**Лекція 1.2**

**План**

**Матриці. Дії над матрицями та їх властивості.**

**Що вивчає лінійна алгебра?**

Слова лінійна та алгебра не завжди зустрічаються разом. Можна зустріти словосполучення: лінійне рівняння. лінійний простір, лінійне програмування, лінійний оператор та ін. Слід розуміти, що в математиці слово алгебра є багатозначним. Ми будемо розуміти під словом алгебра розділ математики, що вивчає **властивості алгебраїчних операцій.** Сучасний погляд на **Алгебру** як загальну теорію алгебраїчних операцій остаточно затвердився після виходу в 1930 році монографії Ван дер Вардена «Сучасна алгебра». На той час було завершено об’єднання різноманітних алгебраїчних теорій на аксіоматичній основі та розширено область їх прикладання. (Математична енциклопедія).

Лінійна алгебра - це розділ алгебри, в якому вивчаються **лінійні (векторні) простори та лінійні оператори.**

Історично першим розділом лінійної алгебри була теорія лінійних (алгебраїчних) рівнянь. В зв′язку з необхідністю розв′язання систем лінійних рівнянь (СЛАР) виникли поняття визначника та матриці. Надалі теорія матриць набула самостійного значення.

Постало питання про дослідження СЛАР щодо існування та єдиності розв’язку.

У 1877р. введено поняття рангу матриці (Фробеніус), що дозволило сформулювати умови сумісності та визначеності системи в термінах коефіцієнтів цієї системи.

В кінці 19 століття було завершено побудову загальної теорії систем лінійних рівнянь.

Серед задач лінійної алгебри найбільше значення мають такі задачі:

1. Розв′язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
2. Знаходження власних векторів та власних значень лінійного оператора.

Саме ці задачі ми й будемо розглядати в нашому курсі.

**Матриці. Дії над матрицями.**

**План**

1. **Матриця** – прямокутна **таблиця**  .

Позначаються матриці великими буквами латинського алфавіту.

Рядки та стовпці матриці.

Елементи матриці , індекси означають *i* – номер рядка, *j* – номер стовпця.

Елементами матриці можуть бути числа, функції, матриці та інші об’єкти. Ми будемо розглядати матриці, елементами яких є числа, тому можна говорити, що **матриця – прямокутна таблиця чисел.**

В матриці *А* *m* рядків та *n* стовпців. **Розмірність матриці** ,  .

**Вправа 1**

Дано матриці *А,D,H,С*

, , .

Встановити їх розмірність, вказати елементи , *d12 ,h21 ,c32* *а23* (читаємо *d* один два, перше число – номер рядка, друге – номер стовпця; означає,що елемент знаходиться в першому рядку та в другому стовпчику).

1. **Квадратна матриця.** Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості стовпців, то матриця називається квадратною:  - квадратна матриця третього порядку, - квадратна матриця другого порядку. **Порядок** квадратної матриці-кількість рядків (стовпців) квадратної матриці.

Яка з матриць із **вправи 1** є квадратною? Назвіть її порядок.

В квадратній матриці елементи  утворюють головну (першу) діагональ, а елементи  побічну (другу). Якщо квадратна матриця містить ненульові елементи тільки на одній з діагоналей, то вона називається **діагональною**  .

Матриці з одним рядком (стовбцем) називаються вектором-рядком (вектором-стовбцем)

 - вектор-рядок

 - вектор-стовпець

Серед квадратних матриць також виділяють верхні трикутні , нижні трикутні  , симетричні  та деякі інші спеціальні види.

1. **Рівні матриці.** Матриці **одного розміру**, відповідні елементи яких рівні називаються рівними.
2. **Еквівалентні матриці.** Матриці **одного розміру** називаються еквівалентними (позначається *А~В*), якщо від одної матриці до другої можна перейти за допомогою **скінченого** числа елементарних перетворень рядків (стовпців) матриці. Елементарні перетворення рядків (стовпців) матриці включають такі дії: перестановка двох рядків матриці; множення рядка на число, що не дорівнює нулю (при множенні рядка на число ∝≠0 множиться кожний елемент рядка); додавання рядків (сумою рядків одної довжини називається рядок, кожний елемент якого є сумою відповідних елементів); додавання до рядка іншого рядка, помноженого на число, що не дорівнює нулю та аналогічні перетворення стовпців.
3. **Лінійна комбінація рядків** (стовпців) матриці. Лінійною комбінацією рядків однакової довжини називається рядок, що є сумою добутків цих рядків на деякі числа (коефіцієнти лінійної комбінації).



Якщо один рядок є лінійною комбінацією інших, то вважається, що він лінійно виражається через ці рядки. Рядки однакової довжини називаються **лінійно незалежними**, якщо жоден з них не може бути поданим лінійною комбінацією інших. В іншому випадку рядки (стовпці) називаються лінійно залежними.

**Вправа 1.2**

Привести матрицю С до верхнього трикутного виду за допомогою елементарних перетворень рядків матриці.

1. **Транспонування матриць**: заміна рядків стовпцями зі зберіганням їх номерів. Транспонована матриця позначається *АТ* .

**Вправа 1.3** Транспонувати матриці у вправі 1.

1. **Алгебраїчні операції над матрицями** (додавання матриць, множення матриці на число, множення матриць) та їх властивості.

*Операції над матрицями визначаються операціями з їх елементами.* Кожну операцію аналізуємо: як виконуємо операцію? чи завжди можливо? що отримуємо в результаті? З’ясовуємо властивості операцій.

**Додавання.** Нульова матриця – нейтральний елемент додавання.

****

Матриці додаються поелементно. Якщо , то елемент суми. Операція можлива для матриць одного розміру. В результаті отримаємо матрицю того ж розміру.

Які матриці з **Вправи1** можна додати? Виконайте додавання.

**Множення на число.** Число множиться на кожний елемент матриці.

**Множення матриць. Узгоджені матриці.**

Якщо, то елемент добутку . Множення матриць можливо тільки, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої. Такі матриці називаються узгодженими.

Які матриці з **Вправи1** можна перемножити?

Розглянемо, наприклад і . Ми вже встановили їх розмірності:  =







1. **Одинична матриця (*Е*) - нейтральний елемент множення.**

***АЕ=ЕА=А***

**Вправа 1.4** Знайти (якщо можливо) добутки матриць із вправи1.

**Властивості операцій.** (порівнюємо з відомими властивостями дій над числами). Якщо операції над матрицями можливі, то вони підкорюються наступним властивостям:

* **** ( комутативна(переставна) властивість додавання)
*  (асоціативна(сполучна) властивість додавання)
*  (дистрибутивна(розподільна) властивість множення)
* 
* ****
* ****
* ****
* ****
* ****
* ****
* **** (аналог: властивості нуля та одиниці)

Тут *A,B,C* – матриці, α,β – числа.

1. **Многочлен від матриці**.

Значенням многочлена  з числовими коефіцієнтами від матриці ***А*** називається матриця 

**Вправи для практичних занять**

1. Дано:,

Знайти: 



 (програма **EXCEL** МУМНОЖ) набираємо формулу, потім клавіші F2, CNRL+SHIFT+ВВОД. Можете застосовувати інші програмні продукти.

1. Знайти , якщо 
2. Знайти 

**Домашнє завдання.**

1. Виконати дії над матрицями.

**Дано:** , , .

**Знайти:**



Обґрунтуйте можливість множення матриць.

1. Знайти , якщо , 