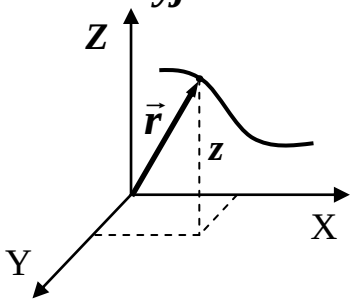
Глава ІІ. Основні теоретичні відомості

Розділ 1. Класична механіка

Кінематика матеріальної точки

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ – радіус-вектор, який визначає положення матеріальної точки в просторі; x, y, z – декартові координати точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей x, y, z.



Траєкторія точки – це неперервна лінія, яку описує у просторі кінець радіуса-вектора $\vec{r}$.

$\boxed{\begin{array}{l}\vec{r} = f(t) \\ S = f(t)\end{array}}$ – рівняння руху матеріальної точки.

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ – вектор переміщення; $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ – радіуси-вектори початкового і кінцевого положення.

$\boxed{\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}}$ – швидкість є похідною від радіуса-вектора рухомої точки за часом.

$\langle\upsilon\rangle = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ – середня швидкість; Δs – шлях, який пройшла точка за час Δt

$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}$ – вираз вектора швидкості через проекції вектора швидкості на координатні осі.

$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$ – абсолютне значення (модуль) швидкості.

$\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}, \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекції швидкості $\vec{\upsilon}$ на координатні осі є похідними відповідних координат за часом.

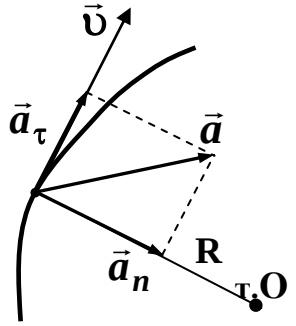
$\Delta\vec{r} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \vec{\upsilon}\, dt$ – переміщення точки за час $\Delta t = t_2 - t_1$.

$\Delta x = \int\limits_{t_1}^{t_2} \upsilon_x\, dt$ – проекція переміщення рухомої точки на вісь x за час $\Delta t = t_2 - t_1$; в загальному випадку проекція швидкості υ_x залежить від часу: $\upsilon_x = \upsilon_x(t)$.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$ – прискорення точки є похідною від швидкості за часом або другою похідною від радіуса-вектора рухомої точки за часом.

$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 \pm \vec{a}t$ – швидкість при рівнозмінному русі ($\vec{a} = const$), $\vec{\upsilon}_0$ – початкова швидкість.

$\Delta\vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}$ – переміщення при рівнозмінному русі.



– під час криволінійного руху прискорення $\vec{a}$ є векторною сумою дотичного (тангенціального) $\vec{a}_\tau$ і нормального $\vec{a}_n$ прискорень.

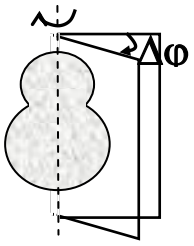
Вектор $\vec{a}_\tau$ напрямлений по дотичній до траєкторії в даній точці, тобто вздовж напряму вектора швидкості. Вектор $\vec{a}_n$ – вздовж нормалі (перпендикуляра) до дотичної.

$a_\tau = \frac{d|\vec{\upsilon}|}{dt}$ – дотичне прискорення a_τ характеризує темп зміни модуля швидкості υ.

$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ – нормальне прискорення a_n (доцентрове) характеризує темп зміни напряму вектора швидкості; R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

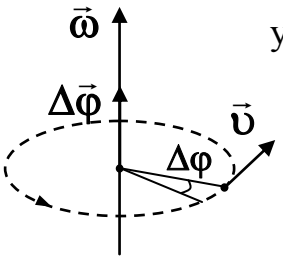
$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ – модуль повного прискорення.

Кінематика обертального руху



Положення твердого тіла при заданій осі обертання визначається кутом повороту тіла навколо цієї осі.

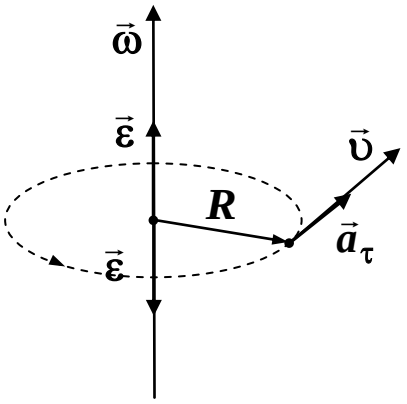
$\varphi = \varphi(t),$ $r = R = const$ – кінематичне рівняння обертального руху матеріальної точки по колу; $\varphi(t)$ – функція, що визначає кут повороту φ радіуса-вектора точки за час t.



Для визначення напряму обертання вводять поняття вектора кутового переміщення $\Delta\vec{\varphi}$ і вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$. Ці вектори є *аксіальними*, тобто напрямленими

вздовж осі; їхній напрям встановлюється за правилом правого гвинта.

$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}}, \boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}}$ – формули, які визначають вектори кутової швидкості та кутового прискорення.



Кутове прискорення є *аксіальним* вектором, напрям якого збігається з напрямом кутової швидкості $\vec{\omega}$, якщо модуль кутової швидкості зростає з часом: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} > 0$. Кутове прискорення напрямлене протилежно до вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$, якщо модуль кутової швидкості зменшується з часом: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} < 0$.

Зв'язок між кутовими та лінійними характеристиками обертання

$\ell = \varphi \cdot R$ – довжина шляху, пройденого точкою по дузі кола радіусом R;

φ – кут повороту радіуса-вектора точки.

$\upsilon = \omega \cdot R$ – лінійна швидкість точки під час її руху по колу; R – радіус кола; $\vec{R}$ – радіус-вектор точки; ω – її кутова швидкість.

$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{R}]$

$a_\tau = \varepsilon \cdot R,$ – дотичне (тангенціальне) прискорення точки; ε – кутове прискорення.

$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{R}]$

$a_n = \omega^2 R, \ \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$ – нормальне прискорення точки.

$\nu = \frac{N}{t}, \ \nu = \frac{1}{T}$ – частота обертання; N – число обертів, здійснених тілом за час t; T – період обертання (час одного повного оберту).

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ – зв'язок кутової швидкості з періодом обертання T і частотою обертання ν.

$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{\vec{\varepsilon} t^2}{2}$ – кінематичне рівняння рівнозмінного обертального руху.

Динаміка матеріальної точки

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс матеріальної точки масою m, яка рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$.

I закон Ньютона: Існують такі інерціальні системи відліку, відносно яких тіло рухається рівномірно і прямолінійно або знаходиться в

стані спокою, якщо векторна сума сил, прикладених до тіла дорівнює нулю.

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i}$ – **II** закон Ньютона; $\vec{p}$ – імпульс; $\sum \vec{F}_i$ – векторна сума сил, що діють на матеріальну точку.

$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_i}$ – другий закон Ньютона для рухів, при яких маса $m = const$; $\vec{a}$ – прискорення.

III закон Ньютона: Сили, з якими два тіла діють одне на одне, рівні за величиною, протилежні за напрямком, напрямлені вздовж однієї прямої, яка з'єднує їх центри і прикладені до різних тіл.

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Сила пружності, тяжіння та тертя

$F = -kx$ – сила пружності під час деформації тіла по осі Ox; k – коефіцієнт пружності (у випадку з пружиною – жорсткість); x – абсолютна деформація.

$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}_{12}$ – гравітаційна сила $\vec{F}_{12}$, яка діє на першу матеріальну точку з боку другої, записана в векторній формі; $\vec{r}_{12}$ – радіус-вектор точки прикладання сили.

$\vec{F} = m\vec{G}$ – сила гравітаційної взаємодії, що діє на тіло масою mув деякій точці гравітаційного поля; $\vec{G}$ – напруженість гравітаційного поля в цій точці.

$\vec{F} = m\vec{g}$ – сила тяжіння; $\vec{g}$ – прискорення вільного падіння.

$F = \mu N$ – сила тертя ковзання; μ – коефіцієнт тертя; N – сила нормального тиску.

Закон збереження імпульсу

$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = const}$ – закон збереження імпульсу, справедливий для замкненої системи тіл; N – число тіл в системі.

Рух тіла змінної маси

$m\frac{d\upsilon}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_p$ – рівняння руху тіла змінної маси (рівняння Мещерського); $\vec{F}_p$ – реактивна сила.

$\vec{F}_p = -\vec{u}\frac{dm}{dt}$ – реактивна сила, яка з'являється внаслідок зміни маси ракети і напрямлена в бік, протилежний до вектора швидкості газів $\vec{u}$.

$\upsilon = -u \ln \frac{m_0}{m}$ – формула Ціолковського встановлює кінцеву швидкість υ, якої досягає ракета; u - швидкість газів відносно ракети; m_0/m – відношення мас ракети в початковий і кінцевий моменти.

Центр мас системи матеріальних точок

$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$ – радіус-вектор центра мас системи матеріальних точок; m – сума мас всіх точок (маса системи); m_i і R_i – маса і радіус-вектор і-ї точки системи.

$\vec{p} = \sum m_i \vec{\upsilon}_i = m\vec{\upsilon}_c$ – імпульс системи, тобто сума імпульсів усіх її матеріальних точок, дорівнює імпульсу однієї точки масою m, розміщеної в центрі мас; m – маса системи, $\vec{\upsilon}_c$ – швидкість її центра мас.

$m\frac{d}{dt}(\vec{\upsilon}_c) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i;$ – закон руху центра мас системи; m – маса системи; $\vec{\upsilon}_c$ – швидкість центра мас системи.

Робота та енергія

$\boxed{dA = (\vec{F}d\vec{s}) = FdS\cos\alpha}$ – робота, яку виконує сила $\vec{F}$ на елементарному переміщенні $d\vec{s}$; α - кут між векторами сили та переміщення.

$A = \int_L \vec{F}d\vec{s} = \int_L F\cos\alpha ds$ – робота, яку виконує сила $\vec{F}$. Інтегрування ведеться вздовж траєкторії, довжиною L.

$N = \frac{dA}{dt}$ – миттєва потужність; dA – робота, виконана за нескінченно малий інтервал часу dt.

$N = F \cdot \upsilon$ – миттєва потужність дорівнює скалярному добутку сили $\vec{F}$ на швидкість $\vec{\upsilon}$.

$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{p^2}{2m}$ – кінетична енергія тіла що рухається поступально.

$W_п = \frac{1}{2}kx^2$ – потенціальна енергія пружно деформованої пружини; k – жорсткість пружини; x – абсолютна деформація.

$W_п = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}$ – потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох матеріальних точок; γ – гравітаційна стала; m_1 та m_2 – маси взаємодіючих тіл; R – відстань між ними.

$W_п = mgh$ – потенціальна енергія тіла, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння; g – прискорення вільного падіння; h – висота тіла над рівнем, прийнятим за нульовий (формула справедлива при умові, що $h << R$; R – радіус Землі).

$\boxed{W = W_к + W_п = const}$ – закон збереження механічної енергії.

$A = \Delta W_к = W_{к2} - W_{к1}$ – робота A, що виконується результуючою силою, визначається як міра зміни кінетичної енергії матеріальної точки.

Динаміка твердого тіла

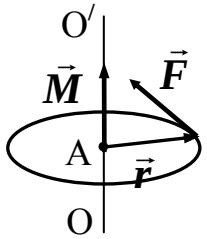
$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int \vec{r}dm$ – центр мас твердого тіла; інтегрування відбувається по всьому тілу.

$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c$ – імпульс тіла дорівнює добутку його маси m і швидкості центра мас тіла $\vec{\upsilon}_c$.

$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$ – основне рівняння динаміки поступального руху твердого тіла; $\vec{p}$, m – імпульс та маса тіла, $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ – векторна сума всіх сил, прикладених до тіла; $\vec{a}$ – прискорення центра мас тіла.

$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}}$

$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$ – момент сили відносно точки А; $\vec{r}$ – радіус-вектор, проведений від точки А до точки прикладання сили $\vec{F}$.



$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i \times \vec{p}_i]$ – момент імпульсу тіла $\vec{L}$ дорівнює сумі векторного добутку радіус-вектора та імпульсу елементарної маси.

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$ – другий закон Ньютона для обертального руху.

$L = I\omega$ – момент імпульсу тіла дорівнює добутку моменту інерції I та кутової швидкості ω, з якою тіло обертається навколо осі.

$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i R_i^2$ – момент інерції I тіла відносно довільної осі обертання дорівнює сумі добутку елементарних мас Δm_i тіла та квадрату відстані R_i^2 від осі обертання до цієї маси.

$I = I_0 + ma^2$ – теорема Штейнера, яка стверджує, що момент інерції I тіла відносно довільної осі обертання дорівнює сумі моменту інерції I_0 відносно паралельної осі, що проходить через

центр мас тіла, і добутку маси тіла m на квадрат відстані a між осями.

$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ – основне рівняння обертального руху M – результуючий момент зовнішніх сил, що діють на тіло; I – момент інерції відносно осі обертання; ε - кутове прискорення.

$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{n} I_i \omega_i = const$ – закон збереження моменту імпульсу для замкненої системи тіл, що обертаються відносно нерухомої осі z; I_{zi} і ω_i – момент інерції і кутова швидкість i-го тіла відносно осі.

$I = \frac{1}{12} ml^2$ – момент інерції стержня відносно осі, що проходить через центр мас перпендикулярно до стержня; m і l – маса і довжина стержня.

$I = mR^2$ – момент інерції обруча (тонкостінного циліндра) відносно осі, перпендикулярної до площини обруча (збіжного з віссю циліндра); R – радіус обруча (циліндра).

$I = \frac{1}{2} mR^2$ – момент інерції диска радіусом R відносно осі, що проходить через центр диска і перпендикулярної до його площини.

$I = \frac{2}{5} mR^2$ – момент інерції кулі радіусом R відносно осі, що проходить через її центр.

Елементи механіки рідин

$p = \frac{F}{S}$ – тиск дорівнює силі, яка діє на одиницю площі поверхні перпендикулярно до цієї поверхні.

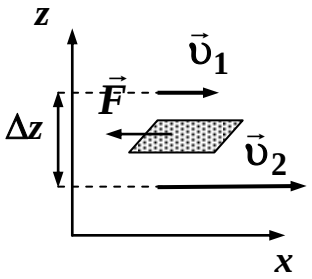
$p = \rho g h$ – гідростатичний тиск стовпа рідини на глибині h; ρ - густина рідини; g – прискорення вільного падіння.

$F_A = \rho g V$ – архімедова (виштовхувальна) сила, що діє на тіло в рідині (газі); V – об'єм витісненої рідини (газу).

$S\upsilon = const$ – рівняння нерозривності потоку; S – площа перерізу в будь-якому місці труби; υ– швидкість руху рідини в цьому перерізі.

$\frac{\rho \upsilon^2}{2} + \rho g h + p = const$ – рівняння Бернуллі для стаціонарної течії ідеальної рідини; ρ - густина рідини; υ – швидкість рідини в певному перерізі труби; h – висота, на якій розміщено переріз; p – статичний тиск рідини для обраного перерізу; $\rho v^2/2$ – динамічний тиск для того самого перерізу.

$F = \eta \left| \frac{d\upsilon}{dz} \right| \Delta S$ – сила внутрішнього тертя (в'язкості) між рухомими шарами рідини; $\frac{d\upsilon}{dz}$ – градієнт швидкості; ΔS – площа шарів. Зміна імпульсу напрямленого руху на поверхні розділу шарів рідини (газу) обумовлює виникнення на цій поверхні сили, яка напрямлена проти руху рідини (газу) і називається силою внутрішнього тертя.



$V = \pi r^4 \frac{\Delta p}{8 l \eta}$ – формула Пуазейля, яка визначає об'єм рідини (газу), що протікає за час t через довгу трубку; R радіус трубки; Δp– різниця тисків на кінцях трубки; l – її довжина; η – динамічна в'язкість.

$R_e = \rho \langle \upsilon \rangle \frac{d}{\eta}$ – число Рейнольдса – безрозмірна величина, яка визначає характер течії рідини в довгій трубці; $\langle \upsilon \rangle$ – середня по перерізу швидкість течії; d – діаметр трубки.

$F_c = 6\pi\eta r\upsilon$ – формула Стокса; F_c – сила опору, з якою діє потік рідини на кульку, яка повільно рухається; R – радіус кульки; υ – її швидкість. Формула справедлива для швидкостей, при яких число Рейнольдса R_e<<1.

Спеціальна теорія відносності

$l = l_0 \sqrt{1 - \beta^2}$ – довжина тіла, яке рухається в інерціальній системі відліку зі швидкістю υ; l_0 – власна довжина тіла (довжина тіла в системі, відносно якої тіло знаходиться в спокої); c – швидкість світла у вакуумі.

$\beta = \frac{\upsilon}{c}$

$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ – інтервал часу між подіями, виміряний у нерухомій системі відліку; τ_0 – власний час, виміряний у системі відліку, що рухається зі швидкістю υ відносно нерухомої системи відліку.

$\upsilon = \frac{\upsilon' + u}{1 + \frac{\upsilon' u}{c^2}}$ – релятивістський закон додавання швидкостей; υ – швидкість тіла відносно нерухомої системи відліку; υ'– швидкість тіла відносно рухомої системи відліку; u – швидкість рухомої системи відліку відносно нерухомої.

$p = \frac{m_0 \upsilon}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ – релятивістський імпульс; m_0 – маса тіла в стані спокою.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$ – релятивістська маса тіла.

$$\boxed{E = mc^2}$$ – повна енергія тіла в релятивістській механіці.

$E_0 = m_0 c^2$ – енергія спокою тіла (власна енергія).

$T = E - E_0$ – кінетична енергія тіла.

$E^2 - p^2 c^2 = m_0 c^2$ – зв'язок між повною енергією E та імпульсом p в релятивістській механіці; m_0 – маса спокою.