

Розділ 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Практичне заняття № 2.1

РІВНЯННЯ ЛІНІЇ НА ПЛОЩИНІ

1. Рівняння лінії в декартовій системі координат на площині.
2. Перетин двох ліній.
3. Полярна система координат.
4. Графік функції в полярній системі координат.

1. Рівняння лінії в декартовій системі координат на площині.

Рівнянням лінії в заданій системі координат називається таке рівняння $F(x, y) = 0$, якому задовольняють координати кожної точки лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії.

Задача 1. Чи належать точки $A(-1; 1)$ і $B(2; 3)$ лінії $2x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$?

Розв'язання:

Підставимо координати точок $A(-1; 1)$ і $B(2; 3)$ в дане рівняння:

$$A(-1; 1): \quad 2 \cdot (-1)^2 + 1^2 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \equiv 0$$

$$B(2; 3): \quad 2 \cdot 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 28 \neq 0$$

Отже, координати точки A задовольняють рівнянню, а точки B – ні.

Відповідь: Точка A належить лінії, точка B – ні.

Задача 2. Скласти рівняння лінії, сума квадратів відстаней від кожної точки якої до точок $A(-1; 0)$ і $B(1; 0)$ дорівнює 4.

Розв'язання:

Нехай точка $M(x; y)$ лежить на лінії. Тоді за умовою задачі маємо

$$AM^2 + BM^2 = 4.$$

Оскільки $AM = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$, а $BM = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, то

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Отже рівняння лінії має вигляд $x^2 + y^2 = 1$.

Відповідь: $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 3. Який геометричний образ описується рівнянням $x^2 - y^2 = 0$?

Розв'язання:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}.$$

Відповідь: Лінія розпадається на дві прямі $y = x$ і $y = -x$ — бісектриси координатних кутів.

Задача 4. Чи лежать точки $A(-2; 1)$ і $B(4; 0)$ на лінії $y^3 - x^2 + 2xy + 7 = 0$?

Відповідь: Точка A лежить на лінії, точка B — ні.

Задача 5. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої вдвічі далі від точки $A(1; 2)$, ніж від точки $B(-2; 0)$.

Відповідь: $3x^2 + 3y^2 + 18x + 4y + 11 = 0$.

2. Перетин двох ліній.

Точки перетину двох ліній l_1 і l_2 , що описуються рівняннями $F_1(x, y) = 0$ і $F_2(x, y) = 0$ визначаються як розв'язок системи:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

Задача 6. Знайти точку перетину ліній $x^2 + y^2 = 1$ та $(x - 1)^2 + y^2 = 2$.

Розв'язання:

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Віднімемо від першого рівняння друге, отримаємо $2x = 0$, отже $x = 0$.

Підставимо $x = 0$ в перше рівняння, звідки $y = \pm 1$. Отримаємо дві точки перетину $A(0; 1)$ і $B(0; -1)$.

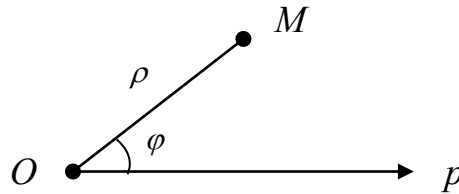
Відповідь: $A(0; 1)$, $B(0; -1)$.

Задача 7. Знайти точку перетину ліній $5x - 2y - 4 = 0$ і $2x + y - 7 = 0$.

Відповідь: $A(2; 3)$.

3. Полярна система координат.

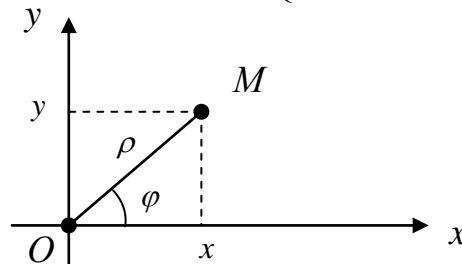
Полярною системою координат називається полюс O і полярна вісь Op .



Положення точки M на площині визначається двома координатами $(\rho; \varphi)$, де ρ – відстань від початку координат, φ – кут між вектором \overline{OM} і полярною віссю.

Декартові і полярні координати пов'язані співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases}$$



Задача 8. Переписати в полярній системі координат рівняння кола $x^2 + y^2 = 2$ та лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$, знайти точку їх перетину та побудувати її в полярній системі координат.

Розв'язання:

Розглянемо коло $x^2 + y^2 = 2$. Перейдемо до полярної системи координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow (\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2 = 2 \Rightarrow \rho^2 = 2 \Rightarrow \rho = \sqrt{2}.$$

Аналогічно для лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ маємо:

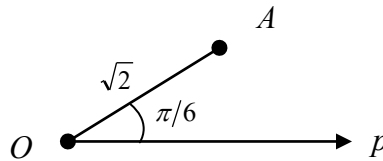
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow ((\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi)^2)^2 = 4((\rho \cos \varphi)^2 - (\rho \sin \varphi)^2) \Rightarrow$$

$$\rho^4 = 4\rho^2 \cos 2\varphi \Rightarrow \rho^2 = 4 \cos 2\varphi.$$

Знайдемо точку їх перетину з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \rho^2 = 4 \cos 2\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \cos 2\varphi = 1/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{2} \\ \varphi = \pi/6 \end{cases} \Rightarrow A(\sqrt{2}; \pi/6).$$

Побудуємо точку A в полярній системі координат. Для цього проведемо промінь під кутом $\varphi = \pi/6$ від полярної осі і відкладемо на ньому точку A на відстані $\rho = \sqrt{2}$ від полюса.



Відповідь: $\rho = \sqrt{2}$, $\rho^2 = 4 \cos 2\varphi$, $A(\sqrt{2}; \pi/6)$.

Задача 9. У полярній системі координат побудувати точки $A(3; \pi/4)$, $B(2; 3\pi/2)$, $C(4; 0)$, $D(4; \pi)$, $E(0; 2\pi)$, $F(1; 3\pi/2)$.

Задача 10. Знайти координати точок $M(6; \pi/2)$ та $N(\sqrt{2}; \pi/4)$ в прямокутній декартовій системі координат.

Відповідь: $M_1(0; 6)$, $N_1(1; 1)$.

Задача 11. Знайти відстань між точками $A(2; \pi/12)$ та $B(1; 5\pi/12)$.

Відповідь: $\sqrt{3}$.

Задача 12. Переписати рівняння кривої $x^2 + y - 1 = 0$ в полярній системі координат.

Відповідь: $\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho \sin \varphi - 1 = 0$.

4. Графік функції в полярній системі координат.

Для побудови графіка функції $\rho = \rho(\varphi)$ в полярній системі координат треба:

- 1) знайти область визначення і область значень даної функції;
- 2) перебрати значення аргументу φ з області визначення з деяким кроком і знайти відповідні їм значення функції ρ ;
- 3) побудувати графік функції за точками $(\rho; \varphi)$.

Задача 13. Побудувати графік лінії $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$ в полярній системі координат.

Розв'язання:

Спочатку знайдемо область визначення і область значень функції $\rho = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$:

1) Область визначення $D(\rho)$ визначимо з системи:
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ \cos 2\varphi \geq 0 \end{cases}$$

$$\cos 2\varphi \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Знайдемо ті розв'язки, що відповідають умові $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$k = 0: \quad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$k = 1: \quad -\frac{\pi}{4} + \pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Отже $D(\rho) = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

2) Область значень $E(\rho)$ визначимо з умови: $0 \leq \cos 2\varphi \leq 1$.

$$0 \leq \sqrt{\cos 2\varphi} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq 2\sqrt{\cos 2\varphi} \leq 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \rho \leq 2.$$

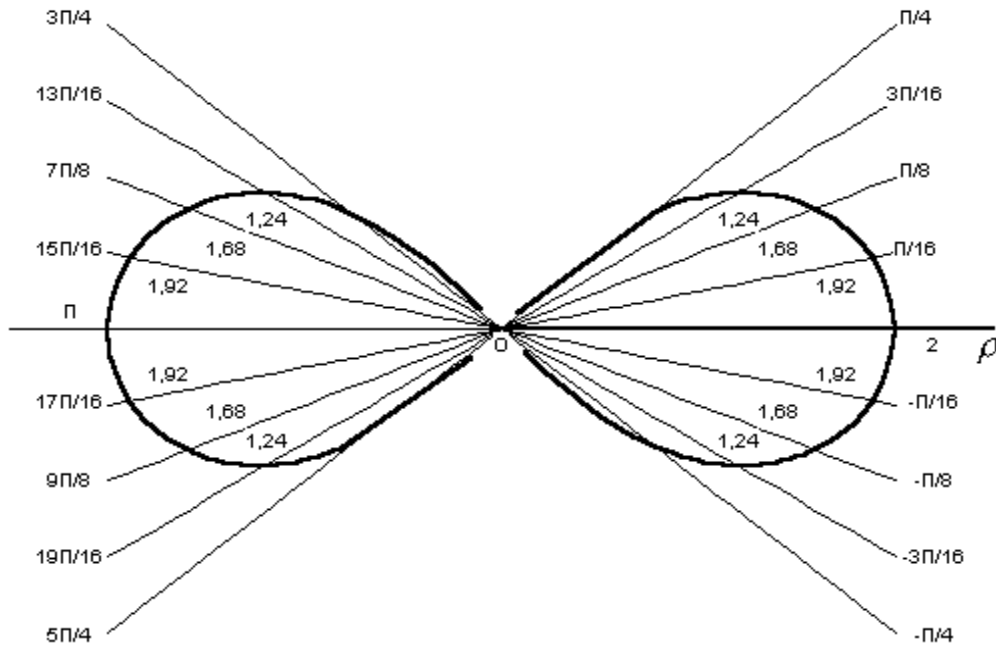
Отримали $E(\rho) = [0; 2]$.

Складемо таблицю відповідності значень аргумента φ функції ρ з кроком $\frac{\pi}{16}$ (для обчислення значень косинусів кутів скористаємось таблицями Брадіса):

| | | | | | | | | | |
|-----------|------------------|--------------------|------------------|-------------------|---|------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| φ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{3\pi}{16}$ | $-\frac{\pi}{8}$ | $-\frac{\pi}{16}$ | 0 | $\frac{\pi}{16}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{3\pi}{16}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| ρ | 0 | 1,24 | 1,68 | 1,92 | 2 | 1,92 | 1,68 | 1,24 | 0 |

| | | | | | | | | | |
|-----------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|-------|--------------------|------------------|--------------------|------------------|
| φ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{13\pi}{16}$ | $\frac{7\pi}{8}$ | $\frac{15\pi}{16}$ | π | $\frac{17\pi}{16}$ | $\frac{9\pi}{8}$ | $\frac{19\pi}{16}$ | $\frac{5\pi}{4}$ |
| ρ | 0 | 1,24 | 1,68 | 1,92 | 2 | 1,92 | 1,68 | 1,24 | 0 |

Побудуємо криву в полярній системі координат:



Задача 14. Побудувати лінії $\rho = 1$, $\rho = 5$, $\varphi = \pi/3$, $\varphi = 5\pi/3$.

Задача 15. Побудувати лінії $\rho = \varphi$ (спіраль Архимеда), $\rho = \sin 2\varphi$ (двопелюсткова роза), $\rho = 1 + 2 \cos \varphi$ (равлик Паскаля).

Домашнє завдання

Задача 1. Скласти в декартовій системі координат рівняння лінії, кожна точка якої рівновіддалена від точки $A(3;0)$ і прямої $x + 3 = 0$.

Задача 2. Знайти точку перетину ліній $x^2 + y^2 = 1$ і $y = 5 - x$.

Задача 3. Записати полярне рівняння прямої, що проходить через початок координат під кутом 45° до осі абсцис.

Задача 4. У полярній системі координат побудувати точки $A(1; \pi/4)$, $B(0; -\pi/2)$, $C(-2; 0)$ та знайти їх декартові координати.

Задача 5. Записати рівняння кривої $x^2 - y^2 + 2x - 3 = 0$ в полярній системі координат.

Задача 6. У полярній системі координат побудувати лінії $\rho = 2$, $\varphi = 3\pi/4$, $\rho = 2 \sin 3\varphi$.