1. Елементи лінійної алгебри

Матриці. Операції над матрицями.

Прямокутна таблиця чисел a_{ij} ($i = 1 \div m$, $j = 1 \div n$), що складається з m рядків та n стовпців, називається матрицею. Коротко матрицю позначають так: $A = \{a_{ij}\}_{m \cdot n}$, де a_{ij} - елементи матриці, причому i – номер рядка, j – номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Добуток $m \cdot n$ називається розміром матриці. Якщо $m = n$, то мова йде про квадратну матрицю.

Для матриць визначені наступні операції:

1) алгебраїчне додавання. Нехай $A = \{a_{ij}\}_{m \cdot n}$, $B = \{b_{ij}\}_{m \cdot n}$, тоді $C = A \pm B$,
 де $C = \{c_{ij}\}_{m \cdot n}$ та $c_{ij} = c_{ij} \pm b_{ij}$.

2) множення матриці на число. Нехай $A = \{a_{ij}\}_{m \cdot n}$, $\lambda = const \neq 0$. Тоді $C = \lambda \cdot A$,
 де $C = \{c_{ij}\}_{m \cdot n}$ та $c_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$.

3) добуток матриць. Нехай $A = \{a_{ij}\}_{m \cdot n}$, , $B = \{b_{ij}\}_{n \cdot p}$. Тоді $C = A \cdot B = \{c_{ij}\}_{m \cdot p}$,
 де $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ та $i = 1 \div m$, $j = 1 \div p$.

Визначники. Їх обчислення.

Детермінантом (визначником) n – го порядку є число , що ставиться у відповідність квадратній матриці A розміру $n \cdot n$. Позначається: det A або ΔA.

Розглянемо окремі випадки обчислення визначників.

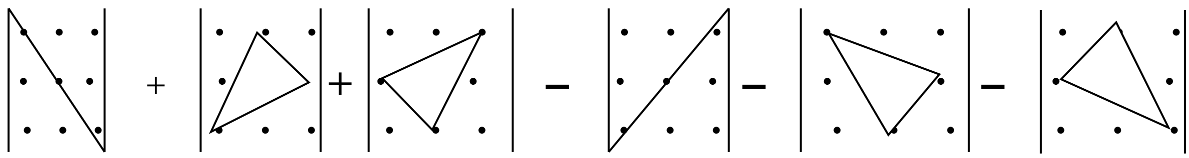
Нехай n = 2 (визначник другого порядку):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Нехай n = 3 (визначник 3 – го порядку):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{21} a_{12} a_{33}$$

Ця сума може бути легко утворена, якщо застосувати „правило трикутників”:

$\Delta =$ 

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті викреслення i – го рядка та j-го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 1. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Властивості визначників:

1) визначник не зміниться, якщо його рядки замінити відповідними стовпцями;
2) якщо переставити місцями два рядки (стовпці),то визначник поміняє знак;

3) якщо один з рядків (стовпців) визначника складається тільки з нулів, то визначник дорівнює нулю;
4) якщо визначник має два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю;
5) спільний множник, що міститься в усіх елементах одного рядка (стовпця), можна винести за знак визначника;
6) якщо у визначнику елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю;
7) визначник не зміниться, якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне й те саме число, відмінне від 0.

Обернена матриця.
Матриця A^{-1} називається оберненою матрицею до матриці A, якщо виконується умова:

$A \bullet A^{-1} = A^{-1} \bullet A = E$, де E – одинична матриця.

Обчислюється обернена матриця за формулою:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

де Aij – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A .

Тобто $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A}$, де $\tilde{A}$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів a_{ij} матриці A.

Системи лінійних рівнянь.
Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n = b_n, \end{cases}$$

де a_{ij} $(i = 1 \div n,\ j = 1 \div n)$ – коефіцієнти,
b_i $(i = 1 \div n)$ – вільні члени,
x_j $(j = 1 \div n)$ – невідомі.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв’язок, і несумісною , якщо вона не має жодного розв’язку.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв’язок, і невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв’язок.

Правило Крамера.
Якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то система має рівно один розв’язок, що має вигляд за формулами Крамера:

$$x_j = \Delta x_j / \Delta \quad (j = 1 \div n),$$

де Δx_j – визначник, отриманий з головного визначника системи Δ, якщо змінити числа j - го стовпця відповідно на числа стовпця вільних членів.

При розв'язуванні систем можуть бути такі випадки:

1) $\Delta \neq 0$, тоді система має єдиний розв'язок, який обчислюється формулами Крамера;
2) $\Delta = 0$ і хоча б один з Δx_j відмінний від нуля, тоді система не має розв'язків, тобто є несумісною;
3) $\Delta = 0$ і $\Delta x_j = 0$ ($j = 1 \div n$), тоді система має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Матричний метод.

$$\text{Нехай } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Матриця A називається основною. Тоді систему можна записати матричним рівнянням

$A \bullet X = B$

Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1}, то $X = A^{-1} \bullet B$.

Метод Гаусса.

Суть метода Гаусса полягає в тому, що послідовним виключенням змінних система рівнянь перетворюється у еквівалентну їй ступінчату або трикутну систему, яка розв'язується у зворотньому напрямі. Якщо записати розширену матрицю системи, то можна працювати тільки з коефіцієнтами матриці, зводячи її до трапецієвидного виду, причому нульові рядки, що з'являються при зведенні, відкидаються, а суперечливі рядки зупиняють процес зведення (система буде несумісною).

Методом Гаусса можна розв'язувати будь-які системи, у яких число рівнянь не співпадає з числом невідомих (основна матриця системи не квадратна). У випадку сумісної системи ми можемо знайти і єдиний і безліч розв'язків. Однорідні системи теж можна розв'язувати методом Гаусса, якщо визначник основної матриці системи дорівнює нулю (якщо $\Delta \neq 0$, то система буде мати єдиний тривіальний, тобто нульовий, розв'язок).

Ранг матриці.

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший з порядків її мінорів, відмінних від нуля.

Два способи обчислення ранга матриці:

1) досліджуються мінори першого, другого, ..., k – го порядку доти, поки не станеться одне з двох: або всі мінори порядку k дорівнюють нулю, або мінор порядку k не існує, тоді $r(A) = k - 1$.
2) цей метод базується на тому, що ранг матриці не змінюється, якщо над матрицею виконати так звані елементарні перетворення, а саме:
   а) переставити місцями два рядки (стовпці);
   б) помножити кожен елемент рядка (стовпця) на один і той самий відмінний від нуля множник;
   в) додати до елементів рядка (стовпця) відповідні елементи другого рядка(стовпця), помножені на одне і те саме число.

Елементарні перетворення виконуються доти, поки в кожному рядку і в кожному стовпчику залишиться не більше одного ненульового елемента. Ранг матриці дорівнює числу цих ненульових елементів. Матрицю можна звести до ступінчатого (трапецієвидного) виду, використовуючи тільки елементарні перетворення з рядками, тоді число ненульових рядків і буде рангом матриці.

Теорема Кронекера – Капеллі.

Для того, щоб система лінійних рівнянь була сумісною, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці дорівнював рангу розширеної матриці, тобто $r(A) = r(A□)$, де $A□$ - розширена матриця, яка утворюється з основної шляхом приписування до неї стовпчика вільних членів.

Завдання №1:

а) обчислити суму, різницю та добуток матриць А (табл. 1.1) та В (табл.1.2);
б) для матриць А та В виконати дії : (2А - 3В) · (3А + 2В) ;
в) перевірити рівність Δ А · Δ В = Δ (А · В), використавши різні способи обчислення визначників (метод трикутників, метод Саррюса, теорему 1);
г) для матриць А та В знайти обернені матриці A^{-1} та B^{-1} , зробити перевірку та обчислити вираз $(A^{-1} + B^{-1})^2$;
д) обчислити визначник та ранг матриці четвертого порядку (табл.1.4).

Таблиця 1.1

1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$	3 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	5 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
6 $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix}$	7 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	9 $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	10 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	13 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	15 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
16 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	17 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	19 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	20 $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
21 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$	22 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$	23 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	24 $\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & 11 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	25 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
26 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	27 $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$	28 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	29 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	30 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Таблиця 1.2

1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	2 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	3 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	4 $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	5 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
6 $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	7 $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$	8 $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$	9 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	10 $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
11 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	12 $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	13 $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	14 $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	15 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
16 $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$	17 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & 3 \end{pmatrix}$	18 $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$	19 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	20 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$
21 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	22 $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	23 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	24 $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	25 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
26 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$	27 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$	28 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	29 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	30 $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

Завдання № 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь (табл.1.3) методом Крамера (методом визначників), методом оберненої матриці та методом Гаусса, порівняти результати.

Завдання №3. Розв'язати систему лінійних рівнянь 4-го порядку методом Гаусса, виписавши розширену матрицю системи і зводячи її до трапецієвидного (або трикутного) виду, застосувавши елементарні перетворення з рядками матриці.

Зворотнім ходом відновити систему і знайти її розв'язки.

Таблиця 1.3

1 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-2 \\ 4x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2-x_3=1 \end{cases}$	2 $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-x_3=8 \end{cases}$	3 $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20 \\ 3x_1-2x_2-5x_3=6 \end{cases}$	4 $\begin{cases} 7x_1-5x_2=31 \\ 4x_1+11x_3=-43 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-20 \end{cases}$
5 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 8x_1+3x_2-6x_3=2 \\ -4x_1-x_2+3x_3=-3 \end{cases}$	6 $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9 \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4 \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18 \end{cases}$	7 $\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3=8 \\ 2x_1-4x_2-3x_3=-1 \\ x_1+5x_2+x_3=0 \end{cases}$	8 $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=7 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$
9 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1+x_2-4x_3=-3 \\ 3x_1+2x_2+x_3=1 \end{cases}$	10 $\begin{cases} 2x_1-x_2+5x_3=4 \\ 5x_1+2x_2+13x_3=2 \\ 3x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$	11 $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1+x_2+3x_3=11 \end{cases}$	12 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-x_2+2x_3=-4 \\ 4x_1+x_2+4x_3=-2 \end{cases}$
13 $\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$	14 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+2x_2+3x_3=0 \\ -x_1+3x_2+2x_3=5 \end{cases}$	15 $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=31 \\ 5x_1+x_2+2x_3=39 \\ 3x_1-x_2+x_3=10 \end{cases}$	16 $\begin{cases} 2x_1-3x_2+6x_3=17 \\ 3x_1+4x_2-x_3=-3 \\ x_1-5x_2+2x_3=10 \end{cases}$
17 $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3=-6 \\ 2x_1-x_2+x_3=5 \\ 3x_1+x_2+2x_3=7 \end{cases}$	18 $\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3=8 \\ -x_1+5x_2+3x_3=-1 \\ 4x_1-6x_2-x_3=-4 \end{cases}$	19 $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=2 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_1+x_2+2x_3=-1 \end{cases}$	20 $\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3=-6 \\ 4x_1+3x_2-x_3=3 \\ x_1-4x_2+2x_3=-9 \end{cases}$
21 $\begin{cases} 2x_1-3x_2-2x_3=4 \\ 3x_1-2x_2+x_3=11 \\ 3x_1-4x_2-5x_3=7 \end{cases}$	22 $\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=-2 \\ x_1+4x_2+2x_3=-3 \\ -x_1+5x_2+3x_3=-10 \end{cases}$	23 $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=1 \\ 2x_1-x_2+4x_3=2 \\ 3x_1+x_2-x_3=5 \end{cases}$	24 $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=7 \\ 5x_1+x_2-2x_3=-7 \\ 3x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$
25 $\begin{cases} 3x_1+5x_3=-1 \\ -4x_2-2x_3=2 \\ x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$	26 $\begin{cases} 3x_1-x_2=5 \\ -2x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2+4x_3=15 \end{cases}$	27 $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=4 \\ 2x_1-5x_2-3x_3=-17 \\ x_1+x_2-x_3=0 \end{cases}$	28 $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1+x_2+x_3=6 \\ 3x_1-x_2+x_3=4 \end{cases}$
29 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1 \\ 3x_1-2x_2=8 \end{cases}$	30 $\begin{cases} x_1+5x_2+x_3=-7 \\ 2x_1-x_2-x_3=0 \\ x_1-2x_2-x_3=0 \end{cases}$	31 $\begin{cases} 3x_1+5x_3=-1 \\ 8x_2+4x_3=-4 \\ x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$	32 $\begin{cases} 3x_1-2x_2=8 \\ 2x_1-x_2-6x_3=-1 \\ x_1+x_2+x_3=2 \end{cases}$

Системи 4-го порядку

1). $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 6 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ -x_2 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

2). $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -8 \\ -x_2 + 3x_4 = 9 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

3). $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_4 = -16 \\ 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18 \\ 4x_1 - 3x_4 = -13 \\ -3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

4). $$\begin{cases} 5x_2 + x_3 - 3x_4 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6 \\ 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

5). $$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 2x_4 = -3 \\ x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 9 \\ 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_4 = -3 \end{cases}$$

6). $$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 3x_4 = 12 \\ 3x_1 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 6 \end{cases}$$

7). $$\begin{cases} 4x_1 - x_4 = 2 \\ 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 7 \\ 5x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 16 \end{cases}$$

8). $$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_3 + x_4 = 9 \\ 5x_1 - 2x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$$

9). $$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 11 \\ 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$$

10). $$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = -5 \\ 2x_2 - x_4 = -2 \\ 2x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

11). $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 9 \\ 3x_1 - 2x_3 = 8 \\ 5x_2 + 3x_3 = 12 \end{cases}$$

12). $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -4 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_2 + x_3 - 4x_4 = -11 \end{cases}$$

13). $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -11 \\ 2x_1 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 11 \end{cases}$$

14). $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 - 4x_4 = -10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 21 \\ 5x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

15). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8 \\ -x_1 + 4x_3 + 3x_4 = -3 \\ 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \end{cases}$

16). $\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 \\ -5x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 8 \end{cases}$

17). $\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -12 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 10 \\ 3x_2 - 4x_4 = -1 \end{cases}$

18). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_4 = -9 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2 \\ 5x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$

19). $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = -10 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 10 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

20). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

21). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \end{cases}$

22). $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 21 \\ 2x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

23). $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -4 \\ 3x_2 - x_4 = -2 \end{cases}$

24). $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \end{cases}$

25). $\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_4 = 21 \\ 2x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$

26). $\begin{cases} 2x_1 - 3x_4 = -4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 8 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$

27). $\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 15 \\ 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_4 = -4 \end{cases}$

28). $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

Таблиця 1.4

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 14 \end{pmatrix}$ 1 2 3	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -6 & -7 \\ 2 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & -6 & 2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ 4 5 6	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 20 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \\ 1 & -5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 7 8 9	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \\ 4 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \\ 3 & 1 & -1 & 26 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ 10 11 12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -12 & 4 & -7 \\ 3 & -5 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 9 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & -1 \\ -8 & -3 & 6 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 13 14 15	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 & 16 \\ 5 & 8 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & -14 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -4 & 20 \\ 3 & -2 & -5 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 8 \\ 3 & -5 & -6 & -7 \\ 1 & -4 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 16 17 18	$\begin{pmatrix} 1 & 9 & -4 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 4 & -3 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 9 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \\ 5 & 6 & -2 & 18 \\ 1 & 9 & -4 & 9 \end{pmatrix}$ 19 20 21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 & 11 \\ 3 & -2 & 4 & 11 \\ 1 & -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 22 23 24	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 4 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ 25 26 27	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 28 29 30	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. Елементи векторної алгебри

Завдання з векторної алгебри спрямовані на засвоєння основних означень векторної алгебри, скалярного, векторного і мішаного добутків.

Вектор – величина $\vec{a}$, повністю визначена своїм напрямом і довжиною. Проекції вектора на координатні осі називають його <u>координатами</u> (декартовими): $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$.

Якщо відомі координати початку і кінця вектора $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$, де M($x_1; y_1; z_1$) та N($x_2; y_2; z_2$), то за формулою $|\vec{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ (або $|\vec{a}|=\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}$) можна визначити його <u>модуль</u> (довжину).

Якщо α, β, γ - кути, що складає вектор $\vec{a}$ з осями координат, то $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ є <u>напрямними косинусами</u> вектора $\vec{a}$.

Тоді $a_x=|\vec{a}|\cdot\cos\alpha$, $a_y=|\vec{a}|\cdot\cos\beta$, $a_z=|\vec{a}|\cdot\cos\gamma$ і $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Орт вектора $\vec{a}$ позначається $\vec{a}_0=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)=\left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right)$, а $|\ \vec{a}_0\ |=1$.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, що дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}).$$

В координатній формі скалярний добуток має вигляд: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$,
тому косинус кута можна знайти за формулою:

$$\cos(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^{\ 2}+a_y^{\ 2}+a_z^{\ 2}}\cdot\sqrt{b_x^{\ 2}+b_y^{\ 2}+b_z^{\ 2}}}.$$

Властивості скалярного добутку:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (комутативність);
2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (дистрибутивність);
3) $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (для будь-якого λ);
4) $\vec{a}\cdot\vec{a}=0 \Leftrightarrow \vec{a}=0$; $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Вектори паралельні, якщо їх координати пропорційні.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають новий вектор $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$, який визначається трьома умовами:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$;
2) $\vec{c}$ перпендикулярний як до $\vec{a}$, так і до $\vec{b}$;
3) впорядкована трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{a}\times\vec{b}$, відкладених від однієї точки, утворює правий базис (правило “буравчика”).

В координатній формі $\vec{a}\times\vec{b}=[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$.

Властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$;
2) $(\alpha\vec{a})\times\vec{b}=\alpha(\vec{a}\times\vec{b})$;
3) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$;
4) $\vec{a}\times\vec{a}=0$ (якщо $\vec{a}\times\vec{b}=0 \Leftrightarrow$ вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ паралельні).

Площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, обчислюємо за формулою $S_{парал.}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, а площу трикутника можна обчислити за формулою $S_{трик.}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$.

Мішаним (скалярно-векторним) добутком трьох ненульових некомпланарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ називають число, абсолютна величина якого дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, що виходять з однієї точки.

Це число додатнє, якщо трійка векторів утворює правий базис.

В координатній формі мішаний добуток знаходимо як визначник: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Властивості мішаного добутку: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$;

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні (тобто належать одній або паралельним площинам), то їх мішаний добуток дорівнює нулю.

Якщо вектор $\vec{b}$ можна представити у вигляді $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\cdots+\alpha_n\vec{a}_n$, де $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - деякі числа, що одночасно не дорівнюють нулю, то говорять, що вектор $\vec{b}$ розкладений за векторами $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Теорема.</u> Нехай маємо три некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Будь-який вектор $\vec{d}$ може бути єдиним образом розкладений за цими векторами, тобто існують єдині такі числа α,β,γ, що $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

У координатній формі це рівняння перетворюється у систему лінійних рівнянь, де невідомими є числа α,β,γ.

Завдання №1 (варіанти наведені у таблиці 3.3 **).**

Скласти вектори $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$; $\vec{b}=\overrightarrow{A_3A_4}$ та $\vec{c}=\overrightarrow{A_3A_2}$. Знайти:

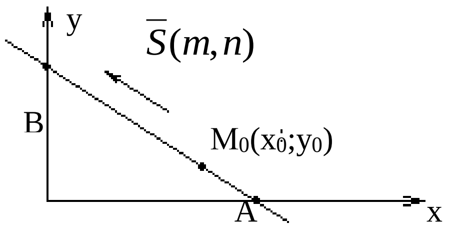
1) модулі векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$;
2) орти векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$;
3) кут між векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$;
4) скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$;
5) векторний добуток $\vec{b}\times\vec{c}$;
6) мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$;
7) обчислити вираз $\left|(2\vec{a}-\vec{b})\times(2\vec{b}+3\vec{c})\right|$;
8) побудувати на площині вектор $\vec{z}=\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$, якщо $\alpha=a_x, \beta=b_z$ (користуючись правилом паралелограма або трикутника); вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$ брати довільними;
9) розкласти вектор $\vec{d}=\overrightarrow{A_1A_3}$ у векторному базисі $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (перевірити спочатку, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ лінійно незалежні).

3. Аналітична геометрія

Пряма на площині. На площині, де введена прямокутна система координат XOY, розглянемо пряму AB з заданою точкою $M_0(x_0;y_0)$.

Канонічне рівняння прямої на площині: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, де $\vec{S}=(m,n)$ - напрямний вектор прямої, що паралельна прямій AB.

Пряму можна описати і іншими способами:



1) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом
$$y=kx+b,$$
де k - кутовий коефіцієнт або тангенс додатнього кута, який утворює пряма з додатнім напрямком вісі Ox;
2) рівняння прямої, що проходить через задану точку з заданим кутовим коефіцієнтом
$$y-y_0=k(x-x_0);$$
3) рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$, де $M_1(x_1;y_1)$ та $M_2(x_2;y_2)$ – відомі точки прямої;
4) загальне рівняння прямої : $Ax+By+C=0$, де $\overline{n}=(A;B)$ - нормальний вектор, що направлений перпендикулярно до прямої;
5) рівняння прямої у відрізках : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a та b - відрізки, що відсікає пряма від осей координат;
6) нормальне рівняння прямої : $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$, де p - перпендикуляр, який опущено на пряму з початку координат, а кут α - це кут між цим перпендикуляром і віссю Ox..

Якщо будь-яке загальне рівняння помножити на множник $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (знак береться протилежним знаку C), то отримаємо нормоване рівняння прямої.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до заданої прямої обчислюємо за формулою
$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|.$$

Координати точки C, яка поділяє пряму AB на частини, які мають відношення довжин λ, обчислюються за формулами
$$x_c=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_c=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Паралельність прямих доводиться рівністю їх кутових коефіцієнтів. Перпендикулярність прямих з кутовими коефіцієнтами k_1 та k_2 визначається співвідношенням $k_1k_2=-1$. Кут між прямими можна обчислити за формулою $tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$. Відстань між двома точками площини обчислюється за формулою $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Площина. Будь-яка площина у просторі описується лінійним рівнянням
$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$
і навпаки, будь-яке рівняння (1) у просторі описує деяку площину. Щоб скласти рівняння площини у просторі, достатньо задати точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через яку вона проходить, і вектор $\overline{n}=\{A;B;C\}$, перпендикулярний площині (нормальний вектор площини). Тоді будь-який вектор

$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$, що належить площині, буде перпендикулярним до $\bar{n}$, тобто $\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Це і є векторне рівняння площини.

У координатній формі маємо $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Щоб скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, треба виконати умову компланарності трьох векторів $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ та $\overline{M_0M}$, де $M(x; y; z)$ – довільна точка площини, тобто маємо $\overline{M_0M_1} \times \overline{M_0M_2} \cdot \overline{M_0M} = 0$. Мішаний добуток обчислюємо як визначник , складений з координат векторів. Відстань від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ обчислюємо за формулою

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|.$$

Пряма у просторі. Канонічне рівняння прямої у просторі визначається умовою паралельності деякого вектора (напрямний вектор прямої) $\vec{S}(l, m, n)$ та довільного вектора $\overline{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$, що належить прямій:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Якщо ввести параметр t, то будемо мати параметричне рівняння прямої :

$$x = x_0 + lt;\; y = y_0 + mt;\; z = z_0 + nt, \text{ де } t \text{ - будь-яке дійсне число.}$$

Рівняння прямої, що проходить через 2 точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ та $M_2(x_2;y_2;z_2)$, має вигляд:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Іноді рівняння прямої розглядається як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Канонічне рівняння отримаємо, якщо послідовно виключити з системи невідомі x та y.

Умови паралельності і перпендикулярності прямих, а також прямої і площини витікають з відповідних властивостей напрямних векторів, напрямного та нормального векторі.

Кут між прямою і площиною знаходимо за формулою

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}, \text{ де } \vec{S} = (l, m, n),\; \bar{n} = (A, B, C).$$

Криві другого порядку на площині. Маємо 4 види кривих другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

Коло – геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки, що називається центром кола. Рівняння кола: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, де x, y - поточні координати, x_0, y_0 - координати центра, R - радіус кола.

Еліпс – геометричне місце точок, сума відстаней яких від двох заданих точок (фокуси еліпса) є величина стала.

Рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де x, y - поточні координати, a та b - велика і мала півосі.

Ексцентриситет еліпса: $e=\frac{c}{a}<1$, де $2c$ - відстань між фокусами еліпса. Маємо співвідношення $b^2=a^2-c^2$.

Гіпербола – геометричне місце точок, різниця відстаней яких від двох заданих точок, що називаються фокусами, є величина стала.

Рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, де x, y - поточні координати, a та b - велика і мала півосі.

Ексцентриситет гіперболи: $e=\frac{c}{a}>1$. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}\cdot x$ називаються асимптотами гіперболи.

Парабола – геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Рівняння параболи: $y^2=2px$, де p - параметр параболи. Ексцентриситет параболи $e=1$.

Маємо чотири види параболи з вісями симетрії по Ох та Оу.

Поверхні другого порядку. Основним методом дослідження форми поверхонь за їх рівняннями є метод перерізів, який полягає у наступному:

1) знаходять перерізи поверхонь з кожною координатною площиною ($x=0; y=0; z=0$);
2) знаходять перерізи поверхонь з площинами, паралельними координатним площинам ($x=const; y=const; z=const$);
3) за отриманими кривими роблять висновок про форму поверхні;
4) виконують схематичний малюнок поверхні.

Для висновків маємо наступний перелік поверхонь: куля, еліпсоїд, еліптичний та гіперболічний параболоїди, однополосний та двополосний гіперболоїди, конус, циліндр.

Рівняння та малюнки поверхонь можна подивитися у довіднику з вищої математики.

Завдання №1 (варіанти завдань у таблиці 3.1). У трикутнику АВС потрібно знайти:

1) рівняння сторони ВС;
2) величину кута α при вершині А;
3) рівняння і довжину висоти до сторони ВС;
4) рівняння і довжину медіани до сторони ВС;
5) рівняння бісектриси кута при вершині А;
6) площу трикутника АВС.

Завдання №2 (варіанти завдань у таблиці 3.2).

Скласти рівняння лінії, відстань кожної точки якої від точки $M_0(x_0;y_0)$ і від прямої $Ax+C=0$ або $By+C=0$ відносяться як $m:n$. Зобразити лінію на малюнку.

Завдання №3 (варіанти завдань у таблиці 3.3). Задані координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Потрібно знайти:

1) рівняння ребер A_1A_2 та A_1A_4 та їх довжини;
2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ;
3) рівняння грані $A_1A_2A_3$;

4) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$;
5) довжину висоти A_4D, проведеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;
6) рівняння висоти A_4D;
7) координати точки перетину висоти A_4D з гранню $A_1A_2A_3$;
8) координати точки, яка симетрична точці A_4 відносно грані $A_1A_2A_3$;
9) рівняння площини, що проходить через A_1A_4 перпендикулярно площині $A_1A_2A_3$.

Таблиця 3.1

Варі-ант	$A(x_1; y_1)$	$B(x_2; y_2)$	$C(x_3; y_3)$
1.	(0; –1)	(1; 1)	(–2; 1)
2.	(0; 1)	(1; –1)	(1; 0)
3.	(1; 0)	(1; –2)	(–1; 1)
4.	(2; 1)	(2; 2)	(3; 1)
5.	(3; 0)	(3; 2)	(4; 1)
6.	(–1; 3)	(–1; –2)	(1; 1)
7.	(0; 1)	(1; 1)	(2; –1)
8.	(2; 2)	(8; 3)	(–1; –1)
9.	(4; 7)	(2; 5)	(0; 0)
10.	(3; 2)	(–3; 0)	(0; 4)
11.	(2; 3)	(1; –1)	(6; 4)
12.	(7; –1)	(–3; 2)	(2; 7)
13.	(3; –4)	(10; 1)	(0; 7)
14.	(–1; –3)	(–5; 4)	(2; 9)
15.	(2; 1)	(1; 1)	(3; –5)
16.	(4; 6)	(–4; 6)	(–1; 0)
17.	(2; 8)	(–2; 4)	(3; 1)
18.	(1; –1)	(0; 1)	(2; 1)
19.	(0; 2)	(–1; 1)	(2; 4)
20.	(9; 3)	(7; 1)	(–2; 5)
21.	(0; 4)	(0; 0)	(–1; 2)
22.	(5; 3)	(3; 8)	(0; 7)
23.	(6; 9)	(–4; 0)	(7; 1)
24.	(2; 9)	(10; 1)	(0; –5)
25.	(–1; 2)	(3; 7)	(1; 2)
26.	(7; 1)	(9; 3)	(–2; 5)
27.	(3; –5)	(2; 1)	(1; 1)
28.	(0; 7)	(3; –4)	(10; 1)
29.	(–2; 4)	(2; 8)	(3; 1)
30.	(–4; 0)	(7; 1)	(6; 9)

Таблиця 3.2

Варі-ант	Рівняння прямої	$M_0(x_0; y_0)$	m:n
1.	2x–3=0	(1; 1)	3:2
2.	x+2=0	(–1; 0)	2:3
3.	y–2=0	(1; 2)	1:1
4.	1/2y+4=0	(–2; 4)	1:2
5.	x–1=0	(–1; 1)	2:1
6.	2x+1=0	(0; 2)	5:6
7.	2y–3=0	(2; 0)	3:4
8.	3y+5=0	(3; 1)	1:2
9.	y–1=0	(–1; 2)	2:3
10.	x+1=0	(2; 4)	3:5
11.	x–5=0	(1; –1)	1:1
12.	y+1=0	(6; 5)	2:1
13.	x–2=0	(4; 3)	3:2
14.	3x+4=0	(2; 1)	2:3
15.	x+2=0	(0; –1)	1:1
16.	3x–1=0	(0; 1)	1:1
17.	y+2=0	(1; 1)	6:5
18.	y–1=0	(1; –2)	2:1
19.	y–5=0	(1; 1)	5:3
20.	2x+3=0	(1; 2)	2:3
21.	y–1=0	(–1; –1)	1:2
22.	x+1=0	(1; 4)	1:2
23.	2x–3=0	(1; 3)	1:1
24.	x–8=0	(1; 1)	4:3
25.	x–3=0	(–1; 1)	2:1
26.	3x+4=0	(2; 1)	2:3
27.	y+2=0	(1; 1)	6:5
28.	x+1=0	(1; 4)	1:2
29.	y–1=0	(1; –2)	2:1
30.	x–2=0	(4; 3)	3:2

Таблиця 3.3

Варі-ант	$A_1(x_1; y_1; z_1)$	$A_2(x_2; y_2; z_2)$	$A_3(x_3; y_3; z_3)$	$A_4(x_4; y_4; z_4)$
1.	(1; 3; 6)	(2; 2; 1)	(–1; 0; 1)	(–4; 6; –7)
2.	(–4; 2; 6)	(2; –3; 0)	(–10; 5; 8)	(–5; 2; –4)
3.	(7; 2; 4)	(7; –1; –2)	(3; 3; 1)	(–4; 2; 8)
4.	(2; 1; 4)	(–1; 5;–2)	(–7; –3; 2)	(–6; –3; 6)
5.	(–1; –5; 2)	(–6; 0; –3)	(3; 6; –3)	(–10; 6; 7)
6.	(0; –1; 1)	(–2; 3; 5)	(1; –5; –9)	(–1; –6; 3)
7.	(5; 2; 0)	(2; 5; 0)	(1; 2; 4)	(–1; 1; 1)
8.	(2; –1; –2)	(1; 2; 1)	(5; 0; –6)	(–10; 9; –7)
9.	(–2; 0; –4)	(–1; 7; 1)	(4; –8; –4)	(1; –4; 6)
10.	(14; 4; 5)	(–5; –3; 2)	(–2; –6; –3)	(–2; 2; –1)
11.	(1; 2; 0)	(3; 0; –3)	(5; 2; 6)	(8; 4; –9)
12.	(2; –1; 2)	(1; 2; –1)	(3; 2; 1)	(–4; 2; 5)
13.	(1; 1; 2)	(–1; 1; 3)	(2; –2; 4)	(–1; 0; –2)
14.	(2; 3; 1)	(4; 1; –2)	(6; 3; 7)	(7; 5; –3)
15.	(1; 1; –1)	(2; 3 ;1)	(3; 2; 1)	(5; 9; –8)
16.	(1; 5; –7)	(–3; 6; 3)	(–2; 7; 3)	(–4; 8; –12)
17.	(–3; 4; –7)	(1; 5; –4)	(–5; –2; 0)	(2; 5; 4)
18.	(–1; 2; –3)	(4; –1; 0)	(2; 1; –2)	(3; 4; 5)
19.	(4; –1; 3)	(–2; 1; 0)	(0; –5; 1)	(3; 2; –6)
20.	(1; –1; 1)	(–2; 0; 3)	(2; 1; –1)	(2; –2; –4)
21.	(1; 2; 0)	(1; –1; 2)	(0; 1; –1)	(–3; 0; 1)
22.	(1; 0; 2)	(1; 2; –1)	(2; –2; 1)	(2; 1; 0)
23.	(1; 2; –3)	(1; 0; 1)	(–2; –1; 6)	(0; –5; –4)
24.	(3; 10; –1)	(–2; 3; –5)	(–6; 0; –3)	(1; –1; 2)
25.	(–1; 2; 4)	(–1; –2; –4)	(3; 0; –1)	(7; –3; 1)
26.	(1; 2; 0)	(1; 2; –1)	(–5; –2; 0)	(–3; 0; 1)
27.	(3; 10; –1)	(1; 5; –4)	(–2; 7; 3)	(2; 5; 4)
28.	(3; 4; 5)	(2; 1; –2)	(4; –1; 0)	(–1; 2; –3)
29.	(2; –2; 1)	(1; 2; –1)	(1; 0; 2)	(2; 1; 0)
30.	(2; 3 ;1)	(1; 1; –1)	(5; 9; –8)	(3; 2; 1)

Завдання №4: звести до канонічного виду рівняння поверхонь, заданих у таблицях 3.4 та 3.5; методом перерізів провести дослідження і побудувати ці поверхні.

Таблиця 3.4

Варі-ант	Рівняння поверхонь
1.	$x^2+y^2+z^2=6x-4z$
2.	$x^2+y^2+z^2-3x+6y+2z-5=0$
3.	$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$
4.	$x^2-3y^2+2z^2+2x-6y+4z=0$
5.	$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$
6.	$2x^2+y^2+2z^2-4x+4y+4z+7=0$

Таблиця 3.5

Варі-ант	Рівняння поверхонь
1.	$x^2-4y^2=16z$
2.	$z=x^2+y^2-6y+10$
3.	$x^2+y^2=(z+1)$
4.	$4x^2-9y^2=36z$
5.	$x^2+y^2-2x-2y-4z+2=0$
6.	$x^2+2x+y^2-6y-6=0$

7.	$x^2-y^2+4z^2-10x+6y-16z+16=0$
8.	$x^2+y^2+4z^2-2x-15=0$
9.	$3x^2+3y^2-3z^2-6x+4y+4z+3=0$
10.	$x^2-6y^2+3z^2+8x+12y+1=0$
11.	$x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-18z-14=0$
12.	$3x^2+3y^2+3z^2-6x+4y-1=0$
13.	$x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-1=0$
14.	$2x^2-y^2+z^2+4x+2y+8z+1=0$
15.	$3x^2-4y^2-6x+8y-z^2+11=0$
16.	$x^2+y^2+z^2-8z+12=0$
17.	$x^2+2y^2-3z^2+2x+4y-6z=0$
18.	$2x^2+2y^2+2z^2-5y-8=0$
19.	$x^2+4y^2-z^2-10x-16y+6z+16=0$
20.	$x^2+y^2+4z^2+2x-4y+2=0$
21.	$2x^2+3y^2+z^2+6y-9=0$
22.	$4x^2-4y^2+4z^2+2x-6y+8z-5=0$
23.	$x^2+3y^2+3z^2+2x-8=0$
24.	$2x^2+3y^2+4z^2-4x+6y-7=0$
25.	$x^2+y^2+z^2-4z=0$
26.	$3x^2+3y^2+z^2-6x+6y-3=0$
27.	$x^2+2y^2+z^2-6x+1=0$
28.	$4x^2+y^2+4z^2-2y-15=0$
29.	$3x^2+2y^2+z^2-6x-9=0$
30.	$x^2+y^2+z^2-6x=0$

7.	$x^2+y^2-2x+2y+2=z$
8.	$z=4-y^2$
9.	$y^2+z^2=x^2$
10.	$z=x^2+2$
11.	$x^2+(y-1)^2=z^2$
12.	$y^2+z^2-x-4=0$
13.	$x^2+z^2-4y=0$
14.	$x^2+y^2-2z=0$
15.	$x^2+z^2-y-1=0$
16.	$x^2+3y^2-3z+3=0$
17.	$2x^2-2+2=0$
18.	$x^2+y^2+2x-6y+10=z$
19.	$(x-1)^2+z^2=y^2$
20.	$2y^2-z-2=0$
21.	$z=9-x^2$
22.	$4x^2-y^2=16z$
23.	$(y+2)^2+z^2=x^2$
24.	$x^2+4z^2-16y+16=0$
25.	$x^2+z^2-2x-2z-7=0$
26.	$z=y^2-4$
27.	$x^2-9y^2=9z$
28.	$y^2+z^2=(x-1)^2$
29.	$x^2+z^2-y+1=0$
30.	$2x^2+3y^2-4x+6y-13=0$

ПЕРЕЛІК НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Міхайленко В.М., Овчинніков П.П., Яремчук Ф.П. “ Вища математика” , ч.1,2. -Київ: “Техніка”, 2000р.
2. Журавель О.О. Вища математика. Збірник завдань для курсових і самостійних робіт. - Київ,1998р.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. -М.: Наука, 1964.
4. Сборник задач по математике для втузов. Линейная алгебра и основы математического анализа. Под редакцией Ефимова А.В. и Демидовича Б.М.-М.: Наука, 1981.
5. Каплан И.А. Практические занятия по высшей математике.- Из-во Харьковского университета, 1972.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. - Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука, 1980.