МІНІСЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

Н.І. ПОЛТОРАЧЕНКО

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТІ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій
для студентів спеціальностей 125«Кібербезпека» і 123
«Комп`ютерна інженерія»

Київ 2020

УДК 519.218.7
П49

Рецензент В.М. Міхайленко, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні ради факультету автоматизації і інформаційних технологій, протокол №4 від 18 листопада 2019 року.

Полтораченко Н.І.

П49 Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси і математична статистика: конспект лекцій / Н.І. Полтораченко. − Київ: КНУБА, 2020. − 56 с.

Розглянуто основи теорії ймовірності, ймовірнісних процесів та математичної статистики відповідно до програми другого курсу. Наведено як науковий матеріал, так і деякі практичні задачі, що ілюструють теорію.

Призначено для студентів спеціальностей 125«Кібербезпека» і 123«Комп`ютерна інженерія»

Зміст

Вступ

Основною метою викладання дисципліни "Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси і математична статистика" є набуття знань з основ вказаного курсу, формування у майбутніх фахівців знань і навичок застосування основних законів, принципів та методів теорії ймовірності у інженерній практиці, при вирішенні технічних задач.

Теорія ймовірності, ймовірнісні процеси і математична статистика є самостійними дисциплінами, які спираються на апарат математичного аналізу та широко використовуються в теорії надійності, дослідженні операцій, системному аналізі тощо.

Народження теорії ймовірності відносять до середини XVII. Першою книгою з теорії ймовірності є "Книга про гру у кості" Джероламо Кардано (1501-1576), яка була опублікована лише в 1663 році. Побудовою принципово нових для свого часу ймовірнісних моделей займалися П.Ферма (1601-1665), Б.Паскаль (1623-1662), Х.Гюйгенс (1629-1695), Я.Бернуллі (1654-1705), П.Лаплас (1749-1827), К.Гаус (177-1855).

На початку XIX сторіччя в Росії була утворена петербурзька школа, яка поставила теорію ймовірностей на потужну математичну основу, що сприяло її виділенню у самостійну дисципліну. До цієї школи належать В.Я.Буняковський (1804-1889), П.Л.Чебишов (1821-1894), А.М.Ляпунов (1857-1918), А.Я.Хінчин (1894-1958). А.А.Марков (1856-1922) заклав основи теорії ймовірнісних процесів, а А.Н.Колмогоров (1903-1958) є одним з центральних творців теорії ймовірнісних процесів.

1. Алгебра подій. Класичне та геометричне означення ймовірності

Основні поняття

Під *подією* будемо розуміти будь-яке явище, що відбувається або не відбувається. Різні події позначаються великими літерами $A, B, \ldots$

Подія Ω називається *вірогідною*, якщо вона напевно відбудеться (наприклад, випадання не більше шести очок при одному киданні стандартного грального кубика).

Подія $\emptyset$ називається *неможливою*, якщо вона не може відбутися за жодних обставин (наприклад, випадання більше шести очок при одному киданні стандартного грального кубика).

Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події *А*, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли подія *А* не відбувається (наприклад, *А* - випадання парної кількості очок при киданні стандартного грального кубика, $\bar{A}$ - випадання непарної кількості очок при киданні стандартного грального кубика тощо). В теорії множин $\bar{A} = \Omega\backslash A$ - доповнення множини *А* до Ω.

Події *А* та *В* називаються *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу іншої (наприклад, випадання шести очок та випадання двох очок при одному киданні стандартного грального кубика, навпаки, випадання кількості очок, що є кратною трьом, та випадання непарної кількості очок при одному киданні стандартного грального кубика не є несумісними). В теорії множин $A \cap B = \emptyset$. Очевидно, що *А* та $\bar{A}$ завжди будуть несумісними, але не навпаки.

Сумою подій А та *В* називається подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з цих подій. В теорії множин $A \cup B$.

Добутком подій А та *В* називається подія, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається і подія *А*, і подія *В* одночасно. В теорії множин $A \cap B$.

Розглянемо деяку сукупність подій *А,В,...,К*. Ці події прийнято вважати *єдино можливими*, якщо в результаті кожного експерименту хоча б одна з них обов`язково відбудеться. Таку множину попарно несумісних подій називають *повною групою подій.* Наприклад, випадання одного, двох, трьох, чотирьох, п`яти, шести очок при одному киданні стандартного грального кубика. Протилежні події утворюють повну групу подій.

Класичне та геометричне означення ймовірності

Нехай події $A_1, A_2, ..., A_n$ мають наступні властивості:

1) попарно несумісні ($A_i \cap A_j = \emptyset, i, j = \overline{1, n}, i \neq j$);

2) єдино можливі;

3) рівно можливі (не існує жодних об`єктивних причин вважати, що одна з подій могла б з`явитися частіше ніж інша).

Події $A_1, A_2, ..., A_n$ можуть називатися елементарними подіями, варіантами. Припустимо, що з загальної кількості n подій появі події *А* сприяють m подій. Тоді *класичне означення* ймовірність події виражається формулою

$$P(A) = m/n,$$

де m - кількість елементарних подій, що сприяють появі події *А*; n – кількість можливих елементарних подій.

Статистичне означення ймовірності виражається через відносну частоту події A за формулою

$$W(A) = m/n,$$

де m – кількість випробувань, в яких подія A з'явилася; n – загальна кількість випробувань.

Геометричне означення ймовірності виражається формулою

$$P(A) = \text{міра } m/\text{міра } n,$$

де "міра m" - кількість варіантів, що сприяють появі події A; "міра n" - загальна кількість можливих варіантів; в ролі "міри" виступають геометричні міри довжин, площ, об`ємів, величин кутів тощо.

Елементи комбінаторики

Основний принцип комбінаторики. Якщо дію A_1 можна виконати n_1 способами, дію A_2 – n_2 способами і т.д., а дію A_k – n_k способами, то ці дії одночасно можна виконати $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Задача про комбінації. Скількома способами можна серед n різних елементів вибрати m елементів: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Задача про розміщення. Скількома способами можна серед n різних елементів вибрати m елементів та розмістити по m різних місцях:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Задача про перестановки. Скількома способами можна переставити n різних елементів по n різних місцях: $P_n = n!$

Приклад 1.1. В бригаді, що складається з 6 робітників, працюють 3 робітники 6 розряду. За табельними номерами на виконання роботи направляються 3 робітники. Яка ймовірність, що серед них буде 2 робітника 6 розряду?

Розв'язання. Нехай A={серед трьох робітників, які працюють, двоє мають 6 розряд}. $P(A) = \frac{m}{n}$, де $m = C_3^2 \cdot C_3^1 = 9, n = C_6^3 = 20, P(A) = \frac{9}{20} = 0{,}45.$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення події. Які бувають події?
2. Дайте означення ймовірності події. Сформулюйте властивості ймовірності.
3. Сформулюйте правило добутку в комбінаториці.

4. Сформулюйте задачу про комбінації в комбінаториці.
5. Сформулюйте задачу про розміщення в комбінаториці.
6. Сформулюйте задачу про перестановки в комбінаториці.

2. Складні ймовірності

Теорема про додавання ймовірностей

1) Нехай A та $B-$ дві несумісні події. Тоді ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з двох подій, дорівнює сумі їх ймовірностей

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доведення. Нехай A_1, A_2, ..., A_n - повна група подій, серед яких m_1 подій сприяють появі події A, а m_2 подій сприяють появі події B ($P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$). Так як події A та B несумісні, то ніяка подія $A_j, j=\overline{1,n}$ не може сприяти обом цим подіям, тоді події $A+B$ сприяє m_1+m_2 подій:

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}=P(A)+P(B),$$

що й намагалися довести. Узагальнюючи, якщо $A,B,\ldots,K$ - несумісні події, то

$$P(A+B+\cdots+K)=P(A)+P(B)+\cdots+P(K).$$

Наслідок. Якщо A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу подій, то

$$P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1.$$

Частковий випадок: $P(A)+P(\bar{A})=1$.

2) Нехай A та $B-$ несумісні події. Тоді ймовірність того, що відбудеться хоча б одна з двох подій, дорівнює сумі їх ймовірностей без ймовірності їх одночасної появи

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Доведення. Нехай A_1, A_2, ..., A_n - повна група подій, серед яких m_1 подій сприяють появі тільки події A, m_2 подій сприяють появі тільки події B, а m_3 подій сприяють появі події $A\cdot B$ ($P(A)=\frac{m_1}{n}$, $P(B)=\frac{m_2}{n}$, $P(A\cdot B)=\frac{m_3}{n}$):

$$P(A+B)=\frac{m_1+m_2+m_3}{n}=\frac{m_1+m_3+m_2+m_3-m_3}{n}=$$

$$\frac{m_1+m_3}{n}+\frac{m_2+m_3}{n}-\frac{m_3}{n}=P(A)+P(B)-P(A\cdot B),$$

що й намагалися довести.

У випадку трьох сумісних подій ймовірність їх суми обчислюється за формулою

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cdot B)-P(A\cdot C)-P(B\cdot C)+$$

$$+P(A \cdot B \cdot C).$$

У випадку n сумісних подій ймовірність їх суми обчислюється за формулою

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i,j} P\left(A_i \cdot A_j\right) + \sum_{i,j,k} P\left(A_i \cdot A_j \cdot A_k\right) - \ldots - (-1)^{n-1} P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Теорема про добуток ймовірностей

Дві події називаються *незалежними*, якщо поява однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія.

Дві події називаються *залежними*, якщо поява однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія.

Умовною ймовірністю події називається ймовірність появи події, яка обчислюється у припущенні, що всі попередні події відбулися: $P(B/A)$ або $P_A(B)$. Якщо події незалежні, то $P(B/A) = P(B/\bar{A}) = P(B)$.

Теорема. 1) Ймовірність одночасної появи двох подій дорівнює добутку ймовірності однієї події та ймовірності іншої події при умові, що перша мала місце:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A), \text{ якщо } A \text{ та } B \text{ - залежні події.}$$

Доведення. Якщо $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, то серед них:

1) k подій сприяють як появі події A, так і появі події B $(A \cdot B)$,

2) l подій сприяють появі події A, але не сприяють появі події B $(A \cdot \bar{B})$,

3) m подій не сприяють появі події A, але сприяють появі події B $(\bar{A} \cdot B)$,

4) n-k-l-m подій як не сприяють появі події A, так і не сприяють появі події B $(\bar{A} \cdot \bar{B})$.

Обрахуємо ймовірності: $P(A \cdot B) = \frac{k}{n}$ (перша група), $P(A) = \frac{k+l}{n}$ (перша та друга групи), $P(B) = \frac{k+m}{n}$ (перша та третя групи), $P(B/A) = \frac{k}{k+l}$ (так як подія A мала місце, то загальну кількість можливих подій складають перша та друга групи, серед яких тільки перша сприяє появі B. Запишемо очевидну тотожність $\frac{k}{n} = \frac{k+l}{n} \cdot \frac{k}{k+l}$. Підставивши відповідні ймовірності, отримаємо $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$, що й намагалися довести.

Наслідок . Ймовірність сумісної появи декількох подій:

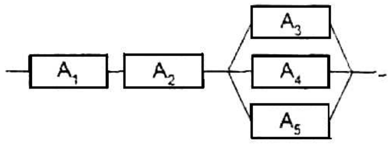
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 A_2 \ldots A_{n-1})$$

2) Якщо події A та B незалежні, то $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, бо

$P(B/A) = P(B)$.

Наслідок . Ймовірність сумісної появи декількох незалежних подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$



Приклад 2.1. Схема електричного ланцюга наведена на малюнку. Ймовірності виходу з ладу його елементів наступні: $p(A_3)=p(A_1)=p(A_2)=0,4$, $p(A_4)=p(A_5)=0,2$. Знайти ймовірність виходу з ладу всього ланцюга, якщо його елементи працюють незалежно.

Розв'язання. Нехай A={вихід з ладу елементів A_1 та A_2}, B={вихід з ладу елементів A_3, A_4 та A_5}.

$$P(A) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1) \cdot p(A_2) = 0{,}64\,,$$

$$P(B) = p(A_3) \cdot p(A_4) \cdot p(A_5) = 0{,}016,$$

$$P = p(A) + p(B) - p(A) \cdot p(B) = 0{,}64576.$$

Формула повної ймовірності

Нехай події (гіпотези) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ утворюють повну групу подій і при настанні кожної з них подія A може з'явитися з деякою умовною ймовірністю $P(A/H_i)\,, i = \overline{1,n}$. Тоді $A = A \cdot H_1 + A \cdot H_2 + \cdots + A \cdot H_n$,

застосовуючи теорему про суму незалежних подій,

$$P(A) = P(A \cdot H_1) + P(A \cdot H_2) + \cdots + P(A \cdot H_n),$$

застосовуючи теорему про добуток подій до кожного доданку,

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n),$$

$$\text{де } P(H_1) + P(H_2) + \cdots + P(H_n) = 1.$$

Отримали формулу повної ймовірності, за якою ймовірність події A, яка може з'явитися лише при появі однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ дорівнює сумі добутків ймовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність події A.

Приклад 3.1. На склад фірми надходить електронне обладнання з трьох заводів у співвідношенні 2:3:5. Ймовірність поставки бракованої партії з першого заводу – 0,1, другого – 0,2, третього – 0,3. Знайти ймовірність, що нова партія буде стандартною.

Розв'язання. Нехай A={нова партія стандартна}, H_1 ={партію поставив перший завод}, H_2={ партію поставив другий завод }, H_3={ партію поставив третій завод }.

Тоді

$$P(H_1) = 0{,}2, P(H_2) = 0{,}3, P(H_3)$$
$$= 0{,}5, P(A/H_1) = 0{,}9, P(A/H_2) = 0{,}8, P(A/H_3) = 0{,}7.$$
$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}77.$$

Формула Байєса

Формула Байєса дає відповідь на питання: якою буде ймовірність гіпотези $H_i, i = \overline{1,n}$, після випробування при припущенні, що в результаті випробування подія A відбулася.

Нехай $P(H_i), i = \overline{1,n}$ - ймовірності гіпотез до проведення випробування A, $P(H_i/A), i = \overline{1,n}$ - ймовірності тих же гіпотез після проведення випробування A ($\sum_{i=1}^{n} P(H_i/A) = 1$).

Користуючись теоремою про добуток подій,

$$P(A \cdot H_i) = P(H_i) \cdot P(A/H_i) = P(A) \cdot P(H_i/A), i = \overline{1,n}\ .$$

Звідси $$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Наслідок. Якщо $P(H_1) = P(H_2) = \cdots = P(H_n)$, то

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Приклад 3.2. Розглядається задача 3.1. На склад надійшла партія електронного обладнання, що задовольняє стандарту. Знайти ймовірність того, що це була поставка з першого заводу.

Розв'язання. $$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{0{,}77} = 0{,}234.$$

Запитання для самоперевірки

1. Які випадки розглядає теорема про суму подій?
2. Які випадки розглядає теорема про добуток подій?
3. Які властивості гіпотез?
4. Опишіть формулу повної ймовірності.
5. Опишіть формулу Бейєса.
6. Яка принципова різниця у застосуванні формули повної ймовірності та формули Байєса?

3. Схема і формула Бернуллі

Якщо відбуваються випробування, при яких можливі лише два наслідки: подія A (успіх) або подія $\bar{A}$ (неуспіх), при цьому ймовірність p події A є незмінною , тобто не залежить від номера випробування, то такі випробування називаються повторними, або *схемою Бернуллі*. Терміни успіх або неуспіх умовні.

Теорема Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події A дорівнює p ,подія A з'явитися рівно k разів, дорівнює $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

Доведення. Підрахуємо ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явитися рівно k разів у визначеному порядку $\underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ разів}} \quad \underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-k \text{ разів}}$

$$p^k (1-p)^{n-k} \text{ (за теоремою добутку).}$$

Очевидно, що ймовірність того, що при n незалежних випробуваннях подія A з'явитися рівно k разів у іншому порядку буде тією ж. Кількість всіх можливих схем з n незалежних випробувань, у яких k разів зустрічається подія A у різному порядку, дорівнює кількості комбінацій C_n^k. Тому, користуючись теоремою додавання, будемо мати

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

що й намагалися довести.

Приклад.4.1. Кидається монета шість разів. Яка ймовірність випадання номіналу 0, 1, 2,..., 6 разів?

Розв'язання.

$$P_6(0) = P_6(6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64};\ P_6(1) = P_6(5) = C_6^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32};$$

$$P_6(2) = P_6(4) = C_6^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64};\ P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}.$$

З наведеного прикладу видно, що зі зростанням k ймовірність $P_n(k)$ спочатку зростає, а потім спадає. Покажемо, що ця тенденція працює і для загального випадку.

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k};\ \ P_n(k+1) = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1};$$

$$\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \frac{n!k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!n!} \cdot \frac{p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}}{p^k(1-p)^{n-k}} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p}.$$

Дріб $\frac{p}{1-p}$ є величиною сталою, а дріб $\frac{n-k}{k+1}$ зменшується зі зростанням k, тобто

$$1 < \frac{np}{1-p} = \frac{P_n(1)}{P_n(0)} > \frac{P_n(2)}{P_n(1)} > \cdots > \frac{P_n(n)}{P_n(n-1)} = \frac{p}{n(1-p)} < 1.$$

Якщо n настільки велике, що $np > 1 - p$, а $p < n(1-p)$, то існує таке $k = \mu$, коли $\frac{P_n(\mu+1)}{P_n(\mu)} = 1$ або $\frac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{p}{1-p} = 1$. Тоді $np - \mu p = \mu - \mu p + 1 - p$ або

$$\mu = np + p - 1.$$

Якщо μ неціле, то $\frac{P_n(\mu)}{P_n(\mu-1)} > 1$, а $\frac{P_n(\mu+1)}{P_n(\mu)} < 1$. Тоді для першої нерівності $\frac{n-\mu+1}{\mu} \cdot \frac{p}{1-p} > 1$, $(n-\mu+1)p > \mu(1-p)$, $\mu < np + p$. Для другої нерівності $\frac{n-\mu}{\mu+1} \cdot \frac{p}{1-p} < 1$, $np - \mu p < \mu - \mu p + 1 - p$, $\mu > np + p - 1$.

Найбільш ймовірна кількість появ події A в повторних випробуваннях оцінюється за формулою: $n \cdot p + p - 1 < \mu < n \cdot p + p$.

Теорема Пуассона

У випадку, коли n велике, а p мале, замість формули Бернуллі використовується наближена формула Пуассона.

Теорема. Нехай існує схема Бернуллі, коли $n \to \infty$, $p \to 0$, при цьому $\lambda = n \cdot p$, де λ - фіксоване додатне число. Ймовірність того, що в n випробуваннях з'явитися рівно k успіхів можна обчислити за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}.$$

Доведення. $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n =$

$$\frac{\lambda^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}(-\lambda)}.$$

Скориставшись другою визначною границею, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$, що й намагалися довести.

Приклад 4.2. Ймовірність похибки, яку допускає вимірювальний прилад, дорівнює 0,01. Яка ймовірність, що при 100 вимірюваннях буде допущено більше однієї похибки?

Розв'язання. Нехай A={допущено більше однієї похибки}.

$P(A) = 1 - P(\bar{A})$. $P(\bar{A}) = P_{100}(0) + P_{100}(1) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} + \frac{\lambda^1 \cdot e^{-\lambda}}{1!} \approx 0{,}74$, де

$$\lambda = 0{,}01 \cdot 100 = 1. \quad P(A) = 1 - 0{,}74 = 0{,}26.$$

Граничні теореми Муавра-Лапласа

Ці теореми працюють в умовах схеми Бернуллі та застосовуються при великій кількості випробувань.

Локальна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p, подія з’явитися рівно k разів, наближено обчислюється за формулою: $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x = \frac{k-n\cdot p}{\sqrt{npq}}$, $q = 1-p$. Таблиця значень функції $\varphi(x)$ наведена в [1].

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p, подія з’явиться не менше k_1 разів та не більше k_2, наближено обчислюється за формулою: $P_n(k_1,k_2) = F(x_2) - F(x_1)$,
де $F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$, $x_1 = \frac{k_1-n\cdot p}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2-n\cdot p}{\sqrt{npq}}$.
Таблиця значень функції Лапласа $F(x)$ наведена в [1].

Запитання для самоперевірки

1. Опишіть схему Бернуллі.
2. Доведіть теорему Бернуллі.
3. Як виглядає оцінка найбільш ймовірної кількості успіхів в схемі Бернуллі?
4. Доведіть теорему Пуассона.
5. Сформулюйте у порівнянні умови застосування теореми Бернуллі, теореми Пуассона та граничних теорем Муавра-Лапласа.

4. Дискретні випадкові величини

Закон розподілу дискретної випадкової величини

Дискретною називають випадкову величину X, значеннями якої є окремі ізольовані числа $x_i, i=\overline{1,n}$, котрі вона приймає з визначеною ймовірністю $p(x_i) = p_i, i = \overline{1,n}$. Наприклад, кількість очок, що випадають при киданні грального кубика, кількість пострілів до першого влучення. Якщо перераховані всі можливі значення випадкової величини X, то вони утворюють повну групу подій, тобто $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Співвідношення, яке встановлює зв`язок між значеннями випадкової величини та ймовірностями цих значень, називається законом розподілу випадкової величини *X*, який зручно задавати у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Якщо кількість значень випадкової величини необмежена (приклад про стрільбу), то маємо справу з безкінечною випадковою величиною.

Числові характеристики дискретних

Математичне сподівання: $M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$ або $M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p_i$.
Властивості математичного сподівання:
1) математичне сподівання сталої є сама стала: $M(C) = C$;
2) сталий множник можна винести за знак математичного сподівання: $M(CX) = C \cdot M(X)$;
3) математичне сподівання суми декількох випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань: $M(X + Y + \cdots + Z) = M(X) + M(Y) + \cdots + M(Z)$;
4) математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань: $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$;

Для характеристики розкидання значень випадкової величини відносно математичного сподівання вводиться поняття дисперсії.

Дисперсія: $D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2$,
$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$ або $D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i$.
Властивості дисперсії:
1) дисперсія сталої дорівнює нулю: $D(C) = 0$;
2) сталий множник можна винести за знак дисперсії, підвівши його до квадрату: $D(CX) = C^2 \cdot D(X)$;
3) дисперсія суми двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

Отримаємо іншу формулу для дисперсії:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = M\left(X^2 - 2 \cdot X \cdot M(X) + \big(M(X)\big)^2\right) = M(X^2) - 2\big(M(X)\big)^2 + \big(M(X)\big)^2 = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2,$$

$$D(X) = M(X^2) - \big(M(X)\big)^2.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення є основними числовими характеристиками. Узагальненням цих характеристик виступають моменти, серед яких найбільш уживаними є *початковий момент* k-*го порядку* $\alpha_k = M(X^k)$ (при $k = 1$ маємо математичне сподівання) та *центральний момент* k-*го порядку* $\mu_k = M\big(X - M(X)\big)^k$(при $k = 2$ маємо дисперсію).

Закони розподілу дискретних випадкових величин

Біноміальний закон розподілу випадкової величини функціонує в рамках схеми Бернуллі і тому підкоряється теоремі Бернуллі:

$$P_n(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0,1, \dots, n\ .$$

Обрахуємо числові характеристики. Для цього розглянемо випадкову величину X як суму n випадкових величин $x_i, i = \overline{1,n}$, кожна з яких відповідає одному випробуванню та підкоряється закону

x_i	0	1
p_i	$1-p$	p

Тоді $M(x_i) = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$, $D(x_i) = (0-p)^2 \cdot (1-p) + (1-p)^2 \cdot p = p \cdot (1-p)$, $i = \overline{1,n}$. Так як випробування незалежні, то $M(X) = M(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \dots + M(x_n) = np$, $D(X) = D(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \dots + D(x_n) = np(1-p)$ або $M(X) = np, D(X) = npq$, де $q = 1 - p$.

Закон Пуассона розподілу випадкової величини функціонує в рамках схеми Бернуллі, але при умові великої кількості випробувань ($n \to \infty$), тому підкоряється теоремі Пуассона:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1, \dots\ .$$

Обрахуємо числові характеристики.

$M(X) = 0 \cdot e^{-\lambda} + 1 \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda} + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \dots + k \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \dots = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \dots\right) = \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$ (в дужках ряд Маклорена).

$$M(X^2) = 0^2 \cdot e^{-\lambda} + 1^2 \cdot \frac{\lambda}{1} \cdot e^{-\lambda} + 2^2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda} + \cdots + k^2 \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} + \cdots$$
$$= e^{-\lambda} \cdot \left(\lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{1!} + \cdots + k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \cdots\right).$$

Візьмемо ряд Маклорена $e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$ та помножимо його на λ: $\lambda \cdot e^{\lambda} = \lambda + \frac{\lambda^2}{1!} + \cdots + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \cdots$ Диференціюємо ліву та праву частини $\lambda \cdot e^{\lambda} + e^{\lambda} = 1 + 2 \cdot \frac{\lambda}{1!} + 3 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + k \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots$, помножимо на λ: $\lambda \cdot e^{\lambda}(\lambda + 1) = \lambda + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{1!} + \cdots + k \cdot \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + \cdots$ Справа отримали вираз, який міститься в дужках формули для $M(X^2)$. Тоді $M(X^2) = e^{-\lambda} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda}(\lambda + 1) = \lambda^2 + \lambda$, а $D(X) = M(X^2) - \left(M(X)\right)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

Отже, $M(X) = \lambda, D(X) = \lambda.$

Геометричний закон розподілу випадкової величини, яка є кількістю випробувань до першого успіху, підкоряється формулі

$$P(X = k) = q^{k-1}p, k = 0,1, \dots ,$$

де $q = 1 - p$. Обрахуємо числові характеристики.

$M(X) = 0 \cdot p + 1 \cdot p \cdot q + 2 \cdot p \cdot q^2 + \cdots + k \cdot p \cdot q^k + \cdots = p \cdot q \cdot (1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \cdots + k \cdot q^{k-1} + \cdots)$. Візьмемо безкінечну геометричну прогресію $1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots = \frac{1}{1-q}$. Диференціюємо ліву та праву частини $1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \cdots + k \cdot q^{k-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}$ та підставляємо у вираз $M(X)$:

$M(X) = p \cdot q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$.

$M(X^2) = 0 \cdot p + 1^2 \cdot p \cdot q + 2^2 \cdot p \cdot q^2 + \cdots + k^2 \cdot p \cdot q^k + \cdots = p \cdot q \cdot (1 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + \cdots + k^2 \cdot q^{k-1} + \cdots)$. Візьмемо безкінечну геометричну прогресію $1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots = \frac{1}{1-q}$. Диференціюємо ліву та праву частини $1 + 2 \cdot q + 3 \cdot q^2 + \cdots + k \cdot q^{k-1} + \cdots = \frac{1}{(1-q)^2}$, помножуємо на q

$q + 2 \cdot q^2 + 3 \cdot q^3 + \cdots + k \cdot q^k + \cdots = \frac{q}{(1-q)^2}$ та ще раз диференціюємо

$1 + 2^2 \cdot q + 3^2 \cdot q^2 + \cdots + k^2 \cdot q^{k-1} + \cdots = \frac{(1-q)^2 + q \cdot (1-q)}{(1-q)^4} = \frac{p + 2 \cdot q}{p^3}$.

Підставляємо у вираз $M(X^2)$: $M(X^2) = p \cdot q \cdot \frac{p + 2 \cdot q}{p^3} = \frac{p \cdot q + 2 \cdot q^2}{p^2}$.Тоді

$D(X) = \frac{p \cdot q + 2 \cdot q^2}{p^2} - (\frac{q}{p})^2 = \frac{q}{p^2}$.

Отже, $$M(X) = \frac{q}{p}, D(X) = \frac{q}{p^2} .$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення дискретної випадкової величини.
2. Дайте означення математичного сподівання. Які його властивості?
3. Дайте означення дисперсії. Які її властивості?
4. Запишіть формули математичного сподівання і дисперсії для дискретної випадкової величини.
5. Які закони розподілу дискретної випадкової величини ви знаєте?
6. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії біноміального закону розподілу.
7. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії геометричного закону розподілу.
8. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії закону розподілу Пуассона.

5. Неперервні випадкові величини

Функція розподілу та щільність ймовірності

Неперервна випадкова величина X приймає значення на скінченому або безкінечному числовому відрізку та характеризується *функцією розподілу* (інтегральний закон розподілу) $$F(x) = P(X < x),$$
яка є ймовірністю того, що випадкова величина прийме значення, менше за поточне значення x.

Властивості функцією розподілу:

1) $0 \le F(x) \le 1$,

2) $F(x)$ є неспадною функцією,

3) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Неперервна випадкова величина може ще задаватися *щільністю ймовірності* (диференціальний закон розподілу), яка визначається як похідна від функції розподілу: $$f(x) = F'(x).$$

Властивості щільністі ймовірності:

1) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$,

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$,

3) $P(a < X < b) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx.$

Числові характеристики неперервних випадкових величин

Математичне сподівання: $M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$

Дисперсія: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - M(X))^2 f(x)dx$ або $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \left(M(X)\right)^2.$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$

Властивості числових характеристик неперервних випадкових величин є аналогічними властивостям дискретних випадкових величин.

Закони розподілу неперервних випадкових величин

Рівномірний закон розподілу має щільність $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, x \notin & (a,b). \end{cases}$

Обрахуємо числові характеристики.

$M(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2}$, $M(X^2) = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$,

$D(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$

Нормальний закон розподілу має щільність $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$,

Обрахуємо числові характеристики.

$M(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}dx = \left|\frac{x-a}{2} = t\right| = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t + a)e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 0 + \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} = a$,

$$D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}dx=\left|\frac{x-a}{2}=t\right|$$
$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,\sigma^2e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^2\,e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
$$=\left|\begin{matrix}u=t\\ du=dt\\ dv=te^{-\frac{t^2}{2}}dt\\ v=-e^{-\frac{t^2}{2}}\end{matrix}\right|=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(0+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\sigma^2,$$

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}dx=\left|\frac{x-a}{2}=t\right|=$$
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\,dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=F\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-F\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$
де $F(x)-$ функція Лапласа.

$P(a-\gamma<X<a+\gamma)=F\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right)-F\left(-\frac{\gamma}{\sigma}\right)=2F\left(\frac{\gamma}{\sigma}\right),$

$P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)=F(3)-F(-3)=2F(3)=0{,}9973$ (правило трьох сигм).

Теорема Ляпунова (центральна гранична теорема). Якщо $\bar{X}$ - сума великої кількості незалежних випадкових величин, які мають довільний розподіл, вплив їх на $\bar{X}$ незначний, то $\bar{X}$ має розподіл, близький до нормального, або нормальний, якщо кількість випадкових величин прямує до нескінченності.

Показниковий закон розподілу має щільність $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0.\end{cases}$

Обрахуємо числові характеристики.

$$M(X)=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\left|\begin{matrix}u=x\\ du=dx\\ dv=\lambda e^{-\lambda x}dx\\ v=-e^{-\lambda x}\end{matrix}\right|=0+\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda},$$

$$M(X^2) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left| \begin{matrix} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| = \lambda \left(0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx \right)$$

$$= 2 \left| \begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} dx \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| = 2 \left(0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) = \frac{2}{\lambda^2},$$

$D(X) = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

Закон великих чисел

Під законом великих чисел в теорії ймовірності розуміють ряд теорем, у кожній з яких при врахуванні окремих умов встановлюється факт наближення середніх характеристик великої кількості дослідів до деяких сталих значень.

Нерівність Чебишова. Нехай випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ і скінчену дисперсію $D(X)$. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ є справедливою нерівність:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Протилежна подія має вигляд:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишова. Якщо $X_i, i = 1,2, \dots, n$ - попарно незалежні випадкові величини з рівномірно обмеженими дисперсіями $D(X_i) \leq C$, то середнє арифметичне цих випадкових величин збігається по ймовірності до середнього арифметичного їх математичних сподівань при достатньо великому n:

$$\lim_{n\to\infty} P(|X - M(X)| < \varepsilon) = 1, \text{де } X = \frac{1}{n}\sum X_i\,, M(X) = \frac{1}{n}\sum M(X_i).$$

Теорема Бернуллі. При необмеженому збільшенні кількості незалежних випробувань n частота появи події A збігається по ймовірності до її ймовірності p в окремому випадку (схема Бернуллі):

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення неперервної випадкової величини.
2. Дайте означення функції розподілу. Які її властивості?
3. Дайте означення щільності. Які її властивості?
4. Запишіть формули математичного сподівання і дисперсії для неперервної випадкової величини.
5. Які закони розподілу неперервної випадкової величини ви знаєте?
6. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії рівномірного закону розподілу.
7. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії нормального закону розподілу.
8. Виведіть формули математичного сподівання та дисперсії показникового закону розподілу.
9. З яких теорем складається закон великих чисел?

6. Функції та системи випадкових величин

Система випадкових величин

Системою випадкових величин називається множина двох або більше випадкових величин, що розглядаються як єдине ціле при дослідженні того чи іншого явища.

Система може бути утворена дискретними або неперервними випадковими величинами, або і дискретними, і неперервними випадковими величинами.

В залежності від кількості випадкових величин, що утворюють систему, вона називається двовимірною, тривимірною, n-вимірною. Позначки: (X,Y), (X,Y,Z) тощо. Геометрично їх можна інтерпретувати як вектори тієї чи іншої розмірності.

Дискретна двовимірна випадкова величина

Дискретна двовимірна випадкова величина - це двовимірна випадкова величина, яка приймає скінченну кількість або послідовність різних пар значень. Для її повної характеристики достатньо вказати множину можливих пар значень (точок площини) та ймовірність кожної з них, тобто *закон* *розподілу*, який можна представити у вигляді таблиці:

	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n	Σ
y_1 y_2 … y_j … y_m	$p(x_1, y_1)$ $p(x_1, y_2)$ … $p(x_1, y_j)$ … $p(x_1, y_m)$	$p(x_2, y_1)$ $p(x_2, y_2)$ … $p(x_2, y_j)$ … $p(x_2, y_m)$	… … … … … …	$p(x_i, y_1)$ $p(x_i, y_2)$ … $p(x_i, y_j)$ … $p(x_i, y_m)$	… … … … … …	$p(x_n, y_1)$ $p(x_n, y_2)$ … $p(x_n, y_j)$ … $p(x_n, y_m)$	$p(y_1)$ $p(y_2)$ … $p(y_j)$ … $p(y_m)$
Σ	$p(x_1)$	$p(x_2)$	…	$p(x_i)$	…	$p(x_n)$	1

Припускаючи, що всі наведені у таблиці значення єдино можливі, то $\sum_i \sum_j p(x_i, y_j) = 1$. За теоремою додавання $\sum_i p(x_i, y_j) = p(y_j), \sum_j p(x_i, y_j) = p(x_i)$.

Знайдемо умовну ймовірність того, що випадкова величина *Y* прийме значення y_j. якщо *X*=x_i. За теоремою про добуток подій:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i) \cdot p(y_j/x_i) \text{ або } p(y_j/x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)}.$$

Сукупність значень $\{y_j\}, j = 1,2, \dots, m$ та відповідних значень $\{p(y_j/x_i)\}, j = 1,2, \dots, m$ утворюють *умовний закон розподілу Y* при сталій *X*=x_i. Аналогічно сукупність значень $\{x_i\}, i = 1,2, \dots, n$ та відповідних значень $\{p(x_i/y_j)\}, i = 1,2, \dots, n$ утворюють *умовний закон розподілу X* при сталій *Y* =y_j.

Обрахуємо числові характеристики.

$$\bar{x} = M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(x_i), \quad \bar{y} = M(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \cdot p(y_j),$$

$$M(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i \cdot y_j \cdot p(x_i, y_j).$$

Точка з координатами $(\bar{x}, \bar{y})$ характеризує центр розсіяння двовимірної випадкової величини.

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot p(x_i)$, $D(Y) = \sum_{j=1}^{m} (y_j - \bar{y})^2 \cdot p(y_j)$ або

$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p(x_i) - \bar{x}^2$, $D(Y) = \sum_{j=1}^{m} y_j^2 \cdot p(y_j) - \bar{y}^2$.

Неперервна двовимірна випадкова величина

Неперервна двовимірна випадкова величина - це двовимірна випадкова величина, яка приймає всі значення з деякої області G площини. Така випадкова величина задається *функцією розподілу* $F(x,y) = P(X < x, Y < y)$.

Властивості функції розподілу:

1) $0 \le F(x,y) \le 1$;

2) $F(x,y)$ - неспадна функція;

3) $F(-\infty, y) = F(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$;

4) $F(\infty, \infty) = 1$;

5) $F(x, \infty) = F(x); F(\infty, y) = F(y)$;

6) $F(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$.

Щільністю ймовірності неперервної двовимірної випадкової величини називається функція $f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$.

Властивості щільності ймовірності:

1) $f(x,y) \ge 0$;

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$;

3) $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$;

4) $f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ - щільності ймовірностей випадкових величин X та Y;

5) $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy,\ \ F_2(x) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ - функції розподілу випадкових величин X та Y.

Умовні закони розподілу. За теоремою про добуток подій:

$$f(x,y)dxdy = f_1(x) \cdot f(y/x)dxdy = f_2(y) \cdot f(x/y)dxdy.$$

Тоді $f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy},\ \ f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}$.

Обрахуємо числові характеристики.

$\bar{x} = M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x,y)dxdy$,

$\bar{y} = M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x,y)dxdy$,

$M(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy f(x,y)dxdy$,

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x - \bar{x})^2 f_1(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \bar{x})^2 f(x,y)dxdy$,

$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}(y - \bar{y})^2 f_2(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y - \bar{y})^2 f(x,y)dxdy$,

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)dx - \bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy - \bar{x}^2,$

$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_2(y)dy - \bar{y}^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x,y)dxdy - \bar{y}^2.$

Приклад 7.1. Точка $M(X,Y)$ розподілена у квадраті $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ з щільністю $f(x,y) = 0{,}5\sin(x+y)$ та $f(x,y) = 0$ поза квадратом. Знайти $F(x,y), M(X), M(Y), D(X), D(Y)$.

Розв'язування. $F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = 0$, якщо $x < 0$ або $y < 0$.

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = 0{,}5\int_0^x\int_0^y \sin(x+y)dxdy =$
$0{,}5\int_0^x(-\cos(x+y))\Big|_0^y dx = 0{,}5\int_0^x(\cos x - \cos(x+y))\,dx = 0{,}5(\sin x -$
$\sin(x+y))\Big|_0^x = 0{,}5(\sin x - \sin(x+y) + \sin y)$, якщо $0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy = 0{,}5\int_0^x\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dxdy =$
$0{,}5\int_0^x(-\cos(x+y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 0{,}5\int_0^x(\cos x - \cos(x+\frac{\pi}{2}))\,dx = 0{,}5\int_0^x(\cos x +$
$\sin x)\,dx = 0{,}5(\sin x - \cos x)\Big|_0^x = 0{,}5(\sin x - \cos x + 1)$, якщо $0 \le x \le$
$\frac{\pi}{2}, y > \frac{\pi}{2}$.

Аналогічно,

$F(x,y) = 0{,}5(\sin y - \cos y + 1)$, якщо $x > \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

$F(x,y) = 1$, якщо $x > \frac{\pi}{2}, y > \frac{\pi}{2}$.

$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x,y)dxdy = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x+y)dxdy =$
$0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos(x+y))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dx = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x - \cos(x+\frac{\pi}{2}))\,dx =$
$0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\cos x + \sin x)\,dx = \left|\begin{matrix}\text{інтегрування}\\ \text{частинами}\end{matrix}\right| = 0{,}5(x(\sin x - \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - \cos x)\,dx) = 0{,}5\left(\frac{\pi}{2} + (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$

Аналогічно,

$M(Y) = \frac{\pi}{4}.$

$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x,y)dxdy - \bar{x}^2 = 0{,}5\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin(x+y)dxdy -$
$(\frac{\pi}{4})^2 = \left|\begin{matrix}\text{інтегрування}\\ \text{частинами}\end{matrix}\right| = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2.$

Аналогічно,

$D(Y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{16} - 2.$

Коваріація та кореляція

Коваріацією випадкових величин X, Y та називається число

$$k = k(X, Y) = M\big[\big(X - M(X)\big)(Y - M(Y))\big] .$$

Інша формула $k = k(X, Y) = M(X, Y) - M(X)M(Y).$

Коваріація характеризує залежність випадкових величин та їх розсіювання навколо точки $(M(X), M(Y))$.

Коефіцієнт кореляції між випадковими величинами X, Y називається число

$$\rho_{xy} = \frac{k(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad \text{де } |\rho_{xy}| \leq 1.$$

Якщо $\rho_{xy} \neq 0$, то кажуть, що X, Y - корельовані, $\rho_{xy} = 0$ - некорельовані. Чим ближче $|\rho_{xy}|$ до одиниці. тим "щільніший" зв`язок між $X, Y$. Якщо $|\rho_{xy}| = 1$, то маємо функціональний зв`язок. Якщо $0 < |\rho_{xy}| < 1$, то маємо статистичний зв`язок. Якщо $\rho_{xy} = 0$ , то лінійний зв`язок відсутній.

Запитання для самоперевірки

1. Як задається дискретна двовимірна випадкова величина? Запишить її числові характеристики.
2. Як задається неперервна двовимірна випадкова величина? Запишить її числові характеристики.
3. Що характеризують коваріація і коефіцієнт кореляції.

7. Загальне поняття ймовірнісного процесу

Основні означення

Ймовірнісною функцією називається функція, що в результаті досліду може прийняти той чи інший вигляд (реалізація), який наперед невідомий. Кожна реалізація не є випадковою.

Ймовірнісний процес є ймовірнісною функцією часу t. Якщо параметр t приймає дискретні значення, то маємо процес з дискретним часом; якщо t змінюється на деякому інтервалі, то маємо процес з неперервним часом.

Стани у фіксований момент часу, по суті, представляють собою випадкову величину $\{X(t)|t \in T\}$ (повну групу подій), в яких може знаходитися система в цей момент. Кількість станів може бути скінченною та безкінечною.

Ймовірнісний процес $\{X(t)|t \in T\}$, де T – скінченний або безкінечний відрізок, називається *процесом з незалежними приростами*, якщо для будь-яких n, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, випадкові вектори $x(0), x(t_1) - x(0), x(t_2) - x(t_1), \ldots, x(t_n) - x(t_{n-1})$ взаємно-незалежні. Саме з вивчення процесів з незалежними приростами виникла теорія Імовірнісних процесів. Спочатку вивчався вінеровський процес (або процес броунівського руху), а потім і більш загальні процеси з незалежними приростами. Так як окреме зміщення мале, то можна вважати, що до їх суми застосовується центральна гранична теорема теорії ймовірності, а броунівський рух розглядати як гаусовський процес.

Гаусові ймовірнісні процеси вимагають, щоб випадкові величини, які їх утворюють, підкорялися нормальному закону розоділу.

Марковський процес (або «процес без післядії») є ймовірнісним процесом, що має наступну властивість: для кожного моменту часу ймовірність будь-якого стану системи у майбутньому залежить тільки від її стану у теперішньому часі і не залежить від того, коли та яким чином система прийшла у цей стан (тобто як розвивався процес у минулому). Марковські процеси знайшли дуже широке застосування у кібернетиці (особливо в теорії інформації). Так як конспект лекцій розробляється для студентів спеціальності 125«Кібербезпека» та 123«Комп`ютерна інженерія», то саме на цьому класі випадкових процесів буде зроблено акцент.

Закони розподілу ймовірнісних процесів

Функція $F_1(x_1, t_1) = P(X(t_1) < x_1)$ називається *одновимірною інтегральною функцією розподілу ймовірнісного процесу*. Якщо функцію $F_1(x_1, t_1)$ диференціювати по x_1, то отримаємо одновимірну щільність ймовірності:

$$\frac{\partial F_1(x_1,t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1, t_1).$$

Функція $F_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2)$ називається *двовимірною інтегральною функцією розподілу ймовірнісного процесу*. Якщо функцію $F_2(x_1, t_1, x_2, t_2)$ диференціювати по x_1 та x_2, то отримаємо двовимірну щільність ймовірності:

$$\frac{\partial F_2(x_1,t_1,x_2,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_2(x_1, t_1, x_2, t_2).$$

Функція $F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = P(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n)$ називається *n-вимірною інтегральною функцією розподілу ймовірнісного процесу*. Якщо функцію $F_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n)$ диференціювати по x_1, $x_2, \dots, x_n$, то отримаємо $n-$вимірну щільність ймовірності:

$$\frac{\partial F_n(x_1,t_1,x_2,t_2,\dots,x_n,t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n).$$

Характеристики ймовірнісних процесів

Математичне сподівання ймовірнісного процесу $\{X(t)|t \in T\}$ називається невипадкова функція $m_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню відповідного перерізу імовірнісного процесу $m_x(t) = M(X(t))$.

Якщо відома одновимірна щільність імовірності $f_1(x_1, t_1)$, то $m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x, t) dx$.

Математичне сподівання $m_x(t)$ ймовірнісного процесу є невипадкова функція, навколо якої коливаються реалізації ймовірнісного процесу.

Дисперсією ймовірнісного процесу $\{X(t)|t \in T\}$ називається невипадкова функція $D_x(t)$, яка при кожному значенні аргументу t дорівнює дисперсії відповідного перерізу ймовірнісного процесу $D_x(t) = D(X(t))$.

Якщо відома одновимірна щільність ймовірності $f_1(x_1, t_1)$, то $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x(t))^2 f_1(x, t) dx$ або $D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x, t) dx - (m_x(t))^2$.

Математичне сподівання та дисперсія ймовірнісного процесу дають можливість мати лише деяке уявлення про ймовірнісний процес: навколо якої функції групуються та як розкидані реалізації навколо середньої функції.

Кореляційною функцією ймовірнісного процесу $\{X(t)|t \in T\}$ називається невипадкова функція $K_x(t_1, t_2)$, яка при кожній парі t_1, t_2 дорівнює коваріації відповідних перерізів ймовірнісного процесу

$$K_x(t_1,t_2) = M(\big(X(t_1) - m_x(t_1)\big)\big(X(t_2) - m_x(t_2)\big)).$$

Якщо відома двовимірна щільність ймовірності $f_2(x_1,t_1,x_2,t_2)$, то

$$K_x(t_1,t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - (m_x(t_1))(x_2 - (m_x(t_2))f_2(x_1,t_1,x_2,t_2)d\,x_1 dx_2$$

або

$$K_x(t_1,t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_2(x_1,t_1,x_2,t_2)d\,x_1 dx_2 - m_x(t_1)m_x(t_2).$$

Кореляційна функція характеризує степінь зв`язку між значеннями ймовірнісного процесу $\{X(t)|t \in T\}$ в моменти часу t_1, t_2.

Марковський ймовірнісний процес з дискретними станами

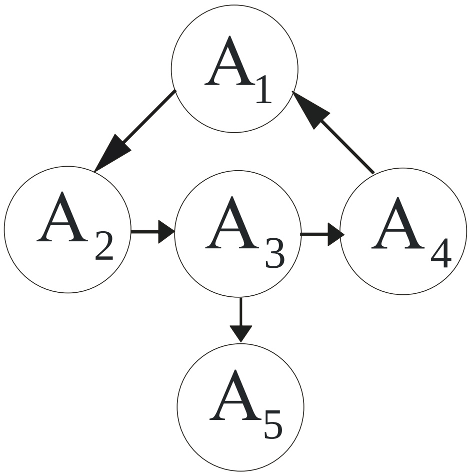
Ймовірнісний процес називається процесом з дискретними станами, якщо можливі стани системи $A_1, A_2, \dots$ можна перерахувати (пронумерувати) один за одним, а сам процес полягає у тому, що час від часу система стрибком (миттєво) переходить з одного стану в інший.

При аналізі ймовірнісних процесів з дискретними станами зручно користуватися геометричною схемою – *графом станів*. Кожний стан будемо зображувати вершинами, а можливі переходи з одного стану в інший – орієнтованими дугами, що з'єднують ці вершини. Можливість системи залишитися у наступний момент часу в тому ж самому стані зображується петлею, що виходить і входить в одну й ту ж саму вершину.

Приклад. Система – комп'ютер, що може знаходитися в одному з можливих станів:

A_1 - комп'ютер працює; A_2 - комп'ютер вийшов з ладу, чекає на тестування; A_3 - тестування комп'ютера; A_4- ремонт комп'ютера; -A_5 списання комп'ютера.

Графічна модель функціонування системи зображена на малюнку.



Марковський ймовірнісний процес з дискретним часом

Нехай маємо систему, що може знаходитися у станах $A_1, A_2, \ldots, A_n$, при цьому переходи системи із стану в стан можливі тільки у моменти $t_1, t_2, \ldots$ Будемо називати ці моменти кроками, а процес, що відбувається у системі, розглядатимемо як функцію цілочисельного аргументу (номера кроку).

Умовимося позначати через A_i^k подію, яка полягає у тому, що система за k кроків опинилася у стані A_i. При будь-якому k події $A_1^k, A_2^k, \ldots, A_n^k$ утворюють повну групу подій. Позначимо ймовірності цих подій через p_i^k. Тоді $$p_1^k + p_2^k + \cdots + p_n^k = 1$$ (повна група подій).
Ці ймовірності називаються *абсолютними ймовірностями* станів.
Для будь-якого кроку існують ймовірності переходу системи з будь-якого стану у будь-який інший стан за один крок, а також ймовірності затримки системи у даному стані. Такі ймовірності називаються *перехідними* і задаються *стохастичною* матрицею:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}\ p_{12} \cdots p_{1n} \\ p_{21}\ p_{22} \cdots p_{2n} \\ \cdots \\ p_{n1}\ p_{n2} \cdots p_{nn} \end{pmatrix},$$

де p_{ij} – ймовірність переходу системи з стану i у стан j. Деякі з перехідних ймовірностей можуть дорівнювати нулю (це означає, що перехід системи за один крок з стану i у стан j неможливий), на головній діагоналі розташовані ймовірності затримки системи у тому ж стані на наступному кроці.

Матриця перехідних ймовірностей P разом з початковими ймовірностями p_j^0 $(j = 1,2, \ldots, n)$ повністю задає *марковський ланцюг.*

Марковський ланцюг називається *однорідним*, якщо перехідні ймовірності не залежать від номера кроку, у протилежному випадку марковський ланцюг називається *неоднорідним*.

Розглянемо однорідний марковський ланцюг.

Нехай $\{p_j^k\}$ $(j = 1,2,\dots,n)$ – абсолютні ймовірності станів системи після k переходів. Величини $\{p_j^k\}$ $(j = 1,2,\dots,n)$ можна виразити через $\{p_j^0\}$ $(j = 1,2,\dots,n)$ та P, використовуючи формулу повної ймовірності :

$$p_j^1 = p_1^0 p_{1j} + p_2^0 p_{2j} + \dots + p_n^0 p_{nj} = \sum_i p_i^0 p_{ij},$$

$$p_j^2 = \sum_i p_i^1 p_{ij} = \sum_i (\sum_m p_m^0 p_{mj})\, p_{ij} = \sum_m p_m^0 \left(\sum_i p_{mj}\, p_{ij}\right) = \sum_m p_m^0\, p_{mj}^2,$$

$$\dots$$

$$p_j^k = \sum_i p_i^0 \left(\sum_m p_{im}^{k-1}\, p_{mj}\right) = \sum_i p_i^0\, p_{ij}^k, \qquad (2.1)$$

де p_{ij}^k – *k-крокова перехідна ймовірність* (ймовірність переходу системи з стану *i* у стан *j* за *k* кроків.

У загальному вигляді для всіх *i* та *j*:

$$p_{ij}^k = \sum_k p_{ik}^{k-l}\, p_{kj}^l, \qquad 0 < l < k.$$

Ці рівняння відомі як рівняння Колмогорова-Чепмена.

Тобто якщо абсолютні ймовірності визначені у векторній формі

$p^{(k)} = \{p_1^k, p_2^k, \dots, p_n^k\}$, то $\qquad p^{(k)} = p^{(0)} P^k.$

Марковський ймовірнісний процес з дискретними станами та неперервним часом

У попередньому розділі ми розглядали марковський ланцюг, тобто імовірнісний процес, що відбувається у системі, яка випадковим чином може переходити з стану у стан тільки у деякі наперед визначені, фіксовані моменти часу.

На практиці значно частіше зустрічаються ситуації, коли перехід системи з стану у стан відбуваються не у фіксовані, а у випадкові моменти часу, які наперед вказати неможливо.

Для опису таких процесів може бути застосована схема марковського ймовірнісного процесу з дискретними станами та неперервним часом, який називається *неперервним ланцюгом Маркова.*

Нехай маємо ряд дискретних станів $A_1, A_2, \dots, A_n$, перехід системи з стану у стан може відбуватися у будь-який момент часу.

Позначимо через $p_i(t)$ ймовірність того, що в момент t система буде знаходитися у стані A_i $(i = 1,2, \dots, n)$. . Очевидно, що для будь-якого моменту t сума ймовірностей станів дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1,$$

так як події $A_1, A_2, \dots, A_n$ є повною групою.

Поставимо задачу – визначити для будь-якого t ймовірності $p_i(t)(i = 1,2, \dots, n)$. Для того, щоб знайти ці ймовірності, необхідно знати характеристики процесу, що є аналогічними перехідним ймовірностям для марківського ланцюга. У випадку процесу з неперервним часом не прийдеться задавати визначені перехідні ймовірності, бо ймовірність переходу системи з стану у стан точно в момент t буде дорівнювати нулю (так само як ймовірність будь-якого окремого значення неперервної випадкової величини). Замість перехідних ймовірностей p_{ij} введемо інтенсивності переходу λ_{ij}.

Інтенсивністю переходу системи з стану i у стан j називається границя відношення ймовірності переходу системи за час Δt з стану i у стан j до довжини Δt:

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

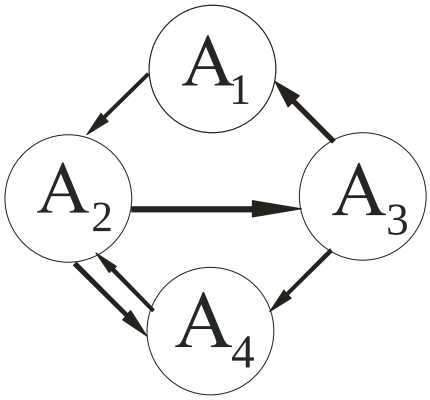
де $p_{ij}(\Delta t)$ - ймовірність того, що система, яка знаходилася в момент t у стані A_i за час Δt перейде з нього у стан A_j.

З формули випливає, що при малому Δt ймовірність перехода $p_{ij}(\Delta t)$ (з точністю до безкінечно малих вищих порядків) дорівнює $\lambda_{ij}\Delta t$.

Якщо всі інтенсивності переходів λ_{ij} не залежать від t, то марковський процес називається *однорідним*; якщо всі інтенсивності представляють собою функції часу, то процес є *неоднорідним*.

Графічною моделлю марковського ланцюга з неперервним станом є граф, у якому над кожною дугою надписана інтенсивність переходу системи з відповідного стану у відповідний стан. Знаючи такий граф, можна визначити ймовірності станів $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ як функції часу. А саме, ці ймовірності задовільняють диференціальним рівнянням, так званим *рівнянням Колмогорова.*

Продемоструємо методику побудови рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів на конкретному прикладі. Нехай система має чотири можливих стани, які представлені на малюнку.



Знайдемо ймовірність $p_1(t)$. Надамо t малий приріст Δt і знайдемо ймовірність того, що у момент $t + \Delta t$ система буде знаходитися у стані A_1. Ця подія може відбутися двома шляхами:

- в момент t система вже була у стані A_1, а за час Δt не вийшла з цього стану або
- в момент t система була у стані A_3, а за час Δt перейшла з нього у стан A_1.

Ймовірність першого варіанта знайдемо як добуток ймовірності $p_1(t)$ того, що в момент t система була у стані A_1, на умовну ймовірність того, що, знаходячись у стані A_1, система за час Δt не перейде з нього у стан A_2 . Ця умовна ймовірність (з точністю до безкінечно малих вищих порядків) дорівнює $1 - \lambda_{12}\Delta t$.

Аналогічно, ймовірність другого варіанта дорівнює ймовірності того, що в момент t система була у стані A_3, яка помножується на умовну ймовірність переходу за час Δt у стан A_1:

$$p_3(t)\lambda_{31}\Delta t.$$

Застосовуючи правило додавання ймовірностей, отримаємо:

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)(1 - \lambda_{12}\Delta t) + p_3(t)\lambda_{31}\Delta t.$$

Розкриємо дужки у правій частині, перенесемо $p_1(t)$ у ліву частину і розділимо обидві частини рівняння на Δt, отримаємо:

$$\frac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}p_1(t) + p_3(t)\lambda_{31} .$$

Тепер спрямуємо Δt до нуля і перейдемо до границі:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_1(t+\Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12}p_1(t) + p_3(t)\lambda_{31}.$$

Ліва частина є ні чим іншим, як похідною функції $p_1(t)$:

$$\frac{\partial p_1(t)}{\partial t} = -\lambda_{12}p_1(t) + p_3(t)\lambda_{31}.$$

Таким чином вивели диференціальне рівняння, якому задовільняє функція $p_1(t)$. Аналогічні диференціальні рівняння можна вивести і для інших ймовірностей станів $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$.

Розглянемо другий стан A_2. Знайдемо ймовірність того, що у момент $t + \Delta t$ система буде знаходитися у стані A_2. Ця подія може відбутися двома шляхами:

- в момент t система вже була у стані A_2, а за час Δt не вийшла з цього стану;

або

- в момент t система була у стані A_1, а за час Δt перейшла з нього у стан A_2;

або

- в момент t система була у стані A_4 , а за час Δt перейшла з нього у стан A_2.

Ймовірність першого варіанта обчислюється так: $p_2(t)$перемножується з умовною ймовірністю того, що система за час Δt не перейде ні в A_3, ні в A_4. Так як події, які полягають у переході за час Δt з A_2 у A_3та з A_2 у A_4, є несумісні, то ймовірність того, що відбудеться один з цих переходів, дорівнює сумі їх ймовірностей, тобто $\lambda_{23}\Delta t + \lambda_{24}\Delta t$ (з точністю до безкінечно малих вищих порядків) . Ймовірність того, що не вібудеться жодний з цих переходів, дорівнює 1-($\lambda_{23}\Delta t + \lambda_{24}\Delta t$). Звідси ймовірність першого варіанту:

$$p_2(t)(1 - (\lambda_{23}\Delta t + \lambda_{24}\Delta t)).$$

Додаючи сюди ймовірності другого та третього варіантів, отримаємо:

$$p_2(t + \Delta t) = p_2(t)\big(1 - (\lambda_{23}\Delta t + \lambda_{24}\Delta t)\big) + p_1(t)\lambda_{12}\Delta t + p_4(t)\lambda_{42}\Delta t.$$

Переносячи $p_2(t)$у ліву частину, ділячи на Δt та переходячи до границі, отримаємо диференціальне рівняння для $p_2(t)$:

$$\frac{\partial p_2(t)}{\partial t} = -\lambda_{23}p_2(t) - \lambda_{24}p_2(t) + \lambda_{12}p_1(t) + \lambda_{42}p_4(t).$$

Міркуючи аналогічно для станів A_3 та A_4, отримаємо в результаті систему диференціальних рівнянь. Відкинувши з них заради зручності аргумент t у функціях p_1, p_2, p_3, p_4, перепишемо систему у вигляді:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\lambda_{12}p_1 + p_3\lambda_{31} \ ,$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = -\lambda_{23}p_2 - \lambda_{24}p_2 + \lambda_{12}p_1 + \lambda_{42}p_4,$$

$$\frac{\partial p_3}{\partial t} = -\lambda_{31}p_3 - \lambda_{34}p_3 + \lambda_{23}p_2,$$

$$\frac{\partial p_4}{\partial t} = -\lambda_{42}p_4 + \lambda_{24}p_2 + \lambda_{34}p_3.$$

Ці рівняння для ймовірностей станів і є рівняннями Колмогорова.

Інтегрування цієї системи рівнянь дасть шукані ймовірності станів як функції часу. Початкові умови беруться в залежності від того, яким був початковий стан системи. Наприклад, якщо у початковий момент часу (при $t = 0$) система знаходилася у стані A_1 , то треба прийняти початкові умови: $t = 0, p_1 = 1, p_2 = p_3 = p_4 = 0$.

Зауважимо, що всі чотири рівняння можна було б і не писати, так як $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ для всіх t, і будь-яку з ймовірностей p_1, p_2, p_3, p_4 можна виразити через три інші. Наприклад,

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3).$$

Тоді спеціального рівняння для p_4можна не писати.

Звернемо увагу на структуру рівнянь Колмогорова . Всі вони побудовані за загалом визначеним правилом, яке можна сформулювати наступним чином.

У лівій частині кожного рівняння розташована похідна ймовірності стану, а права частина містить стільки членів, скільки дуг пов'язано з даним станом. Якщо дуга виходить з стану, то відповідний член має знак «мінус», а якщо дуга входить у стан, то – знак «плюс». Кожний член дорівнює добутку інтенсивності переходу, що відповідає даній дузі, та ймовірності того стану, з якого виходить дуга.

Запишемо систему рівнянь Колмогорова у матричному вигляді.

Матриця $\Lambda = \|\lambda_{ij}\|$ $(i, j = 1,2, \dots, n)$ називається *матрицею інтенсивностей* переходів марковського ланцюга з неперервним часом. Її властивості:

1) $\lambda_{ij} \geq 0$ для $i \neq j$;
2) $\lambda_{ij} \leq 0$ для $i = j$;
3) $\sum_j \lambda_{ij} = 0, i = 1,2, \dots, n$.

Знаючи матрицю інтенсивностей переходів або граф станів, можна визначити вектор ймовірностей станів

$$\overline{p(t)} = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$$

через матричне рівняння $\overline{p(t)}' = \overline{p(t)} \cdot \Lambda$.

Граничні ймовірності станів

Нехай фізична система має скінченну кількість дискретних станів $A_1, A_2, \dots, A_n$, в якій відбувається марковський процес з неперервним часом. Припустимо, що всі інтенсивності потоків подій, що переводять систему із стану у стан, сталі ($\lambda = const$) , іншими словами, всі потоки подій – найпростіші (стаціонарні, без післядії, ординарні, тобто пуасонівські) потоки.

Записавши систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей станів та проінтегрувавши ці рівняння при заданих початкових умовах, отримаємо ймовірність станів, як функції часу:

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t),$$

які при будь-якому t дають у сумі одиницю.

Поставимо наступне питання: що буде відбуватися з системою при $t \to \infty$? Чи будуть функції $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$ прямувати до якихось границь? Такі границі, якщо вони існують, називаються *граничними ймовірностями станів.*

Система, для якої існують граничні ймовірності, називається *ергодичною,* відповідний процес – *ергодичний.*

Говорячи про граничні ймовірності, введемо ще кілька визначень.

Стан A_i називається *неістотним*, якщо знайдеться такий стан A_j, що з A_i в A_j можна перейти, а з A_j в A_i – не можна. Якщо A_i– неістотний стан, то $\lim_{t\to\infty} p_i(t) = 0$.

Два істотні стани A_j і A_i називаються зв'язними, якщо з A_i можна потрапити в A_j і навпаки.

Можна довести наступні загальні положення. *Якщо кількість станів системи скінченна і всі вони є зв'язними, то граничні ймовірності станів існують і не залежать від початкового стану системи.*

Щоб процес зі скінченим числом станів мав стаціонарний розподіл ймовірностей, необхідно і достатньо, щоб усі його істотні стани були зв'язними між собою.

Нехай сформульована умова виконується, а граничні ймовірності існують:

$$\lim_{t\to\infty} p_i(t) = p_i \quad i = 1,2, \dots, n.$$

Граничні ймовірності будуть позначатися тими ж літерами $p_1, p_2, \dots, p_n$, що й самі ймовірності станів, маючи на увазі не змінні величини, а сталі числа. Для граничних ймовірностей також виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Таким чином при $t \to \infty$ у системі встановлюється деякий *граничний стаціонарний режим*: він полягає у тому, що система випадковим чином змінює свої стани, але ймовірності кожного з них вже не залежать від часу.

Який зміст цієї ймовірності? Вона представляє собою не що інше, як *середній відносний час перебування системи у даному стані.*

Для того, щоб обчислити граничні ймовірності, необхідно у системі рівнянь Колмогорова ліві частини покласти рівними нулю.

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення ймовірнісного процесу.
2. Якими характеристиками описується ймовірнісний процес?
3. Дайте означення марковського процесу.
4. Опишіть марковський процес з дискретними станами і часом.
5. Опишіть марковський процес з дискретними станами і неперервним часом.
6. Як будуються рівняння Колмогорова?
7. У чому полягає стаціонарний режим марковського процесу?

8. Ймовірнісні процеси в теорії масового обслуговування

Основні означення

Заявкою називають попит на задоволення деякої потреби.

Системою масового обслуговування (СМО) називається будь-яка система, що задовольняє заявки, які надходять до неї у випадкові моменти часу.

Пристрій, що безпосередньо обслуговує заявку, називається *каналом обслуговування.*

Послідовність подій які полягають в надходженні заявок в СМО, називають *вхідним потоком*.

В залежності від поведінки заявки в СМО розглядають СМО з відмовами (заявка поступила в СМО в момент зайнятості усіх каналів, дістає відмову і залишає систему) і СМО з чергою (заявка при відсутності вільних каналів на момент її надходження в СМО стає у чергу на обслуговування).

Потік заявок називається найпростішим, якщо він задовольняє умовам:

1) відсутність післядії (заявки надходять в СМО незалежно одна від одної);

2) стаціонарність (можна говорити про середнє число заявок за одиницю часу);
3) ординарність (одночасне надходження до СМО двох або більшого числа заявок є малоймовірним).

Позначимо через T проміжок часу між надходженням двох послідовних заявок. Функція розподілу цієї випадкової величини для найпростішого потоку показникова: $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}, t > 0$, де λ – інтенсивність потоку заявок (визначає середнє число заявок, що надходять в систему за одиницю часу).

Таким чином, математичне сподівання величини T:$M(T) = \frac{1}{\lambda}$.

Щоб задати СМО необхідно визначити ймовірносні характеристики часу обслуговування однієї заявки. Призначимо цей час через $T_{обсл}$, $T_{обсл}$ – випадкова величина, в більшості практичних задач вважають закон розподілу цієї характеристики показниковим, тобто $F(t) = P(T_{обсл} < t) = 1 - e^{-\mu t}, t > 0$.

Параметр цього розподілу μ є величиною оберненою до середнього часу обслуговування:$\mu = \frac{1}{M(T_{обсл})}$, μ – інтенсивність потока обслуговування.

Процес загибелі та розмноження

Марковський неперервний ланцюг називається «процесом загибелі та розмноження», якщо його граф станів має вигляд, що представлений на рисунку, тобто всі стани можна витягнути в один ланцюг, в якому кожний стан зв’язаний прямим та оберненим зв’язком з кожним із сусідніх станів, а крайні стани A_0 та A_n – тільки з сусідніми станами.

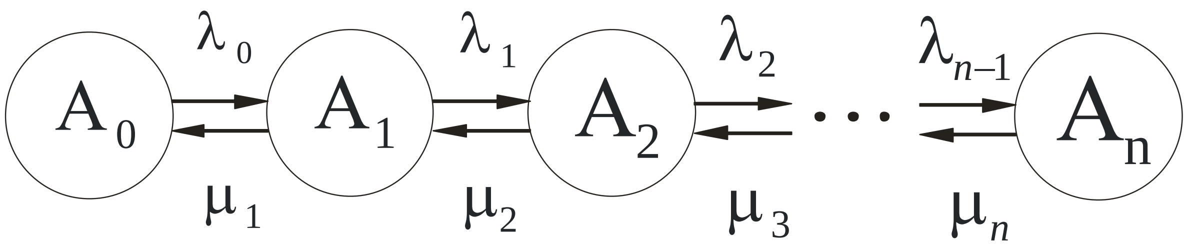


Схема загибелі та розмноження дуже часто зустрічається в самих різних практичних задачах, тому є сенс розглянути цю схему у загальному вигляді. У цій схемі $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ – інтенсивності переходів системи зліва направо, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ – інтенсивності переходів системи справа на ліво.

Запишемо алгебраїчні рівняння для ймовірностей станів. Для стану A_0 маємо:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1.$$

Для стану A_1:

$$\lambda_1 p_1 + \mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2.$$

Враховуючи попередню залежність, можна скоротити справа та зліва члени $\lambda_0 p_0 \mu_1 p_1$ та отримати:

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2.$$

Аналогічні залежності для інших станів:

$$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n.$$

Граничні ймовірності станів $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ у будь-якій схемі загибелі та розмноження задовільняють системі рівнянь

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1,$$

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2,$$

$$\lambda_2 p_2 = \mu_3 p_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n.$$

Разом з нормуючою умовою $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$.

Будемо розв'язувати цю систему наступним чином. З першого рівняння виразимо p_1:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0,$$

З другого рівняння, з урахуванням p_1, виразимо p_2:

$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0,$$

з третього рівняння:

$$p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0,$$

і загалом

$$p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0.$$

Підставляючи всі ймовірності $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ у нормуючу умову, отримаємо

$$p_0 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0 + \cdots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n} p_0 = 1,$$

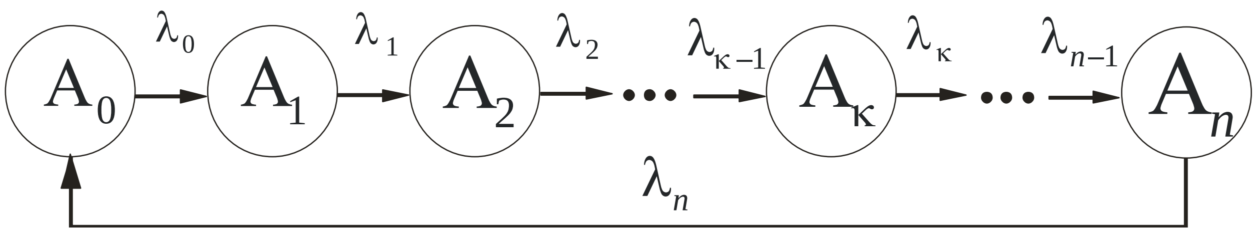
звідки $$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} + \cdots + \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}\right)^{-1}.$$

Інші ймовірності виражаються через p_0:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0, p_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0, p_3 = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2}{\mu_1 \mu_2 \mu_3} p_0, \dots, p_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} p_0.$$

Циклічний процес

Марковський випадковий процес називається циклічним, якщо стани системи, яку він описує, зв'язані між собою у кільце (цикл) з односторонніми переходами.



Запишемо алгебраїчні рівняння для граничних ймовірностей станів:

$$\lambda_0 p_0 = \lambda_1 p_1$$
$$\lambda_1 p_1 = \lambda_2 p_2$$
$$\lambda_2 p_2 = \lambda_3 p_3$$
$$\dots\dots\dots\dots..$$
$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \lambda_n p_n$$
$$\lambda_n p_n = \lambda_0 p_0$$

разом з нормуючою умовою $\sum_{i=0}^{n} p_i = 1$. З отриманих рівнянь, відкинувши останнє, виразимо всі ймовірності $p_1, p_2, \dots, p_n$ через p_0 та підставимо у нормуючу умову, звідки

$$p_0 = (1 + \lambda_0 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\right))^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\lambda_0}{\lambda_2} p_0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$p_n = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} p_0.$$

Формули можна привести до більш зручного вигляду, якщо перейти від інтенсивності $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ до середнього часу t_i перебування системи у стані A_i:

$$p_0 = \frac{t_0}{t_0+t_1+\dots+t_n},$$

$$p_1 = \frac{t_1}{t_0+t_1+\dots+t_n},$$

....

$$p_n = \frac{t_n}{t_0+t_1+\dots+t_n}.$$

Одноканальна СМО з обмеженою чергою

Розглянемо найпростішу з усіх можливих СМО з очікуванням – одноканальну систему (n=1), на яку поступає потік заявок з інтенсивність λ, інтенсивність обслуговування заявок позначимо через μ. Заявка, що поступає у момент, коли канал зайнятий, стає у чергу та очикує обслуговування.

У цьому пункті розглядається система з обмеженою кількістю місць у черзі (m). Граф такої системи має наступні стани:

A_0 – канал вільний;

A_1 – канал зайнятий, черги немає;

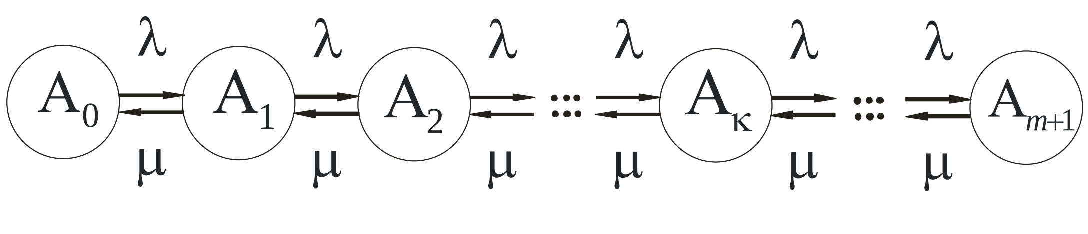
A_2 – канал зайнятий, одна заявка стоїть у черзі;

…………………………………………….

A_k – канал зайнятий, k-1 заявки стоять у черзі;

…………………………………………….

A_{m+1} – канал зайнятий, m заявок стоять у черзі.



Схема, що зображена на малюнку, є схемою загибелі та розмноження. Запишемо для неї граничні імовірності:

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1},$$

$$p_1 = \rho p_0, p_2 = \rho^2 p_0, \dots, p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0, \text{ де } \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Звернемо увагу, що вираз у дужках першої формули є геометричною прогресією з першим членом 1 та знаменником ρ , тоді: $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0, \dots ,\ p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0.$$

Ці формули є вірними при $\rho \neq 1$. Якщо $\rho = 1$, то сума геометричної прогресії дорівнює $m + 2$, $p_0 = \frac{1}{m+2}$.

Визначимо характеристики СМО:

1) ймовірність відмови $P_{\text{відм}} = p_{m+1} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$;

2) відносна пропускна спроможність $Q = 1 - P_{\text{відм}} = 1 - \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$;

3) абсолютна пропускна спроможність $A = \lambda Q$;

4) середня кількість заявок, що знаходяться у черзі

$$\bar{r} = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 + \dots + (k-1) \cdot p_k + \dots + m \cdot p_{m+1} =$$
$$\rho^2 p_0 (1 + 2\rho + \dots + (k-1)\rho^{k-2} + \dots + m\rho^{m-1}) = \frac{\rho^2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)};$$

5) середня кількість заявок, що знаходяться під обслуговуванням

$$\bar{\varpi} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0);$$

6) середня кількість заявок, що знаходяться у СМО,

$$\bar{k} = \bar{r} + \bar{\varpi};$$

7) середній час очікування заявки у черзі

$$\overline{t_{\text{оч}}} = \frac{1}{\rho\mu}\bar{r} = \frac{\bar{r}}{\lambda}\ ;$$

8) середній час перебування заявки у системі

$$\overline{t_{\text{пер}}} = \overline{t_{\text{оч}}} + \frac{Q}{\mu}.$$

Багатоканальна СМО з відмовами

Для СМО з відмовами визначають наступні показники ефективності роботи:

A − абсолютна пропускна спроможність СМО (середня кількість заявок, яка обслуговує система за одиницею часу).

Q − відносна пропускна спроможність СМО (ймовірність обслуговування заявки, що надійшла)

$$Q = \frac{A}{\lambda}.$$

$P_{\text{відм}}$ − ймовірність відмови (ймовірність того, що заявка, яка надійшла, не буде обслугована), $P_{\text{відм}} = 1 - Q$.

$\bar{k}$ − середнє число каналів, що зайняті.

Нехай СМО має k каналів, вхідний потік має інтенсивність $\boldsymbol{\lambda}$, потік обслуговування одним каналом має інтенсивність μ. Пропонуємо стани СМО за кількістю зайнятих каналів:

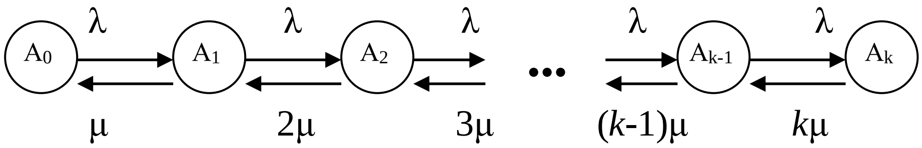
A_0 – всі канали вільні;

A_1 – один канал зайнятий;

A_2 – два канали є зайнятими;

…

A_k – всі канали зайняті.



Цей граф є графом загибелі і розмноження, для якого

$\lambda_{i-1} = \lambda$, $\mu_i = i\mu$ ($i = 1, 2, \ldots, k$).

Граничний розподіл імовірностей станів можна обчислити, поклавши $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (ρ – коефіцієнт завантаження системи):

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!})^{-1};$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, p_2 = \frac{\rho^2}{2!}p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0.$$

Отримані формули називаються формулами Ерланга. Спираючись на формули Ерланга, визначають показники ефективності СМО:

$$A = \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1} - p_k); Q = \frac{A}{\lambda} = 1 - p_k; P_{\text{відм}} = p_k;\ \ \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_k).$$

Багатоканальне СМО з необмеженою чергою

Нехай система має k каналів обслуговування. Всі потоки найпростіші, інтенсивність потоку заявок λ, потоку обслуговування однієї заявки – μ. Коефіцієнт завантаження СМО $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$.

Позначимо відношення коефіцієнта завантаження до числа каналів системи черзі $\chi = \frac{\rho}{k}$. Граничний розподіл ймовірностей станів в СМО з необмеженою чергою існує тільки за умови:

$$\chi < 1.$$

Позначимо через p_i граничну ймовірність того, що в системі зайняті i каналів ($0 \le i \le k$), а через p_{k+r} – граничну імовірність того, що в системі зайняті k каналів і r заявок стоять в черзі на обслуговування. При $\chi < 1$ граничний розподіл ймовірностей станів має вигляд:

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{1-\chi})^{-1};$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} p_0 \ (0 \le i \le k);$$

$$p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r \cdot k!} p_0 \ (r \ge 1).$$

Виходячи з того, що черга в СМО необмежена, кожна заявка згодом буде обслугована, тому очевидним є співвідношення:

$$P_{\text{відм}} = 0; \ Q = 1; \ A = \lambda Q = \lambda.$$

Крім розглянутих в попередній задачі для даної СМО обчислюються такі показники ефективності:

1) $\bar{z}$ – середнє число заявок СМО (усі заявки, і такі, що обслуговуються, і такі, що стоять у черзі);
2) $\bar{r}$ – середнє число заявок у черзі;
3) $\overline{t_{\text{сист}}}$ – середній час перебування заявки в системі (як у черзі, так і під обслуговування);
4) $\overline{t_{\text{сер}}}$– середній час перебування заявки у черзі.

Вказані показники ефективності обчислюються за формулами:

$$\bar{r} = \frac{\rho^{k+1} \cdot p_0}{k \cdot k!(1-\chi)^2}; \ \bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho; \ \bar{z} = \bar{r} + \bar{k},; \ \overline{t_{\text{сист}}} = \frac{\bar{z}}{\lambda}; \ \overline{t_{\text{сер}}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення системи масового обслуговування та її складових частин?
2. Як виглядає схема загибелі та розмноження?
3. Перерахуйте відомі вам СМО та їх характеристики.

9. Статистичний експеримент. Методи одержання оцінок

Варіаційні ряди

Вихідним пунктом статистичних досліджень будь-якої випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$ є сукупність із n незалежних спостережень, в результаті яких випадкова величина X набуває значення x_1, $x_2,\ldots, x_n$. Набір значень $x_1, x_2,\ldots, x_n$ називається *вибіркою* об'єму n, взятою з генеральної сукупності випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$.

Впорядкована за величиною послідовність вибіркових значень $x_1< x_2<\ldots< x_k$ називається *варіаційним рядом*. Різні значення x_i у вибірці називаються варіантами, а n_i – кількість появ x_i у вибірці – *частотою варіанта*. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. *Відносною частотою* варіанта x_i називається відношення частоти n_i до об'єму вибірки n і позначається ω_i. Очевидно, $\sum_{i=1}^{k} \omega_i = 1$. Таблиця, що встановлює відповідність між варіантами та їх частотами або відносними частотами, називається *статистичним розподілом*:

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

x_i	x_1	x_2	…	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	…	ω_k

Якщо варіанти вибірки можуть відрізнятися один від одного на скільки завгодно малу величину, тобто випадкова величина набуває довільних значень у деякому інтервалі (генеральна сукупність неперервна), або коли вибірка містить досить велику кількість варіантів, то на практиці такі вибірки перегруповуються. Для цього всю ширину вибірки об'єму n розбивають інтервалами довжиною h і дані спостережень подаються таблицею частот, де вказані часткові інтервали $(a_i;a_{i+1})$ і n_i – кількість тих вибіркових значень, які потрапили до i-го інтервалу розбиття:

I	$(a_1; a_2)$	$(a_2; a_3)$	…	$(a_k; a_{k+1})$
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Таблиця називається інтервальним варіаційним рядом. Для визначення оптимальної ширини інтервалу варіаційного ряду користуються формулою

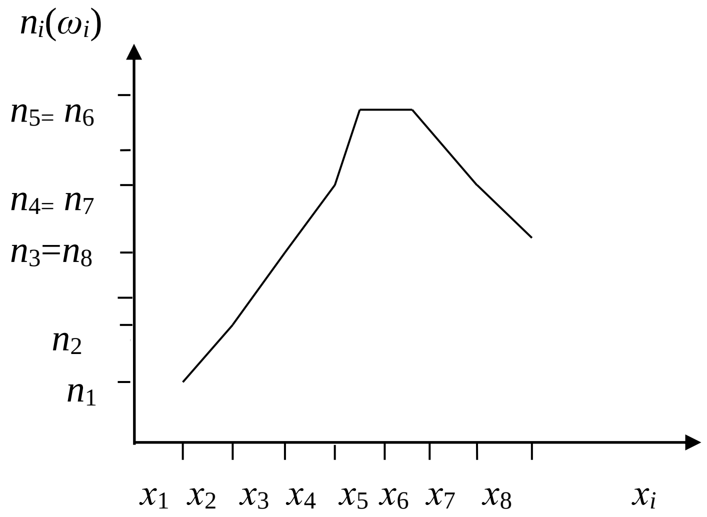
$$h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{1+3{,}2*\lg n},$$

де x_{max}, x_{min} – максимальні та мінімальні варіанти. Якщо h – дробове число, то за h беруть найближче ціле число або найближчий простий дріб. За початок першого інтервалу беруть $a_1 = x_{min} - h/2$, тоді $a_2 = a_1 + h$ і т.д. Процес продовжується доти, поки початок наступного інтервалу не буде більшим за x_{max}. Число h називається *кроком* вибірки.

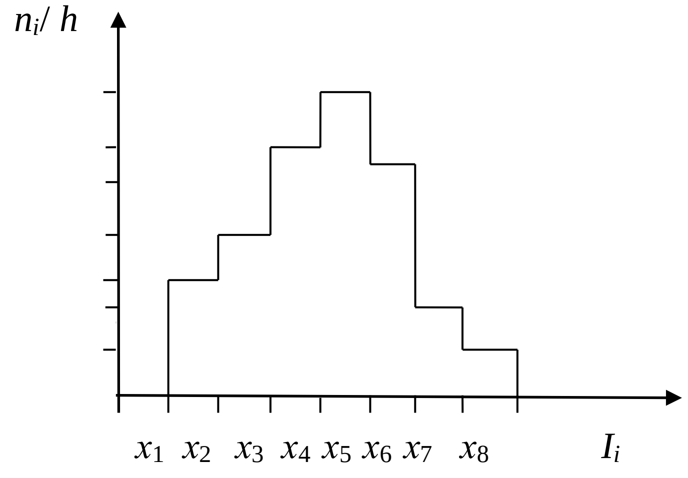
Статистичним розподілом називають таблицю, де вказують середини x_i інтервалів розбиття та їх відносні частоти.

Графічне зображення варіаційних рядів

Для ілюстрації варіаційних рядів використовують *полігон частот* $(x_i; n_i)$ або *полігон відносних частот* $(x_i; \omega_i)$:



Для ілюстрації інтервальних варіаційних рядів будують діаграми, які називають *гістограмами*.



Емпірична функція розподілу

Нехай x_1, x_2,…, x_n - вибірка об'єму n з генеральної сукупності випадкової величини X з функцією розподілу $F(x)$. Визначимо для кожного значення x функцію $\mu^*(x)$, що дорівнює кількості елементів вибірки, значення яких не перевищують x.

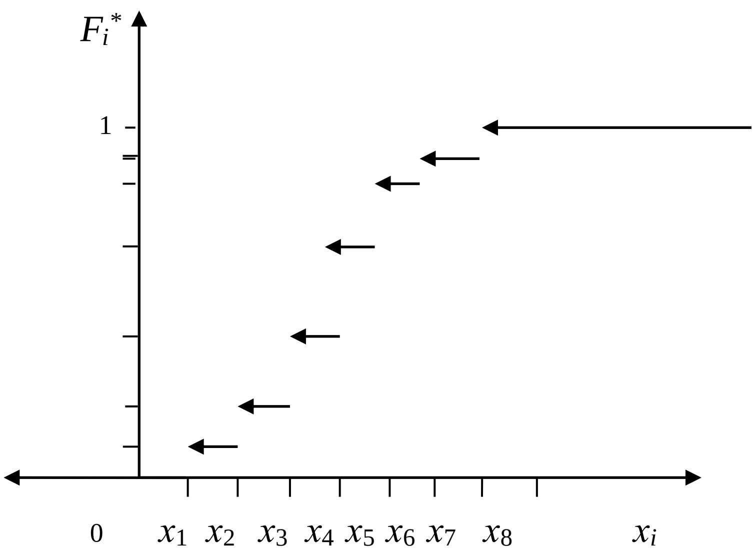
Емпіричною функцією розподілу вибірки $x_1, x_2,\dots, x_n$ називається функція $F^*(x)= \mu^*(x)/ n$. На відміну від емпіричної функції розподілу вибірки функцію розподілу $F(x)$ генеральної сукупності називають теоретичною функцією розподілу. Якщо вибірка має лише k ранжованих варіант, то

$$F^*(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x \le x_1, \\ \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n}, \text{при } x_i < x \le x_{i+1}, i = 1, \dots, k-1, \\ 1, \text{при } x > x_k \end{cases}$$

та має такі властивості:

1) $F^*(x)\in[0;1]$; 2) $F^*(x)$ – неспадна, зростає в точках x_i стрибками $\frac{n_i}{n}$.

Графік емпіричної функції розподілу має ступінчастий характер:



Емпірична функція розподілу відіграє фундаментальну роль у математичній статистиці. Найважливіша його властивість полягає в тому, що при збільшенні кількості випробувань над випадковою величиною відбувається зближення цієї функції з теоретичною функцією розподілу.

Числові характеристики вибірки

Основні числові характеристики статистичного ряду:

1) вибіркове середнє $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$=$\sum_{i=1}^{k} x_i \omega_i$;
2) вибіркова дисперсія $D_в$ =$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 n_i$=$\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 \omega_i$ або

   $D_в$ =$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i - \overline{(x_в)}^2$=$\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \omega_i$– $\overline{(x_в)}^2$;
3) вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;
4) вибіркові виправлена дисперсія S^2= $\frac{n}{n-1} \cdot D_в$ та виправлене середнє квадратичне відхилення S=$\sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в}$.

Основні числові характеристики інтервального статистичного ряду:

1) вибіркове середнє $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} n_i$=$\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i} \omega_i$, де $\overline{x_i} = \frac{x_{i+1}+x_i}{2}$;
2) вибіркова медіана M_e^* - це точка частинного інтервалу (медіанного інтервалу) такого, що $F^*(x_m) < 0,5$, а $F^*(x_{m+1}) \geq 0,5$,

   $M_e^* = x_m + \frac{0,5-F^*(x_m)}{F^*(x_{m+1})-F^*(x_m)} \cdot h$;
3) вибіркова мода M_o^* - це точка частинного інтервалу (модального інтервалу), якому відповідає найбільше значення частоти n_m,

   $M_o^* = x_m + \frac{n_m-n_{m-1}}{2n_m-n_{m-1}-n_{m+1}} \cdot h$;
4) вибіркова дисперсія $D_в$ =$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x_i} - \overline{x_в})^2 n_i$=$\sum_{i=1}^{k}(\overline{x_i} - \overline{x_в})^2 \omega_i$ або

   $D_в$ =$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 n_i - \overline{(x_в)}^2$=$\sum_{i=1}^{k} \overline{x_i}^2 \omega_i$– $\overline{(x_в)}^2$;
5) вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_в = \sqrt{D_в}$;
6) вибіркові виправлена дисперсія S^2= $\frac{n}{n-1} \cdot D_в$ та виправлене середнє квадратичне відхилення S=$\sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_в}$.

Незсунені, ефективні та спроможні оцінки

У багатьох задачах вигляд теоретичного розподілу генеральної сукупності може вважатися відомим. Природно, виникає задача оцінки параметрів, якими характеризується розподіл. Наприклад, a, σ - для нормального закону розподілу, $\boldsymbol{\lambda}$ - для розподілу Пуассона.

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - вибірка з генеральної сукупності X з функцією розподілу $F(x,\theta)$, функціональна форма якого відома, але залежить від невідомого параметру θ. Задача оцінювання полягає у тому, щоб, використовуючи статистичну інформацію, зробити статистичні висновки про реальне значення параметру θ.

Нехай θ^* - статистина оцінка невідомого параметру теоретичного розподілу $F(x,\theta)$. Припустимо, що за вибіркою знайдена оцінка θ_1^*. При повторному експерименті з тим же об'ємом вибірки отримана нова оцінка θ_2^*. Повторюючи дослід багаторазово, отримаємо числа $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_k^*$.

Якщо оцінка θ^* дає наближене значення θ з надлишком, то $M\theta^* > \theta$, якщо з нестачею, то - $M\theta^* < \theta$. Природно вимагати, щоб $M\theta^* = \theta$.

Оцінка θ^* називається *незсуненою* невідомого параметру θ, якщо $M\theta^* = \theta$. В протилежному випадку оцінка θ^* називається *зсуненою.*

Незсунену оцінку $\hat{\theta}$ називається *ефективною*, якщо вона має найменшу можливу дисперсію серед усіх інших незсунених оцінок параметру θ.

Оцінка θ^* називається *спроможною*, якщо для довільного ε> 0

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

Отже, "точність" оцінки збільшується при збільшенні об'єму вибірки.

Точкові оцінки

Точкова оцінка θ^* невідомого параметру θ - це певне число, яке використовується замість θ.

Теорема. Вибіркове середнє $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ вибірки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ є незсуненою і спроможною оцінкою математичного сподівання $a = MX$.

Доведення. 1) Оскільки випадкові величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ розподілені однаково та $MX_i = a$, то $MX = \frac{1}{n} M \sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} \cdot na = a$, тобто незсунена.

2) За законом великих чисел $\lim_{n\to\infty} P(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| > \varepsilon) = 0$, що доводить спроможність.

Теорема. Вибіркова дисперсія $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ є зсуненою і спроможною оцінкою дисперсії $DX = \sigma^2$. Величина $S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_в$ буде незсуненою та спроможною оцінкою σ^2.

Доведення. Введемо випадкові величини $Y_i = X_i - a$. Тоді $\bar{Y} = \bar{X} - a$, $MY_i = 0, DY_i = MY_i^2 = \sigma^2$, $MD_в = \frac{1}{n} M\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} M\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 = \frac{1}{n} M\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{2}{n} M\sum_{i=1}^{n}(Y_i \bar{Y}) + M\bar{Y}^2 = \frac{1}{n} \cdot n\sigma^2 - 2M\bar{Y}^2 + M\bar{Y}^2 = \sigma^2 - M\bar{Y}^2 = \sigma^2 - M(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i)^2 = \sigma^2 - \frac{1}{n^2} M\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \sum_{i \neq j} Y_i Y_j\right) = \sigma^2 - \frac{1}{n^2}(n\sigma^2 - 0) = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n}$.

$M\,S^2 = \frac{n}{n-1} \cdot \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} = \sigma^2$.

Спроможність випливає з закона великих чисел.

Інтервальне оцінювання

При точковому оцінюванні визначається єдине значення оцінки, яке береться за наближене значення параметра θ, що оцінюється.

Довірчим (надійним) інтервалом для невідомого параметра θ розподілу ознаки генеральної сукупності називається інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, $\delta > 0$, який містить в собі невідомий параметр θ з ймовірністю γ, тобто $\gamma = P\{|\theta^* - \theta| < \delta\}$, γ називається надійністю, число $\alpha = 1 - \gamma$ – рівнем значущості, а δ – точністю оцінки. Зазвичай γ=0,9;0,95;0,99.

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$ та відоме σ, то $a \in (\overline{x_в} - c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x_в} + c_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, де $\Phi(c_\gamma) = \gamma/2$, $\Phi(x)$ – функція Лапласа (додаток).

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$ та невідоме σ, то $a \in (\overline{x_в} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{x_в} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}})$, де t_γ –коефіцієнт Стьюдента (додаток).

Якщо ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу $N(a; \sigma)$, то $\sigma \in (S(1-q); S(1+q))$, де q – коефіцієнт χ-розподілу (додаток).

Запитання для самоперевірки

1.Як виглядає варіаційний ряд? Як він геометрично зображується?

2. Які числові характеристики описують варіаційний ряд?
3. Що розуміємо під поняттями незсуненої, ефективної та спроможної оцінок?
4. Які точкові оцінки є незсуненими та спроможними?
5. У чому полягає інтервальне оцінювання?
6. Запишіть інтервальну оцінку вибіркового середнього і вибіркової дисперсії для нормального закону розподілу.

10. Статистичні критерії, гіпотези, рівень значущості

Критерій перевірки гіпотези H_0 – це правило, за яким приймається рішення залишити чи відхилити H_0. Статистика критерію – це випадкова величина K, що використовується для перевірки гіпотези H_0. Емпіричним значенням статистики $K_в$ називається значення статистики K, що обчислюється за вибіркою.

Множина значень статистики K розбивається критичними точками на область прийняття гіпотези H_0 та критичну область критерію (множину значень K, при яких H_0 відхиляється).

Алгоритм застосування критерію згоди Пірсона.

1) Обчислити теоретичні частоти n_i' гіпотетичного закону розподілу ознаки генеральної сукупності: $n_i'=n(\Phi_0(z_{i+1})- \Phi_0(z_i))$, де $z_{i+1}=(x_{i+1}-\overline{x_в})/\sigma_в$; $z_i=(x_i-\overline{x_в})/\sigma_в$.

2) Обчислити емпіричне значення статистики критерію Пірсона

$$\chi_в^2=\sum_{i=1}^{k}(n_i - n_i')^2/n_i'.$$

3)За таблицею критичних точок розподілу χ^2 при заданому рівні значущості α та $s=k$-1-r кількості ступенів свободи (r – кількість параметрів гіпотетичного розподілу, які оцінюються за вибіркою) знайти критичну точку $\chi_{кр}^2(\alpha; s)$.

4)Якщо $\chi_в^2< \chi_{кр}^2(\alpha; s)$, то гіпотеза H_0 не відхиляється (спостереження узгоджуються з гіпотетичним розподілом); якщо $\chi_в^2> \chi_{кр}^2(\alpha; s)$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Алгоритм застосування критерію згоди Колмогорова.

1)Побудувати емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ за вибіркою об’єму n та знайти $F^*(\overline{x_i})$.

2)Обчислити значення гіпотетичної функції розподілу

$$F(\overline{x_i})=0{,}5+\Phi_0\left(\frac{\overline{x_i}-\overline{x_{\text{в}}}}{\sigma_{\text{в}}}\right).$$

3)Обчислити емпіричне значення статистики Колмогорова

$$D^*=\max|\,F^*(\overline{x_i})-F(\overline{x_i})|.$$

4)За таблицею критичних точок розподілу Колмлгорова при заданому рівні значущості α знати критичну точку $D_{\text{кр}}(\alpha;\,n)$.

5)Якщо $D^*< D_{\text{кр}}(\alpha;\,n)$, то гіпотеза H_0 не відхиляється; якщо $D^*> D_{\text{кр}}(\alpha;\,n)$, то гіпотеза H_0 відхиляється.

Лінійна кореляція.

Якщо з генеральної сукупності (X,Y) добута вибірка об'єму n, то вибіркові рівняння прямих ліній регресії Y на X та X на Y записуються наступним чином $\overline{y_x}=\overline{y}+r^*\frac{\sigma_y^*}{\sigma_x^*}(x-\overline{x})$, $\overline{x_y}=\overline{x}+r^*\frac{\sigma_x^*}{\sigma_y^*}(y-\overline{y})$,

де $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x^*, σ_y^* - вибіркові середні та вибіркові середні квадратичні відхилення; r^* - вибірковий коефіцієнт кореляції, які обчислюються за формулами $\overline{x}=\frac{\sum n_x x}{n}$, $\overline{y}=\frac{\sum n_y y}{n}$, $\sigma_x^*=\sqrt{\frac{\sum n_x x^2}{n}-\overline{x}^2}$,

$\sigma_y^*=\sqrt{\frac{\sum n_y y^2}{n}-\overline{y}^2}$, $r^*=\frac{\sum n_{xy}xy-n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^*\sigma_y^*}$, x, y, (x,y) – варіанти величин X, Y, (X,Y); n_x, n_y, n_{xy} - відповідно частоти варіант, для яких виконуються рівності $\sum n_x=\sum n_y=\sum n_{xy}=n$.

Рівняння прямих ліній регресії відображають залежність умовних математичних сподівань від заданих значень x та y. Для коефіцієнта кореляції має місце нерівність $|r|\le 1$. Якщо величини X та Y незалежні, то $r=0$. Якщо $r=0$, то величини X та Y називаються некорельованими, але вони можуть бути залежними у випадках, коли їх розподіл відрізняється від нормального. При лінійній функціональній залежності X та Y $r=1$ або $r=-1$. Тому вважають, що цей коефіцієнт при $|r|<1$ характеризує ступінь тісноти лінійної ймовірнісної залежності між випадковими величинами X та Y.

Надалі розглядатимуться вибірки з рівновіддаленими варіантами, а двомірний статистичний розподіл вибірки задається у вигляді кореляційної таблиці:

$Y \backslash X$	…	x	$x+h_1$	…	n_y
…					
y		n_{xy}			n_y
$y+h_2$					
…					
n_x		n_x			n

У першому рядку та у першому стовпчику таблиці відповідно містяться варіаційні ряди величин *X* та *Y* , тобто зростаючі послідовності рівновіддалених варіант x та y. Останні рядок та стовпчик вказують відповідно частоти n_x, n_y варіант x та y. У правому нижньому куті вказано об'єм вибірки $n=\sum n_x=\sum n_y=\sum n_{xy}$. Решта клітинок таблиці містить частоти n_{xy} варіант (x,y).

Щоб уникнути обчислень з великими числами у варіантах, доцільно скористатися умовними варіантами $u=\frac{x-C_1}{h_1}$, $v=\frac{y-C_2}{h_2}$, де C_1, C_2 – "фіктивні нулі" (або нові початки відліку) відповідно варіант x та y; h_1, h_2 - кроки варіант x та y. Надалі будемо приймати значення C_1, C_2, що відповідають найбільшому значенню частоти n_{xy} або знаходяться в околі цієї точки. Формули для $\overline{u}$, $\overline{v}$, σ_u^*, σ_v^*, r^* набувають вигляду

$$\overline{u}=\frac{\sum n_u u}{n}, \quad \overline{v}=\frac{\sum n_v v}{n}, \quad \sigma_u^*=\sqrt{\frac{\sum n_u u^2}{n}-\overline{u}^2}, \quad \sigma_v^*=\sqrt{\frac{\sum n_v v^2}{n}-\overline{v}^2},$$

$$r^*=\frac{\sum n_{uv}uv-n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u^*\sigma_v^*}.$$

Обчисливши ці величини, можна визначити величини, що входять до рівнянь регресії за формулами:

$$\overline{x}=h_1\overline{u}+C_1, \overline{y}=h_2\overline{v}+C_2, \sigma_x^*=h_1\sigma_u^*, \sigma_y^*=h_2\sigma_v^*.$$

Оскільки r^* - вибірковий коефіцієнт кореляції, то виникає задача оцінки наскільки він відображає корельованість величин *X* та *Y* генеральної сукупності (*X*,*Y*), тобто задача перевірки нульової гіпотези H_0 про рівність нулю коефіцієнта кореляції.

Ця задача розв'язується за наступним правилом. Для того, щоб для заданого рівня значущості α перевірити гіпотезу H_0 при конкуруючій гіпотезі H_1: $r\neq 0$, необхідно обчислити значення критерія $T=\frac{r^*\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^{*2}}}$. По значенню α та кількості ступенів свободи $k=n-2$ знайти в таблиці критичних точок розподілу Стьюдента критичну точку $t_{кр}(\alpha, k)$ двобічної критичної області. Якщо $|T| > t_{кр}$, то гіпотезу H_0 відкидають; якщо $|T| < t_{кр}$, то гіпотезу H_0 приймають.

У випадку прийняття гіпотези H_1 (тобто кореляція між X та Y вважається суттєвою) наближений довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r має вигляд

$$r^* - u_\alpha \frac{1-r^{*2}}{\sqrt{n}} \le r \le r^* + u_\alpha \frac{1-r^{*2}}{\sqrt{n}},$$

де u_α - критична границя для нормального розподілу, що відповідає рівню значущості α ($\frac{1-\alpha}{2} = \Phi_0(u_\alpha)$, $\Phi_0(x)$ - функція Лапласа). При $n \ge 50$ можна прийняти $u_\alpha = 3$.

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає зміст критерію згоди Пірсона?
2. У чому полягає зміст критерію згоди Колмогорова?
3. На яке основне питання відповідає кореляційний аналіз вибірок випадкових величин?
4. Про що говорять числові значення коефіцієнта кореляції?

Список літератури

1. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / Н. Д. Федоренко, О. І. Баліна, І. С. Безклубенко. – К.: КНУБА, 2007. – 104 с.
2. Курс теорії ймовірностей: навч. посіб. / Б. В. Гнєденко— К.: ВПЦ Київський університет, 2010. — 464 с.
3. Теорія ймовірностей, математична статистика та імовірнісні процеси : навч. посіб. / Ю. М. Слюсарчук, Й. Я. Хром'як, Л. Л. Джавала, В. М. Цимбал. – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2015. – 364 с.
4. Теорія ймовірностей та математична статистика: підручник. / П. С. Сеньо. — 2-ге вид. — Київ: Знання, 2007. — 556 с.
5. Теорія ймовірностей та математична статистика: навч. посіб. / В. В. Барковський. — 5-те видання. — Київ: Центр учбової літератури, 2010. — 424 с.
6. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. / В.Е. Гмурман. – М.: Высш.шк., 1999. – 479 с.

Навчально-методичне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Конспект лекцій

для студентів спеціальності 125«Кібербезпека», спеціальності 123 «Комп`ютерна інженерія»

Укладач **ПОЛТОРАЧЕНКО Наталія Іванівна**