2+2)$, $n = 10$.

5.3.19. $y = 2^{-x-1}(x^3-6x+3)$, $n = 7$.

5.3.20. $y = 3^{-x}(2x^2+x+3)$, $n = 8$.

5.3.21. $y=(4x^3-1)\cos 2x$, $n=10$. **5.3.22.** $y=(3x^2-4x)\cos 2x$, $n=9$.

5.3.23. $y=(5x^2-3x)\sin 3x$, $n=11$. **5.3.24.** $y=(6x^3-1)\sin 4x$, $n=15$.

5.3.25. $y=(2x^3-1)\ln(x-3)$, $n=7$. **5.3.26.** $y=(3x^3+2)\ln x$, $n=8$.

5.3.27. $y=(x^2-1)\ln(2x-1)$, $n=9$. **5.3.28.** $y=e^{-2x}(x^3-6)$, $n=8$.

5.3.29. $y=(x^3-3)\ln(2x+1)$, $n=8$. **5.3.30.** $y=2^{-x}(x^3-4)$, $n=10$.

5.4. Знайдіть границі, використовуючи правило Лопіталя:

5.4.1. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x}{x^2-5x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

5.4.2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x}{x^2+3x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{tg} x)^x$.

5.4.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

5.4.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+1)4^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(x^2-8)}{2x^2-5x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

5.4.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-x-2)\cdot 3^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

5.4.6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)\operatorname{ctg} x\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

5.4.7. а) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln x\ln(x-1)\right]$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$.

5.4.8. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^2e^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

5.4.9. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^4\cdot 2^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\cos x-x\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

5.4.10. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2}\cdot 2^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 4x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

5.4.11. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4}\cdot 5^{-\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{x^{-2}}$.

5.4.12. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-4}\cdot 6^{-\frac{1}{x^4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt[5]{x^4}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^x$.

5.4.13. а) $\lim\limits_{x\to 2} \ln(5-2x)\cdot\ln(4-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

5.4.14. а) $\lim\limits_{x\to 3} \ln(x-3)\cdot\ln(7-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

5.4.15. а) $\lim\limits_{x\to 1} \ln(2x-1)\cdot\ln(2-2x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin 5x)}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

5.4.16. а) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)\operatorname{ctg}^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 7x)}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$.

5.4.17. а) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^2 x-3\cos x+2)\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{tg}^3 x)}{\ln(\sin 4x)}$; в) $\lim\limits_{x\to+0} x^{\operatorname{tg} x}$.

5.4.18. а) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^2 x-1)\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

5.4.19. а) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos^2 x)\cdot e^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln^3 x}{\sqrt{x}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.4.20. а) $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin x\cdot\ln^2(2x)$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.4.21. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^3\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x+3^x}{x^3-x+1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\arcsin x}$.

5.4.22. а) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5^x-3^x}{x^2-6x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to+0} (-\ln x)^x$.

5.4.23. а) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[4]{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+4x-6}{(1,1)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

5.4.24. а) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\cdot\ln^2 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-x-2}{(1,5)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

5.4.25. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^8\cdot 2^{\frac{1}{x^4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+10x-20}{(2,5)^x}$; в) $\lim\limits_{x\to 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}}$.

5.4.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2+4x+5)\cdot 3^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+3x+1)}{\ln(2x^2-1)}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\operatorname{arc\,tg} 2x}$.

5.4.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^2+3x+2)\cdot 6^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

5.4.28. а) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln^3 x$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(3x^2+2^x)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x-\sin x}$.

5.4.29. а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\cdot\ln^2(x-1)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(4x^2+3^x)}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\ln x^{\ln x}$.

5.4.30. а) $\lim\limits_{x\to 0} x^{-6}\cdot 2^{-\frac{1}{x^6}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{e^{\operatorname{tg} x}-1}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^{-x}\right)^{e^{-x}}$.

Тема 6. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Монотонність функції. Екстремум. Інтервали опуклості та вгнутості, точки перегину. Асимптоти. Найбільше та найменше значення функції. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка.

Література: [2, розділ 5], [4, розділ 5], [6, розділ 5, §6], [7, розділ 6, §20, 21], [9], [10, розділ 4, §§27—31], [11, розділ 5, §1], [12, розділ 5, §3, 4].

Т.6 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

6.1. Зростання і спадання функцій

Функцію $f(x)$ називають *зростаючою* (*спадною*) на інтервалі $(a;b)$, якщо для довільних двох точок x_1 та x_2 із вказаного інтервалу таких, що $x_1<x_2$, виконується нерівність

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)).$$

Достатні ознаки зростання та спадання функції:

Теорема 1 Нехай функція $f(x)$ диференційовна на інтервалі $(a;b)$. Тоді

1) якщо $f'(x) > 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на $(a;b)$;

2) якщо $f'(x) < 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на $(a;b)$;

3) якщо $f'(x) = 0$ для всіх $x \in (a;b)$, то функція $f(x)$ стала на $(a;b)$.

Доведення проведемо для випадку, коли $f'(x) > 0$. Візьмемо довільні точки x_1 та x_2 ($x_1 < x_2$) з інтервалу $(a;b)$. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ виконуються умови теореми Лагранжа, отже,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \text{ де } c \in (x_1; x_2).$$

Оскільки за умовою $f'(c) > 0$, $x_2 - x_1 > 0$, то $f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, тобто $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Це означає, що функція $f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ зростає.

Аналогічно доводять твердження теореми для випадків, коли $f'(x) < 0$ або $f'(x) = 0$.

Теорема 2 (*необхідна умова зростання* (*спадання*) *функції*). Якщо диференційовна на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає), то $f'(x) \geq 0$ $f'(x) \leq 0$ для всіх $x \in (a;b)$.

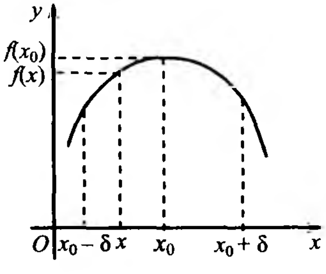
Наприклад, функція $y = x^3$ зростає на всій числовій осі, її похідна $y' = 3x^2 > 0$ для всіх $x \neq 0$ і $y' = 0$, якщо $x = 0$.

6.2. Локальний екстремум функції

Точку x_0 називають *точкою локального максимуму* (*мінімуму*) функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $0 < |x - x_0| < \delta$ точки x_0, який належить області визначення функції, і для всіх x з цього околу виконується нерівність

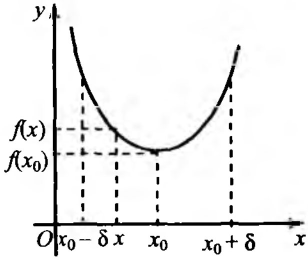
$$f(x) < f(x_0) \; (f(x) > f(x_0)).$$

Геометричний зміст означення зрозумілий з рис. 3.32 та 3.33.



x_0 — точка максимуму

Рис. 3.32



x_0 — точка мінімуму

Рис. 3.32

Точки локального максимуму і локального мінімуму називають *точками локального екстремуму*, а значення функції у цих точках називають відповідно *локальним максимумом* і *локальним мінімумом* або *локальним екстремумом*.

З'ясуємо умови існування локального екстремуму.

> **Теорема 1** (*необхідна умова локального екстремуму*). Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то $f'(x_0)=0$.

Доведення. Нехай x_0 — точка максимуму. Згідно з означенням це означає, що в околі точки x_0 виконується нерівність $f(x_0) > f(x_0+\Delta x)$. Тоді $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}<0$, якщо $\Delta x>0$, і $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}>0$, якщо $\Delta x<0$.

За умовою теореми існує похідна

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Звідси випливає, що $f'(x_0)\ge 0$ для $\Delta x>0$ і $f'(x_0)\le 0$ для $\Delta x<0$. Залишається єдина можливість $f'(x_0)=0$.

Геометричний зміст теореми 1. Якщо функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний екстремум і диференційовна в цій точці, то в цій точці існує дотична до графіка функції $y=f(x)$, і ця дотична паралельна осі Ox (рис. 3.34).

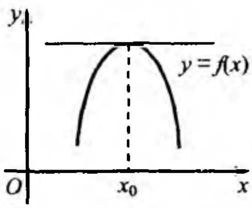


Рис. 3.34

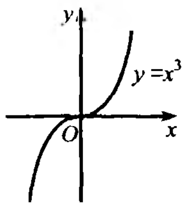


Рис. 3.34

Умова $f'(x_0)=0$ є необхідною, але не достатньою для того, щоб диференційовна в точці x_0 функція мала локальний екстремум. Наприклад, похідна функції $y=x^3$ в точці $x=0$ дорівнює нулю, але не має в цій точці екстремуму (рис. 3.35). Проте існують функції, які в точках екстремуму не мають похідних. Так, функція $y=|x|$ має в точці $x=0$ мінімум, але не має в цій точці похідної (рис. 3.36). Ще один приклад. Функція $y=\sqrt[3]{x}$ недиференційовна в точці $x=0$ і не має в цій точці екстремуму (рис. 3.37).

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними*. Критичні точки — це точки можливого екстремуму.

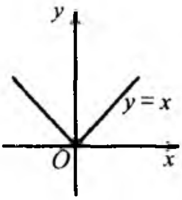


Рис. 3.36

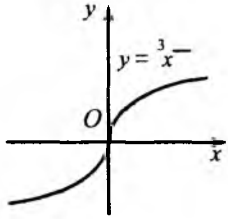


Рис. 3.37

Висновок. Якщо функція має в точці локальний екстремум, то ця точка обов'язково є критичною. Проте не всяка критична точка є екстремальною.

Теорема 2 (*перша достатня умова локального екстремуму*). Нехай x_0 критична точка функції $f(x)$, яка в цій точці неперервна, і нехай існує окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, в якому функція має похідну $f'(x)$, крім, можливо, точки x_0. Тоді:

1) якщо в інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ похідна $f'(x)>0$, а в інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ похідна $f'(x)<0$, то точка x_0 є точкою локального *максимуму* функції $f(x)$;

2) якщо в інтервалі $(x_0-\delta; x_0)$ похідна $f'(x)<0$, а в інтервалі $(x_0; x_0+\delta)$ похідна $f'(x)>0$, то точка x_0 є точкою локального *мінімуму* функції $f(x)$;

3) якщо в обох інтервалах $(x_0-\delta; x_0)$ і $(x_0; x_0+\delta)$ похідна $f'(x)$ має той самий знак, то точка x_0 не є екстремальною точкою функції $f(x)$.

Іншими словами, якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то x_0 — точка локального максимуму; якщо знак похідної змінюється з мінуса на плюс, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо похідна не змінює знаку, то в точці x_0 екстремуму немає.

Дослідити функцію на екстремум означає знайти всі її екстремуми.

Правило дослідження функції на екстремум

Щоб знайти локальний екстремум функції $f(x)$, треба:

1) знайти критичні точки функції $f(x)$. Для цього слід розв'язати рівняння $f'(x)=0$ і серед його розв'язків вибрати тільки ті корені, які є внутрішніми точками області існування функції; знайти точки, в яких похідна не існує;

2) якщо критичні точки є, то треба дослідити знак похідної в кожному з інтервалів, на які розбивається область існування цими критичними точками. Для цього достатньо визначити знак похідної в якій-небудь одній точці інтервалу, оскільки похідна може змінити знак лише переходячи через критичну точку;

3) за зміною знака $f'(x)$ при переході через критичні точки зліва направо визначити точки максимумів та мінімумів і обчислити значення функції $f(x)$ в цих точках.

Теорема 3 (*друга достатня умова локального екстремуму*). Нехай x_0 — стаціонарна точка функції $f(x)$, тобто $f'(x_0)=0$, і в околі точки x_0 існує друга неперервна похідна, причому $f''(x_0)\neq 0$. Якщо $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка локального мінімуму; якщо $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимуму.

Справді, нехай для визначеності $f''(x_0)>0$. Оскільки

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0,$$

то $\dfrac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x}>0$ в достатньо малому околі точки x_0, причому якщо $\Delta x<0$, то $f'(x_0+\Delta x)>0$; якщо $\Delta x>0$, то $f'(x_0+\Delta x)<0$.

Отже, при переході через точку x_0 перша похідна змінює знак з мінуса на плюс. Це означає, що x_0 — точка локального мінімуму.

Теорема 4 (*третя достатня умова локального екстремуму*). Нехай в околі стаціонарної точки x_0 існує неперервна похідна $f^{(n)}(x)$, причому $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, а $f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$. Тоді

1) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0)<0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний максимум;

2) якщо n — парне і $f^{(n)}(x_0)>0$, то функція $f(x)$ має в точці x_0 локальний мінімум;

3) якщо n — непарне, то функція $f(x)$ в точці x_0 локального екстремуму не має.

6.3. Найбільше та найменше значення функції

Не слід плутати локальний максимум (мінімум) з найбільшим (найменшим) значенням функції, якого вона досягає на відрізку. Локальних максимумів і мінімумів функція може мати кілька, тоді як найбільше значення (його ще називають абсолютним максимумом), якщо воно існує, єдине. Це саме стосується і найменшого значення (абсолютного мінімуму) функції.

Щоб знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$, потрібно: 1) знайти похідну $f'(x)$ і визначити критичні точки даної функції;   2) обчислити значення функції в тих критичних точках, що належать інтервалу $(a; b)$, а також у точках a і b;   3) серед одержаних значень вибрати найбільше і найменше.

6.4. Опуклість і вгнутість кривих. Точки перегину

Криву $y = f(x)$ називають *опуклою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать нижче довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 3.38).

Криву $y = f(x)$ називають *вгнутою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі її точки, крім точки дотику, лежать вище довільної її дотичної на цьому інтервалі (рис. 3.39).

Точкою перегину називають таку точку кривої, яка відділяє її опуклу частину від вгнутої (рис. 3.40).

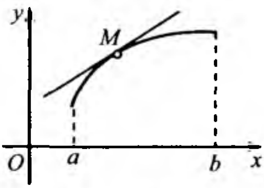


Рис. 3.38

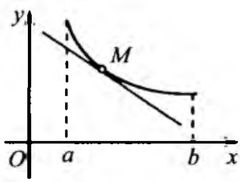


Рис. 3.39

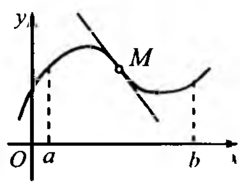


Рис. 3.40

Для дослідження графіка функції на опуклість та вгнутість застосовують другу похідну функції.

Теорема. Нехай функція $y = f(x)$ є двічі диференційовною на $(a; b)$. Тоді: 1) якщо $f''(x) < 0$, $x \in (a; b)$, то графік функції $y = f(x)$ опуклий на $(a; b)$;   2) якщо $f''(x) > 0$, $x \in (a; b)$, то крива $y = f(x)$ вгнута на $(a; b)$.

Доведення. Позначимо довільну ординату кривої через y, а дотичної — через Y (рис. 3.41). Рівняння дотичної до кривої у точці дотику $M(x_0;\ y_0)$ має вигляд

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Запишемо формулу Тейлора

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2,$$

де точка c лежить між точками x та x_0.

Звідси дістаємо

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2.$$

Нехай на інтервалі $(a;b)$ $f''(x) < 0$. Тоді для довільного $x \in (a;b)$, $x \neq x_0$ виконується нерівність $y - Y < 0$. Це означає, що крива $y = f(x)$ на інтервалі $(a;b)$ опукла.

Аналогічно доводять теорему для випадку $f''(x) > 0$.

З теореми випливає, що в точці перегину друга похідна дорівнює нулю, якщо вона існує. Однак точками перегину кривої $y = f(x)$ можуть бути також і точки, в яких друга похідна $f''(x)$ не існує, наприклад, точка $x = 0$ кривої $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (рис. 3.37).

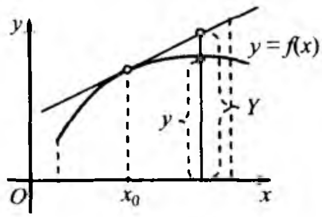


Рис. 3.41

Точки, в яких друга похідна $f''(x)$ дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками другого роду функції $y = f(x)$. Отже, якщо x_0 — абсциса точки перегину, то x_0 є критичною точкою другого роду цієї функції. Обернене твердження неправильне.

Сформулюємо достатні умови існування точки перегину.

Теорема Нехай x_0 — критична точка другого роду функції $f(x)$. Якщо переходячи через точку x_0 друга похідна $f''(x)$ змінює знак, то точка $(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину кривої $f(x)$.

6.5. Асимптота кривої

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називають пряму, до якої необмежено наближається точка кривої при необмеженому віддаленні її від початку координат. Існує три типи асимптот: *вертикальні*, *похилі* та *горизонтальні*.

Пряма $x = c$ — *вертикальна* асимптота (рис. 3.42), якщо

$$\boxed{\lim_{x\to c+0} f(x) = \pm\infty \text{ або } \lim_{x\to c-0} f(x) = \pm\infty .}$$

Пряма $y = kx + b$ є *похилою* асимптотою (рис. 3.43), якщо існують скінченні границі

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \;\; (k \neq 0), \;\; \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b .}$$

Знайдемо вирази для k і b. Нехай $M(x; y)$ — довільна точка кривої $y = f(x)$ (рис. 3.43). Використовуючи формулу (2.11), запишемо відстань від цієї точки до прямої $y = kx + b$:

$$d = \frac{|kx - y + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} .$$

За умовою $d \to 0$, коли точка $M(x; y)$ віддаляється у нескінченність ($x \to \infty$). Звідси випливає, що

$$\lim_{x\to\infty} (kx - y + b) = 0 , \tag{3.22}$$

або $kx - y + b = \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$, коли $x \to \infty$. Розділимо обидві частини рівності $y = kx + b - \alpha(x)$ на x і перейдемо до границі при $x \to \infty$, дістанемо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(k + \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x} \right) = k ,$$

оскільки $\dfrac{b}{x} \to 0, \; \dfrac{\alpha(x)}{x} \to 0$, коли $x \to \infty$. Отже,

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.} \tag{3.23}$$

Тоді з (3.22) випливає, що

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty} (y - kx).} \tag{3.24}$$

Зауваження.

1. У формулах (3.23), (3.24) потрібно розглядати випадки як $x \to +\infty$, так і $x \to -\infty$.

2. Якщо одна з границь (3.23) або (3.24) не існує, то похила асимптота не існує.

Горизонтальною асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$ називають пряму $y = b$ (рис. 3.44), коли

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \ \left(\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \right).}$$

Зрозуміло, що горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої асимптоти ($k = 0$).

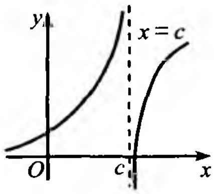


Рис. 3.42

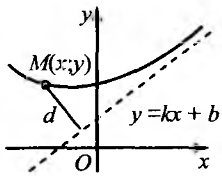


Рис. 3.42

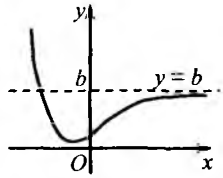


Рис. 3.42

6.6. Загальна схема дослідження функції та побудова її графіка

Щоб дослідити функцію та побудувати її графік, треба виконати такі дії:

1) знайти область існування функції;

2) знайти (якщо це можливо) точки перетину графіка з осями координат;

3) дослідити функцію на періодичність, парність і непарність. Зауважимо, що графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функціїї — відносно початку координат;

4) знайти точки розриву та встановити їх характер;

5) за першою похідною знайти інтервали монотонності, точки локальних екстремумів та значення функції в цих точках;

6) за другою похідною знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину;

7) знайти асимптоти кривої;

8) дослідити поведінку функції в нескінченно віддалених точках;

9) обчислити, якщо необхідно, значення функції в кількох контрольних точках;

10) побудувати графік функції з урахуванням результатів попередніх пунктів.

Т.6 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ

1. Знайдіть інтервали зростання та спадання функції

$$f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$. Знайдемо похідну

$$f'(x)=\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2+1)}{(x-1)^4}=-\frac{2(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Похідна $f'(x)$ дорівнює нулю в точці $x=-1$ і не існує, якщо $x=1$. Отже, $x=-1$; 1 — критичні точки функції $f(x)$.

Позначаємо ці точки на числовій прямій (при цьому пам'ятаємо про область визначення функції) і визначаємо знак похідної на кожному з інтервалів (рис. 3.45):

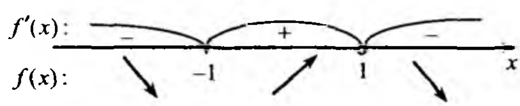


Рис. 3.45

Отже, функція спадає, якщо $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, і зростає на інтервалі $(-1;\ 1)$.

2. Знайдіть локальні екстремуми функції

$$f(x)=x-x^5/5.$$

Розв'язання. Область визначення $(-\infty;\infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x)=1-x^4,\ f'(x)=0\Leftrightarrow(1+x)(1-x)(1+x^2)=0\Leftrightarrow x=\pm1.$$

Отже, точки $x=\pm1$ — критичні (стаціонарні) точки. Визначаємо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис. 3.46):

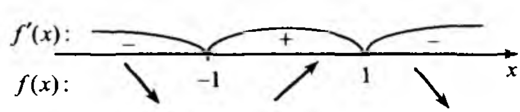


Рис. 3.46

Як видно з рис. 3.46, на інтервалах $(-\infty;\ -1)$, $(1;\ \infty)$ функція спадає, а на інтервалі $(-1;1)$ — зростає. За теоремою 2 робимо висновок, що

$x = -1$ — точка локального мінімуму; $x = 1$ — точка локального максимуму, причому $y_{\min} = y(-1) = -4/5$, $y_{\max} = y(1) = 4/5$.

3. Знайдіть локальні екстремуми функції $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$.

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Знайдемо критичні точки:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}(x+2) - x^{2/3}}{(x+2)^2} = \frac{2x^{-1/3}(x+2) - 3x^{2/3}}{3(x+2)^2} =$$

$$= \frac{2x + 4 - 3x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2} = -\frac{x-4}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}.$$

Рівняння $f'(x) = 0$ має єдиний корінь $x = 4$. Похідна не існує в точках $x = -2$ і $x = 0$. При цьому в точці $x = -2$ функція *невизначена*, а в *точці* $x = 0$ — визначена. Визначаємо знаки похідної на інтервалах знакосталості функції (рис. 3.47):

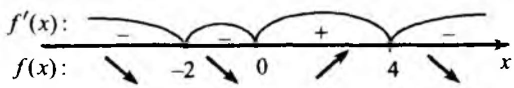


Рис. 3.47

Переходячи через точку $x = 0$ (зліва направо), похідна змінює знак з мінуса на плюс. Тобто на інтервалі $(-2; 0)$ функція спадає, а на інтервалі $(0; 4)$ — зростає. Враховуючи, що в точці $x = 0$ функція неперервна, доходимо висновку, що $x = 0$ — точка локального мінімуму. Аналогічно переконуємося, що $x = 4$ — точка локального максимуму. Відмітимо, що точка $x = -2$ не є критичною точкою (у цій точці функція невизначена).

4. Дослідіть функцію $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ на екстремум.

Розв'язання. Область визначення $(-\infty; \infty)$. Похідна заданої функції $y' = 12x^3 - 12x^2 - 24x$. Розв'язуємо рівняння $f'(x) = 0$:

$$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0, \; 12x(x^2 - x - 2) = 0;$$

$$x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; x_3 = 2 \text{ — стаціонарні точки.}$$

Друга похідна $y'' = 36x^2 - 24x - 24 = 12(3x^2 - 2x - 2)$. Визначаємо знак y'' у стаціонарних точках:

$$y''(-1) = 12(3+2-2) = 36 > 0, \; y''(0) = -24 < 0, \; y''(2) = 72 > 0.$$

З теореми 3 випливає висновок, що $x_1 = -1$ та $x_3 = 2$ — точки локального мінімуму, а $x_2 = 0$ — точка локального максимуму.

Зауваження. Звичайно достатні умови екстремуму можна було б з'ясувати і за теоремою 2.

5. Дослідіть на екстремум у точці $x = 0$ функцію

$$f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1.$$

Розв'язання. Застосуємо теорему 4. Маємо

$$f'(x) = \sin 2x - 2x, \; f'(0) = 0;$$
$$f''(x) = 2\cos 2x - 2, \; f''(0) = 0;$$
$$f'''(x) = -4\sin 2x, \; f'''(0) = 0;$$
$$f^{(4)}(x) = -8\cos 2x, \; f^{(4)}(0) = -8 < 0.$$

Отже, задана функція має в точці $x = 0$ локальний максимум.

6. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = x^2 \ln x$ на відрізку $[1; e]$.

Розв'язання. Знайдемо похідну

$$y' = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1).$$

Оскільки функція визначена при $x > 0$, то критичну точку знаходимо з умови $2\ln x + 1 = 0$, звідки дістаємо $x = e^{-0.5} = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Ця точка не належить проміжку $[1; e]$. Тому згідно з п. 6.3 обчислюємо лише значення функції на кінцях відрізка. Маємо: $y(1) = 0$, $y(e) = e^2$.

Отже, $\max\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(e) = e^2$, $\min\limits_{x\in[1;e]} f(x) = f(1) = 0$.

7. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки:

$$y' = \frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}.$$
$$-x^2-2x+1 = 0, \; x_1 = -1-\sqrt{2}, \; x_2 = -1+\sqrt{2}.$$

Точка $x_1=-1-\sqrt{2}$ не належить проміжку $[0;3]$. Обчислюємо значення $f(x_2)=f(-1+\sqrt{2})=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$; $f(0)=1$; $f(3)=\frac{2}{5}$. Отже,

$$\max_{x\in[0;3]} f(x)=f(-1+\sqrt{2})=\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \min_{x\in[0;3]} f(x)=f(3)=\frac{2}{5}.$$

8. Знайдіть інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої

$$f(x)=3x^4-4x^3+1.$$

Розв'язання. Знаходимо похідні

$$f'(x)=12x^3-12x^2,$$

$$f''(x)=36x^2-24x=36x\left(x-\frac{2}{3}\right).$$

Розв'язуємо рівняння $f''(x)=0$, $36x\left(x-\frac{2}{3}\right)=0$, $x_1=0$; $x_2=\frac{2}{3}$ — критичні точки другого роду. Визначаємо знак другої похідної: якщо $x<0$, то $f''(x)>0$ — крива вгнута; якщо $x\in(0;2/3)$, то $f''(x)<0$ — крива опукла; якщо $x>2/3$, то $f''(x)>0$ — крива вгнута. При переході через точки $x_1=0$ і $x_2=\frac{2}{3}$ друга похідна змінює знак. Звідси випливає, що точки $(0;f(0))$ та $(2/3;f(2/3))$, тобто $(0;1)$ та $(2/3;11/27)$ є точками перегину кривої $f(x)$.

9. Знайдіть асимптоти кривої $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.

Розв'язання. Рівняння похилої асимтоти шукаємо у вигляді $y=kx+b$. За формулами (3.23), (3.24) дістаємо:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x^2-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0.$$

Отже, $y = x$ — рівняння похилої асимптоти. Далі, оскільки функція $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ в точках $x = \pm 2$ має розрив другого роду, то прямі $x = -2$ та $x = 2$ — вертикальні асимптоти заданої кривої.

Горизонтальних асимптот крива не має ($\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$).

10. Дослідіть функцію $y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення — вся числова пряма, за винятком точки $x = 1$, тобто $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2) Графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь ординат (якщо це можливо) в точці $(0; f(0))$. У нашому випадку $y(0) = -1$, отже, $A(0; -1)$ — точка перетину кривої з віссю Oy. Щоб знайти точки перетину графіка з віссю Ox, потрібно розв'язати рівняння $y = 0$, тобто $\dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = 0$. Це рівняння не має дійсних коренів, тому функція не перетинає вісь абсцис.

3) Функція неперіодична. Розглянемо вираз

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{-x - 1} = \frac{x^2 + 1}{-x - 1},$$

отже, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$. Це означає, що дана функція не є ні парною, ні непарною, тобто є функцією загального вигляду.

4) Функція в точці $x = 1$ має розрив другого роду, причому $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$. В усіх інших точках функція неперервна.

5) Знаходимо похідну

$$y' = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

і розв'язуємо рівняння $y' = 0$, або $x^2 - 2x - 1 = 0$, звідки дістаємо стаціонарні точки $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ та $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Крім того, похідна невизначена при $x = 1$. Отже, $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$, $x_3 = 1$ — ***критичні точки***, або точки можливого екстремуму даної функції. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 1 - \sqrt{2})$, $(1 - \sqrt{2}; 1)$, $(1;\ 1 + \sqrt{2})$, $(1 + \sqrt{2};\ \infty)$.

На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, який можна встановити за *методом інтервалів* або обчислення значень похідної в окремих точках (по одній точці з кожного інтервалу). На інтервалах $(-\infty; 1-\sqrt{2})$ та $(1+\sqrt{2};\ \infty)$ похідна додатна, отже, функція зростає; для $x \in (1-\sqrt{2}; 1) \cup (1; 1+\sqrt{2})$ функція спадає, бо на цих інтервалах похідна від'ємна. При переході через точку $x_1 = 1-\sqrt{2}$ (рух відбувається зліва направо) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, в цій точці функція має локальний максимум. Тоді

$$y_{\max} = y(1-\sqrt{2}) = \frac{(1-\sqrt{2})^2+1}{1-\sqrt{2}-1} = 2-2\sqrt{2}\,.$$

При переході через точку $x_2 = 1+\sqrt{2}$ похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує локальний мінімум, причому

$$y_{\min} = y(1+\sqrt{2}) = \frac{(1+\sqrt{2})^2+1}{1+\sqrt{2}-1} = 2+2\sqrt{2}\,.$$

Точка $x=1$ не є точкою екстремуму (в цій точці функція невизначена).

6) Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}\,.$$

На інтервалі $(-\infty; 1)$ $y''<0$, отже, на цьому інтервалі крива опукла; якщо $x \in (1; \infty)$, то $y''>0$ — крива вгнута. У точці $x=1$ функція невизначена, тому ця точка не є точкою перегину.

7) Із результатів п.4 випливає, що пряма $x=1$ — вертикальна асимптота кривої.

Оскільки

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x-1} = +\infty,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x-1} = -\infty,$$

то горизонтальних асимптот немає.

Обчислимо границі

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x} = 1\,.$$

Отже,

$$k=1,\ b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1\,.$$

Таким чином, пряма $y = x + 1$ — похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Обчислимо додатково (хоча це зовсім необов'язково) кілька значень функції: $y(3) = 5$, $y(-1) = -1$. Отже, точки $B(3;5)$, $C(-1;-1)$ належать графіку.

9) Підсумовуючи проведені дослідження, будуємо графік (рис. 3.48).

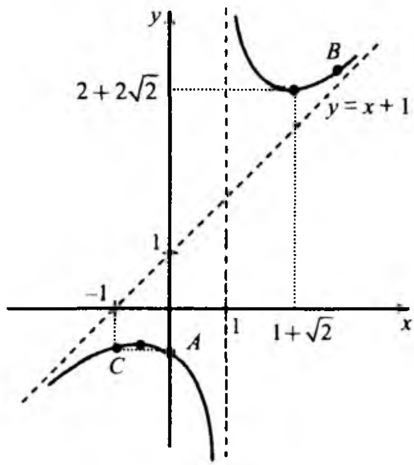


Рис. 3.48

2. Дослідіть функцію $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. 1) Область визначення — вся числова пряма, тобто $D(y) = (-\infty; \infty)$.

2) Точки перетину з осями координат: якщо $x = 0$, то $y = 0$; якщо $y = 0$, то $x = 0$ або $x = 2$. Отже, крива проходить через точки (0; 0) і (2; 0).

3) Функція ні парна, ні непарна.

4) Точок розриву і вертикальних асимптот не існує.

5) Знайдемо похідну $y' = \dfrac{1}{3} \dfrac{3x^2 - 4x}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} = \dfrac{x(x - 4/3)}{\sqrt[3]{x^4 (x-2)^2}}$; критичні точки — $x = 0$; 4/3; 2. Ці точки розбивають числову пряму на чотири інтервали $(-\infty; 0)$, $(0; 4/3)$, $(4/3; 2)$, $(2; \infty)$. На кожному з цих інтервалів похідна y' має певний знак, а саме: якщо $x \in (-\infty; 0)$, то $y' > 0$ — функція зростає; якщо $x \in (0; 4/3)$, то $y' < 0$ — функція спадає; якщо $x \in (4/3; 2) \cup$

$\cup(2;\infty)$, то $y'>0$ — функція зростає. Переходячи через точку $x=0$, похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, $x=0$ є точкою максимуму, причому $y_{\max}=y(0)=0$. Переходячи через точку $x=4/3$, похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, в цій точці існує мінімум:

$$y_{\min}=y(4/3)=\sqrt[3]{(4/3)^2(4/3-2)}=-\sqrt[3]{32/27}=-\frac{2\cdot\sqrt[3]{4}}{3}\approx-1{,}1.$$

Переходячи через точку $x=2$, похідна не змінює знаку, отже, ця точка не є точкою екстремуму.

6) Знайдемо другу похідну

$$y''=\left(\frac{x(x-4/3)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^2}}\right)'=\left(\frac{x-4/3}{\sqrt[3]{x(x-2)^2}}\right)'=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{x(x-2)^2}-(x-4/3)\dfrac{(x-2)^2+x2(x-2)}{3\cdot\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-2)^4}}=$$

$$=\frac{9x(x-2)^2-(3x-4)(x-2)(3x-2)}{9\cdot\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}=-\frac{8}{9}\frac{(x-2)}{\sqrt[3]{x^4(x-2)^8}}.$$

Друга похідна не існує у точках $x=0$ та $x=2$. Отже, точки $x=0;\ 2$ — критичні точки другого роду. Розглянемо проміжки $(-\infty;0)$, $(0;2)$ і $(2;\infty)$. На інтервалах $(-\infty;0)$ і $(0;2)$ $y''>0$ — крива вгнута; якщо $x\in(2;\infty)$, то $y''<0$ — крива опукла. Точка перегину має координати (2; 0).

7) Знайдемо похилу асимптоту:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}{x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-2x^2}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-2x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-2x^2)^2}+x\cdot\sqrt[3]{x^3-2x^2}+x^2}=-\frac{2}{3}.$$

Отже, пряма $y=x-2/3$ — похила асимптота даної кривої. Інших асимптот немає.

8) Враховуючи проведені дослідження, будуємо графік даної функції (рис. 3.49).

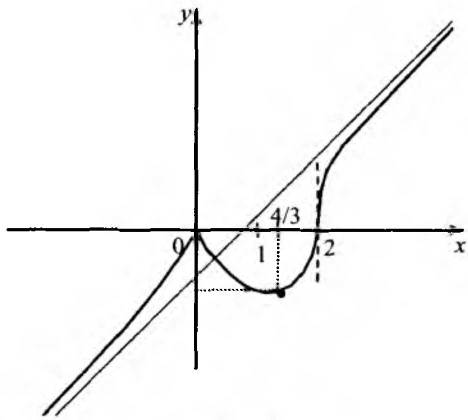


Рис. 3.49

Т.6 ЗАВДАННЯ ДЛЯ АУДИТОРНОЇ І САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Знайдіть проміжки зростання та спадання функцій:

1. $y = 6 - 3x^2 - x^3$. **2.** $y = x^4 - 2x^2$. **3.** $y = x \ln x$.

4. $y = x^2 e^{-x}$. **5.** $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

Дослідіть на екстремум функції:

6. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 10$. **7.** $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5$.

8. $y = (x-1)^2 (x-2)^2$. **9.** $y = x(x-1)^2 (x+1)^3$.

10. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$. **11.** $y = 3x + \dfrac{1}{x^3}$. **12.** $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

Знайдіть максимальні та мінімальні значення функцій:

13. $y = xe^{-x}$. **14.** $y = x - \ln(1 + x)$. **15.** $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$.

Дослідіть поведінку функцій в околі заданих точок за допомогою похідних вищих порядків:

16. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$. **17.** $y = x\sin x - x^2$, $x_0 = 0$.

Знайдіть інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривих:

18. $y = x^2 - 2x + 1$. **19.** $y = x^3 - 1$. **20.** $y = x^3 - 3x^2 + 9x + 6$.

21. $y = x^2 \ln x$. **22.** $y = e^{-x^2}$. **23.** $y = xe^x$. **24.** $y = \ln x + 2x^2$.

Знайдіть асимптоти кривих:

25. $y = \dfrac{6x^4 + 3x^3}{5x^3 + 1}$. **26.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$. **27.** $y = x \cdot e^{2/x} + 1$.

Дослідіть функції та побудуйте графіки:

28. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$. **29.** $y = (2x + 3)e^{-2/(x+1)}$. **30.** $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$.

31. $y = \operatorname{arctg}(\sin x)$. **32.** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$. **33.** $y = 3\ln\dfrac{x}{x-3} - 1$.

34. $y = \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$. **35.** $y = \dfrac{4x^2}{3 + x^2}$. **36.** $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

37. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$. **38.** $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$. **39.** $y = 16x(x-1)^3$. **40.** $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповіді

1. $(-\infty;-2)$ і $(0;\infty)$ – спадає; $(-2;0)$ – зростає. **2.** $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$ – спадає; $(-1;0)$ і $(1;\infty)$ – зростає. **3.** $(0;1/e)$ – спадає; $(1/e;\infty)$ – зростає. **4.** $(-\infty;0)$ і $(2;\infty)$ – спадає; $(0;2)$ – зростає. **5.** $(-\infty;1-\sqrt{3})$ і $(1+\sqrt{3};\infty)$ – зростає; $(1-\sqrt{3};1)$ і $(1;1+\sqrt{3})$ – спадає. **6.** $x = 2$ – максимум, $x = 3$ – мінімум. **7.** $x = 1$ – максимум, $x = 3$ – мінімум. **8.** $x = 1{:}2$ – мінімум, $x = 3/2$ – максимум. **9.** $x = -4/3;1$ – мінімум, $x = 1/2$ – максимум. **10.** $x = 1/2$ – мінімум. **11.** $x = -1$ – максимум, $x = 1$ – мінімум. **12.** $x = 1$ – максимум. **13.** $y_{\max} = y(1) = 1/e$. **14.** $y_{\min} = y(0) = 0$. **15.** $y_{\min} = y(1) = 0$, $y_{\max} = y(e^2) = 4/e^2$.**16.** Мінімум. **17.** Максимум. **20.** $(-\infty;1)$ – опукла, $(1;\infty)$ – вгнута, $(1;13)$ –точка перегину. **21.** $(0;e^{-3/2})$ – опукла, $(e^{-3/2};\infty)$ – вгнута, $(e^{-3/2};-3/(2e^3))$ – точка перегину. **22.** $(-\infty;-1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2};\infty)$ – вгнута, $(-1/\sqrt{2};1/\sqrt{2})$ – опукла, $(\pm 1/\sqrt{2};e^{-1/2})$ – точки перегину. **24.** $(0;1/2)$ – опукла, $(1/2;\infty)$ – вгнута, $(1/2;1/2-\ln 2)$ – точка перегину. **25.** $6x - 5y + 3 = 0$ - похила асимптота, $x = -1/\sqrt[3]{5}$ – вертикальна асимптота. **26.** $x=1;2$ – вертикальні асимптоти, $y=0$ – горизонтальна асимптота. **27.** $y=x+3$. **28.** $y=x$, $x=0$ – асимптоти; $(-\infty;0)\cup(2;\infty)$ – зростає, $(0;2)$ – спадає; $x_{\min}=2$, $y_{\min}=3$; $(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ – вгнута. **29.** Визначена скрізь, крім $x=-1$; екстремумів немає; функція зростаюча; $(-2;-e^2)$ - точка перегину; $x=-1$ – асимптота. **32.** Непарна, $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ – зростає, $(-1;0)\cup(0;1)$ – спадає; $y_{\max}=-4$ при $x=-1$, $y_{\min}=4$ при $x=1$, $y=3x$, $x=0$ – асимптоти; $(-\infty;0)$ – опукла, $(0;\infty)$ - вгнута. **34.** Визначена скрізь, крім $x=-1$; $y_{\min}=e$ при $x=0$; $x=-1$ – асимптота; $(-\infty;-1)$ – опукла, $(-1;\infty)$ – вгнута; точок перегину немає. **35.** Парна; $y_{\max}=0$ при $x=0$; $y=4$ – асимптота; $(\pm 1;1)$ – точки перегину, $(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$ – опукла, $(-1;1)$ – вгнута. **39.** $y_{\min}=-27/16$ при $x=1/4$; $(-\infty;1/2)\cup(1;\infty)$ вгнута, $(1/2;1)$ – опукла; $(1/2;-1)$, $(1;0)$ – точки перегину; асимптот немає.

Т.6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

6.1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функцій:

6.1.1. $y=x^2-\ln x^2$.

6.1.2. $y=\sqrt{x-1}(x-2)$.

6.1.3. $y=(x-1)^2(x+1)^3$.

6.1.4. $y=\dfrac{x^2}{x^4+4}$.

6.1.5. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$.

6.1.6. $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+24}$.

6.1.7. $y=\dfrac{x^2}{2^x}$.

6.1.8. $y=\ln x-\operatorname{arctg} x$.

6.1.9. $y=\dfrac{x^5}{3^x}$.

6.1.10. $y=x^4\cdot\ln x$.

6.1.11. $y=\ln(x^2+1)-x$.

6.1.12. $y=\dfrac{x^3}{e^x}$.

6.1.13. $y=9^{-x}-3^{-x}$.

6.1.14. $y=x\cdot\ln^3 x$.

6.1.15. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}$.

6.1.16. $y=(x-5)^3(x+4)^2$.

6.1.17. $y=x^2\cdot\ln x$.

6.1.18. $y=x\cdot\ln^2 x$.

6.1.19. $y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

6.1.20. $y=2^x-4^x$.

6.1.21. $y=\dfrac{x^2+3x-4}{x-5}$.

6.1.22. $y=(x-4)^3(x+5)^2$.

6.1.23. $y=\sqrt{2x-x^2}$.

6.1.24. $y=\sqrt{x}\ln x$.

6.1.25. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{(x+1)^2}$.

6.1.26. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

6.1.27. $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$.

6.1.28. $y=\dfrac{x^2}{x^4+4}$.

22.1.29. $y=e^{-x}-e^{-2x}$.

22.1.30. $y=x+\dfrac{1}{x}$.

6.2. Знайдіть точки перегину, інтервали опуклості та вгнутості функцій:

6.2.1. $y=x^2\cdot\sqrt{x+1}$.

6.2.2. $y=\sqrt{x^2+1}$.

6.2.3. $y=(x-4)^4(x+7)^3$.

6.2.4. $y=x^x$.

6.2.5. $y=\ln(1+x^2)$.

6.2.6. $y=x+\sin x$.

6.2.7. $y=3x^2-x^3$.

6.2.8. $y=xe^{-x}$.

6.2.9. $y=x+x^{5/3}$.

6.2.10. $y=3x^2-4x\sqrt{x}$.

6.2.11. $y=\ln(x^4+1)$.

6.2.12. $y=\ln x+\ln^2 x$.

6.2.13. $y=e^{-x^4}$.

6.2.14. $y=x^4+8x^3+18x^2+8$.

6.2.15. $y=(x-1)^2\cdot\sqrt{x}$.

6.2.16. $y=x^3-3x^2+6x+7$.

6.2.17. $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

6.2.18. $y=\dfrac{x}{x^2-2x+2}$.

6.2.19. $y=\dfrac{x\sqrt{1-x}}{1+x}$.

6.2.20. $y=\dfrac{(1-x)\sqrt{x}}{2-x}$.

6.2.21. $y=\dfrac{x^2}{(x-1)^3}$.

6.2.22. $y=\dfrac{x^2+2x+1}{x^3}$.

6.2.23. $y=\sqrt[3]{(1-x)(x-2)^2}$.

6.2.24. $y=x\sqrt{x}\cdot(4-x)^{-1/2}$.

6.2.25. $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

6.2.26. $y=\dfrac{x^3-x^2-1}{x^2}$.

6.2.27. $y=x+7/x-3/x^2$.

6.2.28. $y=x^4+6x^3+12x^2$.

6.2.29. $y=\dfrac{x^3}{4x^2+1}$.

6.2.30. $y=\sqrt[3]{x(x+1)^2}$.

6.3. Проведіть повне дослідження функції $y = f(x)$ та побудуйте її графік.

6.3.1. $y = x^2 + \frac{2}{x}$.	**6.3.2.** $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$.	**6.3.3.** $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$.
6.3.4. $y = \frac{x}{1 + x^2}$.	**6.3.5.** $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$.	**6.3.6.** $y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$.
6.3.7. $y = \frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.	**6.3.8.** $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.	**6.3.9.** $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$.
6.3.10. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.	**6.3.11.** $y = \frac{x}{x^2 - 4}$.	**6.3.12.** $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.
6.3.13. $y = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$.	**6.3.14.** $y = \frac{4x^2}{3 - x}$.	**6.3.15.** $y = x + \frac{7}{x} - \frac{3}{x^2}$.
6.3.16. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$.	**6.3.17.** $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.	**6.3.18.** $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.
6.3.19. $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$.	**6.3.20.** $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.	**6.3.21.** $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$.
6.3.22. $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.	**6.3.23.** $y = \frac{4x}{4 + x^2}$.	**6.3.24.** $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.
6.3.25. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.	**6.3.26.** $y = \frac{2x - 1}{(x-1)^2}$.	**6.3.27.** $y = \frac{4x^3}{x^3 - 1}$.
6.3.28. $y = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$.	**6.3.29.** $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.	**6.3.30.** $y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}$.