**Лекція 1.5**

**План**

**Однорідні СЛАР. Фундаментальна система розв’язків однорідної СЛАР. Власні вектори та власні значення лінійного оператора.**

**План**

1. Які СЛАР називаються однорідними?



В матричному вигляді 

1. Що можна сказати про сумісність однорідної СЛАР?
2. Який розв’язок називається тривіальним?
3. За яких умов однорідна СЛАР має ненульові розв’язки?

**Теорема.** Для того, щоб однорідна СЛАР мала ненульові розв’язки, необхідно і достатньо, щоб ранг її основної матриці був менше числа невідомих. .

Очевидно, якщо ранг основної матриці системи дорівнює кількості невідомих, то система має тільки нульовий розв’язок і він буде єдиним.

Для того, щоб однорідна система ***n*** лінійних рівнянь з ***n*** невідомими мала ненульові розв’язки, необхідно і достатньо, щоб визначник основної матриці системи дорівнював нулеві.

**Приклад 1**



Звернемо увагу, що якщо вектор  - розв’язок системи, то вектор  - ( - число) також є розв’язком даної системи. Виконаємо перевірку підстановкою.

**Приклад 2.**



Будь-яка лінійна комбінація розв’язків **однорідної** системи буде розв’язком цієї системи.

1. Що називається фундаментальною системою розв’язків однорідної СЛАР?

Виберемо з розв’язків однорідної СЛАР скінчену максимальну кількість лінійно незалежних векторів.

Будь-який розв’язок системи буде лінійною комбінацією обраних векторів.

**Означення.** Будь-яка максимальна лінійно незалежна система розв’язків однорідної СЛАР називається її фундаментальною системою розв’язків.

**Теорема.**

Якщо ранг *r* матриці зкоефіцієнтів системи лінійних однорідних рівнянь менше числа невідомих *n,* то будь-яка фундаментальна система розв’язків системи складається з *n* - *r* розв’язків*.*

1. Загальний розв’язок однорідної СЛАР.

Вектор буде розв’язком однорідної системи, тоді і тільки тоді, якщо він є лінійною комбінацією векторів, що складають фундаментальну систему розв’язків даної системи.

1. Загальний розв’язок неоднорідної СЛАР.



*bi* не всі дорівнюють нулеві.

**Теорема.** Сума будь – якого розв’язку неоднорідної системи з загальним розв’язком однорідної системи буде розв’язком неоднорідної системи.



**Власні вектори та власні значення лінійного оператора**

1. **Вправа.**

Зобразимо вектор  на координатній площині.

Подіємо на нього матрицею  . Що отримаємо?

Зобразимо результат. Що робить матриця з вектором?

Однак деякі вектори не повертаються, а замінюються на колінеарний. Наприклад, вектор  . ,  , . Такий вектор називається **власним вектором** матриці (власним вектором лінійного оператора)

1. **Лінійним оператором** в лінійному просторі ***G*** називається відображення , що має властивості

****

****

Нехай число  і вектор  такі, що виконується умова

,

тоді  називається **власним значенням** (власним числом) лінійного оператора ***А***, а ***Х*** – **власним вектором** цього оператора.

1. **Характеристичне рівняння.**

Розглянемо рівність ,



Отримали матричний запис однорідної СЛАР. Пригадаємо за яких умов вона має нетривіальні розв’язки.

Отже, якщо матриця квадратна, то її визначник дорівнює нулю:



Таке рівняння називається характеристичним рівнянням оператора . Якщо розписати визначник, то отримаємо характеристичний многочлен оператора, корені якого називаються власними числами (власними значеннями) оператора.

Для кожного власного числа  можна знайти відповідний власний вектор , який є нетривіальним розв’язком однорідної СЛАР, причому не єдиний. Будь-який вектор, колінеарний власному –власний. Власним вектором також є лінійна комбінація власних векторів даного власного значення.

**Практичне заняття.**

1. Розв’язання однорідних СЛАР №3.3 с.56, РР №1 завдання 10
2. Знаходження власних значень та власних векторів лінійного оператора РР№1 завдання 12.
3. Знаходження власних значень та власних векторів матриці Леслі. З’ясувати роль власних значень в динаміці популяцій.

**План підготовки до К.Р.№1.**

Дії над матрицями. (2б)

Розв’язати СЛАР трьома методами (6балів)

Дії над комплексними числами (2б)