

Розділ 4. Коливання і хвилі

Вільні механічні гармонічні коливання

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ – диференціальне рівняння вільних коливань, єдине для пружинного і математичного маятників, в якому для кульки на пружині $\omega^2 = k/m$; для математичного маятника $\omega^2 = g/l$.

$x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ – рівняння вільних гармонічних коливань, яке є розв'язком диференціального рівняння коливань; x – зміщення точки від її середнього положення; A – амплітуда коливань; ω – циклічна частота; φ_0 – початкова фаза; t – час.

$T = \frac{1}{N}$ – період коливань; t – час, за який відбулося N повних коливань.

$\nu = \frac{1}{T}$ – зв'язок між частотою і періодом T коливань.

$\omega = 2\pi\nu$ – зв'язок між циклічною частотою ω і частотою ν коливань.

$\varphi = \omega t + \varphi_0$ – фаза коливань – фізична величина, яка визначає значення x в даний момент часу t ; φ_0 – початкова фаза, тобто значення фази в момент часу $t=0$.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ – період вільних коливань пружинного маятника; k – жорсткість пружини; m – маса тіла.

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ – період вільних коливань математичного маятника; l – довжина нитки; g – прискорення вільного падіння.

$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$, – циклічна частота і період вільних коливань фізичного маятника; m – маса коливного тіла; g – прискорення вільного

$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$ падіння; L – відстань від центра мас C до точки підвішування O ; I – момент інерції тіла відносно осі коливання.

$W_{\text{ном}} = W \cos^2(\omega t + \varphi_0)$, – потенціальна і кінетична енергія механічних гармонічних коливань, які відбуваються за законом $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$; W – повна енергія.

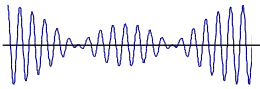
$W = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\nu^2 A^2}{2}$ – повна енергія гармонічних коливань.

Додавання однаково спрямованих гармонічних коливань

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

– амплітуда і початкова фаза результуючого коливання, яке одержується при додаванні двох коливань, що відбуваються за законом косинуса, напрямлених вздовж осі Ox .

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



Биття. При додаванні двох коливань з близькими частотами $\omega_1 \approx \omega_2$ вздовж прямої Ox виникають коливання з амплітудою, яка періодично змінюється (див. рисунок); такі коливання називаються биттям.

Додавання взаємно перпендикулярних коливань

Нехай матеріальна точка одночасно здійснює два коливання, які відбуваються у взаємно перпендикулярних напрямках вздовж осей x і y :

$$x = A_1 \cos \omega t; \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi),$$

де ω – однакова для обох коливань циклічна частота; $\Delta\varphi$ – різниця фаз коливань, A_1 і A_2 – амплітуди коливань, що додаються. Тоді результатом додавання коливань буде періодичний рух точки вздовж еліпса з тією самою частотою ω . В загальному випадку осі еліпса орієнтовані відносно координатних осей довільним чином, а його рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

Згасаючі механічні коливання

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

– диференціальне рівняння згасаючих коливань і його розв'язок, x – зміщення коливної точки від положення рівноваги; $\beta = r/2m$ – коефіцієнт згасання; ω_0 – циклічна частота власних незгасаючих коливань; $A_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань; A_0 , φ_0 – початкові амплітуда та фаза (визначаються з початкових умов).

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

– частота згасаючих коливань; ω_0 – частота цієї системи при відсутності згасання.

$\tau = \frac{1}{\beta} = TN$ – час релаксації τ (час, за який амплітуда згасаючих коливань зменшується в e разів ($e \approx 2,7$)); T – період коливань; N – число коливань, які здійснюються за час τ .

$\delta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$ – коефіцієнт згасання; $A(t)$ і $A(t+T)$ – амплітуди двох послідовних коливань, що відповідають моментам часу, які відрізняються на

$\lambda = \ln \delta = \beta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$ – логарифмічний декремент згасання; $\tau = 1/\beta$ – час релаксації; T – період згасаючих коливань, N – число коливань, які здійснюються за час зменшення амплітуди в $e \approx 2,7$ разів.

$Q = \frac{\pi}{\lambda}$ – добротність коливальної системи.

Вимушені механічні коливання

$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$, – диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язок для коливань,

$x = A \cos(\omega t - \varphi)$ які встановились; x – зміщення точки, F_0 – амплітуда примусової сили.

$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}$, – вирази для амплітуди A і початкової фази φ вимушених коливань.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Резонанс – явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти власних коливань до частоти примусової сили.

$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ резонансна частота.

Механічні (пружні) хвилі

$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ – рівняння плоскої біжучої хвилі; $\xi(x, t)$ – зміщення точок середовища з координатою x у момент часу t ; A – амплітуда хвилі; ω – циклічна частота; v – швидкість поширення коливань (фазова швидкість хвилі); φ_0 – початкова фаза коливань.

$\lambda = vT$, $v = \lambda \nu$ – зв'язок довжини хвилі λ , періоду T коливань, фазової швидкості і частоти ν .

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число.

$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ – зв'язок між фазовою (v) та груповою ($u = \frac{d\omega}{dk}$) швидкостями хвилі.

$\xi(x, t) = 2A \cos kx \cos \omega t$ – рівняння стоячої хвилі.

$L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$ – рівень інтенсивності звуку (в Дбелах); I – інтенсивність звуку; I_0 – інтенсивність звуку на порозі чутності ($I_0 = 1 \text{ пВт/м}^2$).

$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ – швидкість поширення звуку у газах; R – універсальна газова стала; M – молярна маса; $\gamma = C_p / C_v$ – відношення молярних теплоємностей газу при сталому тиску та об'ємі; T – температура.

$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – швидкість поширення звуку у твердих тілах; E – модуль Юнга; ρ – густина тіла.

$v = \frac{(v \pm v_{np})}{v \mp v_{дж}}$ v_0 – ефект Доплера в акустиці при відносному русі джерела й приймача; v – частота звуку, сприйнята рухомим приймачем; v_0 – частота звуку джерела; v – швидкість звуку; v_{np} – швидкість руху приймача; $v_{дж}$ – швидкість руху джерела.

Вільні електромагнітні гармонічні коливання

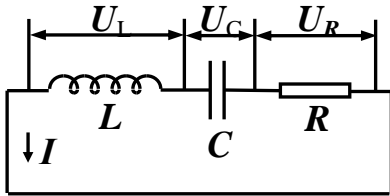
$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0$ – диференціальне рівняння незгасаючих електромагнітних коливань; $\omega_0 = \sqrt{1/LC}$ – власна циклічна частота коливань.

$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$; – рівняння коливань заряду $q(t)$ і напруги на конденсаторі $U(t)$ в коливальному контурі; q_m і U_m – максимальні (амплітудні) значення заряду і напруги на конденсаторі.

$T = 2\pi\sqrt{LC}$ – період власних коливань у коливальному контурі; L – індуктивність контуру; C – ємність конденсатора.

$W = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$ – повна енергія коливального контуру.

Згасаючі електромагнітні коливання



В контурі, який містить конденсатор ємністю C , котушку індуктивності L і резистор опором R , сполучені послідовно, відбуваються згасаючі електромагнітні коливання.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0;$$

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

– диференціальне рівняння згасаючих електромагнітних коливань і його розв’язок; q – заряд на обкладинках конденсатора в момент часу $t=0$; $\beta=R/2L$ – коефіцієнт згасання; ω_0 – циклічна частота вільних незгасаючих коливань контуру при відсутності згасання; ω – частота згасаючих коливань; $q_0 e^{-\beta t}$ – амплітуда згасаючих коливань; q_0 і φ_0 – початкова амплітуда і фаза (визначаються з початкових умов).

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{– добротність коливального контуру.}$$

Електромагнітні хвилі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}; \quad \text{– фазова швидкість поширення хвиль у середовищі; } c \text{ – швидкість поширення світла у вакуумі; } \epsilon_0 \text{ і } \mu_0 \text{ – відповідно електрична і магнітна сталі; } \epsilon \text{ і } \mu \text{ – електрична і магнітна проникності середовища.}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0); \quad \text{– рівняння плоскої електромагнітної хвилі; } E_0 \text{ і } H_0 \text{ – відповідно амплітуди напруженостей електричного і магнітного полів хвилі.}$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

$$\omega = \epsilon \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \mu \mu_0 \frac{H^2}{2} \quad \text{– об’ємна густина енергії електромагнітного поля.}$$

$$\vec{S} = [\vec{E}\vec{H}] \quad \text{– вектор Умова-Пойтінга – густина потоку електромагнітної енергії, тобто енергія електромагнітного променя, яка проходить через площадку в } 1 \text{ м}^2, \text{ розміщену перпендикулярно до напрямку поширення.}$$