1.3. Системи лінійних рівнянь.

Основні поняття.

Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

де x_i $\left(i = 1,2,\ldots n\right)$ - невідомі, a_{ij} - коефіцієнти при невідомих, b_i - вільні члени, m- кількість рівнянь системи, n - кількість невідомих системи.

Система (1) називається *однорідною системою лінійних рівнянь*, якщо всі b_i дорівнюють нулеві. Якщо хоча б один із вільних членів b_i не дорівнює нулю, то система називається *неоднорідною.*

Розв'язком системи (1) називається сукупність значень невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, які задовольняють кожне рівняння системи. При підстановці в рівняння замість невідомих їх значень: $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $\ldots x_n = \alpha_n$ рівняння перетворюються у вірні числові рівності.

При розв'язуванні системи можливі такі випадки:

а) система має єдиний розв'язок ;

б) система має безліч розв'язків ;

в) система не має розв'язків.

У випадках а) і б) систему називають сумісною, а у випадку в) – несумісною.

Якщо система сумісна і має єдиний розв'язок то її називають визначеною, а коли безліч розв'язків - невизначеною. Випадок , коли система має кінцеве число розв'язків більше одного неможливий. Дослідити систему (1) – значить встановити сумісна дана система чи ні. У випадку сумісності знайти її розв'язки.

Дві системи m-лінійних рівнянь з n невідомими називаються *рівносильними або еквівалентними*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

До елементарних перетворень системи (1) відносяться такі перетворення над рівняннями системи:

1) переміна місць рівнянь в системі;
2) викреслювання в системі рівнянь виду $0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_n = 0$;
3) перетворення рівнянь системи, яке полягає в тому, що до обох частин одного із рівнянь додаються відповідно частини другого рівняння, помножені на одне і те ж число;

4) перестановка в системі членів з якими-небудь двома невідомими.

Приклад.

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 4x_3 - x_4 = 2, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Якщо в даній системі переставити члени з невідомими x_1 і x_2 , то система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_4 + 4x_3 - 7x_2 = 2, \\ 3x_1 + x_4 - x_3 + 6x_2 = 3. \end{cases}$$

В результаті застосування елементарних перетворень до системи рівнянь (1) одержуємо систему еквівалентну даній.

Правило Крамера.

У випадку , коли кількість рівнянь системи (1) дорівнює кількості невідомих , систему можна розв'язувати за формулами Крамера . Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

(2)

Визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

складений із коефіцієнтів при невідомих називається *визначником системи*. Якщо у визначнику Δ стовпець із коефіцієнтів при невідомому x_k замінити стовпцем вільних членів, то одержимо визначник , який називається визначником при невідомому x_k і позначається Δ_k. Так, наприклад, визначник при невідомому x_2 буде мати вигляд:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Формули Крамера можна застосовувати коли $\Delta \neq 0$ і вони мають вигляд:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta} \quad (k = 1,2,\ldots n).$$

Пересвідчимось, наприклад, що $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Для цього ліву і праву частини першого рівняння системи (2) на A_{12}, другого рівняння - на A_{22}, …, n-го рівняння - на A_{n2}. Додаючи почленно всі рівняння системи, одержимо рівність:

$$\begin{aligned} & x_1\left(a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + \ldots + a_{n1}A_{n2}\right) + \\ & + x_2\left(a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{n2}A_{n2}\right) + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ & + x_n\left(a_{1n}A_{12} + a_{2n}A_{22} + \ldots + a_{nn}A_{nn}\right) = \\ & = b_1A_{12} + b_2A_{22} + \ldots b_nA_{nn}. \end{aligned}$$

Коефіцієнт при x_2 дорівнює Δ, так як він є сумою добутків елементів 2-го стовпця визначника Δ на їх алгебраїчне доповнення. Коефіцієнти при других невідомих дорівнюють нулю, бо вони є сумою добутків елементів відмінних від елементів 2-го стовпця визначника Δ на алгебраїчні доповнення елементів другого стовпця. Права частина дорівнює визначнику Δ_2, який одержаний із Δ шляхом заміни елементів другого стовпця відповідними вільними членами системи. Таким чином, приходимо до рівності $x_2 \cdot \Delta = \Delta_2$ або $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9, \\ 4x + 5y + 6z = 6, \\ 2x - 3y + 2z = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36.$$

Так як визначник системи $\Delta \neq 0$, то для розв'язування системи можна скористатись формулами Крамера. Обчислимо визначники при невідомих

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 6 \\ 12 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 36, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 2 \\ 4 & 6 & 6 \\ 2 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -72, \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 12 \end{vmatrix} = 72.$$

За формулами Крамера маємо

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{36}{36} = 1; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-72}{36} = -2; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{72}{36} = 2.$$

Відповідь: $x = 1; \quad y = -2; \quad z = 2.$

Формули Крамера можна використати для дослідження системи (2):

- якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок;
- якщо визначник системи $\Delta = 0$ і всі визначники при невідомих $\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = 0$, то система має безліч розв'язків;
- якщо визначник системи $\Delta = 0$, а хоча б один із визначників при невідомих Δ_k $(k = 1,2\ldots n)$ не дорівнює нулю, то система не має розв'язків.

Теорема Кронекера-Капеллі.

Як вказувалось , формули Крамера можна застосовувати в тих випадках, коли число невідомих дорівнює числу рівнянь і визначник системи $\Delta \neq 0$. Як взнати сумісна чи несумісна система , коли вона таким вимогам не задовольняє. Нехай в системі (1) кількість невідомих не дорівнює кількості рівнянь $n \neq m$.

Позначимо через A матрицю системи.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Через B позначимо матрицю, яка можна одержати із матриці A шляхом приєднання стовпця вільних членів

$$B = \left(\begin{array}{l|l} a_{11} \quad a_{12} \ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} \quad a_{22} \ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} \quad a_{m2} \ldots a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрицю B називають *розширеною* матрицею системи (1).

Теорема . Для того, щоб система рівнянь із n невідомих і m рівнянь була сумісною необхідно і достатньо, щоб ранг матриці системи A дорівнював рангу розширеної матриці B:

$$r_A = r_B.$$

Зауваження. У випадку сумісності системи (1) система має єдиний розв'язок (визначена), коли $r_A = r_B = n$ і нескінченну кількість розв'язків (невизначена) , коли $r(A) = r(B) < n$, де n - кількість невідомих.

Приклад1. Дослідити систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Згідно теореми Кронекера-Капеллі, для сумісності системи лінійних рівнянь необхідно і досить, щоб ранг матриці системи дорівнював рангу розширеної матриці: $r_A = r_B$.Складаємо матрицю системи і визначаємо її ранг

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & -5 & 6 & 1 \\ -7 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідки $r_A = 3$. Знаходимо ранг розширеної матриці

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 5 & -4 & 5 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -13 \\ 0 & -14 & 20 & -9 & -26 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -9 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 10 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці B дорівнює 4. Так як $r_A \neq r_B$, то дана система несумісна.

Приклад 2. Довести сумісність системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 11, \\ 8x_1 + 6x_2 + x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Розв'язання. Знаходимо ранг матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \\ 8 & 6 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & -1 \\ 10 & 9 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A $r_A = 3$.

Складаємо розширену матрицю B системи і знаходимо її ранг

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & -2 & 11 \\ 8 & 6 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & 7 & -23 \\ 0 & -8 & -5 & 7 & -16 \\ 0 & -10 & -15 & 21 & -62 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & 7 & -23 \\ 0 & 0 & 35 & -49 & 168 \\ 0 & 0 & 35 & -49 & 168 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -3 & 9 \\ 0 & -1 & -5 & 7 & -23 \\ 0 & 0 & 35 & -49 & 168 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Звідси $r_B = 3$. Так як $r_A = r_B$, то дана система сумісна. Ранг $r = r_A = r_B$ менше числа невідомих, а значить система має нескінченну множину розв'язків. Одне із невідомих $(n - r = 4 - 3 = 1)$ буде вільним: воно може приймати довільне числове значення.

Однорідні системи рівнянь

Однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Однорідна система завжди сумісна, так як вона має розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, який називається нульовим або тривіальним.

Якщо визначник системи $\Delta \neq 0$, то тривіальний розв'язок буде єдиним розв'язком системи (3). Відмітимо, що ранг матриці системи (3) і ранг розширеної матриці рівні.

Якщо $\Delta = 0$, тоді ранг матриці системи (3) і ранг розширеної матриці системи (3) менше числа n. Припустимо, що вони дорівнюють $n-1$. Тоді система (3) має нескінченну множину розв'язків

$$x_1 = A_{k1}t, \quad x_2 = A_{k2}t, \quad \ldots, \quad x_n = A_{kn}t,$$

де t - довільне дійсне число, а A_{ki} $(i = 1,2,\ldots n)$ - алгебраїчні доповнення елементів k-го рядка матриці системи. Дійсно, підставляючи ці числа в ліві частини рівнянь системи (3), одержимо:

$$\begin{cases} a_{11}A_{k1}t + a_{12}A_{k2}t + \ldots + a_{1n}A_{kn}t = 0, \\ a_{21}A_{k1}t + a_{22}A_{k2}t + \ldots + a_{2n}A_{kn}t = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}A_{k1}t + a_{n2}A_{k2}t + \ldots + a_{nn}A_{kn}t = 0. \end{cases}$$

Рівняння системи перетворились в тотожності, так як якщо $i \neq k$ сума

$$a_{i1}A_{k1} + a_{i2}Ak2 + \ldots + a_{in}A_{k2} \quad (i = 1,2,\ldots n)$$

дорівнює нулеві (ця сума є сумою добутків елементів i-го рядка визначника на алгебраїчні доповнення другого k-го рядка визначника). Якщо $i = k$ сума

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}Ak2 + \ldots + a_{kn}A_{k2}$$

також дорівнює нулеві, так як вона дорівнює визначнику системи Δ, який дорівнює нулеві.

Відмітимо, що при побудові розв'язку системи (3) беруться алгебраїчні доповнення того рядка, де хоч би одне із A_{ki} не дорівнювало б нулю.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 0, \\ x - y + 4z = 0, \\ 5x + 2y + 10z = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Складаємо і обчислюємо визначник системи Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення до елементів першого рядка:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = -18; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Одержуємо розв'язок

$$x = -18t, \qquad y = 10t, \qquad z = 7t.$$

Метод Гауса

Метод називають також *методом послідовного виключення невідомих системи.* Ідея методу Гауса полягає в такому: за допомогою елементарних перетворень система (1) приводиться до ступінчатої системи такого вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{mm}x_m + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

(4)

де $m \leq n, \quad a_{ii} \neq 0, \quad i = 1,2,\ldots m$.

Якщо $m = n$, то ступінчату систему називають трикутною, якщо $m \neq n$, то систему називають трапецевидною.

Ступінчату систему легко дослідити сумісна вона чи ні. Якщо ступінчата система містить хоч би одне рівняння виду $0 = a$, $a \neq 0$, то система несумісна.

Елементарні перетворення зручно виконувати не над самою системою (1), а над її розширеною матрицею. Слід звернути увагу, щоб елементарні перетворення над розширеною матрицею співпадали з елементарними перетвореннями над системою. Так, наприклад, не можна до елементів стовпця матриці додавати відповідно елементи другого стовпця, помножені на деяке число , так як такого елементарного перетворення системи не існує.

Трикутна система має єдиний розв'язок. Із останнього рівняння знаходимо x_n , потім, підставляючи його значення в попереднє рівняння, знаходимо x_{n-1}. Далі аналогічним шляхом знаходимо $x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots x_2, x_1$.

Трапецевидна система має нескінченну множину розв'язків. В цьому випадку змінні $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ вважаються вільними і їх переносимо в праві частини рівнянь, тоді головні змінні $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в процесі розв'язку системи будуть лінійними функціями змінних $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$.

Слід відмітити, що метод Гауса застосовується і для розв'язку однорідних систем у випадку, коли $\Delta = 0$ і ранг матриці системи менше n , а також для розв'язку систем, у яких число рівнянь більше числа невідомих.

Приклад1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 4t = 11, \\ 2x + y + 5z + t = 3, \\ 3x + y + z + 2t = -4, \\ x + y + 5z + t = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -4 & 11 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 5 \end{array} \right).$$

Виконаємо елементарні перетворення

$$1)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-3&0&-7&-6&5\\2&1&5&1&3\\1&0&-4&1&-7\\-1&0&0&0&2\end{array}\right)\ 2)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&0&2\\1&0&-4&1&-7\\2&1&5&1&3\\-3&0&-7&-6&5\end{array}\right)\rightarrow$$

$$3)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&0&2\\1&0&-4&1&-7\\0&1&5&1&7\\0&0&-7&-6&-1\end{array}\right)\ 4)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&0&2\\0&0&-4&1&-5\\0&0&-7&-6&-1\\0&1&5&1&7\end{array}\right)\ 5)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}-1&0&0&0&2\\0&1&-5&1&7\\0&0&-4&1&-5\\0&0&-31&0&-31\end{array}\right).$$

Із одержаної матриці складаємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}-x=2,\\ y+5z+t=7,\\ -4z+t=-5,\\ -31z=-31.\end{cases}$$

Звідки $x=-2, y=3, z=1, t=-1.$

Приклад 2. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x+y+5z+2t=5,\\ 2x+y+5z+t=3,\\ 4x+3y+15z+5=10,\\ x+2y+3z-t=-1.\end{cases}$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&5\\2&1&5&1&3\\4&3&15&5&10\\1&2&3&-1&-1\end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення:

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&5\\0&-1&-5&-3&-7\\0&-1&-5&-3&-10\\0&1&2&-3&-6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&5&2&5\\0&0&0&0&3\\0&-1&-5&-3&-10\\0&1&-2&-3&-6\end{array}\right)$$

Другий рядок розширеної матриці відповідає рівнянню $0=3$, а тому дана система несумісна.

Приклад 3. Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x-4y+2z=-1,\\ 2x-3y-z-5t=-7,\\ 3x-7y+z-5t=-8.\end{cases}$$

Розв’язання. Складемо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-4&2&0&-1\\2&-3&-1&-5&-7\\3&-7&1&-5&-8\end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-4&2&0&-1\\0&5&-5&-5&-5\\0&5&-5&-5&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&-4&2&0&-1\\0&5&-5&-5&-5\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Одержаній матриці відповідає трапецевидна система лінійних рівнянь

$$\begin{cases}x-4y+2z=-1,\\5y-5z-5t=-5.\end{cases}$$

Це система двох рівнянь з чотирма невідомими має нескінченну множину розв'язків. Переносимо невідомі z і t в праві частини рівнянь

$$\begin{cases}x-4y=-1-2z,\\y=z+t-1.\end{cases}$$

Звідси одержимо розв'язок системи:

$$\begin{cases}y=z+t-1,\\x=2z+4t-5.\end{cases}$$

де z і t - любі числа.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}x-y+z=12,\\2x+3y-z=13,\\3y+4z=5,\\-3x+y+4z=-20.\end{cases}$$

Розв'язання. В даній системі число рівнянь більше числа невідомих. Складаємо розширену матрицю системи

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&12\\2&3&-1&13\\0&3&4&5\\-3&1&4&-20\end{array}\right).$$

Виконаємо елементарні перетворення матриці:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&12\\0&5&-3&-11\\0&3&4&5\\0&2&7&16\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&12\\0&2&-7&-16\\0&0&29&58\\0&0&29&58\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&12\\0&2&-7&-16\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Цій матриці відповідає трикутна система рівнянь

$$\begin{cases} x - y + z = 12, \\ 2y - 7z = -16, \\ z = 2. \end{cases}$$

Звідси $z = 2, y = -1, x = 9.$

Матричне рівняння і його розв'язання.

Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn} = b_n. \end{cases}$$

Коефіцієнти при невідомих цієї системи утворюють матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Праві частини системи утворюють матрицю-стовпець

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Позначимо матрицю-стовпець невідому X:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тоді систему можна записати в матричній формі

$$AX = B.$$

Якщо $\det A \neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Помноживши обидві частини рівняння на A^{-1} одержимо :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad EX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Таким чином , щоб розв'язати систему , потрібно побудувати матрицю A^{-1}: помножити її на матрицю B. Це можна зробити, якщо $\det A \neq 0$.

Приклад. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x+2y+3z=10, \\ 4x+2y-z=15, \\ 5x+4y=23. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо цю систему в матричному вигляді $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Далі обчислюємо елементи оберненої матриці

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix}=12$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=4; \qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; \qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=6;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=12; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-15; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-8; \qquad A_{32}=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=13; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=-6.$$

Обернена матриця буде мати вигляд

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 \\ -5 & -15 & 13 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{12} & 1 & -\frac{8}{12} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{15}{15} & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далі знаходимо розв'язок системи по формулі $X=A^{-}\cdot B$.

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{12} & -\frac{15}{15} & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 23 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже маємо $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, а отже $x=3,\ y=2,\ z=1.$

Питання та вправи для самоперевірки

Питання

1. Як записується система n лінійних рівнянь з n невідомими?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, визначеною, несумісною?
3. Запишіть формули Крамера. Коли застосовуються формули Крамера?
4. Як виконуються дослідження системи по формулам Крамера?
5. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі. Яка умова сумісності системи?
6. За якою умовою однорідна система лінійних рівнянь має ненульовий розв'язок?
7. Яка система лінійних рівнянь називається трикутною, трапецевидною?
8. Які перетворення називаються елементарними перетвореннями системи?
9. В чому полягає метод Гауса розв'язання систем лінійних рівнянь?
10. В чому полягає матричний спосіб запису і розв'язку систем лінійних рівнянь, коли він застосовується?

Вправи

1. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ 4x-3y-4z=-16, \\ 5x+2y+8z=-2. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x+y+3z=3, \\ -2x-y-4z=-2, \\ 2x-2y-11z=-1. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x+y+3z=3, \\ 5x+2y-6z=-2, \\ x+y-9z=0. \end{cases}$

2. Перевірить на сумісність системи і , якщо вони сумісні, знайти всі їх розв'язки:

а) $\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3-x_4=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+3x_4=2, \\ 2x_1-3x_2+2x_3-11x_4=-4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+5x_3-x_4=4, \\ x_1-x_2+6x_3-x_4=5. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1+3x_2-3x_3-x_4=4, \\ 3x_1-x_2+3x_3-2x_4=1, \\ 3x_1+x_2-x_4=0, \\ 5x_1+4x_2-2x_3+x_4=3. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=2, \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=3, \\ x_1-2x_2-3x_3+4x_4=0. \end{cases}$

д) $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3=1, \\ 3x_1-2x_2+3x_3=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=5, \\ 3x_1+2x_2+2x_3=3. \end{cases}$

Відповіді.

1. а) $x = -2,\ y = 2,\ z = \frac{1}{2}$; б) система має безліч розв'язків, так як $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$; в) система не має розв'язків, так як $\Delta = 0$, а $\Delta x \neq 0$.
2. а) система сумісна, загальний розв'язок $x_2 = \frac{2}{3}x_1,\ x_3 = \frac{5}{14},\ x_4 = \frac{3}{7}$;

   б) система сумісна, загальний розв'язок $x_2 = 1 + x_1 - x_4,\ x_3 = 1$;

   в) система несумісна;

   г) система несумісна;

   д) система сумісна $x_1 = -\frac{11}{23};\ x_2 = \frac{24}{23};\ x_3 = \frac{27}{23}$