**Лекція 1.4**

**План**

**Лінійний простір. Розмірність та базис лінійного простору.**

**Ранг матриці. Загальна теорія СЛАР**

**План**

1. Лінійний простір.
2. Вектор – елемент лінійного простору.
3. Лінійно незалежна і лінійно залежна система векторів. Базис. Теорема про розклад вектора за базисом.
4. Ранг матриці.
5. Знаходження рангу матриць.
6. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). Дослідження СЛАР на сумісність. Теорема Кронекера-Капеллі.
7. **Лінійний (векторний) простір**.

**Лінійним (векторним) простором** над множиною дійсних чисел називається множина об'єктів (у нашому випадку – векторів), для яких задані **операції додавання й множення на число**, тобто двом об'єктам ставиться у відповідність третій, названий їхньою сумою, і кожному числу та вектору ставиться у відповідність інший вектор, названий добутком числа на вектор, причому операції додавання й множення на число задовольняють таким умовам:

1)  для будь-яких векторів ;

2)  для будь-яких векторів ;

3) існує елемент  такий, що  для будь-якого вектора   
( називається нульовим елементом або нейтральним елементом щодо додавання);



4)  для будь-якого вектора ;

5)  для будь-якого вектора  і будь-яких чисел *x, y*;

6)  для будь-яких векторів , і будь-якого числа *х*;

7)  для будь-якого вектора  і будь-яких чисел *x, y*.

1. Впорядкована система чисел  називається

***n* – вимірним вектором**, а самі числа – компонентами вектора.

Вектори рівні, якщо рівні відповідні елементи.

Коефіцієнти будь-якого лінійного рівняння з *n* невідомими утворюють *n* – вимірний вектор. Рядки (стовпці) матриці, розв’язок СЛАР - *n* – вимірні вектори.

1. **Лінійна залежність векторів.**

Найпростішим випадком лінійної залежності є пропорційність.





Узагальненням поняття пропорційності є поняття **лінійної комбінації** векторів. Ми вже складали лінійні комбінації рядків матриці.

Вектор  є лінійною комбінацією векторів , якщо знайдуться числа  (не всі дорівнюють нулю),такі, що виконується рівність .

Система векторів називається лінійно залежною, якщо хоч один з цих векторів є лінійною комбінацією інших. В іншому випадку – лінійно незалежною.

Часто дають інше (еквівалентне) означення лінійної залежності: Система векторів  називається лінійно залежною , якщо існують числа , хоча б одне з яких відмінне від нуля, такі, що виконується рівність .

Лінійно незалежну систему векторів  називають **максимальною,** якщо приєднання до цієї системи ще одного вектора відповідної розмірності робить її лінійно залежною.

**Базисом** векторного простору називається максимальна лінійно незалежна система векторів цього простору (якщо така існує). Кількість векторів в довільному базисі векторного простору називається **розмірністю** цього простору. В *n* – вимірному просторі будь-яка лінійно незалежна система *n* векторів буде максимальною. Прикладом лінійного простору є арифметичний простір  .

Теорема про розклад вектора за базисом.

**Вправа 1**

Розглянемо матрицю 

З’ясуємо скільки в ній лінійно незалежних рядків і стовпців.

1. Рангом системи рядків (стовпців) матриці називається максимальна кількість лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

Ранг системи рядків матриці дорівнює рангу системи стовпців. Таке число і називають **рангом матриці,** який позначається  .

Ранг матриці не змінюється при транспонуванні.

Ранг матриці не змінюється в результаті елементарних перетворень рядків (стовпців) матриці. Ранги еквівалентних матриць рівні.

Як **знайти ранг** матриці?

**1-й спосіб**. За допомогою елементарних перетворень рядків приводимо матрицю до ступінчастого виду.

Базується на наступній **теоремі**: ранг ступінчастої матриці дорівнює кількості її ненульових рядків.

**2-й спосіб**. Метод обвідних мінорів. Базується на теоремі: найвищий порядок відмінного від нуля мінора матриці дорівнює рангу матриці.

Стовпчиковий ранг матриці дорівнює рядковому і дорівнює мінорному рангу матриці.

**Додатково читати**: 1. Лінійна алгебра (методичні вказівки) с.18-21. 2.Том 1 Денисюк, Репета с. 25-26.

**Вправи**. Знайти ранг матриці №2.4 с.38 (т.1)

1. **Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дослідження СЛАР на сумісність**

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь називається система виду



Тут  невідомі. Запишемо вектор невідомих 

 - коефіцієнти системи, запишемо матрицю коефіцієнтів 

 - вільні члени, - вектор (стовпчик) вільних членів. Якщо , то система називається однорідною, а в іншому випадку неоднорідною.

Систему можна записати в матричному вигляді 

Якщо до основної матриці дописати стовпчик вільних членів, то отримаємо **розширену матрицю** системи: 

**Розв’язком системи** називається впорядкована система чисел (значень невідомих ), яка задовольняє кожне рівняння системи (тобто після підстановки перетворює їх на правильні числові рівності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має розв’язки, в іншому випадку система називається **несумісною.**

**Теорема Кронекера-Капеллі.**

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, якщо ранг основної матриці системи дорівнює рангу розширеної (с.45,т1)

Якщо ранг основної матриці  , де *п* – кількість невідомих системи, то СЛАР сумісна і визначена, тобто має і до того ж єдиний розв’язок.

Якщо , то система сумісна, але невизначена, тобто має безліч розв’язків.

**Вправа 2** Дослідити системи 1-4 на сумісність за допомогою теореми Кронекера-Капеллі.

1. 
2. 

3. 

4. 

Теорема Кронекера-Капеллі , за допомогою якої встановлюється сумісність системи, не дає способів для знаходження розв’язків цієї системи.

Познайомимось з ними на практичних заняттях.

**Практичне заняття.**

**Мета:**

1. Навчитись розв’язувати довільні системи лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами. Виконати завдання. №3.1,3.2 с.53-54,т1
2. Довести, що вектори утворюють базис векторного простору та знайти координати вектора в цьому базисі (Завдання 11 РР)

|  |
| --- |
| **Повторення. Лінійні рівняння.**  **Означення.** Рівняння виду , де  - числа,  - змінна, називається лінійним.  Якщо  рівняння має один розв’язок ,  Якщо , то рівняння має безліч розв’язків ,  Якщо  - розв’язків немає, .  **Вправи.** Розв’язатилінійні рівняннята ті, що зводяться до них:        Розв’язання систем лінійних рівнянь |

**Методи розв’язання СЛАР**

**1.Матричний метод**

Запишемо систему в матричному вигляді. За допомогою можливих дій над матрицями отримаємо формулу:



Яким умовам має задовольняти система, щоб можна було застосувати цей метод?

**2.Метод Крамера** (1750 р.)

Розглянемо ідею метода для **сумісної** системи трьох рівнянь з трьома невідомими. Розпишемо формулу , 

 - визначник основної матриці системи





Вираз  є розкладанням визначника  за елементами першого стовпця. Отже  . Аналогічно знаходимо .

Запишемо **алгоритм** розв’язаннявизначеної сумісної СЛАР.

1. Знаходимо визначник основної матриці системи 
2. Замінюємо в цьому визначнику перший стовпчик стовпчиком вільних членів і обчислюємо визначник 
3. Замінюємо в  другий стовпчик стовпчиком вільних членів і обчислюємо . Далі аналогічно.
4. Знаходимо , 
5. Робимо перевірку підстановкою в кожне рівняння системи отриманих значень.

Метод Крамера можна застосовувати для будь-яких сумісних систем.



, отже система сумісна та невизначена (кількість невідомих більше 2)











 - загальний розв’язок системи

1. **Метод Гаусса (метод виключення)** (1849)

**Ідея методу.** За допомогою елементарних перетворень рядків матриці привести розширену матрицю системи до вигляду: 